

## بهینه‌سازی محدب ۱ (۱-۲۵۷۵۶)

تمرین کامپیوتری سری اول

ترم بهار ۱۴۰۱-۰۲

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

استاد: دکتر محمدحسین یاسائی میبدی

مهلت تحویل: جمعه ۱۸ فروردین ۱۴۰۲، ساعت ۲۳:۵۹

(\*) مسائلی که با ستاره مشخص شده‌اند امتیازی هستند و حل کردن آن‌ها نمره‌ی امتیازی خواهد داشت!

### ۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

یکی از کاربردی‌ترین مسائل در استفاده‌های عملی جبر خطی، پیدا کردن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس است. روش‌هایی که در تئوری برای این مسئله ارائه می‌شوند، با وجود اینکه جواب دقیقی برای مقادیر ویژه می‌دهند، اما از لحاظ پیاده‌سازی پیچیده بوده و معمولاً الگوریتم‌هایی زمان‌بر هستند. به همین دلیل الگوریتم‌های تقریبی برای این مسئله ارائه شده‌اند که مقادیر ویژه را با تقریب خوبی در زمانی مناسب به دست می‌آورند. یک روش برای پیدا کردن تقریبی مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس، استفاده از تجزیه‌ی QR است، که در آن به صورت iterative می‌توان مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس را یافت.

۱. درباره‌ی این الگوریتم تحقیق کنید و آن را شرح دهید.

۲. به کمک این الگوریتم و با استفاده از زبان پایتون، تابعی را پیاده‌سازی کنید که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس  $A$  را با تقریب خوبی پیدا کند. خروجی این تابع باید آرایه‌ای از مقادیر ویژه بوده که به صورت نزولی مرتب شده‌اند و بردارهای ویژه با ترتیبی متناظر با مقادیر ویژه در آرایه‌ای دیگر قرار بگیرند.

۳. درباره‌ی محدودیت‌های این الگوریتم و الگوریتم‌های تقریبی دیگر برای تخمین مقادیر و بردارهای ویژه تحقیق کنید.

### ۲ SVD و پردازش تصویر

در این سوال قصد داریم به بررسی کاربرد SVD به عنوان ابزاری برای به دست آوردن پایه‌ی ماتریس در پردازش تصاویر دیجیتال بپردازیم.

۱. اولین مسئله‌ای که بررسی می‌کنیم، فشردن تصاویر است. برای این کار در حالت کلی می‌توانیم اطلاعات داخل تصویر را به صورت یک ماتریس داده در نظر بگیریم، سپس به شیوه‌ای مناسب برای این ماتریس اطلاعاتی بیابیم و با تصویر کردن ماتریس اولیه بر بردارهای پایه‌ی مهم‌تر و نگه داشتن اطلاعات لازم، تصویر اولیه را با اطلاعات کمتری نمایش دهیم. این فرآیند منجر به فشردن تصاویر می‌شود. لازم به ذکر است که برای سادگی، تصاویر مورد بررسی ما در این تمرین به صورت سیاه و سفید در نظر گرفته می‌شوند، اما روش‌های مورد بررسی به سادگی و با تعمیم مناسب روی تنسورهای تصاویر چندکاناله (رنگی) هم قابل پیاده‌سازی هستند.

به کمک SVD می‌توانیم برای فضای ستونی ماتریس تصویر مورد نظرمان پایه‌ای بیابیم که ستون‌های ماتریس تصویر بیشترین همبستگی را با بردارهای پایه داشته باشند. از نگاه دیگر، این پایه‌ها اگر به ترتیب نزولی اندازه‌ی مقادیر تکیه در نظر گرفته شوند، شامل کلی‌ترین اطلاعات ستون‌های تصویر خواهند بود، بنابراین با نگه داشتن تنها  $r$  ستون ابتدایی از پایه‌های یافته شده  $(U)$  به همراه بردارهای ترکیبی  $(V^T)$  و مقادیر تکیه  $(\Sigma)$  متناظر با آن‌ها می‌توانیم با تقریب خوبی کلیتی از شمای تصویر

را حفظ کنیم. از نگاه تخصصی بازسازی صورت گرفته در واقع نوعی بازسازی ماتریس اولیه در مرتبه‌ی پایین‌تر (low rank approximation) است. مقدار  $r$  نیز در این دیدگاه، پارامتر کنترل میزان فشرده‌سازی مورد نظرمان است.

در این قسمت عملیات فشرده‌سازی بر روی تصویر سیاه و سفید ورودی و به کمک تجزیه‌ی SVD را پیاده‌سازی کنید. یکی از راه‌های مقایسه‌ی کیفیت تصویر اولیه و نهایی معیار PSNR است. درباره‌ی این معیار تحقیق کنید و نمودار PSNR برحسب  $r$  های مختلف را رسم کنید، سپس با دادن چند ورودی آزمایشی و رسم خروجی‌ها نتایج را با نمودار مقایسه کنید. یکی از ورودی‌هایی که به تابع می‌دهید باید تصویر q2\_pic.jpg باشد.

۲. مسئله‌ی دیگری که می‌توانیم با ایده‌ای مشابه از کاربرد تبدیل پایه بررسی کنیم، حذف نویز از تصاویر است. در شرایطی که نویز موجود در تصویر یکنواخت و به صورتی باشد که اطلاعات کلی موجود در تصویر را مخدوش نکند، از نگاه SVD با توجه به بررسی اطلاعات کلی، جهت بردار تصویر بر پایه‌های دارای مقادیر تکیه بزرگ‌تر تغییر چندانی نکرده و حذف اطلاعات مربوط به بردارهای دارای اهمیت کمتر می‌تواند موجب حذف نویز و نگه‌داشتن اطلاعات اصلی تصویر شود.

در این قسمت دو نویز مختلف salt and pepper و نویز گوسی با دامنه‌ای دلخواه و مناسب به تصویر q2\_pic.jpg اضافه کنید به طوری که PSNR هر دو تصویر ابتدا در یک حدود باشد، سپس به کمک تجزیه‌ی SVD فرآیند کاهش نویز را انجام دهید. برای هر دو نویز نمودار PSNR برحسب  $r$  های مختلف را رسم کنید، سپس با رسم تعدادی از خروجی‌ها نتایج را با نمودار مقایسه کنید. این روش برای از بین بردن کدام یک از نویزها موثرتر است؟

### ۳ کاهش بُعد داده‌ها با روش PCA

در این پرسش می‌خواهیم با یکی از مهم‌ترین روش‌های کاهش بُعد داده‌ها آشنا شویم و در نهایت آن را روی یکی از مجموعه‌داده‌های مطرح اجرا کنیم و نتیجه را بررسی کنیم. همان‌طور که می‌دانید اغلب داده‌هایی که در مسائل مختلف آماری و یادگیری ماشین به آن‌ها برخورد می‌کنیم، در ابعاد بسیار بالایی قرار دارند و در نتیجه کار کردن با آن‌ها در مقایسه با داده‌هایی که در ابعاد پایین‌تری قرار دارند سخت‌تر خواهد بود. بنابراین الگوریتم‌هایی تحت عنوان **کاهش بُعد** وجود دارد که سعی می‌کنند داده‌های مساله را به ابعاد پایین‌تر منتقل کنند به طوری که ویژگی‌ها و اطلاعات اصلی این داده‌ها از بین نرود. در این پرسش یکی از معروف‌ترین الگوریتم‌های این حوزه یعنی **تحلیل مؤلفه‌های اصلی** (Principal Component Analysis) که به PCA معروف است را معرفی کنیم. فرض کنید مجموعه‌ای از  $m$  داده به صورت  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  با این فرض که به ازای هر  $i \in [m]$  داریم  $x_i \in \mathbb{R}^n$  در اختیار ماست، به عبارت دیگر هر داده  $n$  ویژگی دارد. ماتریس  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  را به این صورت تعریف می‌کنیم که ستون  $i$ -ام این ماتریس داده‌ی  $i$ -ام یعنی  $x_i$  است. هدف از الگوریتم‌های کاهش بُعد این است که مجموعه‌داده‌ی موردنظر را در ابعاد پایین‌تری نسبت به ابعاد اصلی آن نشان دهد به طوری که ویژگی‌های اصلی از بین نروند.

در روش PCA ما به دنبال پیدا کردن ماتریس تبدیل  $W$  هستیم. به طوری  $x'_i = Wx_i$  تبدیل داده‌ی  $x_i$  به فضای با بُعد پایین‌تر توسط ماتریس  $W$  است. این ماتریس را می‌توان با روش‌های مختلفی بدست آورد و ما در این سوال روشی که مبتنی بر تجزیه‌ی SVD است را معرفی می‌کنیم. مطابق توضیحات داده‌شده به دنبال پیدا کردن  $n < l$  مؤلفه‌ی اصلی هستیم، به طوری که با تبدیل مجموعه‌ی داده به فضای این مؤلفه‌های اصلی، بُعد مسئله را کاهش دهیم. ماتریس  $\bar{X}$  در واقع ماتریس میانگین است یعنی شامل  $m$  ستون است که هر ستون بردار میانگین داده‌ها  $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$  است. ماتریس داده‌ی نااریب  $\tilde{X}$  را به شکل  $\tilde{X} = X - \bar{X}$  تعریف می‌کنیم، سپس تجزیه‌ی SVD را روی ماتریس کواریانس ماتریس  $\tilde{X}$  اعمال می‌کنیم. با این کار سه ماتریس  $U$ ,  $\Sigma$ ,  $V$  خواهیم داشت (ماتریس کواریانس  $C$  ماتریسی است که عنصر  $i, j$  آن میزان همبستگی عنصر داده  $i$  و  $j$  را نشان می‌دهد). ادعا می‌کنیم که ماتریس  $U$  می‌تواند یک پایه برای فضای مقصد (فضای مؤلفه‌های اصلی) باشد.

۱. ماتریس کواریانس مجموعه‌داده‌ها چه ارتباطی با  $\tilde{X}$  و به صورت کلی‌تر با پارامترهای خروجی تجزیه‌ی گفته‌شده دارد؟

۲. با توجه به تعریف‌های ارائه‌شده بگویید چرا ادعای مطرح‌شده درست است و در حالت کلی‌تر سه ماتریس  $U$ ,  $\Sigma$ ,  $V$  هر کدام در این مسئله چه مفهومی دارند؟

۳. با در اختیار داشتن سه ماتریس  $U$ ,  $\Sigma$ ,  $V$ ، روشی برای تبدیل بُعد مسئله به یک بُعد مشخص مانند  $l$  به طوری که  $l < n$  پیشنهاد دهید.

۴. (\*) الگوریتمی دیگر برای این کار مبتنی بر روش‌های جبر خطی را معرفی کرده و توضیح دهید.

۵. به کمک توضیحات داده‌شده، کد الگوریتم PCA را به کمک کتابخانه numpy پیاده‌سازی کنید. مجموعه‌داده‌ای که در اختیار شما قرار دارد، مجموعه‌داده‌ی Iris است که حاوی اطلاعات ۱۵۰ گل است و هر گل با ۴ ویژگی معرفی شده‌است. شما باید فضای مسئله را به ۲ بُعد ببرید، به این معنا که هر گل با دو ویژگی مشخص شود و سپس در نهایت نمودار این

مجموعه‌ی داده را در فضای به‌دست آمده رسم کنید به‌طوری که رنگ هر نقطه، نوع گل باشد. سپس بگویید آیا این نمودار با نتیجه‌ای که انتظار داشتید مطابقت دارد؟