فرآیندهای تصادفی در بیوانفورماتیک

نیم‌سال دوم ۰۱-۰۰

استاد: محمدحسین رهبان

گردآورندگان:

بررسی و بازبینی:

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین اول | **عنوان تمرین** | مهلت ارسال: ۱۸ بهمن

پاسخ سوالات تئوری (۶۰ نمره)

۱. (آ)

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= R_{xx}(\tau) * h(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha(\tau - z)} h(z)\, dz \\ &= e^{j\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\alpha z} h(z)\, dz \\ &= e^{j\alpha\tau} H(\alpha) \end{aligned}$$

برای مورد دوم داریم:

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau) \\ &= H(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha(\tau - z)} h^*(-z)\, dz \\ &= H(\alpha) e^{j\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\alpha z} h^*(-z)\, dz \\ &= H(\alpha) e^{j\alpha\tau} H^*(\alpha) \\ &= e^{j\alpha\tau} |H(\alpha)|^2 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} R_{yx}(t_1, t_2) &= R_{xx}(t_1, t_2) * h(t_1) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\alpha(t_1 - z) - \beta t_2)} h(z)\, dz \\ &= e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\alpha z} h(z)\, dz \\ &= e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)} H(\alpha) \end{aligned}$$

برای مورد دوم داریم:

$$
\begin{aligned}
R_{yy}(t_1,t_2) &= R_{yx}(t_1,t_2) * h^*(t_2) \\
&= H(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\alpha t_1 - \beta(t_2 - z))} h^*(z)\, dz \\
&= H(\alpha)\, e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\beta z} h^*(z)\, dz \\
&= e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)} H(\alpha)\, H^*(\beta)
\end{aligned}
$$

۲. (آ) برای فرایند داده شده داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}[X_1(t)] + \mathbb{E}[cX_2(t)] \\
&= \mathbb{E}[X_1(t)] + \mathbb{E}[c]\,\mathbb{E}[X_2(t)] \\
&= \eta_1 + 0.5\eta_2
\end{aligned}
$$

این در حالی است که برای sample path ای که c=0 می‌باشد $X(t) = X_1(t)$ می‌باشد که در نتیجه وقتی $T \to \infty$ میانگین بدست آمده برابر $\eta_T \to \eta_1$ خواهد بود. بنابراین فرایند داده شده Mean Ergodic نمی‌باشد.

(ب) شرط لازم Mean Ergodic بودن ایستایی فرایند می‌باشد. بنابراین داریم:

$$
E[X(t)] = E[a]\cos(\omega t) + E[b]\sin(\omega t) + E[c] = c
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \;& \mathbb{E}\left[a^2\right]\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + c^2 \\
& + \mathbb{E}[a]\,\mathbb{E}[b]\cos(\omega t_1)\sin(\omega t_2) + \mathbb{E}[a]\cos(\omega t_1)\,c \\
& + \mathbb{E}[a]\,\mathbb{E}[b]\sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + \mathbb{E}[b]\sin(\omega t_1)\,c \\
& + \mathbb{E}\left[b^2\right]\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2) + \mathbb{E}[a]\cos(\omega t_2)\,c \\
& + \mathbb{E}[b]\sin(\omega t_2)\,c \\
= \;& \mathbb{E}\left[a^2\right]\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + \mathbb{E}\left[b^2\right]\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2) + c^2 \\
= \;& \sigma^2\cos(\omega(t_1 - t_2)) + c^2
\end{aligned}
$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد. حال طبق قضیه Slutsky داریم:

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C(\tau)\,d\tau &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2\cos(\omega\tau)\,d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{\sigma^2}{\omega T}\sin(\omega T) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

بنابراین فرایند Mean Ergodic می‌باشد.

(ج) مشابه بخش قبل ابتدا WSS بودن یا نبودن فرایند را بررسی می‌کنیم:

$$
E[X(t)] = AE[\cos(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t + \theta)\,d\theta = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right] &= A^2\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)\cos\left(\omega t_2+\phi\right)\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2\phi\right)\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\left[\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)\right]+\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2\phi\right)\right]\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد. حال طبق قضیه Slutsky داریم:

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C\left(\tau\right)d\tau &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\tau\right)d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2\omega\tau}\sin\left(\omega\tau\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

بنابراین فرایند Mean Ergodic می‌باشد.

۳. باید دو شرط WSS بودن را بررسی کنیم:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_Z\left[Z\left(t\right)\right] &= \mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_{Z|Y}\left[Z\left(t\right)|Y\left(t\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_{X|Y}\left[X\left(t+Y\left(t\right)\right)|Y\left(t\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_Y\left[\mu_X\right]=\mu_X=const
\end{aligned}
$$

و همچنین داریم:

$$
\begin{aligned}
R_Z\left(t_1,t_2\right) &= \mathbb{E}_{Z(t_1),Z(t_2)}\left[Z\left(t_1\right)Z\left(t_2\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[\mathbb{E}_{Z(t_1),Z(t_2)|Y(t_1),Y(t_2)}\left[Z\left(t_1\right)Z\left(t_2\right)|Y\left(t_1\right)Y\left(t_2\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[\mathbb{E}_{X(t_1),X(t_2)|Y(t_1),Y(t_2)}\left[X\left(t_1+Y\left(t_1\right)\right)X\left(t_2+Y\left(t_2\right)\right)|Y\left(t_1\right)Y\left(t_2\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{Y(t_1),Y(t_2)}\left[R_X\left(t_1-t_2+Y\left(t_1\right)-Y\left(t_2\right)\right)\right] \\
&= \int R_X\left(t_1-t_2+y_1-y_2\right)f\left(y_1,y_2;t_1,t_2\right)dy_1dy_2 \\
&= \int R_X\left(t_1-t_2+y_1-y_2\right)f\left(y_1,y_2;t_1-t_2\right)dy_1dy_2 \\
&= R_Z\left(t_1-t_2\right)
\end{aligned}
$$