



دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

فرایندهای تصادفی در بیوانفورماتیک

نیمسال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱

استاد: محمدحسین رهبان

گردآورندگان: محمدعلی صدراایی جواهری و امیرحسین عاملی

بررسی و بازبینی: مهران حسین زاده

تمرین دوم

فرایندهای تصادفی ایستا و ارگادیک

مهلت ارسال: ۲۴ فروردین

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر تمرین‌ها بدون کسر نمره تا سقف ۱۰ روز (تا سقف ۳ روز برای هر تمرین) وجود دارد. محل بارگزاری جواب تمرین‌ها بعد از ۵ روز بسته خواهد شد و پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند شد. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های ارسال شده هر کس حتماً باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ‌های سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- تمرین از ۱۲۵ نمره و نمره کامل ۱۱۵ می‌باشد.
- پاسخ تمامی سوالات (تئوری و عملی) را در یک فایل فشرده به صورت `SPBio_HW2_[firstName]_[lastName]_[StudentId]` نام‌گذاری کرده و ارسال کنید.

سوالات نظری (۱۱۵ + ۱۰ نمره)

۱. قمارباز بازنده (۱۰ نمره)

حالت تغییر یافته مسئله Gambler's ruin را به این صورت در نظر بگیرید که در هر حالت علاوه بر احتمالات p و q ، بازی با احتمال r که $p + q + r = 1$ ، مساوی می‌شود و پول قمارباز تغییری نمی‌کند. برای این بازی موارد زیر را حساب کنید:

- (آ) احتمال اتمام بازی با سرمایه اولیه k که $0 < k < N$ می‌باشد.
- (ب) مقدار متوسطی زمانی که لازم است که با شروع با سرمایه اولیه k ، بازی به اتمام برسد.
- (ج) در حالتی که احتمال p و q برابر باشند دو مورد بالا را بدست آورده و نتیجه حاصله را تحلیل کنید.

۲. قمارباز بازنده (۱۰ نمره)

یک قدم‌زنی تصادفی با محدودیت را به این صورت در نظر بگیرید که با احتمال p به سمت راست و به احتمال q به سمت چپ حرکت می‌کند و وقتی به خانه $-N$ و یا N رسید متوقف می‌شود. احتمال متوقف شدن در خانه N را بدست آورید.

۳. قمارباز بازنده (۱۰ نمره)

یک قدم‌زنی تصادفی را به این صورت در نظر بگیرید که دارای حالت‌های $\{0, 1, \dots, N\}$ می‌باشد که حالت N یک گره جذب کننده می‌باشد و حالت 0 یک گره بازتابنده (Reflecting) به این صورت می‌باشد که با احتمال q در همان گره می‌ماند و با احتمال p به گره بعدی (۱) می‌رود. بقیه گره‌ها مشابه حالت Gambler's Ruin می‌باشد.

- (آ) احتمال رسیدن به گره N را با شروع از حالت k که $0 \leq k < N$ ، بدست آورید.
- (ب) با فرض $p = q$ مقدار متوسطی زمانی که لازم است که با شروع از حالت k که $0 \leq k < N$ ، به خانه N برسید را بدست آورید.

۴. قمارباز بازنده (۱۰ نمره)

یک زمین مستطیلی به طول N خانه و عرض M خانه را در نظر بگیرید. یک موش کور در یک خانه از این زمین قرار گرفته و میخواهد هرچه سریعتر از این زمین خارج شود. ولی به دلیل اینکه شناختی از محیط ندارد و نمیتواند ببیند تصمیم میگیرد با احتمالات $(u, d, l, r) = (0.2, 0.15, 0.35, 0.3)$ به چهار جهت زمین حرکت کند بلکه به یک ضلع از زمین برسد و از زمین خارج شود. اگر در ابتدا موش کور در خانه (a, b) قرار گرفته باشد. موارد زیر را حساب کنید:

- (آ) احتمال خارج شدن از زمین
- (ب) مقدار زمانی که طول میکشد تا موش کور از زمین خارج شود.

۵. قمارباز بازنده (۱۰ نمره)

یک فرایند تولد و مرگ را در نظر بگیرید که برای $i = 1, \dots, N - 1$ داشته باشیم $b_i = ib$ و برای $i = 1, \dots, N$ داشته باشیم $d_i = id$ که متغیرهای b و d مثبت و برایشان شرط $N \leq b + d$ صادق باشد. میانگین جمعیت بعد از n واحد زمانی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mu(n) = \sum_{i=0}^N ip_i(n)$$

(آ) رابطه زیر را اثبات کنید:

$$\mu(n+1) = (1+b-d)\mu(n) - bNp_N(n)$$

- (ب) با کمک رابطه بازگشتی بالا یک کران بالا برای $\mu(n)$ بدست آورید و حد $\mu(n)$ را در حالتی که $b < d$ باشد بدست آورید.