فرآیندهای تصادفی در بیوانفورماتیک

نیم‌سال دوم ۰۱ـ۰۰

استاد: محمدحسین رهبان

گردآورندگان: امیرحسین عاملی و سپیده عبداللهی

بررسی و بازبینی: مهران حسین زاده

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین چهارم | فرایندهای تولد و مرگ و مدل‌های همه‌گیری | مهلت ارسال: ۲۴ فروردین

۱. قمارباز بازنده (۱۵ نمره)

(آ) مشابه بازی قمارباز معمولی داریم:

$$\begin{gathered} a_k = pa_{k+1} + qa_{k-1} + ra_k \\ pa_{k+1} - (1-r)\,a_k + qa_{k-1} = 0 \\ p\lambda^2 - (1-r)\,\lambda + q = 0 \end{gathered}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-r) \pm \sqrt{(1-r)^2 - 4pq}}{2p}$$

$$\begin{gathered} p+q+r=1 \\ p+q=1-r \\ (p+q)^2 = (1-r)^2 \\ p+q-2qp = (p-q)^2 = (1-r)^2 - 4qp \end{gathered}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-r) \pm |p-q|}{2p} = \frac{p+q \pm |p-q|}{2p}$$

بنابراین جواب های بدست آمده دقیقا برابر حالت معمولی مسئله قمارباز شد و مقادیر a_k برای حالتی که $p \neq q$ برابر

$$a_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$$

می‌باشد.

(ب) مشابه بخش قبل داریم:

$$\begin{gathered} \tau_k = p\,(1+\tau_{k+1}) + q\,(1+\tau_{k-1}) + r\,(1+\tau_k) \\ p\tau_{k+1} - (1-r)\,\tau_k + q\tau_{k-1} = -1 \end{gathered}$$

طبق مشابهت رابطه بالا با بخش الف، جواب عمومی τ_k مشابه جواب بخش الف خواهد بود. برای جواب خصوصی با در نظر گرفتن $\tau_k = ck$ داریم:

$$\begin{gathered} pc\,(k+1) - (1-r)\,ck + qc\,(k-1) = -1 \\ c\,(pk+p-k+rk+qk-q) = -1 \\ c = \tfrac{1}{q-p} \end{gathered}$$

همانطور که مشهود است، جواب های مقدار متوسط زمان پایان بازی نیز مشابه حالت معمولی بازی شد.

(ج) با اثبات مشابه بودن این حالت به حالت معمولی، جواب های این بخش نیز برابر جوابهای مسئله معمولی قمارباز می‌شود. (نوشتن مراحل برای اخد نمره نیاز است.)

به صورت شهودی نیز مشخص بود که با چنین تغییراتی در صورتی که نسبت q به p ثابت باقی بماند مقدار a_k تغییر نخواهد کرد. چون تغییری که در حالت فعلی ایجاد میشود تنها توسط p و q اتفاق می افتد. همچنین با افرایش r مقادیر p و q کمتر از حالتی می شود که $r == 0$ باشد و انتظار میرود زمان جذب بیشتر شود که در رابطه متناظر خود را در بخش اول که تفاضل p و q می باشد نشان می‌دهد.

۲. قدم‌زنی تصادفی (۱۰ نمره)

(آ) راه حل سریع:

باتوجه به اینکه تنها یک گره جذب کننده داریم و فرایند irreducible می‌باشد پس احتمال رسیدن به گره N از تمام گره ها برای ۱ می‌باشد.

راه حل طولانی:

رابطه احتمال مطلوب را برای گره ۰ می‌نویسیم:

$$a_0 = pa_1 + qa_0$$
$$pa_0 = pa_1$$
$$a_0 = a_1$$

با نتیجه بدست آمده اگر رابطه احتمال را برای گره ۱ بنویسیم داریم:

$$a_1 = qa_0 + pa_2$$
$$a_1 - qa_0 = pa_2$$
$$pa_1 = pa_2$$
$$a_1 = a_2$$

این روند همینطور ادامه دارد تا اینکه به گره ما قبل آخر برسیم:

$$a_{N-1} = qa_{N-2} + p$$
$$pa_{N-1} = p$$
$$a_{N-1} = 1$$

بنابراین مقدار احتمال برای تمام گره‌ها ۱ می‌باشد.

(ب) با شروع از گره ۰ روابط مطلوب را مینویسیم:

$$\tau_0 = p(1+\tau_1) + q(1+\tau_0)$$
$$p\tau_0 = 1 + p\tau_1$$
$$\tau_0 = 2 + \tau_1$$

برای گره ۱ داریم:

$$\tau_1 = p(1+\tau_2) + q(1+\tau_0)$$
$$\tau_1 - q\tau_0 = 1 + p\tau_2$$
$$\tau_1 - 1 - 0.5\tau_1 = 1 + 0.5\tau_2$$
$$\tau_1 = 4 + \tau_2$$

و اگر برای گره ۲ نیز بنویسیم:

$$\tau_2 = p(1+\tau_3) + q(1+\tau_1)$$
$$\tau_2 - q\tau_1 = 1 + p\tau_3$$
$$\tau_2 - 2 - 0.5\tau_2 = 1 + 0.5\tau_3$$
$$\tau_2 = 6 + \tau_3$$

مشاهده می‌شود که برای گره‌های ۰ تا $N-2$ می‌توان یک رابطه کلی برای $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ به صورت زیر نوشت که:

$$\tau_{i-1} = 2i + \tau_i$$

حال برای گره $N-1$ نیز داریم:

$$\tau_{N-1} = p(1+\tau_N) + q(1+\tau_{N-2})$$
$$\tau_{N-1} = p + q(1+\tau_{N-2})$$
$$\tau_{N-1} = 1 + 0.5\tau_{N-2}$$

از طرفی در رابطه‌های بازگشتی نیز داشتیم:

$$\tau_{N-2} = 2N - 2 + \tau_{N-1}$$

با حل دو معادله دو مجهولی بالا برای τ_{N-1} داریم: $\tau_{N-1} = 2N$ با استفاده از روابط بازگشتی نیز بقیه مقادیر یافت می‌شوند.

۳. فرایند تولد و مرگ (۲۰ نمره)

(آ) ماتریس گذار این فرایند به صورت زیر است:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & 1-d_1-b_1 & b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 1-d_2-b_2 & b_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_N & 1-d_N \end{bmatrix}$$

حال سطری دلخواه از ماتریس P^n را در نظر بگیرید:

$$P^n = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{N-1} & r_N \end{bmatrix}$$

حال به همین سطر در ماتریس P^{n+1} نگاه بکنیم داریم:

$$P^{n+1} = \begin{bmatrix} r_0 + d_1 r_1 & (1-d_1-b_1)\, r_1 + d_2 r_2 & b_1 r_1 + (1-d_2-b_2)\, r_2 + d_3 r_3 & \cdots & (1-d_N)\, r_N \end{bmatrix}$$

با استفاده از تعریف
داریم:

$$P^{n+1} = \begin{bmatrix} r_0 + d r_1 & (1-d-b)\, r_1 + 2d r_2 & b r_1 + (1-2d-2b)\, r_2 + 3d r_3 & \cdots & (1-Nd)\, r_N \end{bmatrix}$$

حال طبق بردار بالا، برای ایندکس دلخواه j که $j = 1, \dots, N-1$ ضریب r_j در عبارت $\mu(n)$ برابر j و در عبارت $\mu(n+1)$ متاثر از دو همسایه کناری، برابر مقدار زیر می‌باشد:

$$(j-1)(jd)+j(1-jd-jb)+(j+1)(jb)=j-jd+jb=(1-d+b)\,j$$

که در تمام آن‌ها عبارت $(1-d+b)$ در مقادیر قبلی ضرب شده است.

در هردو عبارت ضریب ایندکس ۰ برابر ۰ می‌باشد ولی برای ایندکس N تفاوت برابر مقدار زیر است:

$$((N-1)\,Ndr_N+N\,(1-Nd)\,r_N)-(Nr_N)=-Ndr_N$$

با جمع‌بندی تمام موارد بالا می‌توان به رابطه بازگشتی مطرح شده در سوال رسید.

(ب) باتوجه به اینکه تک تک متغیرهای عبارت $dNp_N\,(n)$ غیرمنفی می‌باشد، داریم:

$$\mu\,(n+1)\leq(1+b-d)\mu\,(n)$$

حال اگر کران بازگشتی بالا را بسط دهیم به نامساوی زیر می‌رسیم:

$$\mu\,(n+1)\leq(1+b-d)^n\mu\,(0)$$

حال اگر فرض کنیم که $b<d$ می‌باشد عبارت $(1+b-d)^n$ با میل دادن n به بی‌نهایت مقدار صفر به خود می‌گیرد و کران بالای $\mu\,(n+1)$ که خود نامنفی است، برابر صفر می‌شود و بنابراین حد $\mu\,(n+1)$ در حالت میل دادن n به سمت بینهایت برابر صفر می‌شود.