



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

# فرایندهای تصادفی در بیوانفورماتیک

نیمسال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱

استاد: محمدحسین رهبان

گردآورندگان: محمدعلی صدراپی جواهری و امیرحسین عاملی

بررسی و بازبینی: مهران حسین زاده

تمرین دوم

## فرایندهای تصادفی ایستا و ارگادیک

مهلت ارسال: ۲۴ فروردین

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر تمرین‌ها بدون کسر نمره تا سقف ۱۰ روز (تا سقف ۳ روز برای هر تمرین) وجود دارد. محل بارگزاری جواب تمرین‌ها بعد از ۵ روز بسته خواهد شد و پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند شد. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های ارسال شده حتماً باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت شما تصحیح نخواهد شد.
- تمرین از ۱۲۵ نمره و نمره کامل ۱۱۵ می‌باشد.
- پاسخ تمامی سوالات (تئوری و عملی) را در یک فایل فشرده به صورت `SPBio_HW2_[firstName]_[lastName]_[StudentId]` نام‌گذاری کرده و ارسال کنید.

## سوالات نظری (۱۱۵ + ۱۰ نمره)

### ۱. درست نادرست (۱۰ نمره)

- درستی و نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.
- دنباله نمونه‌های i.i.d. از یک متغیر تصادفی، تشکیل یک فرآیند SSS می‌دهند.
  - هر فرآیند تصادفی WSS یک فرآیند تصادفی SSS نیز می‌باشد.
  - برای تساوی  $R_X$  و  $C_X$  یک فرآیند WSS صفر بودن میانگین شرط لازم و کافی است.
  - یک فرآیند می‌تواند mean-ergodic باشد ولی WSS نباشد.
  - حاصل جمع دو فرآیند WSS همواره یک فرآیند WSS است.

### ۲. فرایند ایستا (۱۰ نمره)

$X(t)$  یک فرایند ایستا با میانگین صفر است که تابع autocorrelation آن به صورت زیر است:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{T} & -T < \tau < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مجموعه  $\{X(t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$  مجموعه n نمونه از فرایند در زمان‌های  $t_i = i\frac{T}{2}$  می‌باشد. میانگین و واریانس متغیر تصادفی زیر را حساب کنید:

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(t_i)$$

### ۳. فرایندهای Mean Ergodic (۲۵ نمره)

(آ) دو فرایند  $X_1(t)$  و  $X_2(t)$  Mean Ergodic هستند و میانگین آن‌ها به ترتیب برابر با  $\eta_1$  و  $\eta_2$  هستند. در صورتی که تعریف کنیم:

$$X(t) = X_1(t) + cX_2(t)$$

به صورتی که  $c$  یک متغیر برنولی مستقل با احتمال  $\frac{1}{2}$  باشد. آیا  $X(t)$  Mean Ergodic است؟ چرا؟  
(ب) فرایند زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c$$

که در آن  $a$  و  $b$  در متغیر تصادفی uncorrelated هستند که میانگین آن‌ها برابر با صفر و واریانسی یکسان دارند و  $\omega$  ثابت می‌باشد. آیا  $X(t)$  Mean Ergodic است؟ چرا؟  
(ج) در صورتی که  $A$  و  $\omega$  ثابت و  $\phi$  یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین  $[-\pi, \pi]$  باشد. آیا فرایند زیر Mean Ergodic است؟ چرا؟

$$X(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

### ۴. فرایند WSS و SSS (۱۰ نمره)

اگر  $X(t)$  یک فرایند WSS و  $Y(t)$  یک فرایند SSS باشد. نشان دهید فرایند  $Z(t)$  که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک فرایند WSS است.

$$Z(t) = X(t + Y(t))$$

### ۵. محاسبه آماره‌های معروف در فرایند WSS (۱۶ نمره)

فرایند تصادفی  $X(t)$  یک فرایند تصادفی حقیقی و WSS است. این فرایند دارای میانگین ۴ و اتوکواریانس زیر است.

$$C_X(\tau) = 2 \times \exp\left(\frac{-|\tau|}{3}\right) + 2$$

دو متغیر تصادفی  $Y$  و  $Z$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = X(5) \quad Z = X(8)$$

(آ) آماره‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\mathbb{E}[Y] \quad \mathbb{E}[Z] \quad \mathbb{E}[Y^2] \quad \mathbb{E}[Z^2] \quad \text{Var}(Y) \quad \text{Var}(Z)$$

$$\mathbb{E}[YZ] \quad \mathbb{E}[(Y + Z)^2] \quad \text{Var}(Y + Z) \quad \text{Var}(Y - Z)$$

(ب) آیا می‌توان با استفاده از اطلاعات مساله  $\mathbb{E}[Z^3]$  را حساب کرد؟ اگر بله آن را حساب کنید و گرنه بگویید چرا نمی‌توان این کار را انجام داد.

### ۶. ویژگی‌های اتوکورلیشن فرایند WSS (۱۴ نمره)

براساس فرایند تصادفی WSS در دامنه حقیقی به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) اثبات کنید که اتوکورلیشن این فرآیند زوج است.

(ب) اثبات کنید که تابع اتوکورلیشن دارای یک ماکزیمم در نقطه صفر است. یعنی به عبارت ریاضی:

$$\forall \tau : R_X(0) \geq R_X(\tau)$$

(راهنمایی: ابتدا برای اتوکورلیشن یک کران بالا بر اساس نامساوی کوشی-شوارتز پیدا کنید سپس نشان دهید که  $R_X(0)$  برابر با این کران است.)

(ج) بر اساس این دو خاصیت با ذکر دلیل بیان کنید که کدام یک از توابع نمی‌تواند تابع اتوکورلیشن یک فرآیند WSS باشند.

$$R_X(\tau) = \exp(0.01 \times |\tau|) + 4$$

$$R_X(\tau) = \exp(-|\tau - 4|) + 9$$

$$R_X(\tau) = \exp(-|\tau| + 4) - 25$$

## ۷. فرایند WSS (۱۲.۵ نمره)

متغیر تصادفی  $X(t) = Au(t - T)$  را برای  $t > 0$  در نظر بگیرید که  $u(t)$  تابع پله واحد و  $A$  یک متغیر نرمال با پارامترهای  $\mu, \sigma^2$  و  $T$  یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر  $\lambda$  می‌باشد. با فرض مستقل بودن دو متغیر  $A$  و  $T$ ، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید

(آ) مقادیر  $\mathbb{E}[X(t)]$  و  $R_X(t_1, t_2)$  را بدست آورید.

(ب) آیا فرایند بالا WSS می‌باشد؟ اگر خیر شرایطی که با آن فرایند بالا WSS می‌شود را عنوان کنید.

## ۸. فرایند متوالی (۱۷.۵ + ۱۰ نمره)

یک مولد اعداد تصادفی را در نظر بگیرید که در هر بار روشن شدن، رشته‌ای از اعداد را به ترتیب نمایش می‌دهد. نحوه کار مولد به این صورت است که همواره برای عدد اول یعنی  $X_0$  از توزیع نرمال استاندارد یک نمونه می‌گیرد و سپس هر عدد از رشته طبق  $X_n = \alpha X_{n-1} + Z_n$  از مقدار ماقبل خود تولید می‌شود که در این عبارت  $\alpha$  یک مقدار ثابت در بازه  $[0, 1]$  و  $Z_n$  ها متغیرهای تصادفی i.i.d و مستقل از  $X_0$  از توزیع  $N(0, 1 - \alpha^2)$  می‌باشند.

(آ) یک Sample Path از این فرایند را مشخص کنید.

(ب) توزیع pdf مرتبه اول را برای این فرایند به دست آورید.

(ج) آیا فرایند تولید این اعداد WSS است؟

(د) (امتیازی) حال نحوه کار مولد را به این صورت در نظر بگیرید که بعد از تولید عدد اول،  $x_0$ ، همانند بالا در هر مرحله پیش از تولید مقدار بعدی یک آزمایش برنولی با پارامتر  $p$  انجام می‌دهد که در آن  $P(\alpha = 1) = p$  می‌باشد و سپس عدد بعدی را با استفاده از رابطه بالا تولید بخش قبل تولید می‌کند. نشان دهید که آیا در این حالت، این فرایند WSS است یا خیر؟