۱. درست نادرست (۱۰ نمره)

درستی و نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

(آ) دنباله نمونه‌های .i.i.d از یک متغیر تصادفی، تشکیل یک فرآیند SSS می‌دهند.
درست است. طبق تعریف .i.i.d می‌دانیم که هر نقطه از زمان مستقل از دیگری است و همچنین تمام نقاط ویژگی آماری یکسانی دارند پس این فرآیند یک فرآیند SSS است.

(ب) هر فرآیند تصادفی WSS یک فرآیند تصادفی SSS نیز می‌باشد.
نادرست است. برعکس این موضوع صحیح است یعنی هر فرآیند SSS یک فرآیند تصادفی WSS نیز می‌باشد.

(ج) برای تساوی R_X و C_X یک فرآیند WSS صفر بودن میانگین شرط لازم و کافی است.
درست است. چون برای فرآیند WSS می‌دانیم که:

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \eta^2$$

در عبارت جبری بالا اگر و تنها اگر $\eta = 0$ باشد تساوی برقرار است.

(د) یک فرآیند می‌تواند mean-ergodic باشد ولی WSS نباشد.
نادرست است. چرا که فرآیندهای mean-ergodic زیر مجموعه‌ای از فرآیندهای WSS هستند.

(ه) حاصل جمع دو فرآیند WSS همواره یک فرآیند WSS است.
نادرست است. برای اتوکورلیشن جمع دو فرآیند فرضی X و Y داریم:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(X(t)+Y(t))(X(S)+Y(S))] \\
&= \mathbb{E}[X(t)X(S)] + \mathbb{E}[Y(t)Y(S)] + \mathbb{E}[X(t)X(S)] + \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\
&= R_X(t-s) + R_Y(t-s) + R_{XY}(t,s) + 2R_{XY}(s,t)
\end{aligned}$$

که الزاما R_{XY} تابعی از اختلاف زمان نیست.

۲. فرایند ایستا (۱۰ نمره)

باتوجه به اینکه فرایند بالا یک فرایند ایستا با میانگین صفر می‌باشد داریم:

$$\begin{gathered}
\mathbb{E}\left[X\left(t_i\right)\right]=0 \\
R_X\left(t_i, t_k\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t_i\right) X\left(t_k\right)\right]=R_X\left(t_i-t_k\right)=R_X\left((i-k) \frac{T}{2}\right)
\end{gathered}$$

بنابراین برای میانگین داریم:

$$\mathbb{E}\left[\hat{\mu}_n\right]=\mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X\left(t_i\right)\right]=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X\left(t_i\right)\right]=0$$

و برای واریانس:

$$\begin{aligned}
Var\left(\hat{\mu}_n\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\hat{\mu}_n - \mathbb{E}\left[\hat{\mu}_n\right]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\mu}_n^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X\left(t_i\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X\left(t_k\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X\left(t_i\right) X\left(t_k\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_X\left(\left(i-k\right)\frac{T}{2}\right)
\end{aligned}$$

طبق تابع autocorrelation داده شده داریم:

$$Var\left(\hat{\mu}_n\right) = \frac{1}{n^2}\left(2n-1\right)$$

۳. فرایندهای Mean Ergodic (۲۵ نمره)

(آ) برای فرایند داده شده داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] &= \mathbb{E}\left[X_1\left(t\right)\right] + \mathbb{E}\left[cX_2\left(t\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_1\left(t\right)\right] + \mathbb{E}\left[c\right]\mathbb{E}\left[X_2\left(t\right)\right] \\
&= \eta_1 + 0.5\eta_2
\end{aligned}$$

این در حالی است که برای sample path ای که c=0 می‌باشد $X\left(t\right) = X_1\left(t\right)$ می‌باشد که در نتیجه وقتی $T \rightarrow \infty$ میانگین بدست آمده برابر $\eta_T \rightarrow \eta_1$ خواهد بود. بنابراین فرایند داده شده Mean Ergodic نمی‌باشد.

(ب) شرط لازم Mean Ergodic بودن ایستایی فرایند می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = \mathbb{E}\left[a\right]\cos\left(\omega t\right) + \mathbb{E}\left[b\right]\sin\left(\omega t\right) + \mathbb{E}\left[c\right] = c$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right] = \ & \mathbb{E}\left[a^2\right]\cos\left(\omega t_1\right)\cos\left(\omega t_2\right) + c^2 \\
& + \mathbb{E}\left[a\right]\mathbb{E}\left[b\right]\cos\left(\omega t_1\right)\sin\left(\omega t_2\right) + \mathbb{E}\left[a\right]\cos\left(\omega t_1\right)c \\
& + \mathbb{E}\left[a\right]\mathbb{E}\left[b\right]\sin\left(\omega t_1\right)\cos\left(\omega t_2\right) + \mathbb{E}\left[b\right]\sin\left(\omega t_1\right)c \\
& + \mathbb{E}\left[b^2\right]\sin\left(\omega t_1\right)\sin\left(\omega t_2\right) + \mathbb{E}\left[a\right]\cos\left(\omega t_2\right)c \\
& + \mathbb{E}\left[b\right]\sin\left(\omega t_2\right)c \\
= \ & \mathbb{E}\left[a^2\right]\cos\left(\omega t_1\right)\cos\left(\omega t_2\right) + \mathbb{E}\left[b^2\right]\sin\left(\omega t_1\right)\sin\left(\omega t_2\right) + c^2 \\
= \ & \sigma^2\cos\left(\omega\left(t_1 - t_2\right)\right) + c^2
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد. حال طبق قضیه Slutsky داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C\left(\tau\right)d\tau &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2\cos\left(\omega\tau\right)d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{\sigma^2}{\omega\tau}\sin\left(\omega\tau\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند Mean Ergodic می‌باشد.

(ج) مشابه بخش قبل ابتدا WSS بودن یا نبودن فرایند را بررسی می‌کنیم:

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=A\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t+\phi\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos\left(\omega t+\theta\right)d\theta=0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right]&=A^2\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)\cos\left(\omega t_2+\phi\right)\right]\\
&=\frac{A^2}{2}\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2\phi\right)\right]\\
&=\frac{A^2}{2}\left[\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)\right]+\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2\phi\right)\right]\right]\\
&=\frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد. حال طبق قضیه Slutsky داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}C\left(\tau\right)d\tau&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\tau\right)d\tau\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2\omega\tau}\sin\left(\omega\tau\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند Mean Ergodic می‌باشد.

۴. فرایند WSS و SSS (۱۵ نمره)

باید دو شرط WSS بودن را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Z\left[Z\left(t\right)\right]&=\mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_{Z|Y}\left[Z\left(t\right)|Y\left(t\right)\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_{X|Y}\left[X\left(t+Y\left(t\right)\right)|Y\left(t\right)\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_Y\left[\mu_X\right]=\mu_X=const
\end{aligned}$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
R_Z\left(t_1,t_2\right)&=\mathbb{E}_{Z(t_1),Z(t_2)}\left[Z\left(t_1\right)Z\left(t_2\right)\right]\\
&=\mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[\mathbb{E}_{Z(t_1),Z(t_2)|Y(t_1),Y(t_2)}\left[Z\left(t_1\right)Z\left(t_2\right)|Y\left(t_1\right)Y\left(t_2\right)\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[\mathbb{E}_{X(t_1),X(t_2)|Y(t_1),Y(t_2)}\left[X\left(t_1+Y\left(t_1\right)\right)X\left(t_2+Y\left(t_2\right)\right)|Y\left(t_1\right)Y\left(t_2\right)\right]\right]\\
&=\mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[R_X\left(t_1-t_2+Y\left(t_1\right)-Y\left(t_2\right)\right)\right]\\
&=\int R_X\left(t_1-t_2+y_1-y_2\right)f\left(y_1,y_2;t_1,t_2\right)dy_1dy_2\\
&=\int R_X\left(t_1-t_2+y_1-y_2\right)f\left(y_1,y_2;t_1-t_2\right)dy_1dy_2\\
&=R_Z\left(t_1-t_2\right)
\end{aligned}$$

بنابراین فرایند بالا یک فرایند WSS می‌باشد.

۵. محاسبه آماره‌های معروف در فرآیند WSS (۲۰ نمره)

فرآیند تصادفی $X(t)$ یک فرآیند تصادفی حقیقی و WSS است. این فرآیند دارای میانگین ۴ و اتوکواریانس زیر است.

$$C_X(\tau) = 2 \times exp(\frac{-|\tau|}{3}) + 2$$

دو متغیر تصادفی Y و Z را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = X(5) \qquad\qquad Z = X(8)$$

(آ) آماره‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\mathbb{E}[Y] \quad \mathbb{E}[Z] \quad \mathbb{E}[Y^2] \quad \mathbb{E}[Z^2] \quad Var(Y) \quad Var(Z)$$

$$\mathbb{E}[YZ] \quad \mathbb{E}[(Y+Z)^2] \quad Var(Y+Z) \quad Var(Y-Z)$$

طبق فرض‌های مساله سه پارامتر زیر را در مورد فرآیند X می‌دانیم.

$$\begin{aligned}
&\eta(t) = \eta_X = 4 \\
&C_X(\tau) = 2 \times exp(\frac{-|\tau|}{3}) + 2 \\
&R_X(\tau) = C_X(\tau) + \eta_X^2 = 2 \times exp(\frac{-|\tau|}{3}) + 18
\end{aligned}$$

بر این اساس داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[Z] = \eta_X = 4 \\
\mathbb{E}[Y^2] &= \mathbb{E}[Z^2] = R_{XX}(a,a) = R_X(a-a) = R_X(0) = 2 + 18 = 20 \\
Var(Y) &= Var(Z) = C_X(0) = 2 + 2 = 4 \\
\mathbb{E}[YZ] &= \mathbb{E}[X(5)X(8)] = R_{XX}(5,8) = R_X(8-5) = R_X(3) = 2e^{-1} + 18 \\
\mathbb{E}[(Y+Z)^2] &= \mathbb{E}[Y^2] + \mathbb{E}[Z^2] + 2\mathbb{E}[YZ] = 20 + 20 + 2(2e^{-1} + 18) = 76 + 4e^{-1} \\
Var(Y+Z) &= Var(Y) + Var(Z) + 2Cov(Y,Z) = 4 + 4 + 2C_X(8-5) \\
&= 8 + 2(2e^{-1} + 2) = 12 + 4e^{-1} \\
Var(Y-Z) &= Var(Y) + Var(Z) - 2Cov(Y,Z) = 4 + 4 - 2C_X(8-5) \\
&= 8 - 2(2e^{-1} + 2) = 4 - 4e^{-1}
\end{aligned}$$

(ب) آیا می‌توان با استفاده از اطلاعات مساله $\mathbb{E}[Z^3]$ را حساب کرد؟ اگر بله آن را حساب کنید و گرنه بگویید چرا نمی‌توان این کار را انجام داد.

خیر ـ در حالت عمومی نمی‌توان آن را حساب کرد. دقت شود که یک فرآیند WSS با استفاده از میانگین و اتوکواریانس به طور یکتا قابل شناسایی نیست و ما باید اطلاعات بیشتری از فرآیندمان داشته باشیم تا امید ریاضی‌های مرتبه‌های بالاتر را حساب کنیم.

۶. ویژگی‌های اتوکورلیشن فرآیند WSS (۲۰ نمره)

براساس فرآیند تصادفی WSS در دامنه حقیقی به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) اثبات کنید که که اتوکورلیشن این فرآیند زوج است.
در فضای حقیقی می‌دانیم که اتوکورلیشن به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R_X(t-s) = R_{XX}(t,s) = \mathbb{E}[X(t)X(s)]$$

حال براساس این تعریف زوج بودن این تابع بر اساس خاصیت جابه‌جایی ضرب، قابل اثبات است یعنی:

$$\begin{aligned} R_X(t-s) &= R_{XX}(t,s) \\ &= \mathbb{E}[X(t)X(s)] \\ &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\ &= R_{XX}(s,t) \\ &= R_X(s-t) \end{aligned}$$

(ب) اثبات کنید که تابع اتوکورلیشن دارای یک ماکزیمم در نقطه صفر است. یعنی به عبارت ریاضی:

$$\forall \tau : R_X(0) \geqslant R_X(\tau)$$

(راهنمایی: ابتدا برای اتوکورلیشن یک کران بالا بر اساس نامساوی کوشی‌ـشوارتز پیدا کنید سپس نشان دهید که $R_X(0)$ برابر با این کران است.)
براساس نامساوی کوشی شوارتز در احتمالات می‌دانیم که:

$$|\mathbb{E}[YZ]|^2 \leqslant \mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[Z^2]$$

اگر این عبارت را برای فرآیند تصادفی X(t) بنویسیم به عبارت زیر می‌رسیم.

$$|\mathbb{E}[X(t)X(s)]|^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2(t)]\mathbb{E}[X^2(s)]$$

دقت شود که امید ریاضی مرتبه دوم در فرآیند WSS مستقل از زمان می‌باشد و داریم:

$$\mathbb{E}[X^2(t)] = \mathbb{E}[X^2(s)] = R_X(s-s) = R_X(0)$$

پس با این اوصاف می‌توان نامساوی را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$|R_X(t-s)|^2 \leqslant R_X^2(0)$$

با جذر گرفتن از دو طرف و جایگذاری $\tau = t - s$ به حکم مساله می‌رسیم یعنی:

$$R_X(\tau) \leqslant R_X(0)$$

(ج) بر اساس این دو خاصیت با ذکر دلیل بیان کنید که کدام یک از توابع نمی‌تواند تابع اتوکورلیشن یک فرآیند WSS باشند.

$$R_X(\tau) = exp(0.01 \times |\tau|) + 4$$

این تابع به علت داشتن نقاطی که بزرگتر از $R_X(0)$ هستند نمی‌تواند متعلق به فرآیند WSS باشد.

$$R_X(\tau) = exp(-|\tau - 4|) + 9$$

این تابع زوج نیست لذا نمی‌تواند متعلق به فرآیند WSS باشد.

$$R_X(\tau) = exp(-|\tau| + 4) - 25$$

این تابع بدون مشکل است.