فرآیندهای تصادفی در بیوانفورماتیک

نیم‌سال دوم ۰۱-۰۰

استاد: محمدحسین رهبان

گردآورندگان: محمدعلی صدرایی جواهری و امیرحسین عاملی

بررسی و بازبینی:

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین اول | فرایندهای تصادفی ایستا و ارگادیک | مهلت ارسال: ۱۸ بهمن

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر تمرین‌ها بدون کسر نمره تا سقف ۱۰ روز (تا سقف ۳ روز برای هر تمرین) وجود دارد. محل بارگزاری جواب تمرین‌ها بعد از ۵ روز بسته خواهد شد و پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال‌شده پذیرفته نخواهند شد. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- پاسخ تمامی سوالات (تئوری و عملی) را در یک فایل فشرده به صورت $SPBio\_Hw1\_[firstName]\_[lastName]\_[StudentId]$ نام‌گذاری کرده و ارسال کنید.

سوالات نظری (۷۰ نمره)

۱. درست نادرست (۱۰ نمره)

درستی و نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

(آ) دنباله نمونه‌های .i.i.d از یک متغیر تصادفی، تشکیل یک فرآیند SSS می‌دهند.

(ب) هر فرآیند تصادفی WSS یک فرآیند تصادفی SSS نیز می‌باشد.

(ج) برای تساوی R_X و C_X یک فرآیند WSS صفر بودن میانگین شرط لازم و کافی است.

(د) یک فرآیند می‌تواند mean-ergodic باشد ولی WSS نباشد.

(ه) حاصل جمع دو فرآیند WSS همواره یک فرآیند WSS است.

۲. فرایند ایستا (۳۰ نمره)

$X(t)$ یک فرایند ایستا با میانگین صفر است که تابع autocorrelation آن به صورت زیر است:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{T} & -T < \tau < T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

مجموعه $\{X(t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ مجموعه n نمونه از فرایند در زمان‌های $t_i = i\frac{T}{2}$ می‌باشد. میانگین و واریانس متغیر تصادفی زیر را حساب کنید:

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i)$$

۳. فرایندهای Mean Ergodic (۳۰ نمره)

(آ) دو فرایند $X_1\left(t\right)$ و $X_2\left(t\right)$ Mean Ergodic هستند و میانگین آن‌ها به ترتیب برابر با η_1 و η_2 هستند. در صورتی که تعریف کنیم:

$$X\left(t\right)=X_1\left(t\right)+cX_2\left(t\right)$$

به صورتی که c یک متغیر برنولی مستقل با احتمال $\frac{1}{2}$ باشد. آیا $X\left(t\right)$ Mean Ergodic است؟ چرا؟

(ب) فرایند زیر را در نظر بگیرید:

$$X\left(t\right)=a\cos\left(\omega t\right)+b\sin\left(\omega t\right)+c$$

که در آن a و b در متغیر تصادفی uncorrelated هستند که میانگین آن‌ها برابر با صفر و واریانسی یکسان دارند و ω ثابت می‌باشد. آیا $X\left(t\right)$ Mean Ergodic است؟ چرا؟

(ج) در صورتی که A و ω ثابت و ϕ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین $[-\pi,\pi]$ باشد. آیا فرایند زیر Mean Ergodic است؟ چرا؟

$$X\left(t\right)=A\cos\left(\omega t+\phi\right)$$

۴. فرایند WSS و SSS (۳۰ نمره)

اگر $X\left(t\right)$ یک فرایند WSS و $Y\left(t\right)$ یک فرایند SSS باشد. نشان دهید فرایند $Z\left(t\right)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک فرایند WSS است.

$$Z\left(t\right)=X\left(t+Y\left(t\right)\right)$$

۵. محاسبه آماره‌های معروف در فرآیند WSS (۲۵ نمره)

فرآیند تصادفی $X(t)$ یک فرآیند تصادفی حقیقی و WSS است. این فرآیند دارای میانگین ۴ و اتوکواریانس زیر است.

$$C_X(\tau)=3\times exp(\frac{-|\tau|}{3})-14$$

دو متغیر تصادفی Y و Z را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y=X(5)\qquad\qquad Z=X(8)$$

(آ) آماره‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\mathbb{E}[Y]\quad \mathbb{E}[Z]\quad \mathbb{E}[Y^2]\quad \mathbb{E}[Z^2]\quad Var(Y)\quad Var(Z)$$

$$\mathbb{E}[YZ]\quad \mathbb{E}[(Y+Z)^2]\quad Var(Y+Z)\quad Var(Y-Z)$$

(ب) آیا می‌توان با استفاده از اطلاعات مساله $\mathbb{E}[Z^3]$ را حساب کرد؟ اگر بله آن را حساب کنید و گرنه بگویید چرا نمی‌توان این کار را انجام داد.

۶. ویژگی‌های اتوکورلیشن فرآیند WSS (۲۰ نمره)

براساس فرآیند تصادفی WSS در دامنه حقیقی به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) اثبات کنید که که اتوکورلیشن این فرآیند زوج است.

(ب) اثبات کنید که تابع اتوکورلیشن دارای یک ماکزیمم در نقطه صفر است. یعنی به عبارت ریاضی:

$$\forall\tau : R_X(0) \geqslant R_X(\tau)$$

(راهنمایی: ابتدا برای اتوکورلیشن یک کران بالا بر اساس نامساوی کوشی‑شوارتز پیدا کنید سپس نشان دهید که $R_X(0)$ برابر با این کران است.)

(ج) بر اساس این دو خاصیت با ذکر دلیل بیان کنید که کدام یک از توابع نمی‌تواند تابع اتوکورلیشن یک فرآیند WSS باشند.

$$R_X(\tau) = exp(0.01 \times |\tau|) + 4$$
$$R_X(\tau) = exp(-|\tau - 4|) + 9$$
$$R_X(\tau) = exp(-|\tau| + 4) - 25$$