



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

# فرایندهای تصادفی در بیوانفورماتیک

نیمسال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱

استاد: محمدحسین رهبان

گردآوردندگان: محمدعلی صدرایی جواهری و امیرحسین عاملی

بررسی و بازبینی: مهران حسین زاده

تمرین چهارم

فرایندهای تصادفی ایستا و ارگادیک

مهلت ارسال: ۲۴ فروردین

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر تمرینها بدون کسر نمره تا سقف ۱۰ روز (تا سقف ۳ روز برای هر تمرین) وجود دارد. محل بارگزاری جواب تمرینها بعد از ۵ روز بسته خواهد شد و پس از گذشت این مدت، پاسخهای ارسال شده پذیرفته نخواهند شد. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- همکاری و همفکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت همفکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام همفکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- تمرین از ۱۲۵ نمره و نمره کامل ۱۱۵ می باشد.
- پاسخ تمامی سوالات (تئوری و عملی) را در یک فایل فشرده به صورت `SPBio_HW2_[firstName]_[lastName]_[StudentId]` نامگذاری کرده و ارسال کنید.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

## ۱. قمارباز بازنده (۱۰ نمره)

حالت تغییر یافته مسئله Gambler's ruin را به این صورت در نظر بگیرید که در هر حالت علاوه بر احتمالات  $p$  و  $q$ ، بازی با احتمال  $r$  که  $p + q + r = 1$ ، مساوی می شود و پول قمارباز تغییری نمیکند. برای این بازی موارد زیر را حساب کنید:

- (آ) احتمال اتمام بازی با سرمایه اولیه  $k$  که  $0 < k < N$  می باشد.
- (ب) مقدار متوسطی زمانی که لازم است که با شروع با سرمایه اولیه  $k$ ، بازی به اتمام برسد.
- (ج) در حالتی که احتمال  $p$  و  $q$  برابر باشند دو مورد بالا را بدست آورده و نتیجه حاصله را تحلیل کنید.

## ۲. قمارباز بازنده (۱۰ نمره)

یک قدم زنی تصادفی را به این صورت در نظر بگیرید که دارای حالت های  $\{0, 1, \dots, N\}$  می باشد که حالت  $N$  یک گره جذب کننده می باشد و حالت  $0$  یک گره بازتابنده (Reflecting) به این صورت می باشد که با احتمال  $q$  در همان گره می ماند و با احتمال  $p$  به گره بعدی (۱) می رود. بقیه گره ها مشابه حالت Ruin Gambler's می باشد.

- (آ) احتمال رسیدن به گره  $N$  را با شروع از حالت  $k$  که  $0 \leq k < N$ ، بدست آورید.
- (ب) با فرض  $p = q$  مقدار متوسطی زمانی که لازم است که با شروع از حالت  $k$  که  $0 \leq k < N$ ، به خانه  $N$  برسید را بدست آورید.

### ۳. قمارباز بازنده (۱۰ نمره)

یک فرایند تولد و مرگ را در نظر بگیرید که برای  $i = 1, \dots, N - 1$  داشته باشیم  $b_i = ib$  و برای  $i = 1, \dots, N$  داشته باشیم  $d_i = id$  که متغیرهای  $b$  و  $d$  مثبت و برایشان شرط  $(b + d)N \leq 1$  صادق باشد. میانگین جمعیت بعد از  $n$  واحد زمانی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu(n) = \sum_{i=0}^N ip_i(n)$$

(آ) رابطه زیر را اثبات کنید:

$$\mu(n+1) = (1 + b - d)\mu(n) - dNp_N(n)$$

(ب) با کمک رابطه بازگشتی بالا یک کران بالا برای  $\mu(n)$  بدست آورید و حد  $\mu(n)$  را در حالتی که  $b < d$  باشد بدست آورید.