دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

فرآیندهای تصادفی در بیوانفورماتیک

نیم‌سال دوم ۰۱-۰۰

استاد: محمدحسین رهبان
گردآورندگان: محمدعلی صدرایی جواهری و امیرحسین عاملی
بررسی و بازبینی: مهران حسین زاده

پاسخ تمرین دوم | فرایندهای تصادفی ایستا و ارگادیک | مهلت ارسال: ۲۴ فروردین

۱. درست نادرست (۱۰ نمره)

درستی و نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

(آ) دنباله نمونه‌های i.i.d. از یک متغیر تصادفی، تشکیل یک فرآیند SSS می‌دهند.
درست است. طبق تعریف i.i.d. می‌دانیم که هر نقطه از زمان مستقل از دیگری است و همچنین تمام نقاط ویژگی آماری یکسانی دارند پس این فرآیند یک فرآیند SSS است.

(ب) هر فرآیند تصادفی WSS یک فرآیند تصادفی SSS نیز می‌باشد.
نادرست است. برعکس این موضوع صحیح است یعنی هر فرآیند SSS یک فرآیند تصادفی WSS نیز می‌باشد.

(ج) برای تساوی R_X و C_X یک فرآیند WSS صفر بودن میانگین شرط لازم و کافی است.
درست است. چون برای فرآیند WSS می‌دانیم که:

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \eta^2$$

در عبارت جبری بالا اگر و تنها اگر $\eta = 0$ باشد تساوی برقرار است.

(د) یک فرآیند می‌تواند mean-ergodic باشد ولی WSS نباشد.
نادرست است. چرا که فرآیندهای mean-ergodic زیر مجموعه‌ای از فرآیندهای WSS هستند.

(ه) حاصل جمع دو فرآیند WSS همواره یک فرآیند WSS است.
نادرست است. برای اتوکورلیشن جمع دو فرآیند فرضی X و Y داریم:

$$\mathbb{E}[(X(t)+Y(t))(X(S)+Y(S))]$$
$$= \mathbb{E}[X(t)X(S)] + \mathbb{E}[Y(t)Y(S)] + \mathbb{E}[X(t)X(S)] + \mathbb{E}[X(s)X(t)]$$
$$= R_X(t-s) + R_Y(t-s) + R_{XY}(t,s) + 2R_{XY}(s,t)$$

که الزاما R_{XY} تابعی از اختلاف زمان نیست.

۲. فرایند ایستا (۱۰ نمره)

باتوجه به اینکه فرایند بالا یک فرایند ایستا با میانگین صفر می‌باشد داریم:

$$\mathbb{E}\left[X\left(t_i\right)\right] = 0$$
$$R_X\left(t_i, t_k\right) = \mathbb{E}\left[X\left(t_i\right)X\left(t_k\right)\right] = R_X\left(t_i - t_k\right) = R_X\left((i-k)\,\frac{T}{2}\right)$$

بنابراین برای میانگین داریم:

$$\mathbb{E}\left[\hat{\mu}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X\left(t_i\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[X\left(t_i\right)\right] = 0$$

و برای واریانس:

$$\begin{aligned} Var\left(\hat{\mu}_n\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}\left[\hat{\mu}_n\right]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\mu}_n^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X\left(t_i\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X\left(t_k\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[X\left(t_i\right)X\left(t_k\right)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_X\left(\left(i-k\right)\frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

طبق تابع autocorrelation داده شده داریم:

$$Var\left(\hat{\mu}_n\right) = \frac{1}{n^2}\left(2n-1\right)$$

۳. فرایندهای Mean Ergodic (۲۵ نمره)

(آ) برای فرایند داده شده داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] &= \mathbb{E}\left[X_1\left(t\right)\right] + \mathbb{E}\left[cX_2\left(t\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_1\left(t\right)\right] + \mathbb{E}\left[c\right]\mathbb{E}\left[X_2\left(t\right)\right] \\ &= \eta_1 + 0.5\eta_2 \end{aligned}$$

این در حالی است که برای sample path ای که c=0 می‌باشد $X\left(t\right) = X_1\left(t\right)$ می‌باشد که در نتیجه وقتی $T \to \infty$ میانگین بدست آمده برابر $\eta_T \to \eta_1$ خواهد بود. بنابراین فرایند داده شده Mean Ergodic نمی‌باشد.

(ب) شرط لازم Mean Ergodic بودن ایستایی فرایند می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = \mathbb{E}\left[a\right]\cos\left(\omega t\right) + \mathbb{E}\left[b\right]\sin\left(\omega t\right) + \mathbb{E}\left[c\right] = c$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right] = \;& \mathbb{E}\left[a^2\right]\cos\left(\omega t_1\right)\cos\left(\omega t_2\right) + c^2 \\ & + \mathbb{E}\left[a\right]\mathbb{E}\left[b\right]\cos\left(\omega t_1\right)\sin\left(\omega t_2\right) + \mathbb{E}\left[a\right]\cos\left(\omega t_1\right)c \\ & + \mathbb{E}\left[a\right]\mathbb{E}\left[b\right]\sin\left(\omega t_1\right)\cos\left(\omega t_2\right) + \mathbb{E}\left[b\right]\sin\left(\omega t_1\right)c \\ & + \mathbb{E}\left[b^2\right]\sin\left(\omega t_1\right)\sin\left(\omega t_2\right) + \mathbb{E}\left[a\right]\cos\left(\omega t_2\right)c \\ & + \mathbb{E}\left[b\right]\sin\left(\omega t_2\right)c \\ = \;& \mathbb{E}\left[a^2\right]\cos\left(\omega t_1\right)\cos\left(\omega t_2\right) + \mathbb{E}\left[b^2\right]\sin\left(\omega t_1\right)\sin\left(\omega t_2\right) + c^2 \\ = \;& \sigma^2\cos\left(\omega\left(t_1 - t_2\right)\right) + c^2 \end{aligned}$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد. حال طبق قضیه Slutsky داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C\left(\tau\right)d\tau &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2\cos\left(\omega\tau\right)d\tau \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{\sigma^2}{\omega\tau}\sin\left(\omega\tau\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین فرایند Mean Ergodic می‌باشد.

(ج) مشابه بخش قبل ابتدا WSS بودن یا نبودن فرایند را بررسی می‌کنیم:

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = A\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t+\phi\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\omega t+\theta\right)d\theta = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right] &= A^2\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)\cos\left(\omega t_2+\phi\right)\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2\phi\right)\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\left[\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)\right]+\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2\phi\right)\right]\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد. حال طبق قضیه Slutsky داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C\left(\tau\right)d\tau &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\tau\right)d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2\omega\tau}\sin\left(\omega\tau\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند Mean Ergodic می‌باشد.

۴. فرایند WSS و SSS (۱۰ نمره)

باید دو شرط WSS بودن را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Z\left[Z\left(t\right)\right] &= \mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_{Z|Y}\left[Z\left(t\right)|Y\left(t\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_{X|Y}\left[X\left(t+Y\left(t\right)\right)|Y\left(t\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_Y\left[\mu_X\right] = \mu_X = const
\end{aligned}$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
R_Z\left(t_1,t_2\right) &= \mathbb{E}_{Z(t_1),Z(t_2)}\left[Z\left(t_1\right)Z\left(t_2\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[\mathbb{E}_{Z(t_1),Z(t_2)|Y(t_1),Y(t_2)}\left[Z\left(t_1\right)Z\left(t_2\right)|Y\left(t_1\right)Y\left(t_2\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[\mathbb{E}_{X(t_1),X(t_2)|Y(t_1),Y(t_2)}\left[X\left(t_1+Y\left(t_1\right)\right)X\left(t_2+Y\left(t_2\right)\right)|Y\left(t_1\right)Y\left(t_2\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[R_X\left(t_1-t_2+Y\left(t_1\right)-Y\left(t_2\right)\right)\right] \\
&= \int R_X\left(t_1-t_2+y_1-y_2\right)f\left(y_1,y_2;t_1,t_2\right)dy_1dy_2 \\
&= \int R_X\left(t_1-t_2+y_1-y_2\right)f\left(y_1,y_2;t_1-t_2\right)dy_1dy_2 \\
&= R_Z\left(t_1-t_2\right)
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند بالا یک فرایند WSS می‌باشد.

۵. محاسبه آماره‌های معروف در فرآیند WSS (۱۶ نمره)

فرآیند تصادفی $X(t)$ یک فرآیند تصادفی حقیقی و WSS است. این فرآیند دارای میانگین ۴ و اتوکواریانس زیر است.

$$C_X(\tau) = 2 \times exp(\frac{-|\tau|}{3}) + 2$$

دو متغیر تصادفی Y و Z را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = X(5) \qquad\qquad Z = X(8)$$

(آ) آماره‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\mathbb{E}[Y] \quad \mathbb{E}[Z] \quad \mathbb{E}[Y^2] \quad \mathbb{E}[Z^2] \quad Var(Y) \quad Var(Z)$$

$$\mathbb{E}[YZ] \quad \mathbb{E}[(Y+Z)^2] \quad Var(Y+Z) \quad Var(Y-Z)$$

طبق فرض‌های مساله سه پارامتر زیر را در مورد فرآیند X می‌دانیم.

$$\begin{aligned}
&\eta(t) = \eta_X = 4 \\
&C_X(\tau) = 2 \times exp(\frac{-|\tau|}{3}) + 2 \\
&R_X(\tau) = C_X(\tau) + \eta_X^2 = 2 \times exp(\frac{-|\tau|}{3}) + 18
\end{aligned}$$

بر این اساس داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[Z] = \eta_X = 4 \\
\mathbb{E}[Y^2] &= \mathbb{E}[Z^2] = R_{XX}(a,a) = R_X(a-a) = R_X(0) = 2 + 18 = 20 \\
Var(Y) &= Var(Z) = C_X(0) = 2 + 2 = 4 \\
\mathbb{E}[YZ] &= \mathbb{E}[X(5)X(8)] = R_{XX}(5,8) = R_X(8-5) = R_X(3) = 2e^{-1} + 18 \\
\mathbb{E}[(Y+Z)^2] &= \mathbb{E}[Y^2] + \mathbb{E}[Z^2] + 2\mathbb{E}[YZ] = 20 + 20 + 2(2e^{-1} + 18) = 76 + 4e^{-1} \\
Var(Y+Z) &= Var(Y) + Var(Z) + 2Cov(Y,Z) = 4 + 4 + 2C_X(8-5) \\
&= 8 + 2(2e^{-1} + 2) = 12 + 4e^{-1} \\
Var(Y-Z) &= Var(Y) + Var(Z) - 2Cov(Y,Z) = 4 + 4 - 2C_X(8-5) \\
&= 8 - 2(2e^{-1} + 2) = 4 - 4e^{-1}
\end{aligned}$$

(ب) آیا می‌توان با استفاده از اطلاعات مساله $\mathbb{E}[Z^3]$ را حساب کرد؟ اگر بله آن را حساب کنید و گرنه بگویید چرا نمی‌توان این کار را انجام داد.

خیر ـ در حالت عمومی نمی‌توان آن را حساب کرد. دقت شود که یک فرآیند WSS با استفاده از میانگین و اتوکواریانس به طور یکتا قابل شناسایی نیست و ما باید اطلاعات بیشتری از فرآیندمان داشته باشیم تا امید ریاضی‌های مرتبه‌های بالاتر را حساب کنیم.

۶. ویژگی‌های اتوکورلیشن فرآیند WSS (۱۴ نمره)

براساس فرآیند تصادفی WSS در دامنه حقیقی به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) اثبات کنید که که اتوکورلیشن این فرآیند زوج است.
در فضای حقیقی می‌دانیم که اتوکورلیشن به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R_X(t-s) = R_{XX}(t,s) = \mathbb{E}[X(t)X(s)]$$

حال براساس این تعریف زوج بودن این تابع بر اساس خاصیت جابه‌جایی ضرب، قابل اثبات است یعنی:

$$\begin{aligned} R_X(t-s) &= R_{XX}(t,s) \\ &= \mathbb{E}[X(t)X(s)] \\ &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\ &= R_{XX}(s,t) \\ &= R_X(s-t) \end{aligned}$$

(ب) اثبات کنید که تابع اتوکورلیشن دارای یک ماکزیمم در نقطه صفر است. یعنی به عبارت ریاضی:

$$\forall\tau : R_X(0) \geqslant R_X(\tau)$$

(راهنمایی: ابتدا برای اتوکورلیشن یک کران بالا بر اساس نامساوی کوشی-شوارتز پیدا کنید سپس نشان دهید که $R_X(0)$ برابر با این کران است.)
براساس نامساوی کوشی شوارتز در احتمالات می‌دانیم که:

$$|\mathbb{E}[YZ]|^2 \leqslant \mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[Z^2]$$

اگر این عبارت را برای فرآیند تصادفی X(t) بنویسیم به عبارت زیر می‌رسیم.

$$|\mathbb{E}[X(t)X(s)]|^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2(t)]\mathbb{E}[X^2(s)]$$

دقت شود که امید ریاضی مرتبه دوم در فرآیند WSS مستقل از زمان می‌باشد و داریم:

$$\mathbb{E}[X^2(t)] = \mathbb{E}[X^2(s)] = R_X(s-s) = R_X(0)$$

پس با این اوصاف می‌توان نامساوی را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$|R_X(t-s)|^2 \leqslant R_X^2(0)$$

با جذر گرفتن از دو طرف و جایگذاری $\tau = t-s$ به حکم مساله می‌رسیم یعنی:

$$R_X(\tau) \leqslant R_X(0)$$

(ج) بر اساس این دو خاصیت با ذکر دلیل بیان کنید که کدام یک از توابع نمی‌تواند تابع اتوکورلیشن یک فرآیند WSS باشند.

$$R_X(\tau) = exp(0.01 \times |\tau|) + 4$$

این تابع به علت داشتن نقاطی که بزرگتر از $R_X(0)$ هستند نمی‌تواند متعلق به فرآیند WSS باشد.

$$R_X(\tau) = exp(-|\tau-4|) + 9$$

این تابع زوج نیست لذا نمی‌تواند متعلق به فرآیند WSS باشد.

$$R_X(\tau) = exp(-|\tau| + 4) - 25$$

این تابع بدون مشکل است.

۷. فرایند WSS (۱۲.۵ نمره)

(آ)

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\mathbb{E}\left[A\right]\mathbb{E}\left[u\left(t-T\right)\right]=\mu P\left(T<t\right)=\mu\left(1-e^{-\lambda t}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right]&=\mathbb{E}_A\left[\mathbb{E}_{X|A}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)|A\right]\right]\\&=\mathbb{E}_A\left[A^2.P\left(t_1>T,t_2>T\right)\right]\\&=\mathbb{E}_A\left[A^2\right]\left(1-e^{-\lambda\min(t_1,t_2)}\right)\\&=\left(\sigma^2+\mu^2\right)\left(1-e^{-\lambda\min(t_1,t_2)}\right)\end{aligned}$$

(ب) خیر. عملگر min باعث می‌شود که فرایند بالا WSS نباشد و برای تبدیل فرایند بالا به فرایند WSS، چون λ مقدار بزرگتر از صفر باید داشته باشد پس باید σ و μ هردو مقدار صفر داشته باشند.

۸. فرایند متوالی (۱۷.۵ + ۱۰ نمره)

(آ) برای مثال در حالتی که $\alpha=0$ می‌باشد، برای $n>1$ داریم:

$$X_n=Z_n$$

بنابراین در هر زمان مقدار فرایند مستقل از زمان‌های دیگر و از توزیع نرمال خواهد بود.

(ب) طبق رابطه بازگشتی داده شده در صورت سوال داریم:

$$X_n=\alpha^nX_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha^{n-i}Z_i$$

از طرفی اگر دقت کنیم، طبق استقرا می‌توانیم اثبات کنیم که pdf مرتبه اول در هر لحظه زمانی برابر توزیع نرمال گاوسی می‌باشد.
چون نمونه‌های Z_n به صورت .i.i.d می‌باشد پس در هر گام طبق رابطه بازگشتی جمع دو توزیع گاوسی مستقل از هم را داریم که متغیر تصادفی نهایی خود یک گاوسی با پارامترهای زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}\mu_{X_n}&=\alpha\mu_{X_{n-1}}+\mu_{Z_n}=a\times0+0=0\\\sigma_{X_n}^2&=\alpha^2\sigma_{X_{n-1}}^2+\sigma_{Z_n}^2=\alpha^2+(1-\alpha^2)=1\end{aligned}$$

(ج) طبق رابطه غیر بازگشتی بالا داریم:

$$\mathbb{E}\left[X_n\right]=\mathbb{E}\left[\alpha^nX_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha^{n-i}Z_i\right]=0$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n X_m\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\alpha^n X_0+\sum_{i=1}^{n} \alpha^{n-i} Z_i\right)\left(\alpha^m X_0+\sum_{i=1}^{m} \alpha^{m-i} Z_i\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\alpha^{n+m} X_0^2+\sum_{i=1}^{\min(n,m)} \alpha^{n+m-2i} Z_i^2\right] \\
&= \alpha^{n+m}+\sum_{i=1}^{\min(n,m)} \alpha^{n+m-2i}\left(1-\alpha^2\right) \\
&= \alpha^{n+m}+\left(\alpha^{n+m-2\min(n,m)}-\alpha^{n+m}\right) \\
&= \alpha^{|n-m|}
\end{aligned}
$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد.

(د) در این حالت، در هر لحظه زمانی یک آزمایش برنولی اتفاق می‌افتد و این متغیر تصادفی این آزمایش را با نماد α_n در لحظه n نشان می‌دهیم.

بنابراین رابطه غیر بازگشتی مرحله قبل به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$
X_n=\left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right) X_0+\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\prod_{j=1}^{i-1} \alpha_j\right) Z_i\right)
$$

حال اگر توزیع توام تمام متغیرهای تصادفی α_i تا زمان n را با ϕ_n نشان دهیم که به دلیل مستقل بودن آزمایش‌های برنولی ضرب تعدادی توزیع برنولی در یک دیگر می‌باشد، داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n\right] &= \mathbb{E}_{\phi_n}\left[\mathbb{E}_{X|\phi_n}\left[X_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{\alpha}\left[E_{X|\phi_n}\left[\left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right) X_0+\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\prod_{j=1}^{i-1} \alpha_j\right) Z_i\right)|\phi_n\right]\right]=0
\end{aligned}
$$

در مورد autocorrelation می‌توانیم هوشمندانه‌تر عمل کنیم و از نوشتن روابط پیچیده جلوگیری کنیم.
در محاسبه $\mathbb{E}\left[X_n X_m\right]$ در مسیر رسیدن از اندیس زمانی کوچکتر به بزرگتر تعدادی متغیر تصادفی برنولی مشاهده می‌کنیم. طبق رابطه داده شده همانطور که مشخص است در صورتی که $alpha = 1$ باشد متغیر تصادفی لحظه بعدی دقیقا برابر متغیر تصادفی لحظه قبل می‌باشد (میانگین و واریانس Z_n برابر ۰ می‌شود) و در حالتی که $alpha=0$ باشد متغیر تصادفی مرحله قبلی حذف و Z_n جایگزین آن می‌شود.
بنابراین در محاسبه عبارت

$$
\mathbb{E}\left[X_n X_m\right]=\mathbb{E}_{\phi}\left[\mathbb{E}_{X|\phi}\left[X_n X_m|\phi\right]\right]
$$

می‌توانیم متغیر تصادفی ϕ را با متغیر تصادفی برنولی جدید χ با پارامتر $p'=p^{|n-m|}$ جایگزین کنیم.
چون در مسیر بازگشتی اگر تنها یکی از α ها صفر شود دو متغیر X_n و X_m از همدیگر مستقل خواهند بود.
بنابراین داریم:

$$
\mathbb{E}\left[X_n X_m\right]=\mathbb{E}_{\chi}\left[\mathbb{E}_{X|\chi}\left[X_n X_m|\chi\right]\right]=P\left(\chi=0\right)\times 0+P\left(\chi=1\right)\times 1=p^{|n-m|}
$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد.