



سازمان صنایع دریایی
گروه صنایع شهید قربانی

دستیابی به دانش فنی تهیه و تولید نقشه‌های گرادیان گرانش

---	کد سند:	---	نام طرح:
---	تاریخ صدور:	---	شماره ویرایش:
---	طبقه‌بندی:	---	تعداد صفحات:
نام و امضاء سرطراح / مدیر طرح	نام و امضاء مدیر گروه	نام و امضاء ناظر فعالیت	نام و امضاء مجری فعالیت
در فعالیت‌های طراحی سرطراح و در فعالیت‌های اجرائی مدیر طرح	---	---	---

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ



بسمه تعالیٰ

گروه صنایع شهید حسن قربانی

شناختنامه گزارش پژوهش

دستیابی به دانش فنی تهیه و تولید نقشه‌های گرادیان گرانش		عنوان (فارسی-لاتین):
Achievement of technical knowledge of Preparation and Generation of the Gravity Gradient Maps		
اول	ویراست:	محمد محمدی مسئول:
۹۱	تعداد برگ:	محمد محمدی همکاران:
دستورالعمل	نوع گزارش:	محمد محمدی مشاوران:
محرمانه	طبقه بندی:	محمد محمدی مدیر گروه:
۱۴۰۲/۰۷/۲۰	تاریخ ابلاغ:	محمد محمدی مدیر طرح:
۱۴۰۲/۱۰/۰۵	تاریخ اتمام:	طرح:
	کد فعالیت:	شماره ثبت:

کلمات کلیدی: گرادیان گرانش، مدل‌های گرانشی، EGM96، GTOPO30، EGM2008، دستگاه گرادیان سنج گرانش.

چکیده:

در این گزارش دستیابی به دانش فنی تهیه و تولید نقشه‌های گرادیان گرانش مورد تشریح قرار گرفته است. به این منظور ابتدا به تعاریف و مفاهیم موردنیاز در حوزه‌ی ژئودزی پرداخته شد. سپس مدل‌های گرانشی زمین مورد بررسی قرار گرفته و ویژگی‌های دو مدل پرکاربرد، یعنی EGM96 و EGM2008 توصیف گردید. در ادامه چگونگی بسط میدان‌های گرانشی بر حسب هارمونیک‌های کروی تشریح شده و خواص این توابع آورده شد. در این راستا جایگاه بکارگیری مدل‌های گرانشی در بسط پتانسیل گرانش و گرادیان گرانش مشخص گردید. سپس منابع لازم برای تولید نقشه در این گزارش معرفی شده و جایگاه نقشه‌های تولیدشده توسط این منابع در مقایسه با نقشه‌های حاصل از پیمایش زمین مورد تحلیل قرار گرفته است. پس از آن، چگونگی حصول داده‌های منابع لازم برای تولید نقشه، از طریق وب‌سایت سازمان‌های بین‌المللی بصورت جزئی توصیف شده است. سپس به تشریح جزئی و خط به خط کُدهای نوشته شده برای استخراج و شبیه‌سازی نقشه‌های گرادیان گرانش پرداخته شد. در انتها پس از صحت‌سنجی عملکرد کُدها، نتایج شبیه‌سازی برای دو منطقه، یکی در آبهای آزاد دریای عمان و دیگری در منطقه خشکی محدوده استان اصفهان، آورده شده است.

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

۵	مقدمه
۳	۱ تعاریف و مفاهیم
۳	۱-۱ پتانسیل گرانشی، شتاب گرانشی
۴	۱-۲ ژئوید و بیضی رفرنس زمین
۷	۱-۳ مدل بیضی رفرنس WGS84 و تبدیل بیضی-ژئوید
۱۱	۱-۴ گرادیان گرانش
۱۳	۱-۵ ناهمجاري گرانشی زمین
۱۳	۱-۶ ناهمجاري گرانشی در زیر دریا
۱۴	۱-۷ گرادیان گرانش حاصل از منشور مستطیلی
۱۹	۲ مدل‌های گرانشی زمین
۲۱	۲-۱ مدل گرانشی ۱۹۹۶ (EGM96)
۲۴	۲-۲ مدل گرانشی EGM2008
۲۶	۳ پتانسیل گرانشی و گرادیان گرانش بر حسب هارمونیک‌های کروی
۲۹	۳-۱ بسط گرادیان گرانش
۳۳	۴ دروش پار کو توسعه یافته
۴۰	۵ تولید نقشه‌های گرادیان گرانش
۴۰	۵-۱ مقدمه
۴۱	۵-۲ هنر تولید نقشه
۴۲	۵-۳ اثر ارتفاع بر نقشه گرادیان گرانش
۴۳	۵-۴ فایل مدل گرانشی زمین
۴۶	۵-۵ معرفی و توضیح مدل عوارض زمین
۵۶	۶ تشریح کُدنویسی
۵۶	۶-۱ تشریح کُد گرادیان گرانش ناشی از عوارض (متدهای پارکر)



۱-۱-۶ بخش اول: وارد کردن فایل داده‌های ارتفاعی در محدوده موردنظر برای نقشه و یافتن میانگین ارتفاع	۵۴
۱-۶ بخش دوم: محاسبه شاعع زمین در نقطه مرکزی شبکه	۵۶
۱-۶-۱ بخش سوم: محاسبه گردایان‌های با روش پارکر	۵۸
۱-۶-۲ بخش چهارم: ذخیره‌سازی نتایج	۶۰
۱-۶-۳ تشریح گد گردایان گرانش حاصل از مدل گرانشی <i>EGM96</i>	۶۲
۱-۶-۴ بخش اول: وارد کردن فایل داده مدل گرانشی و ضرایب پتانسیل نرمال	۶۲
۱-۶-۵ بخش دوم: مشبندی محدوده مسئله و تبدیل به مختصات کروی	۶۴
۱-۶-۶ بخش سوم: تعریف ضرایب بکاررفته در معادلات گردایان گرانش و تابع لزاندر نرمالیزه	۶۶
۱-۶-۷ بخش چهارم: تعریف روابط گردایان گرانش و محاسبه در نقاط مشبندی	۶۷
۱-۶-۸ بخش پنجم: ذخیره‌سازی نتایج	۶۸
۱-۷ نتایج شبیه‌سازی	۷۱
۱-۷-۱ منطقه‌ای در آب‌های آزاد (دریای عمان)	۷۱
۱-۷-۲ منطقه‌ای در خشکی (استان اصفهان)	۷۶
۱-۸ مراجع	۸۲

فهرست شکل‌ها

صفحه

عنوان

شکل ۱- تفاوت مفهوم <i>gravitation</i> و <i>gravity</i> ۴
شکل ۲- توصیفی اغراق‌آمیز از ژئوید، بیضی رفرنس و توپوگرافی زمین ۶
شکل ۳- تعریف سه ارتفاع ژئودتیک، ارتو متريک و ژئویدی ۶
شکل ۴- تعریف عرض جغرافیایی ژئودتیک و ژئوستتریک در فریم رفرنس بیضی WGS84؛ راست: برای نقطه‌ای بر روی سطح بیضی رفرنس؛ چپ: برای نقطه‌ای در بالای بیضی رفرنس ۹
شکل ۵- سیستم مختصات بیضوی و پارامترهای آن ۹
شکل ۶- مفهوم بردارهای گرانش و گرادیان گرانش ۱۲
شکل ۷- مدل محاسبه ناهنجاری گرانشی ۱۴
شکل ۸- هندسه مسئله محاسبه‌ی گرادیان گرانش ناشی از یک منشور مستطیلی ۱۵
شکل ۹- مکعب مستطیل فرضی بر روی یک صفحه ۱۶
شکل ۱۰- نقشه گرادیان گرانش بر روی صفحه‌ای با فاصله ۵۰ متر بالاتر از مکعب مستطیل فرضی ۱۷
شکل ۱۱- نوسانات مدل ژئوید EGM96 نسبت به بیضی WGS84 ۲۲
شکل ۱۲- نقشه گرادیان‌های گرانش بر طبق مدل EGM96 بر روی سطح زمین ۲۳
شکل ۱۳- نمایی مفهومی از عوارض بر فراز ژئوید ۳۴
شکل ۱۴- معرفی نمادها در روابط پارکر ۳۶
شکل ۱۵- مثالی از شبکه ارتفاع ۳۷
شکل ۱۶- گرادیان گرانش شرق-پائین در سه ارتفاع مختلف ۴۲
شکل ۱۷- نقشه Γ_{DD} در چهار ارتفاع مختلف ۴۳
شکل ۱۸- قسمتی از فایل gfc. مربوط به مدل EGM96 دانلود شده از سایت ICGEM ۴۴
شکل ۱۹- قسمتی از فایل gfc. مربوط به مدل EGM96 دانلود شده از سایت NGA ۴۵
شکل ۲۰- تصویری از صفحه سایت Earthexplorer که در آن داده‌های ارتفاعی زمین نیز ارائه می‌شود ۴۶
شکل ۲۱- گزینه‌های مختلف داده‌های ارتفاعی در سایت Earthexplorer ۴۷
شکل ۲۲- منابع تولید داده‌های GTOPO30 برای نقاط مختلف جهان ۴۷
شکل ۲۳- بلوک‌بندی جهان در مدل GTOPO30 ۴۸
شکل ۲۴- نمادگذاری و روابط برای تعیین طول و عرض متری منطقه‌ی موردنظر ۵۷



شکل ۲۵- یافتن شماره سطر ماتریس گرانشی از روی n و m ۶۴
شکل ۲۶- مقادیر نمونه مشبندی طول و عرض ژئوستتریک محدودهی خاص برحسب رادیان ۶۵
شکل ۲۷- منطقه موردنظر در آب‌های آزاد در دریای عمان ۷۱
شکل ۲۸- تنظیمات محاسبه مؤلفه T_{rr} گرادیان گرانش در سایت <i>ICGEM</i> ۷۲
شکل ۲۹- صفحه‌ی نتیجه‌ی شبیه‌سازی در سایت <i>ICGEM</i> ۷۳
شکل ۳۰- فایل نتایج مؤلفه T_{rr} گرادیان گرانش در محدودهی موردنظر برحسب طول و عرض جغرافیایی نقاط شبکه ۷۳
شکل ۳۱- مقایسه گرادیان گرانش حاصل از شبیه‌سازی این گزارش (T_{zz}) و شبیه‌سازی سایت (T_{rr}) در سه عرض ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ درجه در سراسر محدودهی طولی موردنظر ۷۴
شکل ۳۲- شش مؤلفه تansور گرادیان گرانش بر فراز منطقه‌ای در دریای عمان ۷۵
شکل ۳۳- فایل داده‌های خروجی شبیه‌سازی دریای عمان ۷۶
شکل ۳۴- منطقه‌ی مورد نظر در سطح خشکی در استان اصفهان و بخش‌هایی از مرکزی و خوزستان ۷۷
شکل ۳۵- نقشه ارتفاعات عوارض منطقه موردنظر در استان اصفهان و حومه ۷۷
شکل ۳۶- شش مؤلفه تansور گرادیان گرانش ناشی از عوارض زمین در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح متوسط عوارض در استان اصفهان ۷۸
شکل ۳۷- شش مؤلفه تansور گرادیان گرانش ناشی از مدل <i>EGM96</i> در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح متوسط عوارض در استان اصفهان ۷۹
شکل ۳۸- شش مؤلفه تansور گرادیان گرانش کامل (ناشی از مدل <i>EGM96</i> و عوارض توپوگرافی) در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح متوسط عوارض در استان اصفهان ۸۰



فهرست جداول

صفحه

عنوان

۸	جدول ۱ - پارامترهای مدل <i>WGS84</i>
۲۳	جدول ۲ - پارامترهای <i>EGM96</i>
۲۹	جدول ۳ - ضرایب ژئوپتانسیل بیضی رفرنس زمین
۳۷	جدول ۴ - مقایسه زمان موردنیاز برای محاسبه گرادیان گرانش برای هریک از روش‌های منشور مستطیلی و پارکر [۱۳]

مقدمه

برای پیاده‌سازی یک سیستم ناویری مبتنی بر گرادیان گرانش زمین، لازم است نقشه‌ی گرادیان گرانش منطقه‌ی موردنابری بدست آید. به این منظور، همه نقشه‌ها قبل از شبیه‌سازی حرکت برای تضمین دستری اآنی به اطلاعات گرادیان گرانش برای الگوریتم تطبیق نقشه در یک دیتابیس ذخیره می‌شوند. در صورتی که برنامه کامپیوتری از مدل *EGM96* و اطلاعات *GTOPO30*، همزمان با الگوریتم *GAME* برای محاسبه گرادیان‌های گرانش موردنیاز استفاده کند، زمان‌های پردازش بطور غیرقابل قبولی طولانی خواهد شد. بنابراین لازم است که یک دیتابیس از مؤلفه‌های گرادیان گرانش از منطقه‌ی مورد ناوبری تهیه شود. اینکار در مرحله‌ی اول به منظور صحت‌سنجی کلی سیستم کمک‌ناوبری، با استفاده از مدل‌های گرانشی موجود انجام می‌گردد ولی در مُد عملیاتی لازم است این دیتابیس از روی داده‌های اندازه‌گیری شده که حاصل پیماش دستگاه گرادیان‌سنج گرانش است تهیه شود. این گزارش به تهیه نقشه‌های گرادیان گرانش از روی مدل‌های گرانشی موجود اختصاص دارد.

امروزه مدل‌های گرانشی جهانی که عمدتاً با استفاده از اندازه‌گیری‌های ماهواره‌ای بدست می‌آیند، بیش از پیش جزئی‌تر و دقیق‌تر می‌شوند. علاوه‌بر این، توپوگرافی جهانی نیز با روش‌های ماهواره‌ای مدرن به صورت مستقل از میدان گرانشی مورد اندازه‌گیری قرار می‌گیرد. بدین منظور از یک طرف، دقت مدل‌های گرانشی باید مورد ارزیابی قرار گیرند و از طرف دیگر باید این مدل‌ها با داده‌های کلاسیک (آنمالی گرانشی) یا داده‌های اخیر (ارتفاعات ژئویدی حاصل از *GPS-levelling* یا حاصل از ارتفاع‌سنجی) ترکیب شوند.

لازم به ذکر است که در گزارش حاضر روند کلی تولید نقشه گرادیان گرانش تشریح شده و در عمل از مدل‌های گرانشی *EGM96* و مدل ارتفاع توپوگرافی *GTOPO30* استفاده شده است. اما می‌توان از سایر مدل‌های نیز در تولید نقشه‌های گرادیان گرانش استفاده کرد.



فصل اول

تعاریف و مفاهیم

۱ تعاریف و مفاهیم

پیش از ورود به مباحث تخصصی تهیه نقشه‌های گردایان گرانش، لازم است تا ابتدا با مفاهیم و ادبیات حوزه‌ی ژئودزی که به این امر اختصاص دارد آشنا شویم. بدین منظور بخش پیش‌رو به معرفی اصطلاحات و مفاهیم موردنیاز در این گزارش پرداخته است.

۱-۱ پتانسیل گرانشی، ستاب گرانشی

پتانسیل یک نقطه در میدان گرانشی بصورت کار انجام‌شده توسط کشش گرانش در واحد جرم برای آوردن یک جسم از بین نهایت به آن نقطه تعریف می‌شود [۱]. پتانسیل یک کمیت اسکالر است. بر طبق قانون گرانش نیوتونی، پتانسیل در یک نقطه در دستگاه کارتزین (x, y, z) ، ناشی از جرمی با چگالی $\rho(x', y', z')$ و حجم v' عبارت است از:

$$W_a = G \iiint_{v'} \frac{\rho(x', y', z')}{r} dx' dy' dz' \quad (1)$$

که در آن $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ بوده و بیانگر فاصله بین نقطه (x', y', z') و نقطه مشاهده (x, y, z) می‌باشد. G ثابت گرانشی نیوتون بوده و برابر با $6.6742 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$ می‌باشد. دیفرانسیل dv' نیز المان حجم بر روی منبع و بوده و برابر است با $dv' = dx' dy' dz'$. بدیهی است که در حالت $\infty \rightarrow r$ ، پتانسیل W_a مانند پتانسیل یک جرم نقطه‌ای که در مکان مرکز جرم موردنظر قرار دارد و جرم آن برابر با کل جرم موردنظر است رفتار می‌کند. می‌توان نشان داد که W_a معادله پواسن را برآورده می‌کند: $\nabla^2 W_a = -4\pi G\rho$. هنگامی که چگالی در نقطه موردمحاسبه صفر باشد (یعنی فضای آزاد در بیرون از جرم)، این معادله تبدیل به معادله لاپلاس می‌شود $\nabla^2 W_a = 0$.

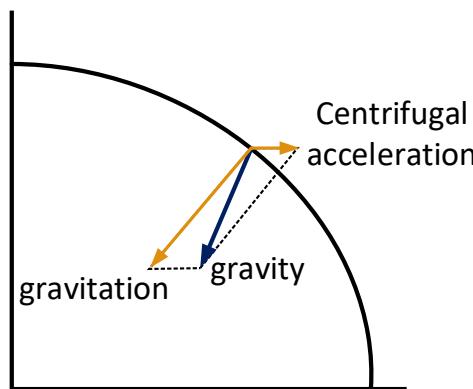
بر روی سطح زمین چرخان، علاوه بر نیروی جاذبه، یک نیروی گریز از مرکز نیز وجود دارد که می‌تواند توسط رابطه زیر بیان شود:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2} \omega^2 d_z^2 \quad (2)$$

که در آن ω سرعت زاویه‌ای زمین و $d_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ فاصله تا محور چرخش (محور z) است. از این رو، پتانسیل W بصورت حاصل‌جمع پتانسیل جاذبه W_a و پتانسیل گریز از مرکز نوشته می‌شود:

$$W = W_a + \Phi \quad (3)$$

به تعبیر دیگر، پتانسیل W_a پتانسیل *Gravitational* نامیده می‌شود و پتانسیل W پتانسیل *gravity* که مختص اشیای بر روی سطح زمین بوده و ترکیبی از بردار گرانش *gravitational* و نیروی گریز از مرکز ناشی از چرخش زمین می‌باشد. در شکل زیر مفهوم این دو کمیت و تمایز بین آن‌ها نشان داده شده است.



شکل ۱- تفاوت مفهوم *gravitation* و *gravity*

این نیروی ترکیبی هنگامی که بر روی واحد جرم اعمال می‌شود، بردار *gravity* را می‌سازد که با g نشان داده می‌شود و بصورت گرادیان پتانسیل W تعریف می‌شود:

$$g = \nabla W = \left[\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right]^T \quad (4)$$

بردار g دارای واحد شتاب است و اندازه رایج این شتاب در سطح زمین نزدیک به 9.8 m/s^2 است. از آنجاکه $\nabla W \equiv g$ است، خصوصیات جبری اپراتور دل (∇) رابطه زیر را بدست می‌دهد:

$$\nabla \times g = \nabla \times (\nabla W) = 0 \quad (5)$$

به چنین میدان‌هایی، میدان کنسرواتیو^۱ گفته می‌شود.

۲-۱ ژئوید و بیضی رفرنس زمین

پتانسیل‌ها می‌توانند با سطوح هم‌پتانسیل توصیف و تصویرسازی شوند. برطبق مبانی توابع هارمونیکی، معلوم‌بودن یک سطح هم‌پتانسیل کافی است تا کل تابع پتانسیل در بیرون آن سطح تعریف شود [۲]. برای کره‌ی زمین، یک سطح هم‌پتانسیل دارای اهمیت خاصی است که آن را ژئوید می‌نامند. عبارت دیگر ژئوید بصورت سطح هم‌پتانسیل میدان گرانشی زمین منطبق با میانگین سطح دریا (MSL^۲) اقیانوس‌ها تعریف می‌شود [۳]. عبارت دیگر، ژئوید معرف سطحی است که بهترین تطبیق را با سطح آب‌های آزاد (بدون شرایط طوفانی،

^۱- *Conservative*

^۲- *Mean Sea Level*



بدون جریان‌های اقیانوسی یا دیگر نیروهای آشفته‌ساز) دارد. در توصیفی دیگر، ژئوید آن سطحی است که نیروی گرانشی در هر نقطه‌ای روی آن عمود بر آن است (ولی نه با تساوی در اندازه) [۲]. برای تعریف سطح ژئوید، بطور ساده می‌توان رابطه ریاضی زیر را نوشت:

$$W(x, y, z) = W_0 = \text{constant} \quad (6)$$

در کاربردهای ژئوفیزیکی، یک بیضی چرخان دوّار با چگالی ثابت برای تقریب زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد و فرض می‌شود سطح این بیضی یک سطح همپتانسیل از یک میدان گرانشی نرمال با پتانسیل U است که پتانسیل سطح آن برابر با پتانسیل سطح ژئوید است؛ یعنی:

$$U(x, y, z) = U_0 = W_0 \quad (7)$$

با این فرض، یک پتانسیل آشفتگی^۱ T تعریف می‌شود که بیانگر تفاضل پتانسیل واقعی W (معادله (۳)) و پتانسیل نرمال U می‌باشد.

$$T = W - U \quad (8)$$

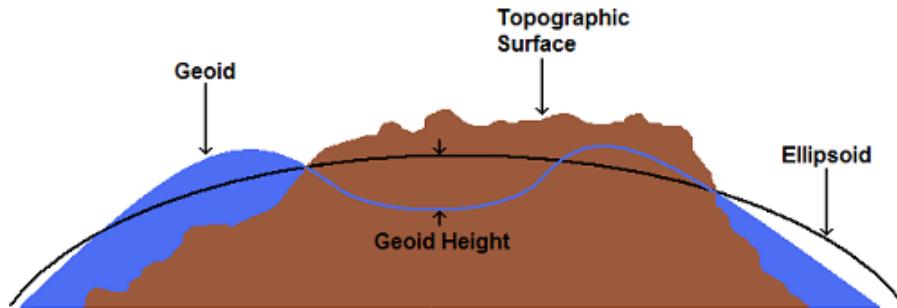
با معرفی پتانسیل نرمال U که سطح همپتانسیل آن یک بیضی است، مختصات بیضوی بصورت (h, ϕ, λ) تعریف می‌شود که h بیانگر ارتفاع از سطح بیضی در راستای عمود بر بیضی است و ϕ عرض بیضوی است و λ نیز طول بیضوی است. این دستگاه مختصات را سیستم رفرنس ژئودتیک^۲ می‌نامند و در ادامه مؤلفه‌های تشکیل‌دهنده‌ی اینها را با نام ارتفاع، عرض و طول ژئودتیک نام خواهیم برد. بدیهی است که در دستگاه مختصات بیضوی اخیر می‌توانیم بنویسیم: $U(h = 0) = U_0 = W_0$ توجه شود که پتانسیل نرمال U به طول بیضوی بستگی ندارد. لذا می‌توانیم معادله (۸) را بصورت زیر بنویسیم:

$$T(h, \phi, \lambda) = W(h, \phi, \lambda) - U(h, \phi) \quad (9)$$

در شکل ۲ توصیفی اغراق‌آمیز از سطح ژئوید به همراه بیضی رفرنس زمین نشان داده شده است. با اینکه سطح ژئوید و بیضی رفرنس در عمل شیوه یکدیگرند، اما بسته به مدل مورداستفاده برای محاسبه ژئوید، سطح ژئوید نسبت به سطح بیضی رفرنس WGS84 تقریباً بین $+85$ متر تا -106 متر تغییر یا نوسان می‌کند [۳۷].

۱- *disturbing potential*

۲- *Geodetic Reference System*



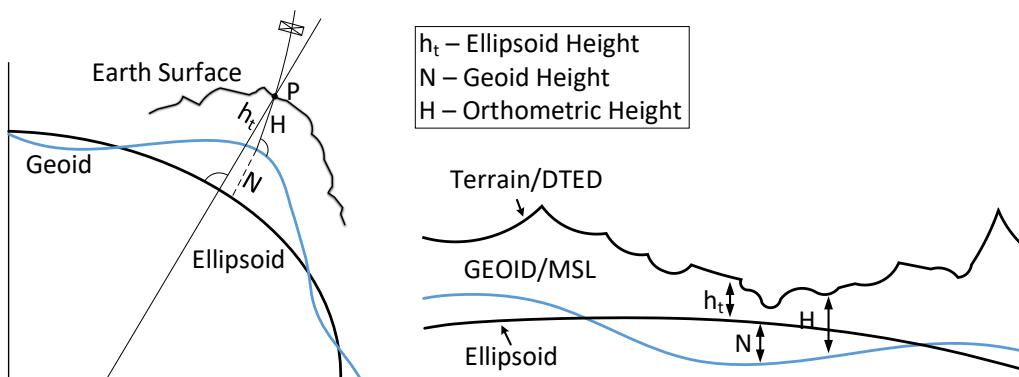
شکل ۲- توصیفی اغراق‌آمیز از ژئوید، بیضی رفرنس و توپوگرافی زمین

حال می‌توانیم سطح ژئوید را در دستگاه رفرنس بیضوی بصورت زیر بنویسیم:

$$W(h = N(\phi, \lambda), \phi, \lambda) = U(h = 0, \phi) = U_0 \quad (10)$$

که در آن $N(\phi, \lambda)$ بیانگر ارتفاع ژئوید از بیضی رفرنس است که این ارتفاع تابع عرض و طول جغرافیایی می‌باشد. بنابراین، N بیانگر نوسانات^۱ سطح ژئوید نسبت به بیضی رفرنس زمین است. بنابراین تا اینجا دو سطح رفرنس تعریف شده است که می‌توان هر نقطه در سطح زمین یا بالای آن را نسبت به هریک از این دو سطح رفرنس بیان کرد.

با توجه به این مطلب، ارتفاع هر نقطه از سطح زمین را (یعنی ارتفاع توپوگرافی زمین) را نسبت به بیضی با h_t و نسبت به ژئوید با H نشان می‌دهیم. اولی را ارتفاع ژئودتیک و دومی را ارتفاع ارتومنتریک^۲ می‌نامند که در شکل زیر در دو حالت نشان داده شده‌اند:



شکل ۳- تعریف سه ارتفاع ژئودتیک، ارتومنتریک و ژئویدی

این ارتفاع‌ها با رابطه تقریبی زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$h_t(\phi, \lambda) \cong H(\phi, \lambda) + N(\phi, \lambda) \quad (11)$$

۱- undulations

۲- ارتفاع ارتومنتریک در اصل فاصله‌ی عمودی در راستای خط شاقول از نقطه‌ی موردنظر تا سطح ژئوید است ولی در اینجا فرض شده است که در راستای عمود بر بیضی است؛ لذا در اینجا H دقیقاً ارتفاع ارتومنتریک نیست [۲].

مشکل اصلی تبدیل ارتفاعات ژئودتیکی (h) حاصل از GPS به ارتفاعات ارتمتریک (H)، تعیین ارتفاع ژئویدی (N) قابل اعتماد است. این ارتفاع ژئویدی را می‌توان با استفاده از روش گرانی سنجی یا یک مدل ژئوپتانسیل جهانی (GGM) بدست آورد. در کشورهای در حال توسعه که قادر یک مدل ژئویدی گرانشی دقیق هستند، ارتفاع ژئویدی حاصل از مدل GGM نقش مهمی در این تبدیل ایفا می‌کند. همانند پتانسیل W در معادله (۳)، پتانسیل نرمال نیز شامل یک جزء ناشی از جاذبه U_a و یک جزء ناشی از اثر گریز از مرکز می‌باشد:

$$U = U_a + \Phi \quad (12)$$

ولذا پتانسیل آشفتگی را می‌توان بصورت زیر نوشت [۲]:

$$T(h, \phi, \lambda) = W_a(h, \phi, \lambda) - U_a(h, \phi) \quad (13)$$

۱-۳ مدل بیضی رفرنس WGS84 و تبدیل بیضی-ژئوید

اصطلاح بیضی سیستم ژئودتیک جهان^۱ مدلی از سطح زمین را بیان می‌کند و به این صورت تعریف می‌شود که مربع میانگین انحراف بین جهت گرانش ظاهری و عمود بر بیضی بر روی سطح زمین مینیموم شود [۴]. مدل‌های متنوعی از بیضی رفرنس برای کره زمین تعریف شده است که کشورهای مختلف از مدل‌های خاصی استفاده می‌کنند. اما در بین این مدل‌ها، مدل WGS84 کاربرد جهانی دارد و یک سیستم موردنسبت توسط جامعه بین‌الملل است، چه اینکه GPS نیز از این مدل استفاده می‌کند.

هریک از مدل‌های بیضی رفرنس چند پارامتر مهم دارند که در بین آن‌ها شعاع بزرگ و شعاع کوچک بیضی که به ترتیب شعاع استوایی a (که گاهی با R_E نیز نمایش داده می‌شود) و شعاع قطبی b (که گاهی با R_N نیز نمایش داده می‌شود) نامیده می‌شوند جزو مهم‌ترین پارامترها هستند.

پارامتر دیگر بالاهمیت در مدل‌های بیضی رفرنس، پارامتر پختگی (flattening) است که بصورت $f = \frac{a-b}{a}$ تعریف می‌شود. پارامتر مهم دیگر میزان خروج از مرکز^۲ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (14)$$

با محاسبات ساده می‌توان رابطه‌ی مربع خروج از مرکز را برحسب میزان پختگی (f) بصورت زیر نوشت:

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (15)$$

^۱-World Geodetic System Ellipsoid

^۲- eccentricity



در مدل بیضی رفرانس WGS84 هریک از پارامترهای فوق در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱- پارامترهای مدل WGS84

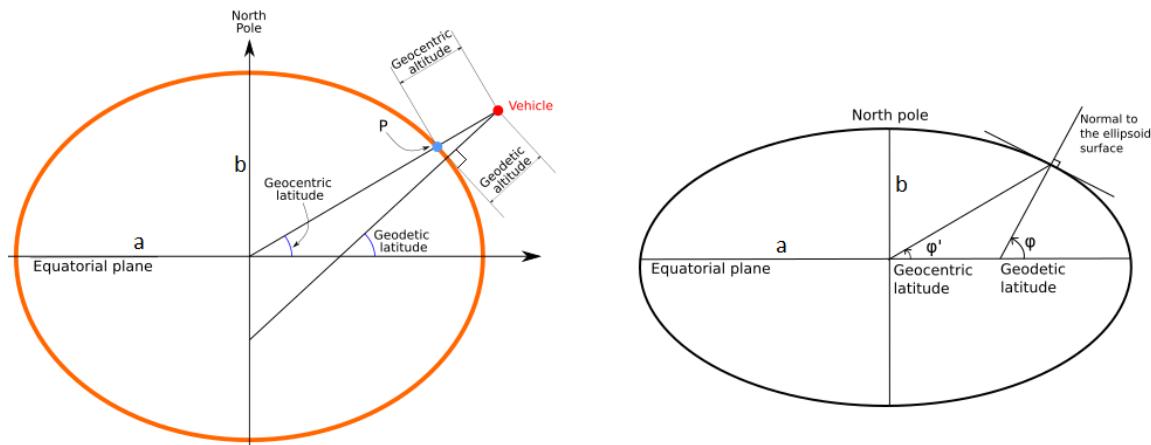
نام پارامتر	علامت	مقدار (متر)
ثابت گرانش	GM	398600.4418×10^9
شعاع بزرگ	a	6,378,137
پیچ شدگی	f	1/298.257223563

در اینجا لازم است دو کمیت عرض ژئودتیک/ژئوستراتیک و ارتفاع ژئودتیک/ژئوستراتیک تعریف شود. در فرمول‌های مربوط به پتانسیل گرانشی و مشتقات آن که بر حسب هارمونیک‌های کروی بیان می‌شوند، مختصات یک نقطه بر اساس دستگاه کروی بیان می‌شود (سیستم ژئوستراتیک) در حالیکه در ادبیات جغرافیایی مختصات یک نقطه در دستگاه بیضوی تعریف می‌شود (ژئودتیک). به این منظور باید تبدیل ایندو دستگاه به یکدیگر را دانست.

عرض ژئودتیکی یا عرض بیضوی (ϕ) به صورت زاویه بین صفحه استوایی و سطح نرمال در یک نقطه بر روی بیضی تعریف می‌شود، در حالی که عرض ژئوستراتیک (φ) به صورت زاویه بین صفحه استوایی و یک خط شعاعی که مرکز بیضی را به نقطه‌ای از سطح متصل می‌کند، تعریف می‌شود. هنگامی که در بیان عرض جغرافیایی تصريح نشود، منظور عرض جغرافیایی ژئودتیک است. به عنوان مثال، عرض جغرافیایی مورد استفاده در GPS از نوع ژئودتیک است.

ارتفاع (h) ژئودتیکی بصورت ارتفاع از بالای سطح بیضی رفرانس و عمود بر آن تعریف می‌شود؛ در حالیکه ارتفاع ژئوستراتیک بصورت فاصله از سطح بیضی رفرانس در راستای خط شعاعی به مرکز زمین تعریف می‌گردد. اینجا هم در صورتی که تصريح نشود، منظور از ارتفاع، ارتفاع ژئودتیکی است (چنانکه در هوانوردی استفاده می‌شود). ارتفاع ژئوستراتیک بیشتر در مکانیک سماوی استفاده می‌شود.

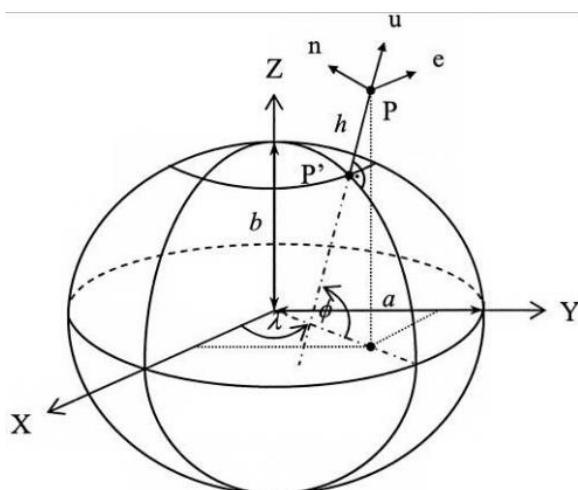
تعریف عرض و ارتفاع ژئودتیک و ژئوستراتیک به صورت شماتیک بر روی بیضی رفرانس زمین در شکل ۴ در دو حالت برای نقطه‌ای در سطح زمین و نقطه‌ای در بالای سطح زمین نشان داده شده است.



شکل ۴- تعریف عرض جغرافیایی ژئودتیک و ژئوستراتیک در فریم رفرنس بیضی WGS84؛ راست: برای نقطه‌ای در بالای بیضی رفرنس؛ چپ: برای نقطه‌ای در نزدیکی سطح

لازم به ذکر است که طول جغرافیایی (λ) ژئودتیک و ژئوستراتیک با هم یکسان هستند و بصورت زاویه بین نصف‌النهار گرینویچ با نصف‌النهار عبور کننده از نقطه‌ی مورد نظر، بر روی صفحه‌ی استوا تعریف می‌شود.

با این توضیحات، مختصات یک نقطه در فضا را (λ, φ, h) نشان می‌دهند که در سیستم ژئودتیکی، عرض جغرافیایی ژئودتیک، طول جغرافیایی و ارتفاع ژئودتیک هستند و در سیستم ژئوستراتیک نیز متناظر می‌باشند. در شکل زیر می‌توان نشانه گذاری ژئودتیک را به همراه دستگاه کارتزین مشاهده کرد:



شکل ۵- سیستم مختصات بیضوی و پارامترهای آن

همین مختصات می‌تواند بصورت ژئوستراتیک هم تعریف شود. لذا باید دید در هر کاربرد، کدام یک از حالت‌های ژئودتیک یا ژئوستراتیک مدنظر است.

گاهی لازم است مختصات یک نقطه در **دستگاه کارتزین (X,Y,Z)** بیان شود. این دستگاه با نام سیستم مختصات **ECEF**^۱ نامیده می‌شود چراکه به همراه محور گردش اسپینی زمین می‌چرخد و لذا یک نقطه ثابت در سطح زمین مختصات ثابتی در این سیستم خواهد داشت. در حالت کلی این سیستم مختصاتی دارای چهار خاصیت زیر است:

۱. مرکز آن منطبق بر مرکز زمین است (لذا چنانکه خواهیم دید در تبدیلات به کارتزین از مختصات ژئوستراتیک استفاده می‌شود).
۲. محور Z آن در طول محور اسپینی زمین است که به قطب شمال اشاره دارد. عبارت دیگر، محور Z با موقعیت متوسط محور چرخش زمین تطابق دارد.
۳. محور X آن در طول و عرض جغرافیایی صفر سطح زمین را قطع می‌کند. عبارت دیگر محور X از محل تقاطع نصف‌النهار گرینویچ و دایره استوا عبور می‌کند
۴. محور Y عمود بر جهت دو محور دیگر است و از قانون دست راست بدست می‌آید. به این صورت که از محل تقاطع نصف‌النهار 90° درجه شرقی با دایره استوا عبور می‌کند در شکل ۵ مختصات کارتزین ECEF نیز نشان داده شده است.

با داشتن مربع خروج از مرکز (e^2) می‌توان عرض ژئودتیک (ϕ) را به عرض ژئوستراتیک (φ) تبدیل کرد:

$$\varphi = \tan^{-1}[(1 - e^2) \tan \phi] \quad (16)$$

پارامتر دیگری نیز تعریف می‌شود به نام شعاع نرمال اینجا^۲ که با رابطه‌ی زیر از روی عرض ژئودتیک بدست می‌آید:

$$\nu = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (17)$$

با داشتن این شعاع می‌توان مختصات موجود ژئودتیک را به مختصات کارتزین ECEF تبدیل کرد

[۱۹۵، ص ۱]

$$\begin{cases} X_{ECEF} = (\nu + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y_{ECEF} = (\nu + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z_{ECEF} = (\nu(1 - e^2) + h) \sin \phi \end{cases} \quad (18)$$

در فرمول فوق h همان ارتفاع ژئودتیکی است.

۱- Earth Central Earth Fixed

۲- radius of curvature in the prime vertical

از طرف دیگر می‌توان مختصات ژئوستتریک را به مختصات کارتزین ECEF تبدیل کرد:

$$\begin{cases} X_{ECEF} = r \cos \varphi \cos \lambda \\ Y_{ECEF} = r \cos \varphi \sin \lambda \\ Z_{ECEF} = r \sin \varphi \end{cases} \quad (19)$$

حال از اینجا می‌توان r را با رابطه زیر تعریف کرد [۱، ص ۱۹۸]. این کمیت در فرمول‌های گرادیان گرانش بکار می‌رود.

$$r = \sqrt{X_{ECEF}^2 + Y_{ECEF}^2 + Z_{ECEF}^2} \quad (20)$$

همچنین می‌توان عرض ژئوستتریک را علاوه بر رابطه (۱۶)، از رابطه زیر بدست آورد:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{Z_{ECEF}}{\sqrt{X_{ECEF}^2 + Y_{ECEF}^2}} \quad (21)$$

۴-۱ گرادیان گرانش

گرادیان گرادیان پتانسیل آشفتگی (معادله (۸)) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (22)$$

در روابط بالا بعنوان مثال T_{xx} عبارت است از تغییر gravity در جهت x هنگامی که به اندازه مشخصی در جهت x جابجا شوید؛ و T_{xy} عبارت است از تغییر gravity در جهت x هنگامی که به اندازه مشخصی در جهت y جابجا شوید. مابقی مؤلفه‌ها هم به همین صورت تعریف می‌شوند.

با استفاده از معادله (۵) می‌توان اثبات کرد که ماتریس گرادیان ناهنجاری گرانشی (معادله (۲۲)) دارای ترم‌های متقارن بصورت زیر است [۵]:

$$T_{xy} = T_{yx} \quad (23)$$

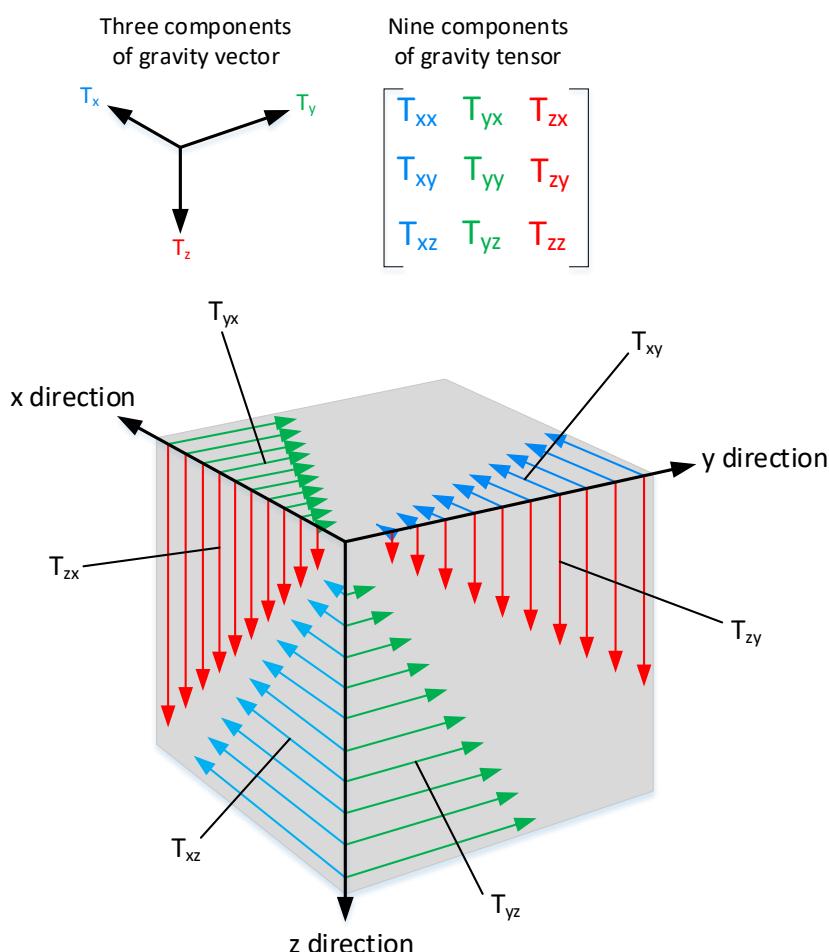
$$T_{xz} = T_{zx} \quad (24)$$

$$T_{yz} = T_{zy} \quad (25)$$

علاوه بر این، چون چگالی زمین بسیار بیشتر از اتمسفر است، با اعمال معادله لابلانس به پتانسیل ناهنجاری گرانشی، مجموع مقادیر قطر اصلی ماتریس گرادیان ناهنجاری گرانش برابر با صفر می‌شود؛ یعنی:

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0 \quad (26)$$

بنابراین از بین ۹ مؤلفه‌ی ماتریس گرادیان ناهنجاری گرانشی، ما ۵ مؤلفه‌ی مستقل داریم. این پنج گرادیان مستقل یک اثر انگشت منحصر به فرد برای تمام مناطق زمین فراهم می‌کنند [۶-۷]. در شکل زیر به صورت شماتیک مفهوم بردار گرانش و تانسور گرادیان گرانش نشان داده شده است.



شکل ۶- مفهوم بردارهای گرانش و گرادیان گرانش

توجه شود که دستگاه گرادیان سنج گرانش، گرادیان‌های گرانش واقعی (حاصل از W) را اندازه می‌گیرد در حالیکه گرادیان‌های نرمال یا نامی U_{ij} که از پیش مشخص هستند تغییرات فضایی اندکی دارند و عموماً بصورت یک بایاس ثابت با آن رفتار می‌شود. به همین دلیل محاسبه تانسور گرادیان اختلال *gravitational* مورد تمرکز این گزارش قرار دارد.

نقشه‌های گرادیان گرانش مزیت‌های بارزی نسبت به نقشه‌های گرانش دارند. نقشه گرانشی تنها سه مؤلفه نیروی گرانشی در شمال، شرق و بالا را می‌دهد درحالی که نقشه گرادیان گرانش شامل پنج مؤلفه مستقل می‌باشد. درنتیجه نقشه‌های گرادیان گرانش اطلاعات شفاف‌تر و جزئی‌تری را فراهم می‌کنند. تغییرات در

نقشه‌های گرانش نسبتاً دقیق‌تر هستند. علاوه بر این، نقشه‌های گرادیان گرانش تحت تأثیر نویز ناشی از حرکت نامنظم دستگاه قرار نمی‌گیرند زیرا تکنیک اختلاف گیری بین سنسورها، این خط را حذف خواهد کرد [۸]. در آخر توجه به واحد گرادیان گرانش نیز مهم است. از آنجاکه گرادیان‌های گرانش، بیانگر مشتقات فضایی گرانش هستند، و واحد گرانش نیز m/s^2 است، درنتیجه تقسیم آن بر تغییرات طول در یک جهت مشخص سبب می‌شود که واحد گرادیان گرانش s^{-2} گردد. به علت اندازه کوچک گرادیان‌ها در ژئودزی و تلاش‌های *Baron Roland von Eötvös* در این زمینه، گرادیان گرانش اغلب در واحد $Eö$ یا $Eötvös$ بیان می‌گردد: $1 Eö = 10^{-9} s^{-2}$. یک $Eö$ معادل گرادیان گرانش القا شده توسط 10 دانه شن (حدود 10 میلی‌گرم) در فاصله 1 سانتی‌متری است [۹]. برای یک کشتی که بر روی دریا حرکت می‌کند، المان‌های T_{ij} تقریباً از $20 E$ تا $30 E$ تغییر می‌کنند. هرچه به کف دریا تزدیکتر شویم، این سیگنال‌ها بزرگ‌تر می‌شوند زیرا گرادیان گرانش با مکعب فاصله از جرم نسبت معکوس دارد. از این خاصیت در مُدهای *terrain following/terrain avoidance* استفاده می‌شود.

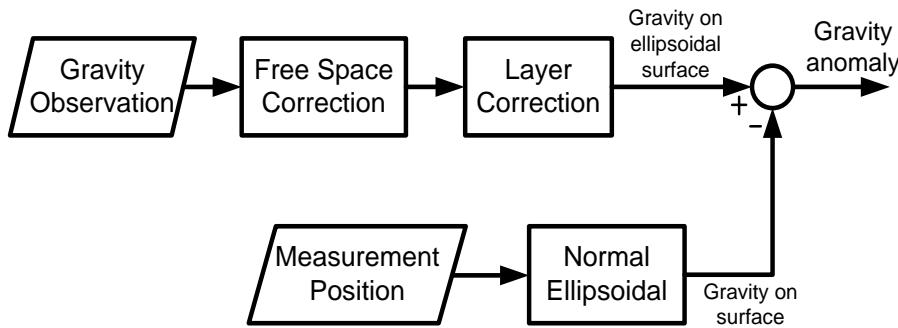
۱-۵ ناهنجاری گرانشی زمین

هر متوجهی که بر روی سطح زمین حرکت می‌کند، تغییراتی هرچند کوچک را در اندازه و جهت بردار میدان گرانشی احساس می‌کند که به آن ناهنجاری گرانشی گفته می‌شود. این امر به علت ناهمگونی و غیریکنواختی سطح زمین و چگالی غیریکنواخت مواد تشکیل‌دهنده‌ی آن می‌باشد. ناهنجاری گرانشی عبارت است از اختلاف بین شتاب اندازه گیری شده و مقدار پیش‌بینی شده توسط مدل‌های گرانشی (مانند مدل‌های گرانشی بیان شده در بالا). اندازه گیری گرانش کمک می‌کند تا ساختار داخلی زمین مشخص شود زیرا همانطور که اشاره شد تفاوت چگالی مواد تشکیل‌دهنده زمین در نقاط مختلف سبب تغییر در شدت میدان گرانشی می‌شود. در ژئوفیزیک، تئوری اختلال^۱ برای توصیف توزیع میدان گرانشی در جهان اختیار شده است [۱۰]. بردار ناهنجاری گرانشی (g_R) به صورت اختلاف بین بردار گرانشی محلی (g_M) و یک مقدار میدان گرانشی رفرنس (g_R) که از یک مدل بیضوی منظم محاسبه شده است تعریف می‌شود.

۶-۱ ناهنجاری گرانشی در زیر دریا

گرانش رفرنس در بالای سطح زمین می‌تواند مستقیماً از مدل $EGM96$ محاسبه شود. این مدل‌ها از معادله پتانسیل گرانشی خارجی (معادله لاپلاس) بدست آمده‌اند اما برای زیر آب مناسب نیستند. گرانش رفرنس زیر

آب، موضوع معادله پواسن است. هنگامی که نقطه اندازه‌گیری در زیر بیضی قرار دارد، مقدار قرائت شده گرانش باید با پارامترهای دیگری مانند عمق و ناهمواری‌های زیر سطح آب **تصحیح** گردد. مقدار تصحیح شده، از گرانش رفرنس در آن نقطه تفرقه شده و گرانش ناهنجاری بدست می‌آید. تصحیح عمق در واقع اثر عمق بر روی گرانش را منعکس می‌کند و با تصحیح فضای آزاد و تصحیح لایه ترکیب می‌شود. این فرآیند در شکل ۷ نشان داده شده است [۱۱].



شکل ۷- مدل محاسبه ناهنجاری گرانشی

معادلات تصحیح اندازه‌گیری گرانش بیضوی بالا در زیر لیست شده‌اند [۱۰]:

$$g_h = -0.3086 \cdot h \quad mGal \quad (13)$$

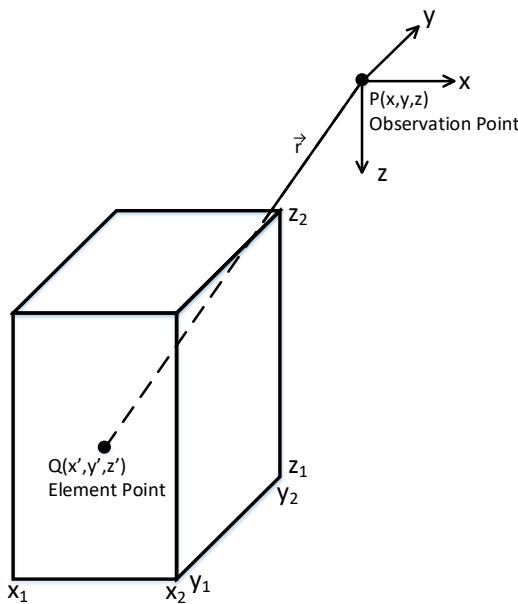
$$g_\sigma = 0.0419 \cdot \sigma \cdot h \quad mGal \quad (14)$$

$$\Delta g = g_{obs} - g_h - g_\sigma - g_0 \quad (15)$$

که در آن‌ها داریم: g_h : تصحیح فضای آزاد؛ در واحد $mGal$. ($1mGal = 10^{-5} m/s^2$) g_σ : تصحیح لایه؛ در واحد $mGal$. g_0 : چگالی لایه؛ در واحد g/cm^3 . g_{obs} : گرانش مشاهده شده است.

۱- ۷- گرادیان گرانش حاصل از منشور مستطیلی

برای مزید بصیرت درمورد گرادیان *gravitational* ناشی از یک ناهنجاری جرمی، مثالی از یک مکعب مستطیلی با چگالی ثابت حل می‌شود. چنین مسئله‌ای در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۸- هندسه مسئله محاسبه‌ی گرادیان گرانش ناشی از یک منشور مستطیلی

همانطورکه از این شکل مشخص است، وجوده مکعب موازی با محورهای دستگاه مختصات است. با شروع از معادله (۱)، راه حل فرم بسته برای پنج گرادیان *gravitational* مشاهده شده در نقطه P ناشی از منشور مکعبی بدست می‌آید. اینکار توسط Nagy و همکاران بدست آمده و در زیر ارائه شده است [۱۲]:

$$T_{xx} = G \Delta \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+j+k} \tan^{-1} \left(\frac{(y - y_j)(z - z_k)}{(x - x_i)r} \right) \quad (27)$$

$$T_{xy} = -G \Delta \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+j+k} \ln((z - z_k) + r) \quad (28)$$

$$T_{xz} = -G \Delta \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+j+k} \ln((y - y_j) + r) \quad (29)$$

$$T_{yy} = G \Delta \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+j+k} \tan^{-1} \left(\frac{(x - x_i)(z - z_k)}{(y - y_j)r} \right) \quad (30)$$

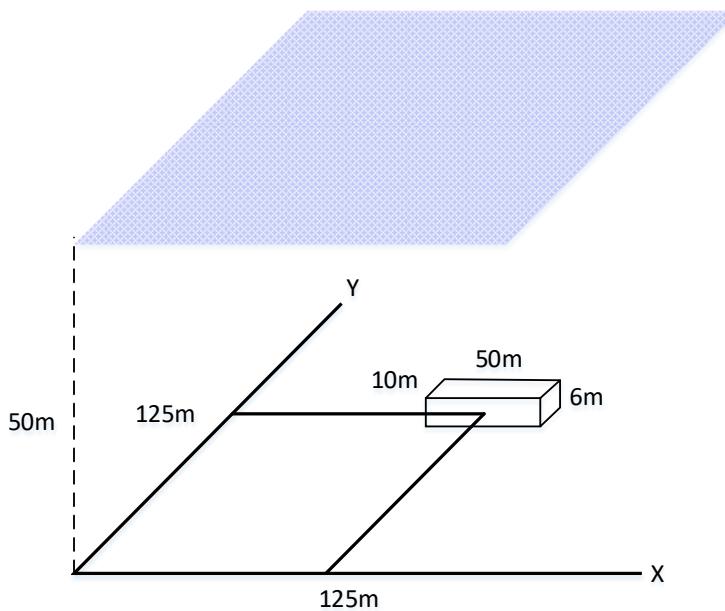
$$T_{yz} = -G \Delta \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+j+k} \ln((x - x_i) + r) \quad (31)$$

که در روابط فوق، $\Delta \rho$ کثراست چگالی بین المان و محیط نقطه محاسبه است. ضمناً داریم:

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_k)^2}$$

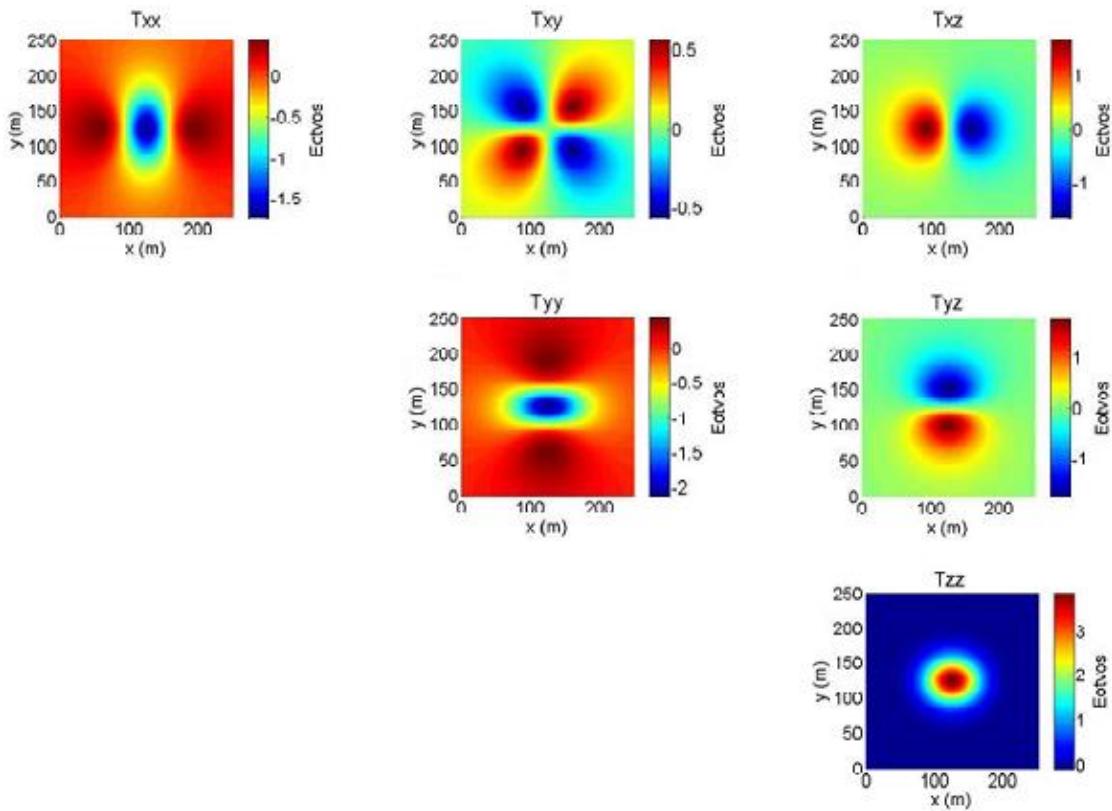
توجه: دستگاه مختصاتی مورداستفاده در اینجا و سراسر این گزارش دستگاه شمال-شرق-پائین (NED) است که در آن مثبت y معادل با شمال، مثبت x معادل با شرق و مثبت z معادل با پائین می‌باشد.

با استفاده از روابط (۲۷) تا (۳۱) پنج گرادیان گرانش حاصل از یک منشور مکعب مستطیلی با چگالی ثابت بر روی صفحه‌ای فرضی در بالای مکعب استخراج و ترسیم شده است [۱۲]. صورت این مسئله در شکل ۹ نشان داده شده است. مطابق این شکل، این مکعب مستطیل در مرکز یک شبکه به ابعاد $250m \times 250m$ قرار دارد و طول، عرض و ارتفاع آن به ترتیب ۵۰ متر، ۱۰ متر و ۶ متر می‌باشد و چگالی آن برابر با $1/5 g/cm^3$ است. در این حالت، گرادیان‌های گرانش بر روی صفحه‌ای فرضی در ارتفاع ۵۰ متری بالای این مکعب مستطیل ($z = 50m$) محاسبه و رسم شده است.



شکل ۹- مکعب مستطیل فرضی بر روی یک صفحه

در شکل ۱۰ نقشه گرادیان گرانش برای این آزمایش فرضی با استفاده از راه حل فرم بسته رسم شده است. از آنجاکه تansور متقارن است، تنها قسمت مثلث بالای ماتریس بیان شده است. در این شکل x و z به ترتیب متناظر با شرق، شمال و پایین می‌باشد. این نقشه‌ها به صورت تئوری، گرادیان *gravitational* را نشان می‌دهند و توصیف بسیار خوبی را از خاصیت یکتایی که گرادیان‌های گرانشی یک بنیان اساسی برای ناویگویی تطبیق نقشه می‌سازد ارائه می‌کنند [۱۳].



شکل ۱۰- نقشه گرادیان گرانش بر روی صفحه‌ای با فاصله ۵۰ متر بالاتر از مکعب مستطیل فرضی



فصل دوم

مدل‌های گرانشی زمین

۲ مدل‌های گرانشی زمین

میدان گرانشی دارای دو ساختار اصلی است: طول موج‌های بلند (حدود ۴۰۰ کیلومتر) و طول موج‌های کوتاه (بین ۲۵ تا ۱۰۰ کیلومتر). اطلاعات طول موج‌های بلند را می‌توان با استفاده از آنالیز اختلال مدار ماهواره و همچنین گرانی‌سنجی محلی^۱ یا حتی داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای محاسبه شود [۱۴]. نتایج چنین محاسباتی بصورت یک مدل ژئوپتانسیل جهانی (GGM) خلاصه می‌شود. در ژئودزی از داده‌های گرانشی برای تعریف شکل کره زمین استفاده می‌شود. در ژئوفیزیک، از داده‌های گرانشی برای محدود کردن تغییرات چگالی زیر سطح زمین برای کمک به درک مسائل مرتبط با طبقات زمین یا اکتشافات منابع زیرزمینی استفاده می‌شود. به این منظور ژئودزیست‌ها به دنبال بهره‌برداری از تفاوت‌های بین میدان گرانشی واقعی زمین (که بسختی قابل اندازه‌گیری است) و میدان گرانشی حاصل از مدل‌ها ریاضی هستند. بنابراین باید یک میدان گرانشی متوسط برای مقایسه با میدان واقعی تعریف شود. چنین میدان گرانشی‌ای میدان گرانشی نرمال نام دارد و میدان گرانشی باقیمانده^۲ با نام ناهنجاری یا آنومالی پتانسیل نامیده می‌شود. آنومالی پتانسیل می‌تواند برای محاسبه‌ی **کمیت‌های** بسیار مهمی که ارتباط‌دهنده‌ی شکل فیزیکی زمین با شکل ریاضی آن (بیضی) یا میدان گرانشی نرمال است بکار رود. کمیت‌هایی چون ارتفاع ژئویدی^۳، آنومالی گرانشی و مؤلفه‌های انحراف از عمود^۴ جزو کمیت‌های اصلی هستند. هریک از این کمیت‌ها که بیانگر اختلاف میدان‌های واقعی و نرمال هستند از نظر ژئوفیزیکی قابل تفسیر می‌باشند.

تاکنون، مدل‌های ژئوپتانسیل جهانی^۵ (GGM) متعددی ظهرور یافته‌اند که در آن‌ها میدان پتانسیل زمین بر حسب ضرایب هارمونیک‌های کروی بیان می‌شوند و حداکثر درجه‌ی هر مدل که با N_{max} نشان داده می‌شود بیانگر رزولوشن مکانی آن مدل است. رزولوشن مکانی یا طول موج یک مدل خاص با رابطه زیر بدست می‌آید

$$res. = \frac{\pi R}{N_{max}} \quad (۳۲)$$

که در آن R شعاع متوسط زمین و N_{max} حداکثر درجه هارمونیک مدل است.

۱- *terrestrial gravimetric*

۲- *residual gravity field*

۳- *geoidal height*

۴- *deflection of vertical*

۵- *Global Geopotential Model*

این مدل‌ها به روش‌های مختلفی بدست آمده‌اند، روش‌هایی چون: ردیابی مدار ماهواره‌ای^۱، گرانش سنجی محلی^۲، ارتفاع سنجی ماهواره‌ای، گرانش سنجی هوابرد (یا ترکیبی از این روش‌ها و روش‌های دیگر). روش‌های ماهواره‌ای طول موج‌های بلند و متوسط (بیشتر از ۱۰۰ کیلومتر) میدان گرانشی زمین را بدست می‌دهند. از بهترین مأموریت‌های ماهواره‌ای گرانشی سنجی می‌توان به مأموریت *GRACE* و *CHAMP* اشاره کرد. مدل‌های جهانی گرانشی بیان کننده میدان گرانشی زمین و ارتفاعات ژئوید هستند [۱۵]. با این حال، اغلب برآوردهای خطاب برای *GGM*‌ها خیلی خوش‌بینانه هستند و/یا به عنوان میانگین‌های جهانی ارائه می‌شوند و بنابراین لزوماً نماینده عملکرد *GGM* در یک منطقه خاص نمی‌تواند باشد. از همین‌رو کسی که از هریک از این مدل‌ها استفاده می‌کند باید تأیید صحت و دقت آن را به روش‌هایی خاص احراز کند، روش‌هایی مانند مقایسه با داده‌های محلی [۱۶]. تست‌های صحت‌سنجی مدل‌های گرانشی به چهار دسته تقسیم می‌شوند [۱۷]:

- ۱- تست‌های مداری با استفاده از قوس‌های داده‌های ردیابی ماهواره‌ای (بطور خاص داده‌های *SLR*)،
- ۲- تست‌های با استفاده از *GPS/leveling* که در آن ارتفاع ژئویدی حاصل از مدل با مقادیر ژئویدی حاصل از *GPS levelling* مقایسه می‌شود. به این منظور جداولی وجود دارد که میزان خطای ارتفاع ژئویدی را نسبت به *GPS levelling* بیان می‌کند.^۳
- ۳- تست‌ها با استفاده از ارتفاع سنجی ماهواره‌ای و یک مدل مستقل از توپوگرافی اقیانوسی دینامیک^۴ (DOT) که از یک مدل گرادیبی اقیانوس بدست آمده
- ۴- تست‌های با استفاده از ارتفاع سنجی حاصل از آنومالی‌های گرانشی

ما می‌دانیم که نواحی پیمایش نشده‌ی زیادی در زمین وجود دارد. امروزه ما در اقیانوس‌ها ناهنجاری‌های گرانشی داریم که توسط ارتفاع سنجی ماهواره‌ای بدست آمده‌اند، اما اثرات جریان‌های اقیانوسی و بایاس‌های مختلف موجب بهم‌خوردان این داده‌ها می‌شوند به همین دلیل امروزه ما فقط تخمین‌هایی شبۀ استاتیک از توپوگرافی سطح دریا در طول موج‌های بسیار بلند در اختیار داریم. علاوه‌براین، در جایی که ما داده‌های گرانشی داریم، اغلب سیستم رفرنس استفاده شده را نمی‌دانیم و گاهی اوقات حتی ناهنجاری‌های بوگر^۵ و ناهنجاری‌های فضای آزاد با یکدیگر مخلوط شده‌اند. در مقابل، راه حل‌های «فقط-ماهواره‌ای»، با داده‌های سطحی مانند مدل‌های هارمونیک کروی رزولوشن-بالا مبتنی بر ترکیب داده‌ها ادغام نمی‌شوند [۱۵].

۱- satellite orbit tracking

۲- terrestrial gravimetry

۳- http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_gpslev

۴- dynamic ocean topography

۵- Bouguer-anomalies

بطور کلی مدل‌های کنونی میدان گرانشی زمین را می‌توان در سه دسته جای داد [۱۵]:

۱- مدل‌های ژئوپتانسیل فقط-ماهواره‌ای^۱

این مدل از دنبال کردن ماهواره‌های اطراف زمین بدست می‌آید. از جمله مدل‌های شناخته شده در این دسته می‌توان به *EIGEN-GL04S1* و *GGM02S* اشاره کرد که فقط از ماهواره *GRACE* بدست آمده‌اند.

۲- مدل‌های ژئوپتانسیل ترکیبی

این مدل از ترکیب یک مدل فقط-ماهواره‌ای، گرانش سنجی زمینی^۲، گرانش سنجی در مناطق دریایی به کمک ارتفاع سنجی ماهواره‌ای و گرانش سنجی هوایی (بکمک هوایپیما) بدست می‌آید. از جمله مدل‌های شناخته شده گرانشی زمین در این دسته می‌توان *EIGEN-GL04C*, *GGM02C*, *EGM96* و *EGM2008* را نام برد.

۳- مدل‌های ژئوپتانسیل سفارشی^۳

این مدل از اصلاح مدل‌های موجود (ماهواره‌ای یا ترکیبی) با استفاده از داده گرانشی با رزولوشن بالاتر که شاید قبلاً استفاده نمی‌شد، بدست می‌آید. در این دسته مدل *GPM89C* از *Wenzel* می‌توان نام برد. در ادامه به معروفی دو مدل پرکاربردتر از مدل‌های گرانشی زمین می‌پردازیم و در خلال معرفی، استدلال خود را مبنی بر تمرکز بر روی مدل *EGM96* ارائه می‌دهیم.

۱-۲ مدل گرانشی ۱۹۹۶ (*EGM96*)

یکی از پراستفاده‌ترین مدل‌های گرانشی، مدل *EGM96* یک حل مت Shankل از ثابت‌های هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ است (*Error! Reference Nmax* در معادله *source not found*). این مدل با داده‌های حاصل از مشارکت نهادهای مختلفی ساخته شد و توسط تلاش هماهنگ بین «آژانس نقشه‌برداری و تصویربرداری ملی^۴ (NIMA) که امروزه با نام آژانس ملی اطلاعات مکانی^۵ NGA شناخته می‌شود»، «مرکز پروازهای فضایی گادرد ناسا» و «دانشگاه ایالتی اوهاایو» کامل شد.

برخی از منابع داده عبارتنداز [۱۷]:

۱- *Satellite-only GGMs*

۲- *terrestrial gravimetry*

۳- *Tailored GGMs*

۴- *National Imagery and Mapping Agency*

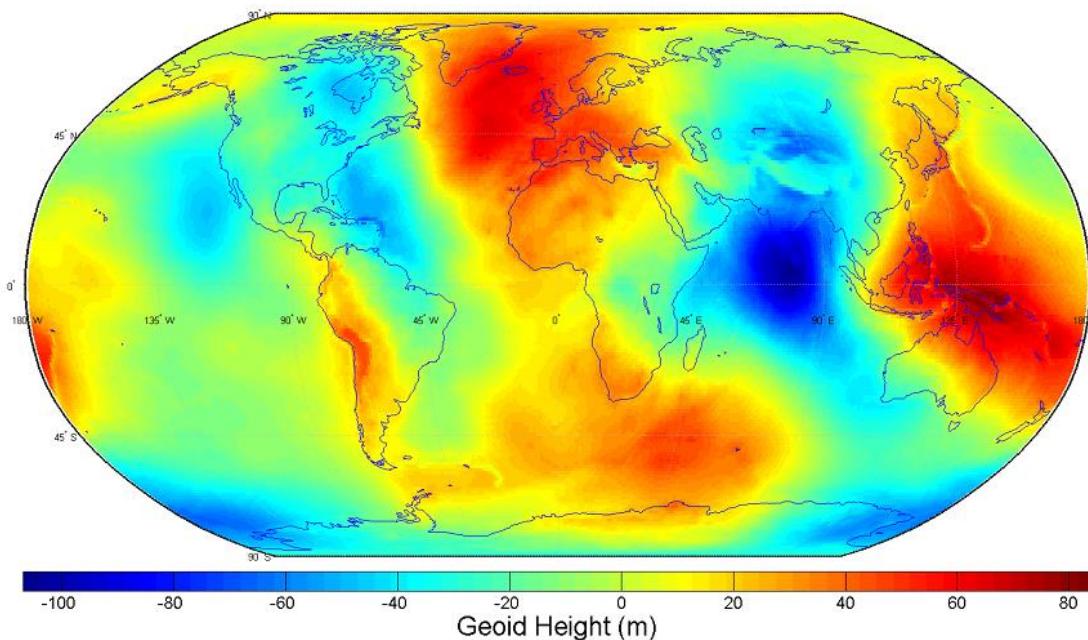
۵- *National Geospatial-Intelligence Agency*

۱. داده‌های گرانشی *gravity* که توسط *NIMA* ارائه شده‌اند. این داده‌ها توسط پیمایش‌های هوایی و دیگر فرآیندهای جمع‌آوری گرانش بدست آمده‌اند.

۲. داده‌های حاصل از مأموریت ژئودتیک *GEOSAT* (یک ماهواره نیروی دریایی آمریکا با یک ارتفاع سنج رادار با قابلیت اندازه‌گیری فاصله‌ها نسبت به سطح دریا با دقت ۵cm)

۳. داده‌های حاصل از ماهواره *ERS-1*

با داشتن شعاع متوسط زمین $R = 6371000m$ و درنظر گرفتن درجه هارمونیک $N_{max} = 360$ ، رزولوشن فضایی مدل *EGM96* با استفاده از رابطه (۳۲) تقریباً برابر با ۵۶km بوده است می‌آید. از آنجاکه اغلب رزولوشن نقشه‌های *EGM96* و منشور مستطیلی با یکدیگر تفاوت دارند، معمولاً هنگام برآذش (*fitting*) داده‌های *EGM96* به دیگر شبکه‌ها، یک درونیابی تکه‌بندی^۱ بکار برده می‌شود. برای نشان دادن بهتر شکل این ژئوید خاص، نوسانات^۲ *EGM96* نسبت به بیضی *WGS84* برای یک سیستم بدون جزر و مد^۳ در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



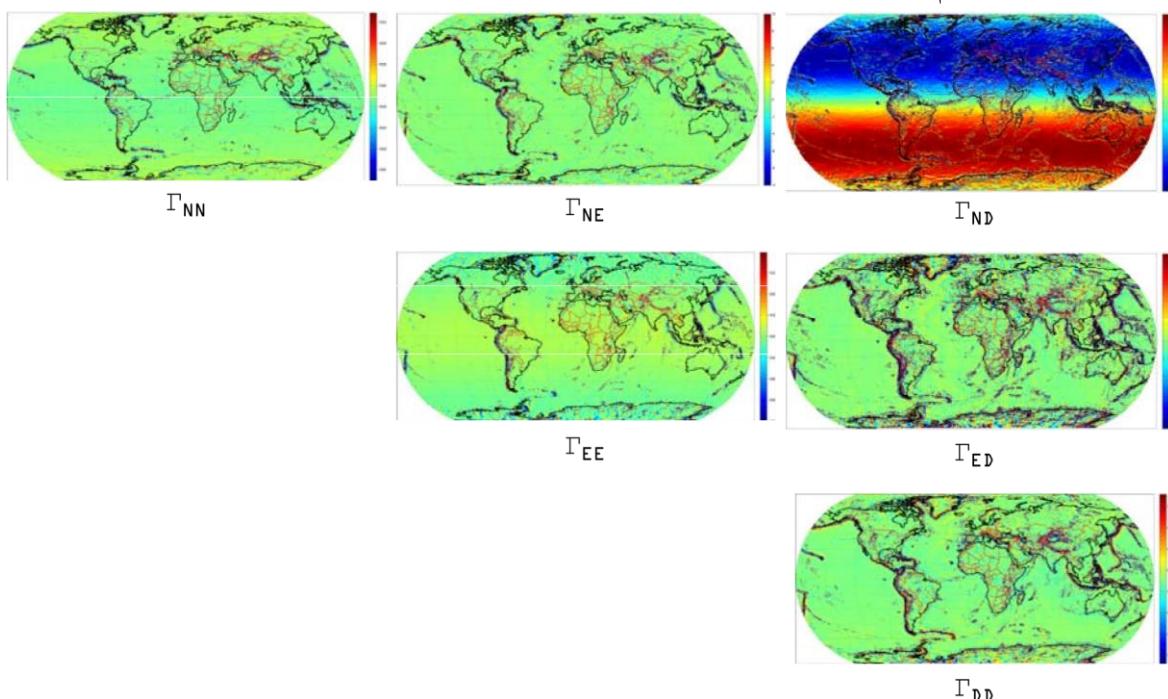
شکل ۱۱- نوسانات مدل ژئوید *EGM96* نسبت به بیضی *WGS84*

۱- *spline interpolation*

۲- *undulation*

۳- *Tide free*

شكل زیر نقشه سطح زمین را برای شش مؤلفه از ۹ مؤلفه گرادیان گرانش با صرفنظر از ترم‌های متقارن نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود بخلاف مشاهده‌های بصری، این نقشه در دریاها و اقیانوس‌ها هم کنتراست‌هایی را نشان می‌دهد. بعلاوه هنگامی که خطاهای عمودی INS به علت تغییرات قابل ملاحظه در نیروهای گرانش افزایش می‌یابد (مثلًا بر فراز کوه‌ها)، این تغییرات، کنتراست بیشتری را بر روی نقشه‌های گرادیان گرانش فراهم می‌کنند که منجر به بهبود دقیق ناوبری می‌شود.



شكل ۱۲- نقشه گرادیان‌های گرانش بطبق مدل EGM96 بر روی سطح زمین

در حالی که ماتریس گرادیان گرانش شامل پنج ترم مستقل یا منبع اطلاعات است، ستون سوم بیشترین کنتراست را دارا می‌باشد (Γ_{ND} , Γ_{ED} , Γ_{DD}) که بیشترین ظرفیت را برای ناوبری دقیق فراهم می‌کند. این سه ترم، گرادیان‌های گرانش را در سه جهت فریم رفرنس بیان می‌کنند که یک حرکت در جهت پایین (عمودی) را می‌دهد. در [۱۸]، Richeson تذکر می‌دهد که رزولوشن محدود مدل EGM96 بدین معنی است که گرادیان‌های گرانشی واقع گرایانه در ارتفاعات پائین، به احتمال بسیار زیاد بیشتر از آن چیزی است که در نقشه‌ها دیده می‌شود؛ زیرا اثرات عوارض تیز ممکن است در نظر گرفته نشده باشند. اگر رزولوشن نقشه افزایش یابد آنگاه اطلاعات بیشتری برای کاربردهای ناوبری می‌تواند در دسترس باشد. در جدول زیر نیز ثوابت و ویژگی‌های مورد استفاده در محاسبات گرادیان مبتنی بر EGM96 آورده شده است [۱۷].

جدول ۲- پارامترهای EGM96

پارامتر	مقدار
GM	$3986004.415 \times 10^8 m^3/s^2$

6378136.3 m	a
بدون جزر و مد	$C_{2,0}$
WGS84	بیضی رفرنس

۲-۲ مدل گرانشی *EGM2008*

بازبینی و اصلاح مدل ریاضی زمین در سال ۲۰۰۴ این مدل را دچار تغییر نکرد اما ژئوید را در رزولوشن بالاتر نشان داد. مدل جدیدتر *EGM2008* برای محاسبه‌ی گردایان‌های گرانش با $N_{max} = 2159$ ارائه شده است که رزولوشن آن با استفاده از رابطه (۳۲) حدود $9,3\text{ km}$ می‌گردد [۱۹]. این مدل گرانشی زمین یک ژئوید با رزولوشن $9,2\text{ کیلومتر}$ دارد و بیش از $4,6\text{ میلیون}$ ضریب برای سری‌های محاسبه‌کننده گردایان‌ها یا خود گرانش نیاز دارد در حالیکه *EGM96* و *WGS84* نیز 32757 ضریب برای محاسبه نیاز داشته‌است.

با این وجود با توجه به فرآیند تولید بازگشتی برای توابع لزاندر وایسته، این توابع می‌توانند در درجه‌های بالاتر، حدوداً 2100 ، ناپایدار شوند. نتایج اولیه نشان داده‌اند که حتی با استفاده از الگوریتم‌هایی که پایداری را در درجه‌های بالا تضمین می‌کنند، تخمین مولفه‌های گرانش می‌تواند زمان قابل توجهی را به خود اختصاص دهد [۱۵]. با توجه به این جزئیات، رزولوشن بالایی *EGM2008* در اختیار می‌گذارد در مقابل راحتی استخراج گردایان‌های گرانش از روی *EGM96* قابل چشم‌پوشی است.



فصل سوم

پتانسیل گرانشی و گردیان گرانش بر حسب هارمونیک‌های کروی

۳ پتانسیل گرانشی و گردیان گرانش بر حسب هارمونیک‌های کروی

همانگونه که ذکر شد، پتانسیل گرانشی *gravitational* ناشی از یک جرم در بیرون آن، از معادله لاپلاس پیروی می‌کند. فرم کلی پاسخ این معادله لاپلاس را می‌توان با استفاده از هارمونیک‌های کروی فرموله کرد. دقت فرمول‌های حاصله، توسط محاسبات عملی با استفاده از مدل میدان گرانشی *EIGEN-6C2* اثبات شد [۲۰]. هارمونیک‌های کروی جزء وابسته به زاویه‌ی یک مجموعه متعامد از پاسخ‌های معادله لاپلاس هستند که در **مختصات کروی** بیان می‌شوند. به همین دلیل بخش ایستا پتانسیل *gravitational* زمین (W_a)؛ (یعنی فقط بخش پتانسیل جاذبه در معادله (۳۳)) در هر نقطه‌ی تعریف شده در مختصات کروی (r, φ, λ) بر روی سطح زمین یا بر فراز آن در مقیاس جهانی بسادگی با جمع درجه و مرتبه‌های بسط هارمونیک‌های کروی بیان می‌شود. ضرایب این هارمونیک‌های کروی در حوزه طیفی، ساختار جهانی میدان ژئوپتانسیل زمین - یا بطور عام‌تر، میدان گرانشی *gravity* زمین - را بیان می‌کند. معادله مربوط به حوزه‌های فضایی و طیفی ژئوپتانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W_a(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{nm}^W \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^W \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (33)$$

که در آن r و φ و λ به ترتیب شعاع، عرض و طول ژئوستراتیک در دستگاه کروی هستند. (چرا ژئوستراتیک؟ چون این رابطه پتانسیل در دستگاه کروی بدست آمده است و لذا باید این پارامترها دارای حد اکثر تناظر و تشابه با دستگاه کروی باشند). GM عبارت است از حاصلضرب ثابت گرانشی و جرم زمین؛ a نیم قطر بزرگ^۱ بیضی رفرنس، N_{max} ماکزیمم درجه بسط هارمونیک‌های کروی؛ n و m به ترتیب درجه و مرتبه هارمونیک‌های کروی؛ \bar{C}_{nm}^W و \bar{S}_{nm}^W ثابت‌های ژئوپتانسیل نرمالیزه شده هستند که از روی مدل‌های گرانشی بدست می‌آیند. این ثابت‌ها با نام ثابت‌های استوکس نیز شناخته می‌شوند. همچنین داریم:

$$\bar{S}_{n0}^W = 0$$

جهت یادآوری تأکید می‌شود که در بخش ۱-۳ توضیح داده شد که پتانسیل گرانشی در دستگاه کروی بیان می‌شود و با استفاده از رابطه (۱۶)، می‌توان عرض ژئودتیک را به عرض ژئوستراتیک تبدیل کرد و با استفاده از رابطه (۲۰) نیز پارامتر r برای جاگذاری در این فرمول از روی ارتفاع ژئودتیکی بدست می‌آید. هر مدل گرانشی شامل $(N_{max}+1)^2$ ضریب به همراه مقداری برای ثابت گرانشی GM و مقداری برای شعاع بزرگ بیضی رفرنس (a) است.

۱- semi major axis

لازم به ذکر است که ثابت‌های ژئوپتانسیل نرمالیزه شده توسط رابطه زیر با ثابت‌های ژئوپتانسیل معمولی (نرمالیزه نشده) مرتبط می‌شوند [۱، ص ۶۰] و [۲۱، ص ۵-۳]

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2-\delta_{m,0})}} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

در هنگام استفاده از هر مدل خاص، باید توجه شود که آیا این ثابت‌ها بصورت نرمالیزه شده بیان شده‌اند یا خیر. اگر این ثابت‌ها بصورت نرمالیزه شده بیان شده باشند، نیازی به استفاده از فرمول (۳۴) نمی‌باشد. عنوان مثال ثابت‌های مورداستفاده در این گزارش که مربوط به مدل EGM96 هستند بصورت نرمالیزه بیان شده‌اند.

تابع $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ تابع لزاندر وابسته‌ی نرمالیزه شده است و توسط رابطه زیر با تابع لزاندر وابسته معمولی

(نرمالیزه نشده) مرتبط می‌شوند [۱، ص ۲۴]:

$$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi) = \sqrt{(2n+1)(2-\delta_{m,0})} \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\sin \varphi) \quad (۳۵)$$

تبصره مهم: تابع $P_{nm}(t)$ با تابع $P_n^m(t)$ فرق دارد و آنچه که در نرم‌افزار متمتیکا تحت عنوان تابع لزاندر وابسته شناخته می‌شود $P_n^m(t)$ است. اما در فرمول‌های این گزارش از تابع $P_{nm}(t)$ استفاده شده است که با رابطه زیر به تابع لزاندر وابسته‌ی $P_n^m(t)$ مرتبط می‌شود [۳۲، فصل ۸]:

$$P_{nm}(t) = (-1)^m P_n^m(t) \quad (۳۶)$$

در [۱ ص ۱۷] یک رابطه‌ی عددی برای محاسبه‌ی $P_{nm}(t)$ ارائه شده است که برای استفاده در کدنویسی (بجای استفاده از تابع آماده‌ی لزاندر به همراه درنظر گرفتن رابطه (۳۶)) مفید می‌باشد:

$$P_{nm}(t) = 2^{-n} (1-t^2)^{m/2} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-m-2k)!} t^{n-m-2k} \quad (۳۷)$$

که در آن r بزرگترین عدد کمتر مساوی $\frac{n-m}{2}$ می‌باشد.

همانگونه که در رابطه‌ی (۳۳) دیده می‌شود، درجه‌ی $n=0$ از پتانسیل گرانشی بصورت ترم حاصلضرب $C_{00}^W \times \frac{GM}{r}$ در می‌آید. این بدین معناست که C_{00}^W مقدار GM مدل گرانشی مورداستفاده را مقیاس می‌کند. عموماً در مدل‌های گرانشی مختلف C_{00}^W برابر با ۱ تعریف می‌شود [۲]. درجه‌ی $n=1$ از ضرایب هارمونیک‌های کروی ($C_{10}^W, C_{11}^W, S_{11}^W$) مربوط به مختصات ژئوستتر بوده و درصورتی که مبدأ دستگاه مختصات منطبق بر ژئوستتر باشد، این ضرایب برابر با صفر هستند. ضرایب S_{21}^W و C_{21}^W مربوط به موقعیت قطب چرخشی متوسط می‌باشند [۲].

بنابراین دقت معادله (۳۳) که بیانگر میدان گرانشی است بستگی به دقت ضرایب هارمونیک کروی دارد و رزولوشن فضایی نیز وابسته به ماکریم درجه N_{max} می‌باشد. در هر نقطه‌ای در فضا، تفاوت بین پتانسیل واقعی و پتانسیل بیان‌شده توسط مدل بسط هارمونیک کروی بستگی به دقت ضرایب هارمونیک کروی آن مدل و حداکثر درجه N_{max} دارد.

معادله (۳۳) دارای *upward-continuation* پتانسیل گرانشی از سطح زمین به ازای $r_{topo} > r$ بوده و منعکس کننده‌ی تضعیف سیگنال با افزایش ارتفاع بصورت $\left(\frac{a}{r}\right)^n$ می‌باشد. برای نقاط مشاهده درون زمین، بسط هارمونیکی معادله (۳۳)، *downward-continuation* پتانسیل گرانشی (W_a^c) را با ارزیابی آن برای فواصل $r < r_{topo}$ بدست می‌دهد. اما تکینگی‌های موجود در این *downward-continuation* منتج به واگرایی سری در نقاط تکین به ازای $\infty \rightarrow N_{max}$ می‌شود. در عمل، N_{max} محدود است و لذا برای نقاط درون کره‌زمین ($r < r_{topo}$) سری معادله پتانسیل گرانشی قابل ارزیابی است. اما با این حال، *continuation* از روی طبیعت فیزیکی آن یک مسئله ناپایدار و بدطرح^۱ است. این بدین معناست که دامنه‌ی نوسانات فضایی^۲ پتانسیل با افزایش عمق مشاهده (کاهش r) تقویت می‌شود (و در نقاط تکینگی به بینهایت می‌رسد). هرچه طول موج نوسان کوتاه‌تر شود، این تقویت بیشتر می‌گردد. از نظر ریاضی با توجه به فاکتور $\left(\frac{a}{r}\right)^n$ در معادله (۳۳) این نکته واضح است که با کاهش r و افزایش n چنین اتفاقی می‌افتد. بنابراین در عمل *downward-continuation* همواره شامل یک تقویت خطأ با فرکانس می‌باشد. به بیانی دیگر، خطای ضرایب \bar{S}_{nm}^W و \bar{C}_{nm}^W با افزایش n افزایش می‌یابد.

همانطور که در معادله (۱۲) آمد، یک جزء از پتانسیل نرمال ناشی از جاذبه است (U_a). این جزء را نیز می‌توان توسط بسط هارمونیک‌های کروی با ضرایب مخصوص به خود با اندیس U بصورت \bar{S}_{nm}^U و \bar{C}_{nm}^U بیان کرد. در اینصورت اگر پتانسیل آشفتگی T نیز با بسط هارمونیک‌های کروی با ضرایب مخصوص بخود با اندیس T بصورت \bar{S}_{nm}^T و \bar{C}_{nm}^T بیان شود، آنگاه طبق معادله (۱۳) می‌توانیم ضرایب پتانسیل آشفتگی را با داشتن ضرایب پتانسیل واقعی و ضرایب پتانسیل نرمال جاذبه بصورت زیر بدست آوریم:

$$\bar{C}_{nm}^T = \bar{C}_{nm}^W - \bar{C}_{nm}^U \quad (38)$$

$$\bar{S}_{nm}^T = \bar{S}_{nm}^W - \bar{S}_{nm}^U \quad (39)$$

و بسط پتانسیل آشفتگی بصورت زیر نوشته می‌شود:

۱- *ill-posed problem*

۲- *spatial undulations*

$$T(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (\bar{S}_{nm}^T \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^T \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (40)$$

همانگونه که پیشتر اشاره شده بود، ثابت‌های ژئوپتانسیل از روی مدل‌های گرانشی بدست می‌آیند. اما لازم به ذکر است که ثابت‌های پتانسیل نرمال بیضوی فقط شامل ترم‌هایی با مرتبه ($m=0$) (تقارن چرخشی^۱) و ($n=0$) (تقارن استوایی^۲) می‌باشد. با توجه به نکته‌ی اخیر و دانستن این نکته که همانطور که قبل‌اشاره شد همواره $S_{n0} = 0$ است، لذا $\bar{S}_{nm}^T = \bar{S}_{nm}^W$ می‌شود. بنابراین کافیست ضرایب \bar{C}_{nm}^U را بدانیم تا بتوانیم با مشخص کردن ضرایب پتانسیل آشفتگی، آن را تعیین و ترسیم نمائیم. در عمل، اکثراً برای محاسبه‌ی ضرایب پتانسیل نرمال کافیست که تنها ضرایب \bar{C}_{00}^U و \bar{C}_{20}^U و \bar{C}_{40}^U و \bar{C}_{60}^U و گاهی اوقات \bar{C}_{80}^U درنظر گرفته شود [۲]. در جدول زیر مقادیر $\bar{C}_{10,0}^U$ تا $\bar{C}_{2,0}^U$ آورده شده است [۲۲، ۲۳]:

جدول ۳- ضرایب ژئوپتانسیل بیضی رفرنس زمین

Symbol	Numerical Value
$\bar{C}_{2,0}^U$	$-0.484169650276 \times 10^{-03}$
$\bar{C}_{4,0}^U$	$0.790314704521 \times 10^{-06}$
$\bar{C}_{6,0}^U$	$-0.168729437964 \times 10^{-08}$
$\bar{C}_{8,0}^U$	$0.346071647263 \times 10^{-11}$
$\bar{C}_{10,0}^U$	$-0.265086254269 \times 10^{-14}$

۱-۳ بسط گرادیان گرانش

بسط رایج و متعارف گرادیان‌های گرانش در فریم رفرنس شمال گرا^۳ محلی دارای فرم پیچیده‌ای است؛ بسته به مشتق‌های مرتبه اول و دوم "تواجع لزاندر وابسته" عرض جغرافیایی و داشتن فاکتورهایی که با حرکت به سمت قطب‌ها به بی‌نهایت میل می‌کنند. اما اینجا ترم عمومی هریک از این سری‌ها تبدیل به ضرب ثابت‌های ژئوپتانسیل و تواجع لزاندر وابسته با آرگومان عرض جغرافیایی و توابعی از طول جغرافیایی می‌شود. [۲۳]. پنج مؤلفه‌ی مستقل آنومالی گرادیان گرانش با استفاده از روابط زیر بدست می‌آیند [۲۳، ۱۵].

$$T_{zz} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n (n+1)(n+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\bar{C}_{nm}^T \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^T \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) \quad (41)$$

۱- rotational symmetry

۲- equatorial symmetry

۳- north-oriented



$$T_{xx} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \\ \times \left(a_{nm} \bar{P}_{n,m-2}(\sin \varphi) + [b_{nm} - (n+1)(n+2)] \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) \right. \\ \left. + c_{nm} \bar{P}_{n,m+2}(\sin \varphi) \right) \quad (42)$$

$$T_{yy} = -\frac{GM}{a^3} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \\ \times \left(a_{nm} \bar{P}_{n,m-2}(\sin \varphi) + b_{nm} \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) + c_{nm} \bar{P}_{n,m+2}(\sin \varphi) \right) \quad (43)$$

$$T_{xy} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \\ \times \left(d_{nm} \bar{P}_{n-1,m-2}(\sin \varphi) + g_{nm} \bar{P}_{n-1,m}(\sin \varphi) \right. \\ \left. + h_{nm} \bar{P}_{n-1,m+2}(\sin \varphi) \right) \quad (44)$$

$$T_{xz} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \\ \times \left(\beta_{nm} \bar{P}_{n,m-1}(\sin \varphi) + \gamma_{nm} \bar{P}_{n,m+1}(\sin \varphi) \right) \quad (45)$$

$$T_{yz} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \\ \times \left(\mu_{nm} \bar{P}_{n-1,m-1}(\sin \varphi) + \nu_{nm} \bar{P}_{n-1,m+1}(\sin \varphi) \right) \quad (46)$$

ضرایب توابع لژاندر ثابت‌های عددی هستند که در [۲۳] صفحه ۱۲۶ داده شده‌اند.



$$\left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 a_{n,m} = 70, \quad |m| = 0, 1 \\
 a_{n,m} = \frac{\sqrt{1+\delta_{|m|,2}}}{4} \sqrt{n^2 - (|m|-1)^2} \\
 \quad \times \sqrt{n+|m|} \sqrt{n-|m|+2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \\
 b_{n,m} = \frac{(n+|m|+1)(n+|m|+2)}{2(|m|+1)}, \quad |m| = 0, 1 \\
 b_{n,m} = \frac{n^2+m^2+3n+2}{2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \\
 c_{n,m} = \frac{\sqrt{1+\delta_{|m|,0}}}{4} \sqrt{n^2 - (|m|+1)^2} \sqrt{n-|m|} \\
 \quad \times \sqrt{n+|m|+2}, \quad |m| = 0, 1 \\
 c_{n,m} = \frac{1}{4} \sqrt{n^2 - (|m|+1)^2} \sqrt{n-|m|} \\
 \quad \times \sqrt{n+|m|+2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \\
 n = 2, 3, \dots, N; \\
 d_{n,m} = 0, \quad |m| = 1 \\
 d_{n,m} = -\frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{1+\delta_{|m|,2}} \sqrt{n^2 - (|m|-1)^2} \\
 \quad \times \sqrt{n+|m|} \sqrt{n+|m|-2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \\
 g_{n,m} = \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n+1} \sqrt{n-1} (n+2), \quad |m|=1 \\
 g_{n,m} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n+|m|} \sqrt{n-|m|}, \quad 2 \leq |m| \leq n \\
 h_{n,m} = \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n-3} \sqrt{n-2} \sqrt{n-1} \sqrt{n+2}, \\
 \quad |m|=1 \\
 h_{n,m} = \frac{m}{4|m|} \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n^2 - (|m|+1)^2} \sqrt{n-|m|} \\
 \quad \times \sqrt{n-|m|-2}, \quad 2 \leq |m| \leq n \\
 n = 2, 3, \dots, N;
 \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \beta_{n,m} = 0, \quad m = 0 \\
 \beta_{n,m} = \frac{n+2}{2} \sqrt{1+\delta_{|m|,1}} \sqrt{n+|m|} \sqrt{n-|m|+1}, \\
 \quad 1 \leq |m| \leq n \\
 \gamma_{n,m} = -(n+2) \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad m = 0 \\
 \gamma_{n,m} = -\frac{n+2}{2} \sqrt{n-|m|} \sqrt{n+|m|+1}, \\
 \quad 1 \leq |m| \leq n \\
 n = 2, 3, \dots, N; \\
 \mu_{n,m} = -\frac{m}{|m|} \left(\frac{n+2}{2} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{1+\delta_{|m|,1}} \sqrt{n+|m|} \\
 \quad \times \sqrt{n+|m|-1} \\
 v_{n,m} = -\frac{m}{|m|} \left(\frac{n+2}{2} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \sqrt{n-|m|} \sqrt{n-|m|-1}
 \end{array} \right\} \quad (\Psi V)
 \end{array} \right\}$$



فصل چهارم

روش پارکر توسعه یافته

۴ روشن کر توسعه یافته

از آنجاکه اثرات عوارض بزرگترین و سریع تغییر کننده‌ترین بخش از بایاس حذف شده‌ی سیگنال GGI در ارتفاعات پائین را تشکیل می‌دهد [۲۴] باید تقریبی از این اثرات مدل‌سازی شود تا نمایش سیگنال نسبتاً دقیقی برای بسیاری از نقاط آزمایش شبیه‌سازی بددست آید. فرمول $Nagy$ (معادلات (۲۷) تا (۳۱)) را می‌توان برای تعیین گرادیان‌های ناشی از یک منشور مکعبی در یک نقطه‌ی مشخص برای شمول اثرات یک شبکه کامل از منشورهای مستطیلی به صورت زیر بسط داد.

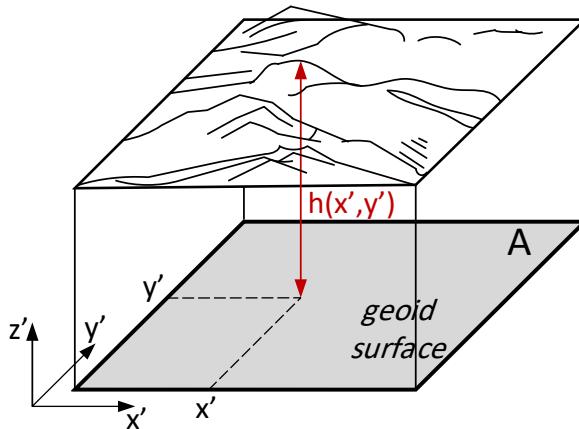
$$T_{ij_{total}} = \sum_{n=1}^{NM} T_{ij,n} \quad (48)$$

که در آن NM متناظر با تعداد ورودی‌های سطر و ستون بر روی شبکه است. در حالیکه استفاده مناسب از روش منشور مکعبی بینش خوبی در مورد رفتار کلی عوارض بر روی گرادیان می‌دهد، اما برای یک شبکه بزرگ از نظر محاسباتی بسیار سنگین است. آقای پارکر [۲۵] یک روش پرسرعت در حوزه‌ی فرکانس برای محاسبه پتانسیل ارائه کرد که کسانی نظیر *Jekeli* [۲۶] آن را برای محاسبه گرادیان‌های *gravitational* بکار برند.

اگر سطح ژئوید بصورت یک صفحه با چگالی ثابت تقریب زده شود، آنگاه پتانسیل *gravitational* ناشی از جرم حجمی (عوارض) با ارتفاع h محدود به ناحیه A (تقریب با یک صفحه *MSL* صفر متر)، می‌تواند به فرمی شبیه به معادله (۱) بصورت زیر نوشته شود:

$$V = G\Delta\rho \iint_A \left(\int_0^h \frac{1}{r} dz' \right) dx' dy' \quad (49)$$

که در آن $(x', y') = h(x', y')$ عبارت است از ارتفاع عوارض در هر نقطه. شکل زیر نمایی مفهومی از این مسئله را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳- نمایی مفهومی از عوارض بر فراز زمین

برطبق تبدیل فوریه دو بعدی، اگر $g(x, y)$ یک تابع با انرژی محدود باشد یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (g(x, y))^2 dx dy < \infty \quad (50)$$

آنگاه یک جفت تبدیل فوریه پیوسته دو بعدی وجود خواهد داشت:

$$G(f_1, f_2) = \mathcal{F}(g(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \times e^{-i2\pi(f_1 x + f_2 y)} dx dy \quad (51)$$

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(G(f_1, f_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(f_1, f_2) \times e^{i2\pi(f_1 x + f_2 y)} df_1 df_2 \quad (52)$$

که در آن f_1 و f_2 فرکانس فضایی متناظر با محورهای x و y بوده و \mathcal{F} بیانگر تبدیل فوریه دو بعدی است.

اگر این فرض وجود داشته باشد که A از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت در دو بعد گسترده می شود، آنگاه تبدیل فوریه‌ی V عبارت خواهد بود از:

$$\mathcal{F}(V) = G \Delta \rho \iint_A \int_0^h \mathcal{F}\left(\frac{1}{r}\right) dz' dA \quad (53)$$

که در آن ρ چگالی جرم عوارض بوده و معمولاً برابر با مقدار ثابت 2670 kg/m^3 درنظر گرفته می شود.

معادله (53) در دستگاه مختصات قطبی بصورت زیر بیان می شود:

$$\mathcal{F}(V) = \frac{G \Delta \rho}{2\pi f^2} e^{-2\pi f z} \iint_A (e^{2\pi f h(x', y')} - 1) e^{-i2\pi(f_1 x' + f_2 y')} dA , \quad f \neq 0 \quad (54)$$

که در آن $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$. با بسط تیلور $e^{2\pi f h(x', y')}$ در معادله (54)، $\mathcal{F}(V)$ عبارت خواهد شد از:

$$\mathcal{F}(V) = 2\pi G \Delta \rho e^{-2\pi f z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\pi f)^{n-2} \mathcal{F}((h(x', y'))^n) \quad (55)$$

برای بدست آوردن گرادیان‌ها از روی پتانسیل، یک رابطه‌ی حوزه فرکانس توسط Jekeli مورد استفاده

قرار گرفت [۲۷]:

$$\mathcal{F}(V_{ij}) = \mu_{ij} \mathcal{F}(V) \quad (56)$$

به یاد بیاورید که V بعنوان پتانسیل ناشی از حجم دلخواهی از جرم تعریف شده بود. اگر این حجم دلخواه از جرم، بصورت عوارض بالای ژئوید تعریف شود، معادله (۵۶) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{F}(T_{ij_{\text{terrain}}}) = \mu_{ij} \mathcal{F}(T_{\text{terrain}}) \quad (57)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= -(2\pi)^2 f_1^2 & \mu_{12} &= -(2\pi)^2 f_1 f_2 & \mu_{13} &= -i(2\pi)^2 f_1 f \\ \mu_{22} &= -(2\pi)^2 f_2^2 & \mu_{23} &= -i(2\pi)^2 f_2 f \\ \mu_{33} &= (2\pi)^2 f^2 \end{aligned} \quad (58)$$

با اعمال تبدیل فوریه معکوس به بیان حوزه فرکانس T_{ij} در معادله (۵۷)، گرادیان‌های آشفتگی گرانش

ناشی از عوارض بدست می‌آید:

$$T_{ij_{\text{terrain}}} = 2\pi G \Delta \rho \mathcal{F}^{-1} \left(\mu_{ij} e^{-2\pi f z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\pi f)^{n-2} \mathcal{F}((h(x', y'))^n) \right) \quad (59)$$

در عمل، فرض‌هایی در مورد معادله (۵۹) بکار گرفته می‌شود. اول آنکه، A ناحیه‌ای محدود به زیر شبکه‌ی ارتفاعات است فلذا معادله (۵۹) یک تقریب است. همچنین، فرض بر این است که تبدیل فوریه‌ی توان‌های $h(x', y')$ موجود باشد. از آنجاکه h در نقاط گستته در شبکه ارتفاعی داده شده است، تقریب‌های گستته از تبدیل فوریه پیوسته مورد استفاده قرار گرفت. علاوه بر این، در بسط سری تیلور نیز از یک سری محدود استفاده شد. با این فرض که $h(x', y')$ یک تابع گستته و پریودیک است، می‌توان از تبدیل فوریه سریع یا FFT استفاده کرد:

$$T_{ij_{\text{terrain}}}(p_1, p_2) = 2\pi G \Delta \rho \mathcal{FFT}^{-1} \left(\mu_{ij} e^{-2\pi f_{p1, p2} z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\pi f_{p1, p2})^{n-2} \mathcal{FFT}(h^n)_{p1, p2} \right) \quad (60)$$

که در آن $1 - 1 = 0, \dots, M_2 - 1$ و $p_1 = 0, \dots, M_1$ عبارتنداز کل تعداد نمونه‌ها در

جهت‌های x و y . همچنین داریم:

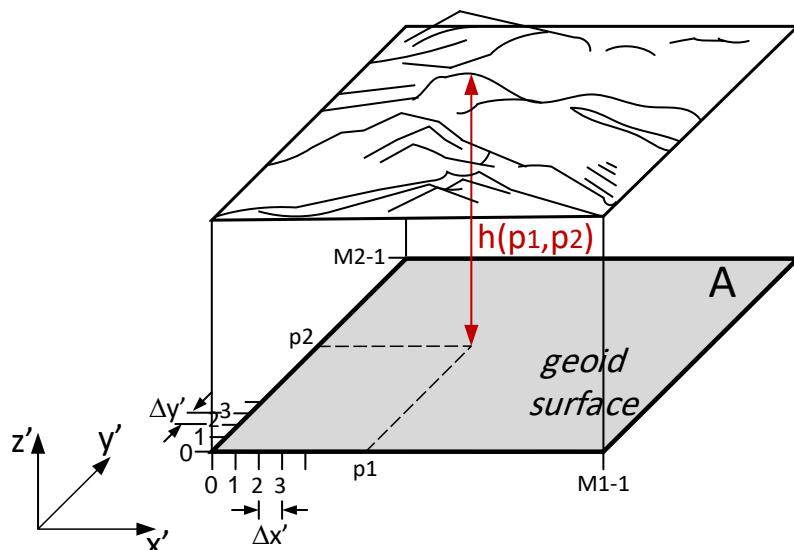
$$f_{p1, p2} = \sqrt{f_{p1}^2 + f_{p2}^2} \quad (61)$$

که در آن:

$$f_{p1} = \begin{cases} \frac{p_1}{\Delta x' M_1} & p_1 = 0, \dots, \frac{M_1}{2} - 1 \\ \frac{p_1 - M_1}{\Delta x' M_1} & p_1 = \frac{M_1}{2}, \dots, M_1 - 1 \end{cases} \quad (62)$$

$$f_{p2} = \begin{cases} \frac{p_2}{\Delta y' M_2} & p_2 = 0, \dots, \frac{M_2}{2} - 1 \\ \frac{p_2 - M_2}{\Delta y' M_2} & p_2 = \frac{M_2}{2}, \dots, M_2 - 1 \end{cases} \quad (63)$$

که در آن $\Delta x'$ و $\Delta y'$ بازه‌های نمونه‌برداری در جهت‌های x و y هستند (شکل ۱۴). برای نشان دادن لزوم برآورده شدن تقارن مزدوج مؤلفه‌های طیفی به [۲۶] مراجعه کنید.



شکل ۱۴- معرفی نمادها در روابط پارکر

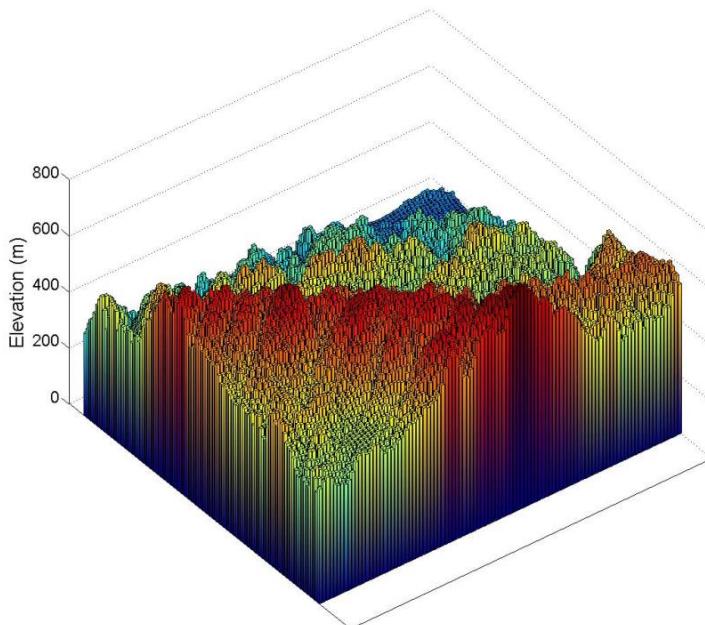
روش پارکر سه نقطه ضعف دارد: اول آنکه فرض محدود بودن و گسترش بودن داده‌ها سبب ایجاد بایاس‌هایی در مؤلفه‌های قطری تansor گرادیان می‌شود [۲۸]. دوم اینکه، نقطه محاسبه - یا ارتفاع گرادیان سنج - باید باید ثابت نگه داشته شوند. علاوه بر این، ارتفاع گرادیان سنج باید بالاتر از بلندترین ارتفاع در شبکه باشد. با وجود این نقاط ضعف در روشن پارکر، مزیت اصلی این روش همان کاهش قابل توجه زمان محاسبه نقشه گرادیان است. در جدول زیر زمان لازم برای محاسبه فول تنسور گرادیان گرانش از طریق دو روش «منشور مستطیلی» و «پارکر» آورده شده است. برای داشتن اطلاعات بیشتر در مورد تکنیک‌های تولید نقشه به [۲۹] و [۲۸] مراجعه کنید.

جدول ۴- مقایسه زمان موردنیاز برای محاسبه گرادیان گرانش برای هر یک از روش‌های منشور مستطیلی و پارکر [۱۳]

شبکه	تعداد نقاط	روش منشور مستطیلی	روش پارکر
$3^\circ \times 3^\circ, 1 \text{ arc min}$	۳۲۷۶۱	۲۶۴۰ sec	۷ sec
$2^\circ \times 2^\circ, 3 \text{ arc sec}$	۵۷۶۴۸۰۱	DNF*	۹۵۰ sec

* Did Not Finish – simulation was terminated after 72 hours

با استفاده از داده‌های ارتفاع سنجی، در محدوده‌ی 20° ، شبکه‌های ارتفاعی گسته با فاصله‌ی شبکه تقریباً ۹۰ متر (۳ ثانیه قوسی) ساخته خواهد شد. با استفاده از تقریب زمین-سطح، «انتهای» صفحه‌ی مرزی با صفر متر تعریف می‌شود که فرض می‌شود بر روی صفحه‌ی ژئوید *EGM96* قرار دارد. درنتیجه، سطح توپوگرافیکی عبارت خواهد شد ارتفاع عوارض هر سلول شبکه بر حسب متر از بالای *MSL*. نمونه‌ی کوچکی از المان‌های گسته مورداستفاده برای محاسبه گرادیان‌های ناشی از عوارض در شکل زیر نشان داده شده است [۱۳]:



شکل ۱۵- مثالی از شبکه ارتفاع

در این روش، چگالی جرم عوارض (ρ) مقدار ثابت 2.67 g/cm^3 در نظر گرفته شده است. این مقداری است که توسط زمین‌شناسان بعنوان چگالی متوسط عوارض در نظر گرفته می‌شود. همانطور که پیشتر ذکر شد، پیمایش‌های زمین‌شناسی نشان داده‌اند که جرم عوارض واقعی دارای چگالی متغیر هستند. برای کاهش این اثر، این فرض که نقشه‌های گرادیان مدل‌سازی شده حقیقت را نشان می‌دهند برای این مطالعه ساخته شده است.

در ارتفاع‌های پائین، بیشتر سیگنال آشفتگی گرادیان ناشی از عوارض مجاور نزدیک است. همینطور، برای درنظر گرفتن اکثر قریب به اتفاق اثرات عوارض، می‌توان اندازه‌های شبکه را نسبتاً کوچک انتخاب کرد.

در [۲۸] نشان داده شد که در ارتفاع ۱۰ متری بالای ماکزیمم ارتفاع یک شبکه نسبتاً *rough*, برای داشتن دقت $IEö$ نیاز به محتویات ناحیه با دقت نیم درجه می‌باشد. اما با افزایش ارتفاع، ناحیه‌ی اثر گذاری عوارض بر روی سیگنال افزایش می‌یابد. در هر صورت با افزایش ارتفاع، گرادیان‌های ناشی از عوارض همچنان به سرعت در حال کاهش هستند. در این مطالعه، به منظور دستیابی به نتایج قابل اعتماد از گرادیان عوارض فرض شده که شبکه‌ها به اندازه مناسب اندازه گذاری شده‌اند. برای مینیمم کردن خطاهای گرادیان ناشی از اثرات لبه‌ی شبکه، فقط مرکزی‌ترین بخش شبکه‌های گرادیان برای شبیه‌سازی استفاده خواهد شد.



فصل پنجم

تولید نقشه‌های گرادیان گرانش

۵ تولید نقشه‌های گرادیان گرانش

۱-۵ مقدمه

روش استفاده شده برای تولید نقشه در اینجا عبارت است از ترکیب گرادیان‌های استخراج شده از مدل $EGM96$ و گرادیان‌های استخراج شده از یک تکنیک مبتنی بر حوزه فرکانس مشابه آنچه که در روش منشور مکعب مستطیلی در بخش ۱-۷ بکار گرفته شد. گرادیان‌های حاصل از مدل $EGM96$ برای درنظر گرفتن اثرات گرانشی طول موج بلند که معمولاً با ناهنجاری‌های زیر توپوگرافی مرئی زمین مطابقت دارند، استفاده می‌شود. از طرف دیگر، گرادیان‌های حاصل از روش مشابه منشور مکعب مستطیلی برای مدل کردن اثرات عوارض زمین مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین مدل نهایی نقشه گرادیان گرانش در این گزارش با فرمول زیر بیان می‌شود.

$$T_{ij} = T_{ijEGM96} + T_{ijTerrain} \quad (۶۴)$$

لازم به ذکر است که این روش‌ها (و هیچ روش دیگری تا این لحظه) مقادیر دقیق و کامل گرادیان‌های گرانش را بدست نمی‌دهند بلکه می‌توانند نگرش‌های واقع گرایانه‌ای را با محاسبات نسبتاً سریع ارائه دهند. همچنین لازم به ذکر است که T_{ij} (پتانسیل آشفتگی^(۱)) و U_{ij} (پتانسیل نرمال) بسته به کاربرد می‌توانند متفاوت تعریف شوند. برای مثال، در صنایع نفت و معدن اغلب مدل گرادیان عوارض با فرض ثابت بودن چگالی عوارض تولید می‌شود و با آن بعنوان جزئی از U_{ij} رفتار می‌شود و سپس از U_{ij} تفریق می‌گردد تا تغییرات چگالی درون عوارض معلوم شود. در کاربردهای ناوبری، اطلاعات گرادیان گرانش حاصل از عوارض به خودی خود یک کمیت موردنیاز است. در صورتی که داده‌های گرادیان از یک منبع خارجی اخذ شده باشد، باید اطلاعاتی در مورد اینکه چه تصحیحاتی به این داده‌ها (نقشه) اعمال شده است بdst آید. بعنوان مثال، اگر یک دیتابیس سیستم ناوبری تطبیق نقشه مبتنی بر GGI با داده‌های گرادیان گرانشی بارگذاری شود که در آن بدون اطلاع کاربر اثرات عوارض حذف شده باشد، چنین سیستمی غیرقابل استفاده خواهد بود.

۵-۲ هنر تولید نقشه

در سیستم کمک ناوبری مبتنی بر تطبیق نقشه، اگر نقشه‌های مدل شده بطور دقیق واقعیت را به تصویر نکشند، آنگاه تحقیقات بیشتر فقط روی یک اساس نامعین بنا می‌شود. لازم به ذکر است که چه اطلاعات اندازه‌گیری-شده نقشه‌ها را بسازند و چه اطلاعات مدل شده، این پیمایش‌های واقعی هستند که ماهیت گرadiان‌های گرانش صحیح را مشخص می‌نمایند [۱۳].

پیمایش‌های واقعی می‌توانند:

- غلط‌های مدل را کمی کنند،
- میزان تغییر گرadiان‌های گرانش با زمان را نشان دهند،
- مکان‌هایی که ضعیف مدل شده‌اند را شناسایی کنند،
- فرکans‌های مهم اطلاعات گرadiان گرانش را بررسی کنند.

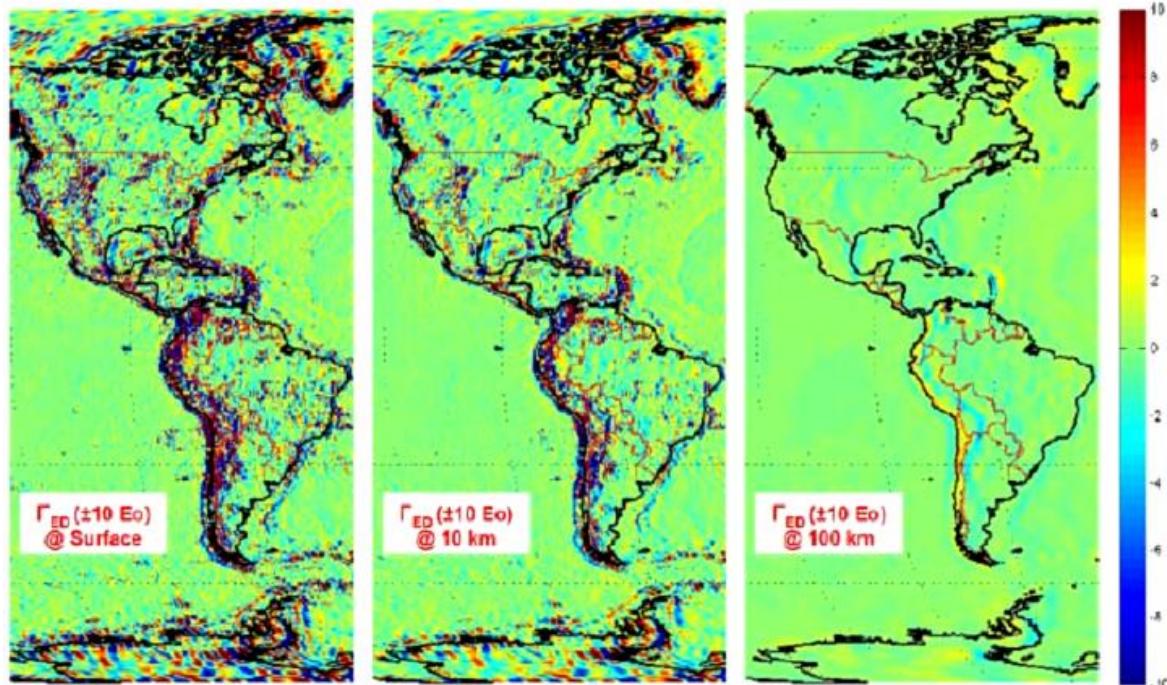
این نوع از معترسازی^۱ به بسیاری از پرسش‌ها پاسخ می‌دهد؛ پرسش‌هایی چون: چه روش‌هایی در بهترین نقشه‌ها نتیجه می‌دهد؟ آیا باید نقشه‌ها مدل شوند، نقشه‌برداری شوند یا ترکیبی از ایندو؟ رزولوشن بهینه برای نقشه چقدر است؟ GAME در بخش‌های دیگر از جهان خصوصاً کوهستان‌ها، اقیانوس‌ها و ارتفاعات بسیار بالا چگونه عمل می‌کند؟ بر روی GAME چه کاری باید انجام داد تا در ارتفاعات پائین، نزدیک و درون شهرها به خوبی کار کند؟ نقشه‌برداری‌ها، معترسازی موردنیاز برای پاسخ به این سؤالات را فراهم می‌آورد و سرانجام تضمین می‌کند که تحقیقات و سرمایه‌گذاری‌های آینده یک اساس و بنیان محکمی را بنا خواهد کرد.

این سؤال که آیا نقشه‌ها باید مدل شوند یا نقشه‌برداری شوند بحث بیشتری دارد. یک نقشه‌برداری تصحیح شده که فرکans‌های اطلاعات در دسترس گرadiان‌های گرانش و تکنیک‌های نمونه‌برداری عمومی در جهان را می‌دهد، در تعیین این که کدام یک از روش‌های "مدل کردن" یا "نقشه‌برداری کردن"، نقشه‌های بهینه را می‌سازد کمک می‌کند. در اینجا منظور از بهینه برمی‌گردد به نقشه‌هایی که نیازهای کاربر را با کمترین هزینه برآورده کند یا بهترین قیمت را برای سرمایه‌گذاری فراهم نماید. علاوه بر این، نقشه‌برداری‌های عمومی یا تصحیح شده در تعیین اینکه آیا پیمایشی کلی از زمین نیاز است یا اینکه تنها در بعضی مکان‌ها نقشه‌برداری نیاز است کمک می‌کند. اگر نقشه‌برداری‌ها با دقت قابل قبولی بر مدل‌ها تطبیق شوند، آنگاه نقشه‌های مدل شده کافی خواهند بود یا نقشه‌برداری‌های محدود می‌توانند به اندازه کافی مدل‌ها را بهبود دهند. برای مثال پیمایش‌ها می‌توانند بایاس‌ها را شناسایی کرده و به فاکتورهای تصحیح مناسبی هدایت کنند. تلاش‌های بیشتر می‌تواند

همچنین روش‌های کارآمدتری را برای شمول اثرات عوارض در مدل‌های نقشه شناسایی کند (مثلاً چه مقداری از عوارض شامل شود، چه رزولوشنی استفاده شود، چه داده‌ای در ارتفاعات بالا می‌تواند نادیده گرفته شود). نقشه‌برداری‌ها تعیین می‌کنند که هر چند وقت یکبار نقشه‌برداری‌های جدید باید انجام شود و آیا به علت حرکت جرم بزرگ آپدیت نقشه را می‌توان با محاسبه بدست آورد یا نیاز به پیمايش جدید است؟ مجدداً تأکید می‌شود که بدون چنین معتبرسازی‌هایی تخمین‌های عملکرد GAME وابسته به یک بنیانی است که فقط به استحکام مدل‌های مورد استفاده در تخمین‌ها بستگی دارد [۱۳].

۳-۵ اثر ارتفاع بر نقشه گرادیان گرانش

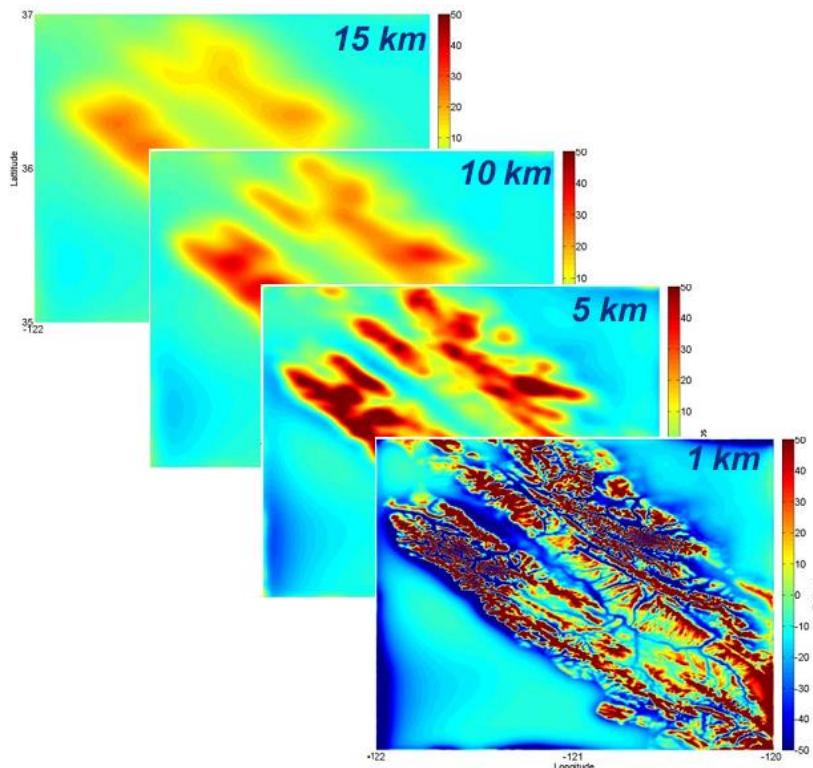
در مقاله [۱۸]، از مدل گرانش EGM96 برای نشان دادن چگونگی تغییرات گرادیان گرانش با ارتفاع استفاده شده است. از آنجاکه در این سناریو، زمین و ویژگی‌های عوارض آن بر نیروهای گرانشی و گرادیان‌ها غالب می‌شوند، تغییرات در گرادیان‌های گرانش بر فراز مناطق کوهستانی اتفاق می‌افتد و با افزایش ارتفاع از سطح زمین، این گرادیان‌ها به نسبت مکعب فاصله کاهش می‌یابند. در صورتی که سهم عوارض بر روی گرادیان‌های گرانش کمتر از سطح نویز GGI باشد، اثرات عوارض بر روی گرادیان‌ها نادیده گرفته می‌شود. در شکل ۱۶ گرادیان گرانش در سه ارتفاع مختلف نشان داده شده است.



شکل ۱۶- گرادیان گرانش شرق-پائین در سه ارتفاع مختلف

در [۱۸] نشان داده شده است که رزولوشن محدود مدل $EGM96$ بدین معنی است که گرادیان‌های گرانش واقعی در ارتفاع‌های پائین به احتمال خیلی زیاد بیشتر از آن چیزی است که در نقشه‌های تولیدشده دیده می‌شود، زیرا اثرات عوارض نوک‌تیز ممکن است پوشانده^۱ شده باشد.

شکل ۱۷ نیز نمای دیگری از Γ_{DD} را در منطقه‌ای خاص از زمین نشان می‌دهد و بیانگر این است که چگونه نقشه گرادیان گرانش با افزایش ارتفاع تضعیف می‌شود [۳۰].



شکل ۱۷- نقشه Γ_{DD} در چهار ارتفاع مختلف

۴-۵ فایل مدل گرانشی زمین

مدل ریاضی $EGM96$ یک فایل همراه با شش پارامتر متفاوت است که به ترتیب شامل درجه، مرتبه، ضریب کسینوسی (C_{nm})، ضریب سینوسی (S_{nm})، انحراف از معیار ضریب کسینوسی (σC) و انحراف از معیار ضریب سینوسی (σS) است. همان ضرایب هارمونیک‌های کروی نرمالیزه شده هستند که در فرمول (۳۳) آمده‌اند. این ضرایب همانطور که در بخش ۳ ذکر شد، با استفاده از فرمول‌های (۳۸) و (۳۹) و جدول ۳ به ضرایب مناسب برای استفاده در روابط گرادیان گرانش تبدیل می‌شوند. فایل مدل‌های گرانشی

زمین به صورت خاص و طبق یک قرارداد کلی ویرایش شده است که با توجه به آن خصوصیات می‌توان اطلاعات و محتويات درون آن را خواند [۳۱]. این قرارداد و نحوه استفاده از این فایل در بخش ۶ آمده است. فایل مدل گرانشی زمین *EGM96* از دو طریق زیر قابل دستیابی است:

۱- در سایت (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>) در قسمت *static models* موجود و قابل دانلود است. در این سایت، داده‌های گرانشی با پسوند *.gfc* یا بصورت زیپ شده که در درون آن فایل *gfc* قرار دارد ارائه می‌شوند. پسوند *gfc* حاصل سرnam عبارت *gravity field coefficients* است. برای اینکه داده‌های درون این فایل را مشاهده کنیم، کافیست آن را با *Notepad* باز کنیم. چند سطر اول این فایل که از سایت *ICGEM* دانلود شده است در شکل ۱۸ دیده می‌شود.

Lemoine F.G., Kenyon S.C., Factor J.K., Trimmer R.G., Pavlis N.K.,
Chinn D.S., Cox C.M., Klosko S.M., Luthcke S.B., Torrence M.H.,
Wang Y.M., Williamson R.G., Pavlis E.C., Rapp R.H., Olson T.R.;
The Development of the Joint NASA GSFC and the National
Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96;
NASA Technical Paper NASA/TP1998206861,
Goddard Space Flight Center, Greenbelt, USA, 1998

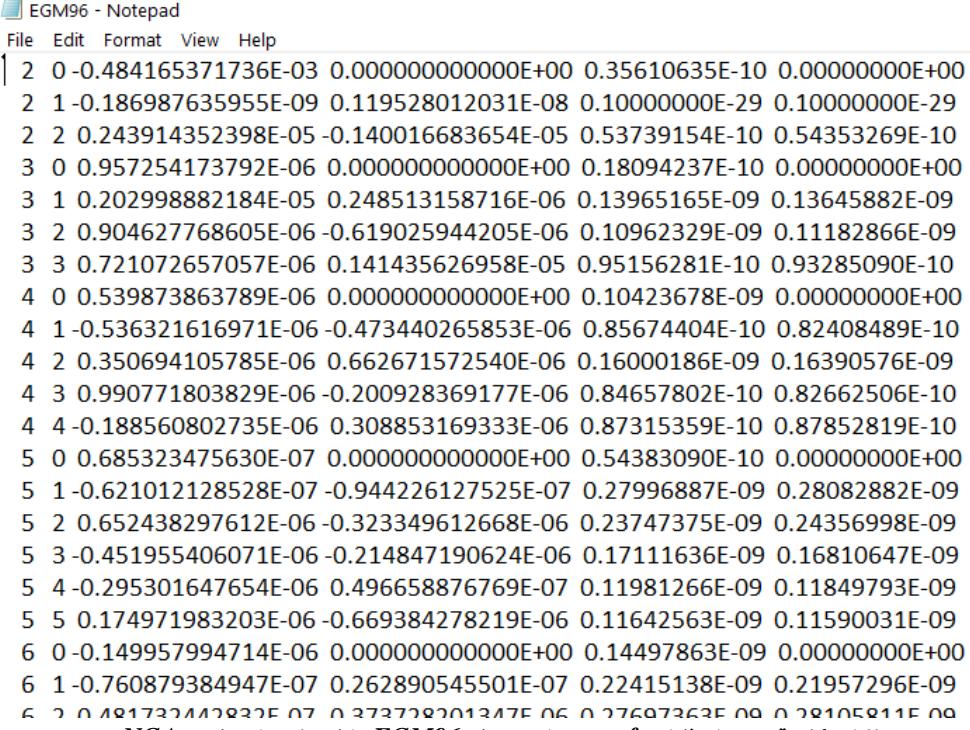
```
product_type      gravity_field
modelname        EGM96
earth_gravity_constant 0.3986004415E+15
radius           0.6378136300E+07
max_degree       360
errors           formal
tide_system      tide_free
```

key	L	M	C	S	sigma C	sigma S
end_of_head	=====					
gfc	0	0	1.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00	0.00000000e+00	0.00000000e+00
gfc	2	0	-0.484165371736e-03	0.00000000000000e+00	0.35610635e-10	0.00000000e+00
gfc	2	1	-0.186987635955e-09	0.119528012031e-08	0.10000000e-29	0.10000000e-29
gfc	2	2	0.243914352398e-05	-0.140016683654e-05	0.53739154e-10	0.54353269e-10
gfc	3	0	0.957254173792e-06	0.00000000000000e+00	0.18094237e-10	0.00000000e+00
gfc	3	1	0.202998882184e-05	0.248513158716e-06	0.13965165e-09	0.13645882e-09
gfc	3	2	0.904627768605e-06	-0.619025944205e-06	0.10962329e-09	0.11182866e-09
σfr	3	3	0.721072657057e-06	0.141435676958e-05	0.95156781e-10	0.93285090e-10

شکل ۱۸- قسمتی از فایل *gfc* مربوط به مدل *EGM96* دانلود شده از سایت *ICGEM*

همانگونه که در شکل فوق دیده می‌شود، ضرایب هارمونیک کروی برای هر *L* و *M* که منظور همان *m* و *n* خودمان است در ستون‌های چهارم و پنجم این فایل آورده شده است و در استفاده از این فایل در نرم‌افزار باید توجه داشت که کدام ستون‌ها را باید خواند.

-۲ در سایت (<https://earth-info.nga.mil/index.php?dir=wgs84&action=wgs84>) در قسمت موجود و قابل دانلود است. در اینجا یک پوشه زیپ شده دانلود می شود که در آن داده های گرانشی به همراه یک نرم افزار محاسبه ای ارتفاع ژئوید قرار داده شده است. از این نرم افزار می توان برای صحبت سنجی محاسبات استفاده کرد. در این پوشه فایلی بدون پسوند با نام *EGM96* قرار دارد که داده ها در آن قرار دارند و با اضافه کردن پسوند *.gfc* بر روی نام آن می توان همانند مورد قبلی از آن استفاده کرد. فایلی که از این سایت بدست می آید برخلاف سایت قبلی *header* ندارد و از همان ابتدا با $n=2$ شروع می شود. علاوه بر این، ستون اول آن مانند مورد قبلی *gfc* نیست. چند سطر اول این فایل که از سایت *NGA* دانلود شده است در شکل ۱۸ دیده می شود.


 EGM96 - Notepad
 File Edit Format View Help
 1 2 0 -0.484165371736E-03 0.000000000000E+00 0.35610635E-10 0.00000000E+00
 2 1 -0.186987635955E-09 0.119528012031E-08 0.10000000E-29 0.10000000E-29
 2 2 0.243914352398E-05 -0.140016683654E-05 0.53739154E-10 0.54353269E-10
 3 0 0.957254173792E-06 0.000000000000E+00 0.18094237E-10 0.00000000E+00
 3 1 0.202998882184E-05 0.248513158716E-06 0.13965165E-09 0.13645882E-09
 3 2 0.904627768605E-06 -0.619025944205E-06 0.10962329E-09 0.11182866E-09
 3 3 0.721072657057E-06 0.141435626958E-05 0.95156281E-10 0.93285090E-10
 4 0 0.539873863789E-06 0.000000000000E+00 0.10423678E-09 0.00000000E+00
 4 1 -0.536321616971E-06 -0.473440265853E-06 0.85674404E-10 0.82408489E-10
 4 2 0.350694105785E-06 0.662671572540E-06 0.16000186E-09 0.16390576E-09
 4 3 0.990771803829E-06 -0.200928369177E-06 0.84657802E-10 0.82662506E-10
 4 4 -0.188560802735E-06 0.308853169333E-06 0.87315359E-10 0.87852819E-10
 5 0 0.685323475630E-07 0.000000000000E+00 0.54383090E-10 0.00000000E+00
 5 1 -0.621012128528E-07 -0.944226127525E-07 0.27996887E-09 0.28082882E-09
 5 2 0.652438297612E-06 -0.323349612668E-06 0.23747375E-09 0.24356998E-09
 5 3 -0.451955406071E-06 -0.214847190624E-06 0.17111636E-09 0.16810647E-09
 5 4 -0.295301647654E-06 0.496658876769E-07 0.11981266E-09 0.11849793E-09
 5 5 0.174971983203E-06 -0.669384278219E-06 0.11642563E-09 0.11590031E-09
 6 0 -0.149957994714E-06 0.000000000000E+00 0.14497863E-09 0.00000000E+00
 6 1 -0.760879384947E-07 0.262890545501E-07 0.22415138E-09 0.21957296E-09
 6 2 0.191721117022E-07 0.272727012174E-07 0.272727012174E-07 0.272727012174E-07

شکل ۱۹- قسمتی از فایل *gfc*. مربوط به مدل *EGM96* دانلود شده از سایت *NGA*

همانطور که از شکل فوق مشخص است، داده های این فایل اندکی متفاوت با سایت *ICGEM* قرار داده شده اند. بدین معنی که مقادیر ضرایب هارمونیک های کروی در ستون سوم و چهارم قرار داده شده اند. در استفاده از این فایل در نرم افزار باید توجه داشت که کدام ستون ها را باید خواند.

حال سوال این است که چگونه اطلاعات *EGM96* که حاوی ضرایب سری سازنده گرادیان های گرانش است به یک نقشه تبدیل شود؟ در واقع نقشه گرادیان های گرانش یک ماتریس است که مولفه های آن حاوی گرادیان های گرانش در طول و عرض های جغرافیایی مربوطه است. بنابراین کافی است با توجه به رزولوشن مدل مورد استفاده (مثالاً *EGM96*) طول و عرض جغرافیایی را فاصله گذاری کرده و در هر گام گرادیان های



گرانش را با استفاده از سری‌های داده شده در روابط (۴۲) تا (۴۶) و جاگذاری ضرایب سینوسی و کسینوسی از روی مدل EGM96 محاسبه کرد. اینکار در قسمت تشریح گُد شرح داده می‌شود.

۵-۵ معرفی و توضیح مدل عوارض زمین

برای داشتن داده‌های ارتفاعی زمین، می‌بایست از مدل‌های دیجیتال ارتفاعی زمین که نوعاً با روش‌های مبتنی بر ماهواره تهیه می‌شوند استفاده کرد. این داده‌ها در سایت <https://earthexplorer.usgs.gov> متعلق به سازمان زمین‌شناسی ایالات متحده آمریکا (USGS) وجود دارند. در شکل زیر تصویر بخشی از صفحه اول این سایت نشان داده شده است:

Search Criteria Summary (Show All)

2. Select Your Data Set(s)

Check the boxes for the data set(s) you want to search. When done selecting data set(s), click the Additional Criteria or Results buttons below. Click the plus sign next to the category name to show a list of data sets.

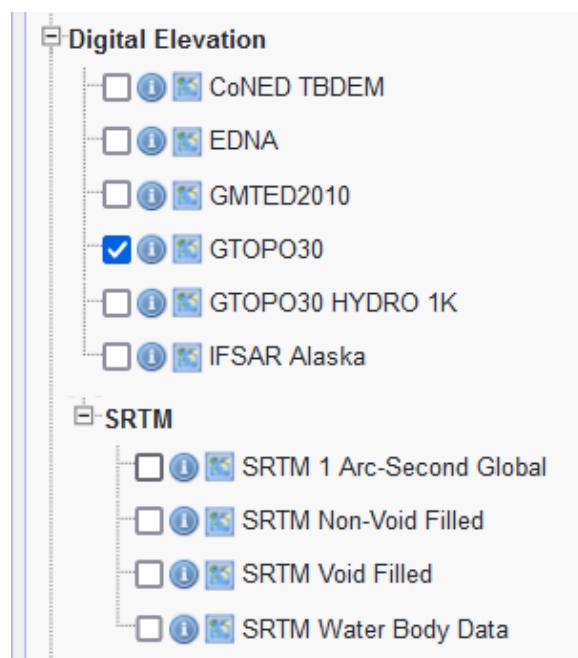
Use Data Set Prefilter (What's This?)

Data Set Search:

This data set list is cached for performance. If your user permissions have changed or you are not seeing an expected dataset, [click here to refresh your list](#).

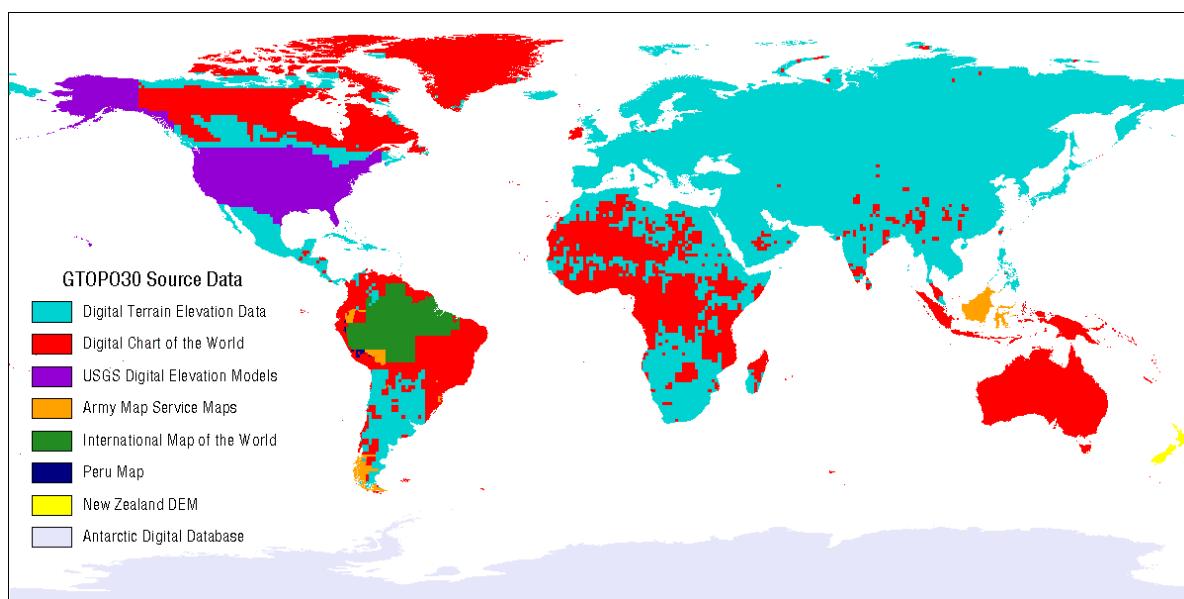
- + Aerial Imagery
- + AVHRR
- + CEOS Legacy
- + Commercial Satellites
- + Declassified Data
- + Digital Elevation ←
- + Digital Line Graphs
- + Digital Maps [+]
- + EO-1
- + Global Fiducials
- + HCMM

شکل ۲۰- تصویری از صفحه سایت Earthexplorer که در آن داده‌های ارتفاعی زمین نیز ارائه می‌شود همانطور که در شکل فوق مشاهده می‌شود، در این سایت علاوه بر داده‌های مختلف ژئوفیزیکی، یکی از داده‌هایی که ارائه می‌شود Digital Elevation است. در ذیل این قسمت مطابق شکل زیر گزینه‌های زیادی برای دریافت داده‌های ارتفاعی وجود دارد.



شکل ۲۱- گزینه‌های مختلف داده‌های ارتفاعی در سایت *Earthexplorer*

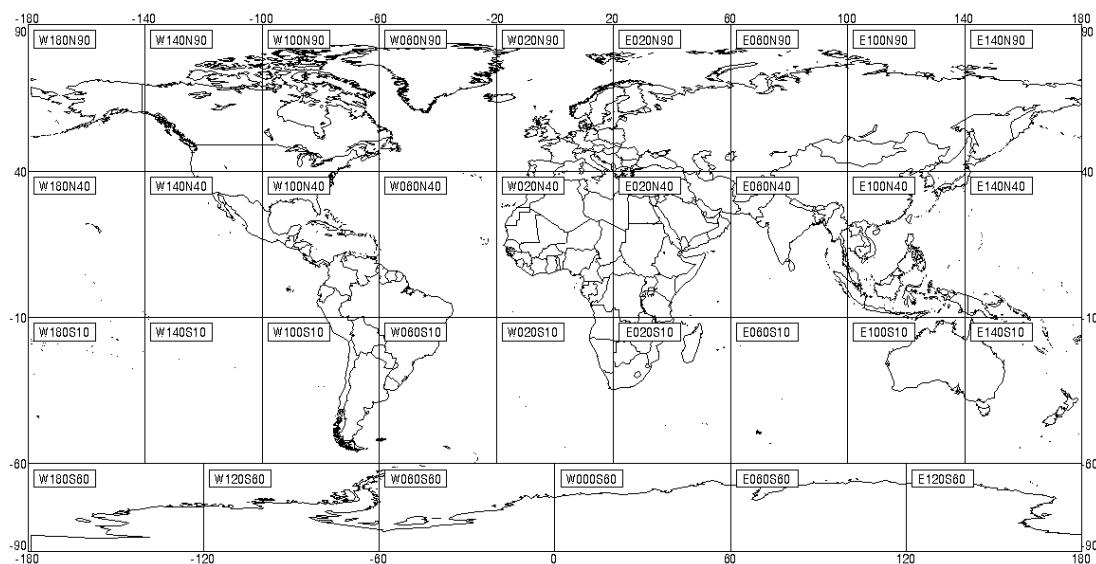
در بین این گزینه‌ها، ما گزینه‌ی *GTOPO30* را انتخاب می‌کنیم. *GTOPO30* یک مدل جهانی از ارتفاع دیجیتال است که فاصله بین شبکه‌های افقی آن ۳۰ ثانیه قوسی (حدود یک کیلومتر) می‌باشد. این مدل با مشارکت ارگان‌های مختلف بین‌المللی به رهبری سازمان زمین‌شناسی آمریکا تهیه شده است. داده‌های این مدل برای مناطق مختلف کره زمین، توسط منابع متفاوتی تولید شده‌اند [۳۳]. در شکل زیر منبع تولید داده‌های این مدل برای نقاط مختلف جهان نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، تقریباً تمام داده‌های ارتفاعی این مدل در منطقه‌ی ایران و پیرامون آن از روی *DTED* بدست آمده است.



شکل ۲۲- منابع تولید داده‌های *GTOPO30* برای نقاط مختلف جهان

داده‌های این مدل در ۳۳ بلوک مجزا برای کل جهان وجود دارد. در شکل زیر بلوک‌بندی این مدل برای کل جهان نشان داده شده است. نام هریک از این بلوک‌ها با یک گذ مشخص شده‌اند که اشاره به طول و عرض جغرافیایی گوششی شمال غربی بلوک دارد. عنوان مثال بلوکی که کشور ایران را شامل می‌شود با گذ مشخص شده است که نشان می‌دهد از نقطه‌ی طول 20° درجه و عرض 40° درجه آغاز شده است.

GTOPO30 tiles



شکل ۲۳- بلوک‌بندی جهان در مدل GTOPO30

همانطور که از شکل فوق مشاهده می‌شود، تعداد ۲۷ عدد از این بلوک‌ها محدوده‌ی عرضی 50° درجه‌ای و محدوده‌ی طولی 40° درجه‌ای را شامل می‌شوند. هیچگونه همپوشانی بین این بلوک‌ها وجود ندارد. سیستم مختصات افقی مورد استفاده در این مدل برمنای طول و عرض جغرافیایی در دستگاه یکسی رفرنس WGS84 می‌باشد. واحدهای عمودی، ارتفاع را بر حسب متر از بالای سطح متوسط دریا (ژئوید) بیان می‌کنند. در این مدل، ارتفاع اقیانوس‌ها (آب‌های آزاد) برابر با صفر می‌باشد و لذا گرادیان‌های گرانش ناشی از عوارض بر فراز اقیانوس‌ها برابر با صفر است.

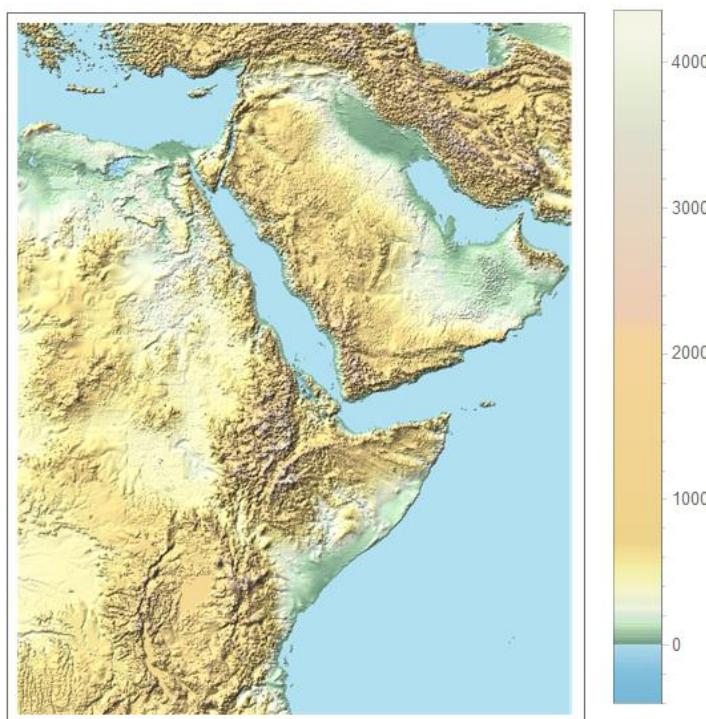
در سایت EarthExplorer، پس از اینکه بلوک موردنظر انتخاب شد، داده‌های آن را که بصورت یک فایل zip است دانلود می‌کنیم. این فایل باید به همین صورت در متاتیکا ایمپورت شود. با استفاده از آپشن Import در دستور Elements می‌توان المان‌های موجود در این فایل دانلود شده را یافت. عنوان مثال ما فایل دانلود شده مربوط به بلوک ناحیه‌ی ایران و اطراف آن را که بصورت یک فایل زیپ بوده در درایو D قرار دادیم و سپس با دستور Import و آپشن Elements محتويات درون آن را نشان دادیم:

```
Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "Elements"]
{Data, DataFormat, Dimensions, ElevationRange, Graphics, Image, ReliefImage, SpatialRange, SpatialResolution}
```

همانطور که مشاهده می‌شود این فایل شامل ۹ المان است و با قراردادن نام هر کدام از اینها در دستور *Import* می‌توان محتويات آن را مشاهده کرد. بعنوان مثال می‌خواهیم شکل نقشه‌ی ناحیه‌ی بلوک را مشاهده کنیم؛ المان *Graphics* را در فایل *Import* قرار می‌دهیم:

```
Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "Graphics", PlotLegends -> Automatic]
```

در اینصورت با اجرای این دستور تصویر زیر مشاهده خواهد شد که در آن ارتفاعات نقاط مختلف در فرمت *reliefplot* در متمتیکا نشان داده خواهد شد.



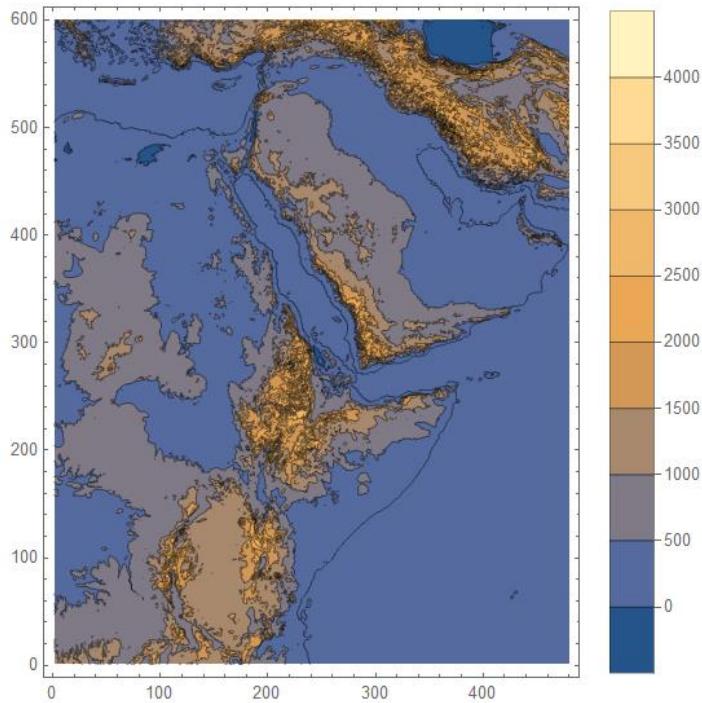
با انتخاب المان‌های *ReliefImage* و *Image* مدل‌های دیگری از نمایش ارتفاع ناحیه‌ی مورد نظر به نمایش در خواهد آمد.

با انتخاب المان *Data* در فایل *Import* آرایه‌ی داده‌های ارتفاعی موجود در فایل بر حسب متر استخراج شده و در متغیر دلخواه ذخیره می‌گردد. بعنوان مثال با دستور زیر ماتریس داده‌های ارتفاعی در ماتریس *Elev* قرار می‌گیرند.

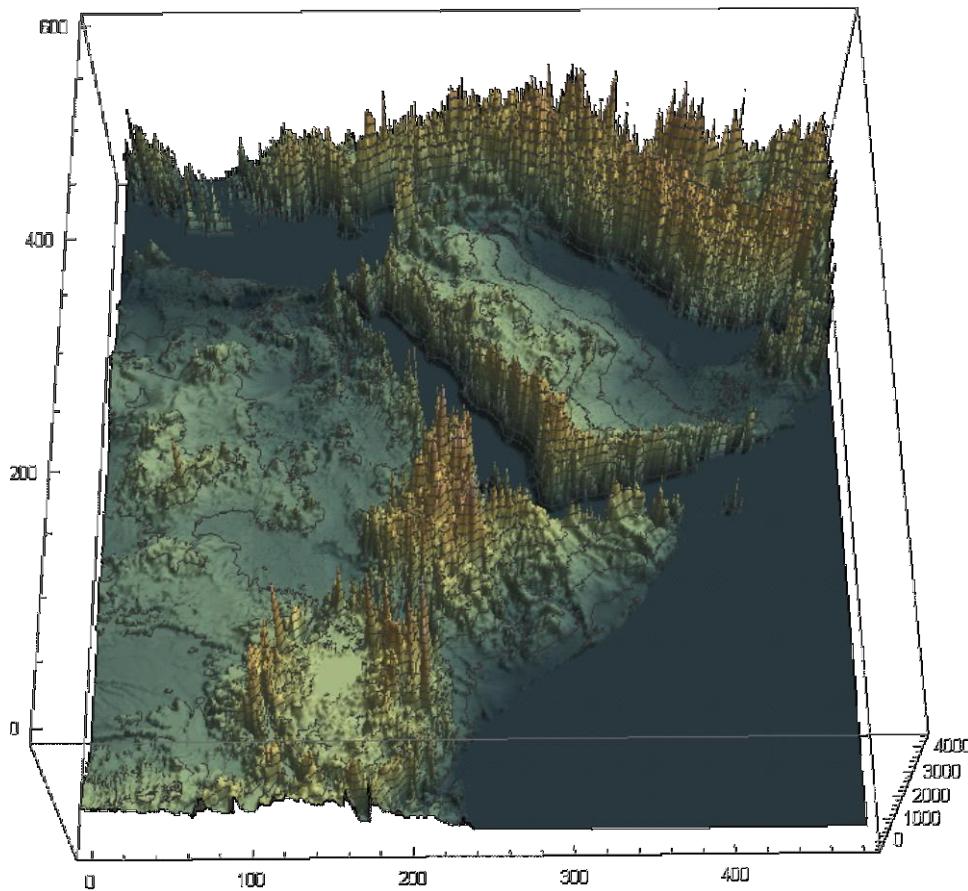
```
Elev = Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "Data"];
```

لازم به ذکر است که پس از ذخیره کرده ماتریس *Data* می‌توان با دستور *ListContourPlot* مطابق زیر این داده‌های ارتفاعی را رسم کرد:

```
Elev = Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "Data"];
ListContourPlot[Elev, AspectRatio -> Automatic, PlotLegends -> BarLegend[Automatic, All], PlotRange -> All]
```



در ضمن می‌توان داده‌های ارتفاعی را با دستور *ListPlot3D* بصورت سه‌بعدی نیز نشان داد:



با انتخاب المان *DataFormat* فرمت داده‌های موجود نشان داده خواهد شد. در مثال زیر این دستور اجرا شد و نتیجه‌ی آن *Integer 16* به نمایش در آمد است.

```
Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "DataFormat"]
```

```
Integer16
```

با انتخاب المان *Dimensions* ابعاد ماتریس داده‌های ارتفاعی نشان داده خواهد شد که در اینجا یک ماتریسی با ۶۰۰۰ سطر و ۴۸۰۰ ستون می‌باشد.

```
Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "Dimensions"]
```

```
{6000, 4800}
```

با انتخاب المان *ElevationRange*، محدوده‌ی ارتفاعی در ماتریس داده‌ها بر حسب متر داده می‌شود که نشان می‌دهد که در این بلوک بیشترین ارتفاع ۴۳۷۵ متر و کمترین ارتفاع ۴۰۵ متر است.

```
Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "ElevationRange"]
```

```
{-405 m, 4357 m}
```

با انتخاب المان *SpatialRange*، محدوده‌ی طول و عرض جغرافیایی بلوک موردنظر نشان داده می‌شود. این بلوک دارای محدوده‌ی عرضی به اندازه‌ی ۵۰ درجه و محدوده‌ی طولی به اندازه‌ی ۴۰ درجه می‌باشد.

```
Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "SpatialRange"]
```

```
{ { -10.0042° , 39.9958° } , { 20.0042° , 60.0042° } }
```

با انتخاب المان *SpatialResolution* رزولوشن مکانی داده‌های ارتفاعی در هریک از مسیرهای طول و عرض جغرافیایی نشان داده می‌شود که همانطور که پیشتر ذکر شد، در مدل *GPOT030* برابر با ۳۰ ثانیه قوسی است:

```
Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "SpatialResolution"]
```

```
{ 30. , 30. }
```

البته بدیهی است که وقتی محدوده‌ی ۵۰ درجه‌ی عرضی و ۴۰ درجه‌ی طولی با رزولوشن ۳۰ ثانیه قوسی نمونه‌برداری شود، ابعاد ماتریس حاصل ۶۰۰۰ در ۴۸۰۰ خواهد شد. ولی فعلًاً ابهام آور این است که وقتی با المان *Data* ماتریس ارتفاعات موجود استخراج و در فایل مشخصی ذخیره می‌گردد، ابعاد ماتریس به جای ۶۰۰۰ در ۴۸۰۰، ده برابر کمتر و برابر با ۴۸۰ در ۶۰۰ می‌باشد؛ این یعنی داده‌ی دانلود شده دارای رزولوشن ۵ دقیقه می‌باشد، نه ۳۰ ثانیه.



تشریح گُدنویسی

فصل ششم

تشریح گُدنویسی

۶ تشریح گُدنویسی

از آنجا که شبیه‌سازی‌های انجام شده در نرم‌افزار متماتیکا 12 انجام شده، در این قسمت به تشریح خط به خط گُدنوشتۀ شده در نرم‌افزار متماتیکا پرداخته می‌شود. اینکار با دو هدف انجام می‌شود: اول این که خواننده بتواند در آینده تغییرات دلخواه را در گُد ایجاد کند و دوم اینکه با دانستن روند گُدنویسی روابط حاکم، فهم دقیق‌تری از مسئله حاصل می‌شود. در این راستا، استخراج گُردایان‌ها برای هریک از روش‌های متند در دو فایل گُردایان حاصل از عوارض زمین

۱-۱ تشریح گُد گُردایان گرانش ناشی از عوارض (متند پارکر)

۱-۱-۱ بخش اول: وارد کردن فایل داده‌های ارتفاعی در محدوده مورد نظر برای نقشه و یافتن میانگین ارتفاع

```
Elev = Import["D:\\gt30e020n40_dem.zip", "Data"];
(*ListContourPlot[Elev, AspectRatio -> Automatic, PlotLegends -> BarLegend[Automatic, All], PlotRange -> All]*)
i[\[phi]\_] = Round[1 + (\[phi] + 10.0042) \frac{60}{5}];
j[\[lambda]\_] = Round[1 + (\[lambda] - 20.0042) \frac{60}{5}];
h = 100; (*Input altitude (meters height above average terrain)*)
d\phi = {32, 34}; (*Latitude Range*)
d\lambda = {50, 52}; (*Longitude Range*)
G = 6.6742 \times 10^{-11};
\rho = 2670;
a = 6378137.0000;
f = 1 / 298.257223563;
e^2 = 2 f - f^2;
Eotvos = 10^-9;
\phi res = 0.1; (*Latitude Resolution*)
\lambda res = 0.1; (*Longitude Resolution*)
\phi length = Round[d\phi[[2]] - d\phi[[1]]];
\lambda length = Round[d\lambda[[2]] - d\lambda[[1]]];
\phi limDeg = Range[d\phi[[1]], d\phi[[2]], \phi res];
\lambda limDeg = Range[d\lambda[[1]], d\lambda[[2]], \lambda res];
Z = Elev[[i[\phi limDeg], j[\lambda limDeg]]];
imax = i[d\phi[[2]]];
imin = i[d\phi[[1]]];
jmax = j[d\lambda[[2]]];
jmin = j[d\lambda[[1]]];
meanElev = Mean[Mean[Elev[[imin;; imax, jmin;; jmax]]]];
alt = h + meanElev;
```

در ابتدا فایل داده‌ی ارتفاعات از مدل GTOPO30 که در بخش ۵-۵ در مورد آن توضیح داده شد ایمپورت می‌شود. در ایمپورت این فایل توجه شود که المان Data باید انتخاب شود و مقادیر ارتفاعات که بصورت یک ماتریس است در متغیر Elev ذخیره می‌گردد. همانطور که در بخش ۵-۵ اشاره شد، باید طول و عرض جغرافیایی

آغاز و پایان بلوک موردنظر و ابعاد سطر و ستون آن دانسته شود. با دانستن این مطلب، دو تابع بعنوان شمارنده‌ی سطر و ستون ماتریس ارتفاعات را بر حسب عرض و طول جغرافیایی می‌نویسیم. این دو تابع با گرفتن عرض و طول جغرافیایی، موقعیت درایه متناظر با آن را در ماتریس پیدا می‌کند.

در قدم بعدی ارتفاع از متوسط سطح عوارض زمین بر حسب متر گرفته می‌شود. سپس محدوده عرض و طول جغرافیایی **ژئودتیک** مربوط به منطقه موردنظر که نسبت به بیضی رفرنس WGS84 بیان شده است به برنامه داده می‌شود. توجه شود که محدوده‌ی طول و عرض منطقه‌ی موردنظر باید در درون بلوکی از GTOPO30 که ایمپورت شده است واقع شده باشد. مقدار ارتفاع نیز بر حسب ارتفاع از متوسط سطح عوارض منطقه‌ی موردنظر می‌باشد. در ادامه سه ثابت a , $e2$, f و $meanElev$ ذکر شوند که به ترتیب شاعع بزرگ بیضی مرجع WGS84، میزان پختگی این بیضی و مربع خروج از مرکز است. در مورد این پارامترها در بخش ۳-۱ توضیح داده شده بود و در جدول ۱ نیز مقادیر آن‌ها آورده شده بود.. در قدم بعدی رزولوشن طول و عرض جغرافیایی که می‌خواهیم در منطقه موردنظر گردابیان‌های گرانش را بیان کنیم را تعیین می‌کنیم. سپس تفاضل طولین و تفاضل عرضین منطقه‌ی موردنظر را محاسبه کرده و در متغیرهای مربوطه قرار می‌دهیم. بعد از آن ماتریس یک بُعدی می‌سازیم که از ابتدای عرض جغرافیایی تا انتهای عرض جغرافیایی منطقه موردنظر را با گام‌های رزولوشن بشمارد. همین کار را برای طول جغرافیایی نیز انجام می‌دهیم. در قدم بعدی، ماتریس ارتفاعات منطقه‌ی موردنظر را از درون ماتریس ارتفاعات بلوک انتخابی مدل GTOPO30 که با نام $meanElev$ ذخیره کرده بودیم استخراج کرده و در ماتریس جدیدی به نام Z می‌ریزیم. توجه شود این استخراج با رزولوشنی که قبل از تعیین کرده‌ایم انجام می‌شود و لزوماً نمی‌تواند همه‌ی درایه‌های ماتریس اصلی بلوک را از منطقه‌ی موردنظر شامل شود مگر اینکه رزولوشن را برابر با رزولوشن داده‌های ارتفاعات مدل GTOPO30 قرار داده باشیم.

سپس میانگین ارتفاع عوارض در منطقه‌ی موردنظر را بدست آورده و در متغیر $meanElev$ ذخیره می‌کنیم. این میانگین ارتفاعات منطقه‌ی موردنظر را با ارتفاعی که در ابتدای برنامه بعنوان ارتفاعی که می‌خواهیم نقشه در آن رسم شود جمع می‌کنیم و در متغیر alt ذخیره می‌نمائیم. درواقع alt ارتفاع از سطح آب‌های آزاد (ژئoid) است.

۲-۱-۶ بخش دوم: محاسبه شعاع زمین در نقطه مرکزی شبکه

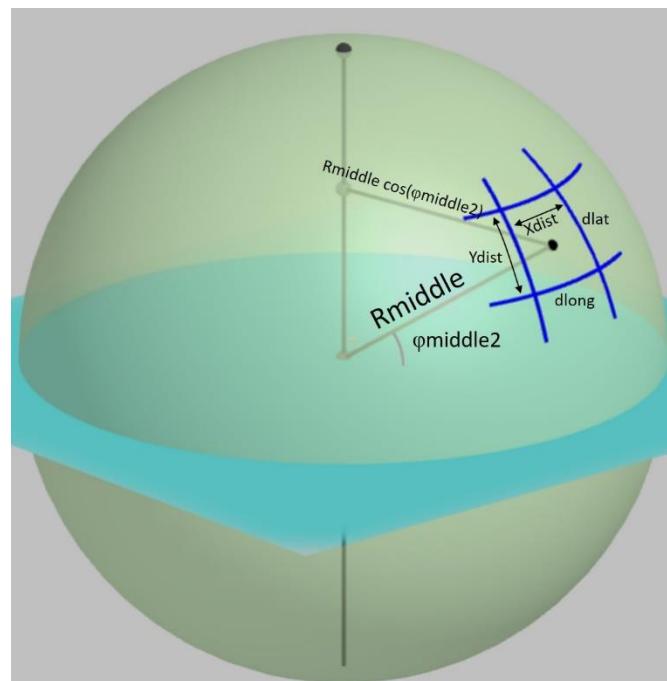
```

 $\varphi_{middle} = \frac{d\varphi[[1]] + d\varphi[[2]]}{2} \frac{\pi}{180};$ 
 $\varphi_{middle2} = \text{ArcTan}[(1 - e^2) \tan[\varphi_{middle}]];$ 
 $\lambda_{middle} = \frac{d\lambda[[1]] + d\lambda[[2]]}{2} \frac{\pi}{180};$ 
 $v_{middle} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 (\sin[\varphi_{middle}])^2}};$ 
 $X_{ECEFmiddle} = (v_{middle}) \cos[\varphi_{middle}] \cos[\lambda_{middle}];$ 
 $Y_{ECEFmiddle} = (v_{middle}) \cos[\varphi_{middle}] \sin[\lambda_{middle}];$ 
 $Z_{ECEFmiddle} = (v_{middle} (1 - e^2)) \sin[\varphi_{middle}];$ 
 $R_{middle} = \sqrt{(X_{ECEFmiddle})^2 + (Y_{ECEFmiddle})^2 + (Z_{ECEFmiddle})^2};$ 
 $X_{dist} = R_{middle} \cos[\varphi_{middle2}] (d\lambda[[2]] - d\lambda[[1]]) \frac{\pi}{180};$ 
 $Y_{dist} = R_{middle} \left( \text{ArcTan}[(1 - e^2) \tan[d\varphi[[2]] \frac{\pi}{180}]] - \text{ArcTan}[(1 - e^2) \tan[d\varphi[[1]] \frac{\pi}{180}]] \right);$ 
 $X_{int} = R_{middle} \cos[\varphi_{middle2}] \lambda_{res} \frac{\pi}{180};$ 
 $Y_{int} = R_{middle} \left( \text{ArcTan}[(1 - e^2) \tan[\varphi_{res} \frac{\pi}{180}]] \right);$ 
 $X_{lim} = \text{Range}[0, X_{dist}, X_{int}];$ 
 $Y_{lim} = \text{Range}[0, Y_{dist}, Y_{int}];$ 
 $X_{mesh} = \text{Table}[X_{lim}, \text{Length}[Y_{lim}]];$ 
 $Y_{mesh} = \text{Table}[Y_{lim}, \text{Length}[X_{lim}]];$ 
 $Y_{mesh} = Y_{mesh}^T;$ 

```

هدف این بخش این است که در محدوده‌ی جغرافیایی‌ای که در بخش قبل بعنوان ورودی مسئله انتخاب کردیم، مقدار متوسطی را برای شعاع زمین تعیین کنیم. لذا ابتدا نقطه‌ی میانه‌ی محدوده را بعنوان نماینده‌ی آن محدوده بدست می‌آوریم و کار را ادامه می‌دهیم. سپس طول و عرض جغرافیایی نقطه‌ی میانه‌ی منطقه‌ی موردنظر را تعیین می‌کنیم. توجه شود که با استفاده از رابطه (۱۶) عرض جغرافیایی از مختصات بیضوی (ژئودتیک) به مختصات کروی (ژئوستتریک) تبدیل می‌کنیم و آن را در متغیر جداگانه‌ای ذخیره می‌کنیم. پس از آن با استفاده از رابطه (۱۷) «شعاع نرمال انجنا» را بدست آورده که در اینجا با N نشان داده‌ایم. سپس با استفاده از آن و بکارگیری رابطه (۱۸) مختصات کارتزین X, Y, Z نقطه میانه‌ی طول/عرض جغرافیایی موردنظر را در سیستم مختصات کارتزین $ECEF$ بدست می‌آوریم (توجه شود که در اینجا چون بدبال شعاع محلی زمین هستیم، لذا در فرمول (۱۸) h را برابر صفر قرار می‌دهیم تا از سطح بیضی رفرنس تا مرکز زمین را بدست آوریم). سرانجام با استفاده از این مختصات کارتزین، شعاع زمین در نقطه‌ی مرکز شبکه‌ی طول/عرض جغرافیایی موردنظر را بدست می‌آوریم و نام آن را R_{middle} می‌نامیم.

در قدم بعدی، می‌خواهیم بدانیم که اگر محدوده‌ی موردنظر خود را یک مستطیل فرض کنیم، طول و عرض این مستطیل چند متر است؟ دو ضلع این مستطیل در راستای شمال-جنوب بوده و دو ضلع دیگر آن در راستای شرق-غرب. طول ضلع راستای شمال-جنوب را $Xdist$ و طول ضلع راستای شرق-غرب را $Ydist$ می‌نامیم. از آنجاکه معمولاً اختلاف زاویه‌ی بازه طول و عرض جغرافیایی منطقه موردنظر کوچک است، لذا آرگومان‌های مثلثاتی ساده‌تر نوشته می‌شوند. با استفاده از شاعع متوسط در ناحیه موردنظر (که آن را $Rmiddle$ نامیده بودیم) و قواعد ریاضی، براحتی $Xdist$ و $Ydist$ محاسبه می‌شود. دقت شود که در محاسبه‌ی $Ydist$ عرض جغرافیایی ژئوستراتیک باید بکار گرفته شود. حال می‌خواهیم این مستطیل با طول و عرض $Xdist$ در $Ydist$ مشبندی کنیم. می‌خواهیم طول و عرض هر مساحتی که به ترتیب با $Xint$ و $Yint$ نشان می‌دهیم، برابر با معادل طولی رزولوشن تعیین شده در بخش قبلی گُدد باشد. اینکار نیز با استفاده از روابط مثلثاتی براحتی انجام می‌شود. سپس از 0 تا $Ydist$ و همچنین از 0 تا $Xdist$ با فاصله‌گذاری به ترتیب $Yint$ و $Xint$ آنها را قسمت‌بندی کرده و در ماتریس‌های $Xlim$ و $Ylim$ قرار می‌دهیم. پس از آن یک شبکه‌ی دوبعدی در سراسر ناحیه موردنظر از $Xlim$ و $Ylim$ تولید می‌کنیم (مشبندی ناحیه) و آن‌ها را در ماتریس $Xmesh$ و $Ymesh$ ذخیره می‌کنیم. در شکل زیر مفاهیم فوق نشان داده شده‌اند.



شکل ۲۴- نمادگذاری و روابط برای تعیین طول و عرض متری منطقه‌ی موردنظر

۳-۱-۶ بخش سوم: محاسبه گرادیان‌های با روش پارکر

```

 $\delta x = Xint;$ 
 $\delta y = Yint;$ 
 $M1 = Length[Xlim];$ 
 $M2 = Length[Ylim];$ 
 $p1 = Range[0, M1 - 1];$ 
 $p2 = Range[0, M2 - 1];$ 
 $fp1 = ConstantArray[0, M1];$ 
 $fp2 = ConstantArray[0, M2];$ 
For [ctr1 = 1, ctr1 ≤ M1, ctr1++, If [p1[[ctr1]] ≤  $\frac{M1}{2} - 1$ , fp1[[ctr1]] =  $\frac{p1[[ctr1]]}{\delta x M1}$ , fp1[[ctr1]] =  $\frac{p1[[ctr1]] - M1}{\delta x M1}]$ ];
For [ctr2 = 1, ctr2 ≤ M2, ctr2++, If [p2[[ctr2]] ≤  $\frac{M2}{2} - 1$ , fp2[[ctr2]] =  $\frac{p2[[ctr2]]}{\delta y M2}$ , fp2[[ctr2]] =  $\frac{p2[[ctr2]] - M2}{\delta y M2}]$ ];
fp1mesh = Table[fp1, Length[fp2]];
fp2mesh = Table[fp2, Length[fp1]];
fp2mesh = fp2mesh^T;
fp =  $\sqrt{fp1mesh^2 + fp2mesh^2}$ ;
fp[[1, 1]] = 0.0000000000000001;
sig =  $\sum_{n=1}^{20} \left( \frac{1}{n!} (2\pi fp)^{n-2} Fourier[Z^n] \right)$ ;
(*sig[[1,1]]=1015;*)

```

در این قسمت می‌خواهیم با استفاده رابطه پارکر در معادله (۶۰) گرادیان‌های گرانش ناشی از عوارض را بدست آوریم. در این معادله مبتنی بر شکل ۱۴، گرادیان گرانش در نقطه‌ی ($p1, p2$) از شبکه‌ی منطقه‌ی موردنظر بدست می‌آید. به این منظور ابتدا دو پارامتر δx و δy تعریف می‌کنیم و مقدار آن‌ها را برابر با طول و عرض هر مس که به ترتیب با $Xint$ و $Yint$ نشان داده بودیم قرار می‌دهیم. تعداد مش‌های هریک از مسیرهای $Xdist$ و $Ydist$ را در دو پارامتر $M1$ و $M2$ می‌ریزیم. سپس دو ماتریس یک بعدی برای $p1$ و $p2$ می‌سازیم که درایه‌های آن به ترتیب از صفر تا $M1-1$ و از صفر تا $M2-1$ را می‌شمارد؛ یعنی $p1=[0,1,2,3,\dots,M1-1]$ و $p2=[0,1,2,3,\dots,M2-1]$.

قدم بعدی این است که فرکانس فضایی در هریک از محورهای x و y را با استفاده از روابط (۶۲) و (۶۳) بدست آوریم؛ یعنی $fp1$ و $fp2$ ، سپس ایندو فرکانس فضایی را در سطح منطقه‌ی موردنظر بصورت دوی بعدی مش‌بندی می‌کنیم و نام آن‌ها را $fp1mesh$ و $fp2mesh$ می‌نامیم. پس از آن، با استفاده از ایندو و با استفاده از رابطه (۶۱)، fp را بدست می‌آوریم. بدیهی است که $fp1mesh$ و $fp2mesh$ یک ماتریس دوی بعدی است. اما از آنجاکه المان اول این ماتریس همواره برابر با صفر است و این صفر در محاسبات بعدی ایجاد ابهام I/O یا 0^0 می‌شود، در اینجا این المان را برابر با یک مقدار کوچک قرار می‌دهیم. در قدم بعدی سیگمای سمت راست معادله (۶۰) را برای هر نقطه‌ی ($p1, p2$) محاسبه می‌کنیم. در محاسبه‌ی این سیگما تعداد جمع آن را بجای بینهایت برابر با 20 قرار می‌دهیم که کفايت می‌کند. ضمناً در معادله‌ی سیگما، پارامتر $(h^n)_{p1,p2}$ یعنی توان n -ام ارتفاع عوارض در نقطه‌ی ($p1, p2$)؛ که این ارتفاع عوارض مستقیماً از روی مدل عوارض گرفته می‌شود (شکل ۱۴). تبدیل فوریه FFT در متتمیکا نیز بسادگی با دستور $Fourier$ انجام می‌شود.

```

 $\mu_{xx} = -(2\pi)^2 \text{fp1mesh}^2;$ 
 $\mu_{xy} = -(2\pi)^2 \text{fp1mesh fp2mesh};$ 
 $\mu_{xz} = -\frac{i}{\lambda} (2\pi)^2 \text{fp1mesh fp};$ 
 $\mu_{yy} = -(2\pi)^2 \text{fp2mesh}^2;$ 
 $\mu_{yz} = -\frac{i}{\lambda} (2\pi)^2 \text{fp2mesh fp};$ 
 $\mu_{zz} = (2\pi)^2 \text{fp}^2;$ 
TxxParker =  $2\pi G \rho \text{InverseFourier}[\mu_{xx} e^{-2\pi alt fp} \text{sig}]$ ;
TxyParker =  $2\pi G \rho \text{InverseFourier}[\mu_{xy} e^{-2\pi alt fp} \text{sig}]$ ;
TxzParker =  $2\pi G \rho \text{InverseFourier}[\mu_{xz} e^{-2\pi alt fp} \text{sig}]$ ;
TyxParker =  $2\pi G \rho \text{InverseFourier}[\mu_{yy} e^{-2\pi alt fp} \text{sig}]$ ;
TyzParker =  $2\pi G \rho \text{InverseFourier}[\mu_{yz} e^{-2\pi alt fp} \text{sig}]$ ;
TzzParker =  $2\pi G \rho \text{InverseFourier}[\mu_{zz} e^{-2\pi alt fp} \text{sig}]$ ;
TxxParker = Re[TxxParker] / Eotvos;
TxyParker = Re[TxyParker] / Eotvos;
TxzParker = Re[TxzParker] / Eotvos;
TyxParker = Re[TyxParker] / Eotvos;
TyzParker = Re[TyzParker] / Eotvos;
TzzParker = Re[TzzParker] / Eotvos;
Export["txxparker.csv", TxxParker];
Export["txyparker.csv", TxyParker];
Export["txzparkr.csv", TxzParker];
Export["tyxparker.csv", TyxParker];
Export["tyzparker.csv", TyzParker];
Export["tzzparker.csv", TzzParker];
s = 1;
allTparker = ConstantArray[0, {Length[\phiLimDeg] \times Length[\lambdaLimDeg] + 1, 8}];
allTparker[[1, 1]] = {"Latitude(deg)", "Longitude(deg)", "Txxparker", "Tyyparker", "Tzzparker", "Txyparker", "Txzparkr", "Tyzparker"};
For[i = 1, i \leq Length[\phiLimDeg], i++,
  For[j = 1, j \leq Length[\lambdaLimDeg], j++,
    s++;
    allTparker[[s, 1]] = \phiLimDeg[[i]];
    allTparker[[s, 2]] = \lambdaLimDeg[[j]];
    allTparker[[s, 3]] = TxxParker[[i, j]];
    allTparker[[s, 4]] = TyxParker[[i, j]];
    allTparker[[s, 5]] = TzzParker[[i, j]];
    allTparker[[s, 6]] = TxyParker[[i, j]];
    allTparker[[s, 7]] = TxzParker[[i, j]];
    allTparker[[s, 8]] = TyzParker[[i, j]];
  ]
]
Export["Gravity Gradient Parker.csv", allTparker];

```

حال با با وارد کردن کمیت‌های μ_{ij} از رابطه (۵۸) در گُند، مقادیر آن‌ها را در μ_{xx} تا μ_{zz} ... تا μ_{zz} در ذخیره می‌کنیم. سپس معادله‌ی (۶۰) را در گُند می‌نویسیم؛ در اینجا باید توجه داشت که کمیت \bar{z} در ترم پشت سیگما (یعنی $\mu_{ij} e^{-2\pi f_{p1,p2}}$) برابر با ارتفاع از سطح زئوید است؛ لذا برابر با کمیت alt که قبلاً بدست آورده بودیم قرار داده می‌شود.

سپس، مقدار حقیقی مقادیر گرادیان‌های گرانش حاصله (یعنی *Real*) به عنوان مقادیر رسمی گرادیان حاصل از روش پارکر ذخیره می‌شود و واحد آن تبدیل به *Eotvos* مسی شود تا در مرحله‌ی بعدی با گرادیان حاصل از مدل *EGM96* جمع شود.

۴-۱-۶ بخش چهارم: ذخیره‌سازی نتایج

```

txxpark = ConstantArray[0, {Length[\phi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
txxpark[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
txxpark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 1]] = \phi limDeg;
txxpark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = TxxParker[[All, All]];
Export["txxpark.csv", txxpark];

txypark = ConstantArray[0, {Length[\phi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
txypark[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
txypark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 1]] = \phi limDeg;
txypark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = TxyParker[[All, All]];
Export["txypark.csv", txypark];

txzpark = ConstantArray[0, {Length[\phi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
txzpark[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
txzpark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 1]] = \phi limDeg;
txzpark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = TxzParker[[All, All]];
Export["txzpark.csv", txzpark];

tyypark = ConstantArray[0, {Length[\phi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
tyypark[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
tyypark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 1]] = \phi limDeg;
tyypark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = TyyParker[[All, All]];
Export["tyypark.csv", tyypark];

tyzpark = ConstantArray[0, {Length[\phi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
tyzpark[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
tyzpark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 1]] = \phi limDeg;
tyzpark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = TyzParker[[All, All]];
Export["tyzpark.csv", tyzpark];

tzzpark = ConstantArray[0, {Length[\phi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
tzzpark[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
tzzpark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 1]] = \phi limDeg;
tzzpark[[2 ;; Length[\phi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = TzzParker[[All, All]];
Export["tzzpark.csv", tzzpark];

```

سپس ماتریس هریک از مؤلفه‌های گردابیان گرانش در منطقه موردنظر بطور جداگانه در فرمت CSV ذخیره می‌گردد. در این نوع ذخیره‌سازی، سطر اول طول جغرافیایی هریک از ستون‌ها را مشخص می‌کند و سطر دوم عرض جغرافیایی.

```
s = 1;
allTparker = ConstantArray[0, {Length[\varphi limDeg] \times Length[\lambda limDeg] + 1, 8}];
allTparker[[1, ;]] = {"Latitude(deg)", "Longitude(deg)", "TxzParker", "TyxParker", "TzzParker", "TxzParker", "TyzParker"};
For[i = 1, i \leq Length[\varphi limDeg], i++,
For[j = 1, j \leq Length[\lambda limDeg], j++,
s++;
allTparker[[s, 1]] = \varphi limDeg[[i]];
allTparker[[s, 2]] = \lambda limDeg[[j]];
allTparker[[s, 3]] = TxzParker[[i, j]];
allTparker[[s, 4]] = TyxParker[[i, j]];
allTparker[[s, 5]] = TzzParker[[i, j]];
allTparker[[s, 6]] = TxyParker[[i, j]];
allTparker[[s, 7]] = TxzParker[[i, j]];
allTparker[[s, 8]] = TyzParker[[i, j]];
];
];
Export["Gravity Gradient Parker.csv", allTparker];
```

در انتها نیز به منظور سهولت ثبت نتایج، تمام مؤلفه‌های گرادیان گرانش به صورتی دیگر در یک ماتریس واحد به نام *allTparker* ذخیره می‌گردد که در بخش شبیه‌سازی آن را نشان خواهیم داد.

۲-۶ تشریح کُد گرادیان گرانش حاصل از مدل گرانشی EGM96

۱-۲-۶ بخش اول: وارد کردن فایل داده مدل گرانشی و ضرایب پتانسیل نرمال

```

h = 100; (*Input altitude (meters height above average terrain)*)
dφ = {32, 34}; (*Latitude Range*)
dλ = {50, 52}; (*Longitude Range*)
φres = 0.1; (*Latitude Resolution*)
λres = 0.1; (*Longitude Resolution*)
alt = h + meanElev;
GM = 3.98600441800 × 1014;
a = 6378137.0000;
f = 1 / 298.257223563;
e2 = 2 f - f2;
Eotvos = 10-9;

GGM = Import["D:\\EGM96.gfc", "Table"]; (*primary rows of the model must be removed before n=2*)
Cnm = GGM[[All, 4]];
Smn = GGM[[All, 5]];
Nmax = Max[GGM[[All, 2]]];
C20 = -0.484169650276 × 10-3;
C40 = 0.790314704521 × 10-6;
C60 = -0.168729437964 × 10-8;
C80 = 0.346071647263 × 10-11;
C100 = -0.265086254269 × 10-14;
o = ConstantArray[0, {Nmax, Nmax + 1}];
i = 0;
For[nn = 2, nn ≤ Nmax, nn++,
  For[mm = 0, mm ≤ nn, mm++,
    i++;
    o[[nn, mm + 1]] = i
  ]
] (*in this subroutine, o[] returns the row number of corresponding to m,n in its argument*)

Cnm [[o[[2, 0 + 1]]]] = Cnm [[o[[2, 0 + 1]]]] - C20;
Cnm [[o[[4, 0 + 1]]]] = Cnm [[o[[4, 0 + 1]]]] - C40;
Cnm [[o[[6, 0 + 1]]]] = Cnm [[o[[6, 0 + 1]]]] - C60;
Cnm [[o[[8, 0 + 1]]]] = Cnm [[o[[8, 0 + 1]]]] - C80;
Cnm [[o[[10, 0 + 1]]]] = Cnm [[o[[10, 0 + 1]]]] - C100;

```

قسمت اول این کد همانند کُد مربوط به متدهای پارکر، به وارد کردن ورودی‌های مسئله نظری محدوده طول و عرض جغرافیایی منطقه موردنظر، رزو لوشنی که می‌خواهیم داده‌های گرادیان گرانش استخراج شود، ارتفاع از سطح متوسط عوارض، ثابت‌های گرانشی و مشخصات هندسی بیضی رفرنس اختصاص دارد. توجه شود که

این رزلوشن باید دقیقاً همان رزلوشنی باشد که در گُدد مربوط به گرادیان گرانش ناشی از عوارض وارد کرده‌ایم.

در قسمت بعدی مدل گرانشی $EGM96$ باید در متمتیکا ایمپورت شود. توجه شود که حتماً قبل از ایمپورت کردن فایل داده گرانشی، سطرهای اضافه موجود در آن تا قبل از سطر $n=2$ حذف شود. توجه شود که نام فایل نباید شامل فاصله (*space*) باشد. ضمناً با توجه به بحثی که در بخش ۴-۵ آمده است، باید توجه داشت که فایلی که در اینجا ایمپورت شده از کدام منبع گرفته شده، تا پس از آن بتوان ضرایب هارمونیک‌های کروی را قرائت کرد. در اینجا چون فایل مدل گرانشی از سایت *ICGEM* ایمپورت شده، لذا ستون‌های چهارم و پنجم این فایل به ترتیب به ضرایب Cnm و Snm اختصاص دارد و لذا این ستون‌ها در متغیرهایی به همین نام ذخیره شده‌اند. پس از آن مقدار ماکریم $Nmax$ که همان ماکریم عددی است که در ستون n در فایل مدل گرانشی قرار دارد، در متغیری به همین نام ذخیره شده است. در ادامه ضرایب پتانسیل نرمال طبق جدول ۳ در اینجا تعریف می‌شوند تا در ادامه از ضرایب متناظر در فایل مدل کسر شوند تا ضرایب پتانسیل آشتفتگی تولید شود.

شماره گذاری ضرایب هارمونیک کروی بر حسب n و m مطابق شکل ۱۸ و شکل ۱۹ بصورت خاصی است که هریک از ضرایب بتوانند در یک ستون بیانند. اکنون برای استفاده از این ضرایب در گُدد باید شمارنده‌ای تعریف شود که با گرفتن n و m ، شماره‌ی سطر مربوطه برای ضریب هارمونیک کروی را مشخص کند. در اینجا این شمارنده بصورت ماتریس $[o[n,m+1]]$ تعریف شده است که اگر n و m موردنظر به آن داده شود، شماره‌ی سطر مربوط به آن n و m را بدست می‌آورد که با قراردادن آن در آرگومان ماتریس‌های Cnm و Snm که چند خط بالاتر آن‌ها را از فایل مدل گرانشی استخراج کرده بودیم، ضریب هارمونیک آن و n و m خاص را بدست می‌دهد. بعنوان مثال اگر $n=5$ و $m=3$ باشد، با قرار دادن آن در شمارنده‌ی $[o[n,m+1]]$ مقدار ۱۶ بدست می‌آید ($o[[5,3+1]]=16$) که بدین معنی است که سطر ۱۶-ام را باید قرائت کنیم. در شکل زیر این موضوع نشان داده شده است.

EGM96 - Notepad

File Edit Format View Help

سطر ۱ ۲ ۰ -0.484165371736E-03 ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+00 ۰.۳۵۶۱۰۶۳۵E-10 ۰.۰۰۰۰۰۰۰E+00

سطر ۲ ۲ ۱ -0.186987635955E-09 ۰.۱۱۹۵۲۸۰۱۲۰۳۱E-08 ۰.۱۰۰۰۰۰۰E-29 ۰.۱۰۰۰۰۰۰E-29

- ۲ ۲ ۰.۲۴۳۹۱۴۳۵۲۳۹۸E-05 -0.۱۴۰۰۱۶۶۸۳۶۵۴E-05 ۰.۵۳۷۳۹۱۵۴E-10 ۰.۵۴۳۵۳۲۶۹E-10
- ۳ ۰ ۰.۹۵۷۲۵۴۱۷۳۷۹۲E-06 ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+00 ۰.۱۸۰۹۴۲۳۷E-10 ۰.۰۰۰۰۰۰۰E+00
- ۳ ۱ ۰.۲۰۲۹۹۸۸۸۲۱۸۴E-05 ۰.۲۴۸۵۱۳۱۵۸۷۱۶E-06 ۰.۱۳۶۹۵۱۶۵E-09 ۰.۱۳۶۴۵۸۸۲E-09
- ۳ ۲ ۰.۹۰۴۶۲۷۷۶۸۶۰۵E-06 -0.۶۱۹۰۲۵۹۴۴۲۰۵E-06 ۰.۱۰۹۶۲۳۲۹E-09 ۰.۱۱۱۸۲۸۶۶E-09
- ۳ ۳ ۰.۷۲۱۰۷۲۶۵۷۰۵۷E-06 ۰.۱۴۱۴۳۵۶۲۶۹۵۸E-05 ۰.۹۵۱۵۶۲۸۱E-10 ۰.۹۳۲۸۵۰۹۰E-10
- ۴ ۰ ۰.۵۳۹۸۷۳۸۶۳۷۸۹E-06 ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+00 ۰.۱۰۴۲۳۶۷۸E-09 ۰.۰۰۰۰۰۰۰E+00
- ۴ ۱ -0.۵۳۶۳۲۱۶۱۶۹۷۱E-06 -0.۴۷۳۴۴۰۲۶۵۸۵۳E-06 ۰.۸۵۶۷۴۴۰۴E-10 ۰.۸۲۴۰۸۴۸۹E-10
- ۴ ۲ ۰.۳۵۰۶۹۴۱۰۵۷۸۵E-06 ۰.۶۶۲۶۷۱۵۷۲۵۴۰E-06 ۰.۱۶۰۰۰۱۸۶E-09 ۰.۱۶۳۹۰۵۷۶E-09
- ۴ ۳ ۰.۹۹۰۷۷۱۸۰۳۸۲۹E-06 -0.۲۰۰۹۲۸۳۶۹۱۷۷E-06 ۰.۸۴۶۵۷۸۰۲E-10 ۰.۸۲۶۶۲۵۰۶E-10
- ۴ ۴ -0.۱۸۸۵۶۰۸۰۲۷۳۵E-06 ۰.۳۰۸۸۵۳۱۶۹۳۳۳E-06 ۰.۸۷۳۱۵۳۵۹E-10 ۰.۸۷۸۵۲۸۱۹E-10
- ۵ ۰ ۰.۶۸۵۳۲۳۴۷۵۶۳۰E-07 ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+00 ۰.۵۴۳۸۳۰۹۰E-10 ۰.۰۰۰۰۰۰۰E+00
- ۵ ۱ -0.۶۲۱۰۱۲۱۲۸۵۲۸E-07 -0.۹۴۴۲۲۶۱۲۷۵۲۵E-07 ۰.۲۷۹۹۶۸۸۷E-09 ۰.۲۸۰۸۲۸۸۲E-09
- ۵ ۲ ۰.۶۵۲۴۳۸۲۹۷۶۱۲E-06 -0.۳۲۳۳۴۹۶۱۲۶۶۸E-06 ۰.۲۳۷۴۷۳۷۵E-09 ۰.۲۴۳۵۶۹۹۸E-09
- سطر ۱۶** ۵ ۳ -0.۴۵۱۹۵۵۴۰۶۰۷۱E-06 -0.۲۱۴۸۴۷۱۹۰۶۲۴E-06 ۰.۱۷۱۱۱۶۳۶E-09 ۰.۱۶۸۱۰۶۴۷E-09
- ۵ ۴ -0.۲۹۵۳۰۱۶۴۷۶۵۴E-06 ۰.۴۹۶۶۵۸۸۷۶۷۶۹E-07 ۰.۱۱۹۸۱۲۶۶E-09 ۰.۱۱۸۴۹۷۹۳E-09
- ۵ ۵ ۰.۱۷۴۹۷۱۹۸۳۲۰۳E-06 -0.۶۶۹۳۸۴۲۷۸۲۱۹E-06 ۰.۱۱۶۴۲۵۶۳E-09 ۰.۱۱۵۹۰۰۳۱E-09
- ۶ ۰ -0.۱۴۹۹۵۷۹۹۴۷۱۴E-06 ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰E+00 ۰.۱۴۴۹۷۸۶۳E-09 ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰E+00
- ۶ ۱ -0.۷۶۰۸۷۹۳۸۴۹۴۷E-07 ۰.۲۶۲۸۹۰۵۴۵۵۰۱E-07 ۰.۲۲۴۱۵۱۳۸E-09 ۰.۲۱۹۵۷۲۹۶E-09
- ۶ ۲ ۰.۸۰۱۷۲۳۸۸۷۵۲۰E-07 ۰.۲۷۲۷۷۶۷۰۱۲۴۷E-06 ۰.۲۷۶۵۷۳۶۳E-09 ۰.۳۹۱۰۵۹۱۱E-09

شکل ۲۵- یافتن شماره سطر ماتریس گرانشی از روی m و n

پس از اینکه شمارنده‌ی سطر تعریف شد، ضرایب هارمونیک‌های کروی پتانسیل مدل گرانشی با اعمال معادله (۳۸) و مقادیری که پیشتر بعنوان $C20$ و ... $C100$ تعریف شده‌اند به ضرایب پتانسیل آشتگی تصحیح می‌شود.

۲-۲-۶ بخش دوم: مشبندی محدوده مسئله و تبدیل به مختصات کروی

```

φlength = Round[dφ[[2]] - dφ[[1]]];
λlength = Round[dλ[[2]] - dλ[[1]]];
φlimDeg = Range[dφ[[1]], dφ[[2]], φres];
λlimDeg = Range[dλ[[1]], dλ[[2]], λres];
φlimRad = φlimDeg π / 180;
λlimRad = λlimDeg π / 180;
φlimCentric = ArcTan[(1 - e2) Tan[φlimRad]]; (*Geocentric Lat*)
λlimCentric = λlimRad;
φmesh = Table[φlimCentric, Length[λlimCentric]];
φmesh = φmesh^T;
λmesh = Table[λlimCentric, Length[φlimCentric]];
v = Table[a / Sqrt[1 - e2 (Sin[φlimRad[[i]]])^2], {i, Length[φlimRad]}];
alt = h + meanElev;
XECEF = Table[(v[[i]] + alt) Cos[φlimRad[[i]]] Cos[λlimRad[[j]]], {i, Length[φlimRad]}, {j, Length[λlimRad]}];
YECEF = Table[(v[[i]] + alt) Cos[φlimRad[[i]]] Sin[λlimRad[[j]]], {i, Length[φlimRad]}, {j, Length[λlimRad]}];
ZECEF = Table[(v[[i]] (1 - e2) + alt) Sin[φlimRad[[i]]], {i, Length[φlimRad]}];
r = Table[Sqrt[(XECEF[[i, j]])^2 + (YECEF[[i, j]])^2 + (ZECEF[[i]])^2], {i, Length[φlimRad]}, {j, Length[λlimRad]}];

```

در این قسمت هدف این است که داده‌های آرگومان گرادیان گرانش یعنی (r, φ, λ) برای نقاط گسته‌ای در محدوده مورد نظر تولید شوند. ابتدا فاصله‌ی قوسی طول و عرض جغرافیایی محدوده مورد نظر برای استفاده در ترسیم نقشه، در متغیرهای $\lambda length$ و $\varphi length$ ذخیره می‌شود. سپس محدوده طول و عرض جغرافیایی با رزولوشنی که قبلًا تعریف کردیم گسته‌سازی می‌شود و از آنجاییکه این محدوده بر حسب درجه بیان شده بود و در ادامه باید بر حسب رادیان در آرگومان توابع سینوس و کسینوس قرار گیرد، تبدیل به رادیان می‌شود ($\varphi limRad$ و $\lambda limRad$). در قسمت بعد تمام مقادیر گسته ن نقاط عرض جغرافیایی که در مختصات ژئودتیک بیان شده بود، به عرض ژئوستتریک تبدیل می‌شود ($\varphi limCentric$)؛ زیرا در معادلات گرادیان گرانش، عرض ژئوستتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس با این عرض و طول جغرافیایی گسته‌سازی شده، کل منطقه مورد نظر مشبندی می‌شود و در $\lambda mesh$ و $\varphi mesh$ قرار می‌گیرد. در شکل زیر بعنوان نمونه ماتریس مشبندی برای محدوده طول [50 52] و عرض [32 34] با رزولوشن 0.5 درجه نشان داده شده است.

$\varphi mesh$	0.555491 0.564193 0.572895 0.581598 0.590302	0.555491 0.564193 0.572895 0.581598 0.590302	0.555491 0.564193 0.572895 0.581598 0.590302	0.555491 0.564193 0.572895 0.581598 0.590302
$\lambda mesh$	0.872665 0.872665 0.872665 0.872665 0.872665	0.881391 0.881391 0.881391 0.881391 0.881391	0.890118 0.890118 0.890118 0.890118 0.890118	0.898845 0.898845 0.898845 0.898845 0.898845
				0.907571 0.907571 0.907571 0.907571 0.907571

شکل -۲۶- مقادیر نمونه مشبندی طول و عرض ژئوستتریک محدوده خاص بر حسب رادیان همانطور که مشاهده می‌شود، در ماتریس مشبندی عرض جغرافیایی همه‌ی ستون‌های یک سطر دارای مقادیر برابری هستند و در ماتریس مشبندی طول جغرافیایی همه‌ی سطرهای یک ستون دارای مقادیر برابر هستند زیرا در این ماتریس‌ها عرض جغرافیایی بر حسب سطر و طول جغرافیایی بر حسب طول جاگیری شده است.

حال باید شاعع کروی هریک از نقاط مش محدوده مورد نظر بدست آید. به این منظور طبق توضیحاتی که در بخش ۳-۱ و معادلات (۱۷) و (۱۸) آمد، ابتدا مختصات هر نقطه در دستگاه ECEF بیان می‌شود و از روی آن طبق رابطه (۲۰) شاعع کروی نقاط استخراج می‌شود و در ۲ قرار می‌گیرد. البته قبل از اینکار متغیر alt بصورت ارتفاع از سطح ژئوید (حاصل جمع ارتفاع از سطح متوسط عوارض بعلاوه ارتفاع متوسط عوارض از سطح ژئوید) تعریف می‌شود و در روابط دستگاه ECEF بکار می‌رود.

۳-۲-۶ بخش سوم: تعریف ضرایب بکاررفته در معادلات گرادیان گرانش و تابع لزاندر

نرم‌افزار

```

anm[n_Integer, m_Integer] = Piecewise[{{(70, m == 0 || m == 1), {Sqrt[1 + delta[m, 2]/4], Sqrt[n^2 - (m - 1)^2] Sqrt[n + m] Sqrt[n - m + 2], 2 <= m <= n}}},];
bnm[n_Integer, m_Integer] = Piecewise[{{{{(n + m + 1) (n + m + 2)}/{2 (m + 1)}, m == 0 || m == 1}, {n^2 + m^2 + 3 n + 2}/{2}, 2 <= m <= n}}];
cnm[n_Integer, m_Integer] =
Piecewise[{{{{Sqrt[1 + delta[m, 0]/4], Sqrt[n^2 - (m + 1)^2] Sqrt[n - m] Sqrt[n + m + 2], m == 0 || m == 1}, {1/4 Sqrt[n^2 - (m + 1)^2] Sqrt[n - m] Sqrt[n + m + 2], 2 <= m <= n}}},];
dnm[n_Integer, m_Integer] = Piecewise[{{{{0, m == 1}, {-m/(4 m) Sqrt[2 n + 1]/(2 n - 1), Sqrt[1 + delta[m, 2]] Sqrt[n^2 - (m - 1)^2] Sqrt[n + m] Sqrt[n + m - 2], 2 <= m <= n}}},];
gnm[n_Integer, m_Integer] = Piecewise[{{{{m/(4 m) Sqrt[2 n + 1]/(2 n - 1), Sqrt[n + 1] Sqrt[n - 1] (n + 2), m == 1}, {m/2 Sqrt[2 n + 1]/(2 n - 1), Sqrt[n + m] Sqrt[n - m], 2 <= m <= n}}},];
hnm[n_Integer, m_Integer] =
Piecewise[{{{{m/(4 m) Sqrt[2 n + 1]/(2 n - 1), Sqrt[n - 3] Sqrt[n - 2] Sqrt[n - 1] Sqrt[n + 2], m == 1}, {m/(4 m) Sqrt[2 n + 1]/(2 n - 1), Sqrt[n^2 - (m + 1)^2] Sqrt[n - m] Sqrt[n - m - 2], 2 <= m <= n}}},];
Bnm[n_Integer, m_Integer] = Piecewise[{{{{0, m == 0}, {(n + 2)/2 Sqrt[1 + delta[m, 1]], Sqrt[n + m] Sqrt[n - m + 1], 1 <= m <= n}}},];
ynm[n_Integer, m_Integer] = Piecewise[{{{{-(n + 2)/2 Sqrt[n (n + 1)], m == 0}, {-n + 2/2 Sqrt[n - m] Sqrt[n + m + 1], 1 <= m <= n}}},];
unm[n_Integer, m_Integer] = -m/(2 n) Sqrt[2 n + 1]/(2 n - 1) Sqrt[1 + delta[m, 1]] Sqrt[n + m] Sqrt[n + m - 1];
vnm[n_Integer, m_Integer] = -m/(2 n) Sqrt[2 n + 1]/(2 n - 1) Sqrt[n - m] Sqrt[n - m - 1];
NormalPnm[n_Integer, m_Integer, x_] = Piecewise[{{{{Sqrt[(2 n + 1) (2 - delta[m, 0])]/Sqrt[(n - m)!] ((-1)^m LegendreP[n, m, x]), n >= m}}},];

```

در این قسمت تمامی ضرایب بکاررفته در مؤلفه‌های گرادیان گرانش که در رابطه (۴۷) آمده است بر حسب n و m تعریف می‌شوند. همچنین تابع لزاندر وابسته‌ی نرم‌افزار نیز با توجه به تبصره مهمی که در بخش ۳ و روابط (۳۵) و (۳۶) آمده است تعریف می‌شود.

۴-۲-۶ بخش چهارم: تعریف روابط گرادیان گرانش و محاسبه در نقاط مشبندی

```

Txz[r_, φ_, λ_] := 
  
$$\frac{1}{\text{Eotvos } a^3} \sum_{n=2}^{\text{Max}[n]} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\text{Cnm}[[o[n, m+1]]] \cos[m\lambda] + \text{Smn}[[o[n, m+1]]] \sin[m\lambda])$$

  
$$(\text{ann}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n, m-2, \sin[\varphi]] + (\text{bnm}[n, m] - (n+1)(n+2)) \text{NormalPnm}[n, m, \sin[\varphi]] + \text{cnm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n, m+2, \sin[\varphi]]) ;$$

Txv[r_, φ_, λ_] := 
  
$$\frac{1}{\text{Eotvos } a^3} \sum_{n=2}^{\text{Max}[n]} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\text{Cnm}[[o[n, m+1]]] \sin[m\lambda] - \text{Smn}[[o[n, m+1]]] \cos[m\lambda])$$

  
$$(\text{dmn}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n-1, m-2, \sin[\varphi]] + \text{gnm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n-1, m, \sin[\varphi]] + \text{hnm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n-1, m+2, \sin[\varphi]]) ;$$

Txz[r_, φ_, λ_] := 
  
$$\frac{1}{\text{Eotvos } a^3} \sum_{n=2}^{\text{Max}[n]} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\text{Cnm}[[o[n, m+1]]] \cos[m\lambda] + \text{Smn}[[o[n, m+1]]] \sin[m\lambda]) (\text{bnm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n, m-1, \sin[\varphi]] + \text{vnm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n, m+1, \sin[\varphi]]) ;$$

Tyv[r_, φ_, λ_] := 
  
$$\frac{1}{\text{Eotvos } a^3} \sum_{n=2}^{\text{Max}[n]} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\text{Cnm}[[o[n, m+1]]] \cos[m\lambda] + \text{Smn}[[o[n, m+1]]] \sin[m\lambda])$$

  
$$(\text{ann}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n, m-2, \sin[\varphi]] + \text{bnm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n, m, \sin[\varphi]] + \text{cnm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n, m+2, \sin[\varphi]]) ;$$

Tyz[r_, φ_, λ_] := 
  
$$\frac{1}{\text{Eotvos } a^3} \sum_{n=2}^{\text{Max}[n]} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\text{Cnm}[[o[n, m+1]]] \sin[m\lambda] - \text{Smn}[[o[n, m+1]]] \cos[m\lambda]) (\text{unm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n-1, m-1, \sin[\varphi]] + \text{vnm}[n, m] \times \text{NormalPnm}[n-1, m+1, \sin[\varphi]]) ;$$

Tzz[r_, φ_, λ_] := 
  
$$\frac{1}{\text{Eotvos } a^3} \sum_{n=2}^{\text{Max}[n]} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\text{Cnm}[[o[n, m+1]]] \cos[m\lambda] + \text{Smn}[[o[n, m+1]]] \sin[m\lambda]) \text{NormalPnm}[n, m, \sin[\varphi]] ;$$

ttzz = ParallelTable[Tzz[{i, j}], {imesh[[i, j]]}, {j, Length[ylimRad]}];
ttxx = ParallelTable[Txx[{i, j}], {imesh[[i, j]]}, {j, Length[ylimRad]}];
ttyy = ParallelTable[Tyy[{i, j}], {imesh[[i, j]]}, {j, Length[ylimRad]}];
ttxy = ParallelTable[Txy[{i, j}], {imesh[[i, j]]}, {j, Length[ylimRad]}];
txxz = ParallelTable[Txz[{i, j}], {imesh[[i, j]]}, {j, Length[ylimRad]}];
tyyz = ParallelTable[Tyz[{i, j}], {imesh[[i, j]]}, {j, Length[ylimRad]}];

```

در این قسمت معادلات هریک از مؤلفه‌های گرادیان گرانش که در روابط (۴۱) تا (۴۶) آمده‌اند بصورت تابع تعریف می‌شود. توجه شود که در این تعارف بجای علامت $=$ از علامت \equiv استفاده شده تا محاسبات در اینجا انجام نشود و در قسمت بعدی که نقاط مش به تابع داده می‌شود محاسبات انجام شود. سپس مقادیر گرادیان گرانش در هریک از نقاط مشبندی محدوده‌ی موردنظر محاسبه می‌شود. بهمنظور سرعت بیشتر محاسبات بجای دستور *Table*, از دستور *ParallelTable* استفاده شده است.

۵-۲-۶ بخش پنجم: ذخیره‌سازی نتایج

```

ttx = ConstantArray[0, {Length[\varphi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
ttx[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
ttx[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 1]] = \varphi limDeg;
ttx[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = tttx[[All, All]];
Export["ttxEGM96.csv", ttx];

txy = ConstantArray[0, {Length[\varphi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
txy[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
txy[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 1]] = \varphi limDeg;
txy[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = ttty[[All, All]];
Export["txyEGM96.csv", txy];

txz = ConstantArray[0, {Length[\varphi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
txz[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
txz[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 1]] = \varphi limDeg;
txz[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = tttxz[[All, All]];
Export["txzEGM96.csv", txz];

tyy = ConstantArray[0, {Length[\varphi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
tyy[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
tyy[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 1]] = \varphi limDeg;
tyy[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = tttyy[[All, All]];
Export["tyyEGM96.csv", tyy];

tyz = ConstantArray[0, {Length[\varphi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
tyz[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
tyz[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 1]] = \varphi limDeg;
tyz[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = tttyz[[All, All]];
Export["tyzEGM96.csv", tyz];

tzz = ConstantArray[0, {Length[\varphi limDeg] + 1, Length[\lambda limDeg] + 1}];
tzz[[1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = \lambda limDeg;
tzz[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 1]] = \varphi limDeg;
tzz[[2 ;; Length[\varphi limDeg] + 1, 2 ;; Length[\lambda limDeg] + 1]] = ttzz[[All, All]];
Export["tzzEGM96.csv", tzz];

```

در اینجا تمام ماتریس هریک از مؤلفه‌های گرادیان گرانش در منطقه مورد نظر بطور جداگانه در فرمت CSV ذخیره می‌گردد. در این نوع ذخیره‌سازی، سطر اول طول جغرافیایی هریک از ستون‌ها را مشخص می‌کند و سطر دوم عرض جغرافیایی.



```
s = 1;
allT = ConstantArray[0, {Length[\varphi limDeg] × Length[\lambda limDeg] + 1, 8}];
allT[[1, ;]] = {"Latitude(deg)", "Longitude(deg)", "Txx", "Tyy", "Tzz", "Txy", "Txz", "Tyz"};
For[i = 1, i ≤ Length[\varphi limDeg], i++,
  For[j = 1, j ≤ Length[\lambda limDeg], j++,
    s++;
    allT[[s, 1]] = \varphi limDeg[[i]];
    allT[[s, 2]] = \lambda limDeg[[j]];
    allT[[s, 3]] = ttxx[[i, j]];
    allT[[s, 4]] = ttyy[[i, j]];
    allT[[s, 5]] = ttzz[[i, j]];
    allT[[s, 6]] = ttxy[[i, j]];
    allT[[s, 7]] = txz[[i, j]];
    allT[[s, 8]] = tyz[[i, j]];
  ]
]
Export["Gravity Gradient.csv", allT];
```

در انتها نیز به منظور سهولت ثبت نتایج، تمام مؤلفه‌های گرادیان گرانش به صورتی دیگر در یک ماتریس واحد به نام $allT$ (مشابه ماتریس داده‌های ضرایب هارمونیک کروی مدل گرانشی)، ذخیره می‌گردد که در بخش شبیه‌سازی آن را نشان خواهیم داد.



فصل هفتم

نتایج شبیه‌سازی

۷ نتایج شبیه‌سازی

در شبیه‌سازی کاربر محدوده‌ی موردنظر از زمین را به همراه ارتفاعی که می‌خواهد گرادیان‌ها در آن رسم شود (ارتفاع از سطح متوسط عوارض) انتخاب کرده و با اجرای شبیه‌سازی نقشه‌های گرادیان گرانش در آن محدوده ترسیم می‌شود. در ادامه فایل‌هایی حاوی داده‌های مؤلفه‌های گرادیان گرانش در محدوده موردنظر که نقشه‌ها از روی آن رسم شده‌اند تولید می‌گردد. شش تا از این فایل‌ها، داده‌های هریک از شش مؤلفه‌های گرادیان گرانش است که سطر و ستون آن معرف عرض و طول جغرافیایی می‌باشد. یک فایل نیز حاصل تجمعی همه‌ی این داده‌ها در یک فایل خروجی است که این فایل شامل هشت ستون است که دو ستون اول به ترتیب بیانگر عرض و طول جغرافیایی و ستون‌های بعدی به ترتیب بیانگر T_{xx} , T_{yy} , T_{zz} , T_{xy} , T_{yz} و T_{xz} می‌باشند. در بخش شبیه‌سازی هریک از این فایل‌ها را نشان خواهیم داد.

در این قسمت، برای نشان‌دادن نتایج استخراج مؤلفه‌های گرادیان گرانش، دو منطقه بعنوان نمونه مورد شبیه‌سازی قرار گرفت. یک منطقه در آب‌های آزاد دریای عمان (که در آن گرادیان‌های گرانش فقط از روی مدل گرانشی بدست می‌آید و اثر عوارض زمین وجود ندارد) و منطقه‌ی دیگر در خشکی استان اصفهان که در آن گرادیان‌های گرانش حاصل مجموع اثرات مدل گرانشی زمین و اثرات عوارض آن می‌باشد.

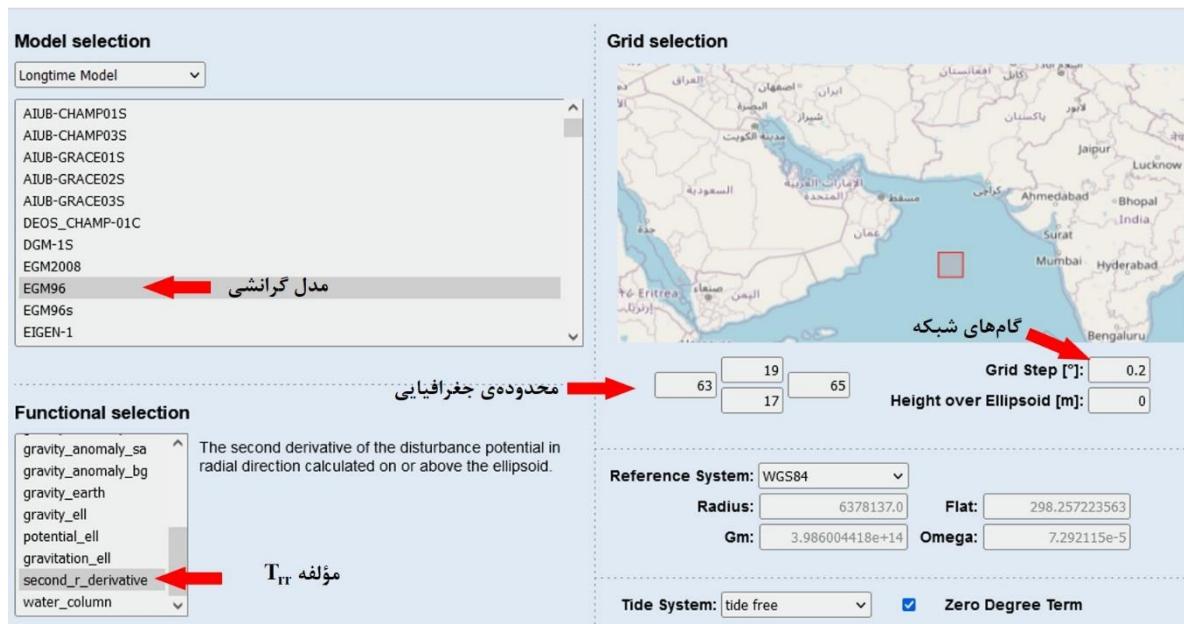
۱-۷ منطقه‌ای در آب‌های آزاد (دریای عمان)

در اینجا محدوده‌ی موردنظر برای تولید نقشه، ناحیه‌ای در دریای عمان حدفاصل عرض جغرافیایی ۱۷ درجه تا ۱۹ درجه و طول جغرافیایی ۶۳ درجه تا ۶۵ درجه می‌باشد. در شکل زیر موقعیت منطقه موردنظر نشان داده شده است.



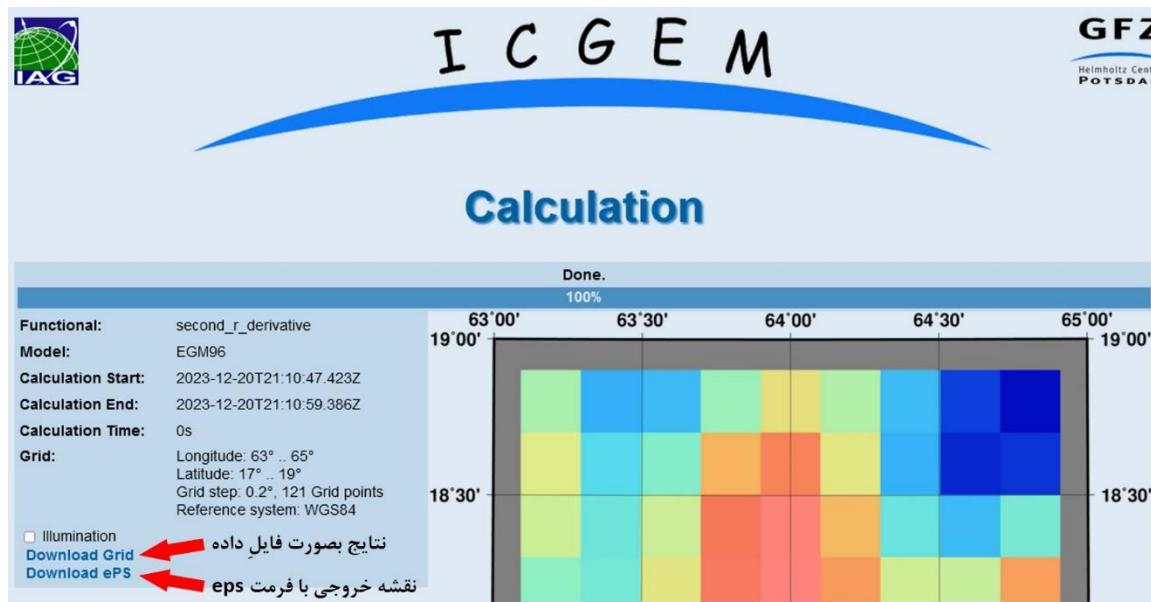
شکل ۲۷- منطقه موردنظر در آب‌های آزاد در دریای عمان

از آنجاکه در آب‌های آزاد، داده‌های ارتفاعی برابر با صفر هستند، لذا در محاسبه‌ی گرادیان گرانش اثرات عوارض وجود ندارد (از متد پارکر استفاده نمی‌شود) و تنها مدل گرانشی EGM96 مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما ابتدا باید یک صحت‌سنگی بر روی نتایج حاصله انجام شود تا از صحیح بودن آن اطمینان حاصل شود. در سایت مرکز بین‌المللی مدل‌های میدان گرانشی جهانی (ICGEM)، در آدرس <http://icgem.gfz-potsdam.de/calc>، ابزار محاسبه‌ی فرآورده‌های مختلف گرانشی (نظیر پتانسیل گرانشی، آنومالی گرانشی، ژئوید و...) بر مبنای مدل‌های مختلف وجود دارد. در این سایت، در بین مؤلفه‌های مختلف گرادیان گرانش، تنها مؤلفه‌ی T_{rr} با نام *second_r_derivative* ارائه شده است. در شکل ۲۸ نمایی از صفحه‌ی محاسبه فرآورده‌های گرانشی در این سایت نشان داده شده است. از آنجاکه $T_{zz} = T_{rr}$ است [۲۳، ۱۵]، لذا با مقایسه داده‌های حاصل از شبیه‌سازی در ناحیه‌ی موردنظر با داده‌های حاصل از سایت مذکور می‌توانیم صحت‌سنگی از نتایج خود ارائه نمائیم.



شکل ۲۸- تنظیمات محاسبه مؤلفه‌ی T_{rr} گرادیان گرانش در سایت ICGEM

با انجام تنظیمات فوق، پس از زدن دکمه *start comptation*، نتایج شبیه‌سازی بصورت یک نقشه و یک فایل داده در دسترس قرار می‌گیرد. در شکل ۲۹ صفحه‌ی نتیجه شبیه‌سازی این سایت نشان داده شده است.



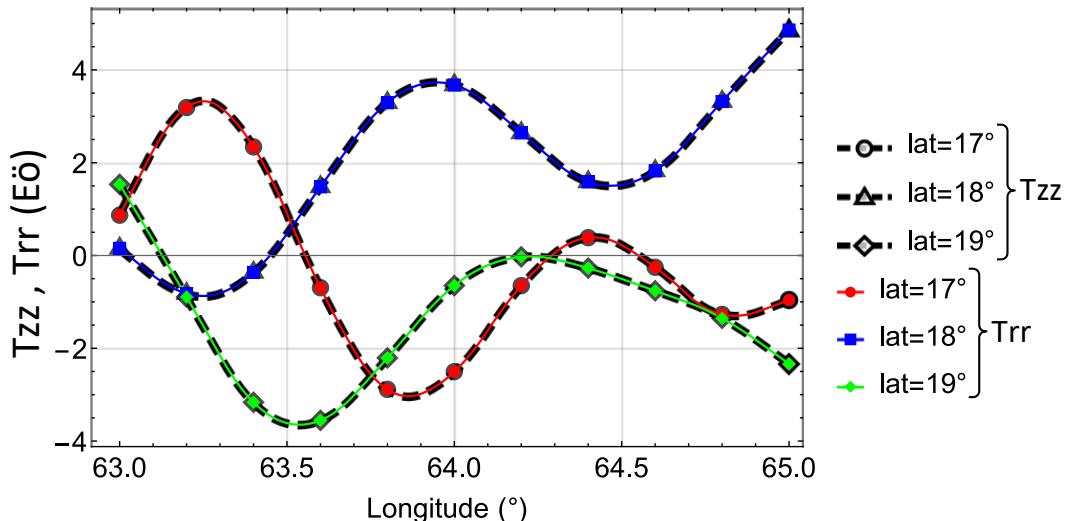
شکل ۲۹- صفحه‌ی نتیجه‌ی شبیه‌سازی در سایت ICGEM

با زدن لینک *Download Grids* نتایج بصورت یک ماتریس در فرمت *txt* دانلود می‌شود. در شکل زیر تصویری از فایل دانلود شده نشان داده شده است:

longitude	latitude	second_r_derivative
[deg.]	[deg.]	[Eotvos]
<i>end_of_head</i> =====		
63.0000	19.0000	1.533431211686
63.2000	19.0000	-0.895005229661
63.4000	19.0000	-3.164264861004
63.6000	19.0000	-3.553150191744
63.8000	19.0000	-2.208491337264
64.0000	19.0000	-0.648860089199
64.2000	19.0000	-0.029399100235
64.4000	19.0000	-0.271867646703
64.6000	19.0000	-0.761048262459
64.8000	19.0000	-1.354534327967
65.0000	19.0000	-2.334902788947
65.0000	19.0000	4.151104000122

شکل ۳۰- فایل نتایج مؤلفه‌ی T_{rr} گرادیان گرانش در محدوده‌ی موردنظر بر حسب طول و عرض جغرافیایی نقاط شبکه اکنون می‌خواهیم نتایج شبیه‌سازی خود را در محدوده‌ی موردنظر در دریای عمان با نتایج حاصل از این سایت مقایسه نمائیم. بمنظور مقایسه‌ی واضح‌تر، بجای ارائه نقشه‌ی دو بعدی، منحنی خطی گرادیان گرانش

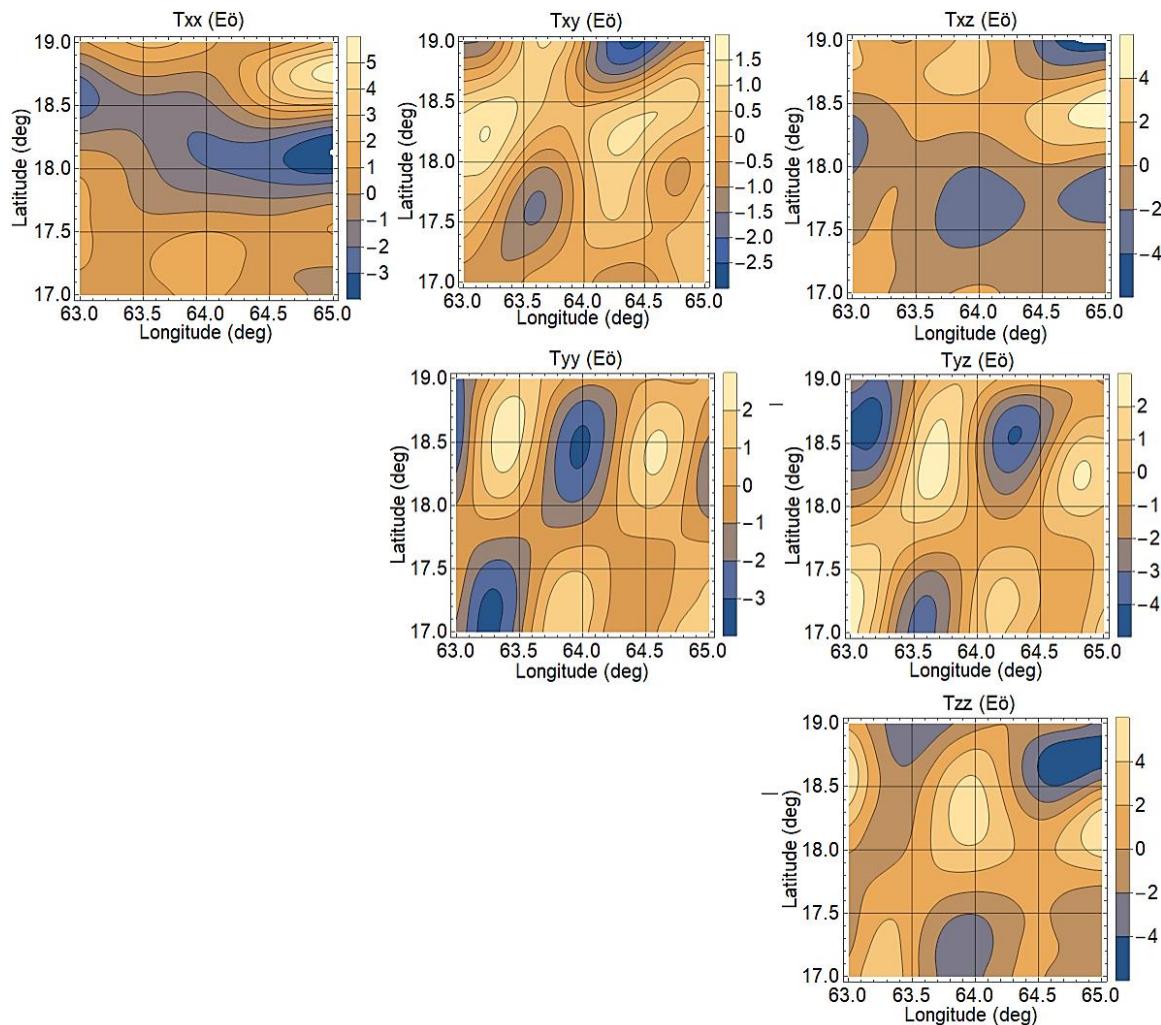
حاصل از شبیه‌سازی ما (T_{zz}) و شبیه‌سازی سایت (T_{rr}) در سه عرض ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ درجه در سراسر محدوده‌ی طولی موردنظر رسم می‌شود (شکل ۳۱).



شکل ۳۱- مقایسه گرادیان گرانش حاصل از شبیه‌سازی این گزارش (T_{zz}) و شبیه‌سازی سایت (T_{rr}) در سه عرض ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ درجه در سراسر محدوده‌ی طولی موردنظر

همانگونه که ملاحظه می‌شود، نتایج حاصل از شبیه‌سازی این گزارش تطابق کاملی با نتایج حاصل از سایت دارند ولذا می‌توان به نتایج حاصل از شبیه‌سازی اطمینان کرد.

در شکل زیر خروجی شبیه‌سازی انجام شده نقشه‌ی گرادیان گرانش در سطح دریا برای مؤلفه‌های T_{xx} و T_{yy} و T_{zz} و T_{xz} و T_{xy} و T_{yz} در منطقه‌ی مورد شبیه‌سازی در دریای عمان آورده شده است. این شبیه‌سازی با رزولوشن 0.2° انجام گردید و همانطور که پیشتر اشاره شد، در تولید آن از مدل عوارض زمین استفاده نشد زیرا در سطح آب‌های آزاد ارتفاع عوارض برابر با صفر است و گرادیان‌های حاصله از آن برابر با صفر می‌شود.



شکل ۳۲- شش مؤلفه تانسور گرادیان گرانش بر فراز منطقه‌ای در دریای عمان

همانگونه که پیشتر ذکر شد، با انجام شبیه‌سازی، فایل داده‌های حاصله بصورت CSV اکسپورت می‌شود و در دسترس است. شش تا از این فایل‌ها حاوی هریک از شش مؤلفه‌ی گرادیان گرانش است که سطر و ستون آن بیانگر عرض و طول جغرافیایی می‌باشد. در شکل زیر یکی از این شش فایل مربوط به T_{xx} نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل مشاهده می‌شود، داده‌های گرادیان گرانش از عرض ۱۹ تا ۱۷ درجه و طول ۶۳ تا ۶۵ درجه با گام‌های 0.2° ارائه شده‌اند.

0	63	63.2	63.4	63.6	63.8	64	64.2	64.4	64.6	64.8	65
17	0.289243	0.033469	0.179464	0.651911	1.090854	1.180472	0.903844	0.494456	0.179007	-0.00036	-0.12387
17.2	0.995186	0.604147	0.6338	1.096457	1.590612	1.673748	1.250622	0.616248	0.148232	-0.02603	-0.07711
17.4	1.213415	0.77008	0.616124	0.894841	1.321305	1.474577	1.207579	0.771272	0.543259	0.638024	0.778514
17.6	1.164335	0.683809	0.265543	0.163686	0.30881	0.425793	0.347866	0.196117	0.23699	0.559207	0.900109
17.8	1.145543	0.657364	0.001171	-0.54771	-0.8451	-0.96514	-1.06957	-1.21094	-1.28061	-1.15376	-0.87033
18	0.811124	0.455973	-0.20407	-0.98978	-1.61446	-1.95132	-2.13446	-2.40034	-2.83302	-3.2601	-3.38413
18.2	-0.37918	-0.374	-0.68809	-1.31764	-1.90642	-2.13537	-2.06363	-2.07854	-2.50464	-3.24686	-3.79791
18.4	-2.01733	-1.49548	-1.25722	-1.47605	-1.77103	-1.63657	-0.97394	-0.20752	0.111592	-0.1723	-0.65536
18.6	-2.656	-1.69922	-1.02592	-0.92649	-1.05367	-0.7795	0.215206	1.661456	2.955128	3.670664	3.858298
18.8	-1.35734	-0.31875	0.44768	0.610815	0.356038	0.234377	0.721326	1.870055	3.324303	4.622328	5.493223
19	0.855821	1.500263	2.072546	2.268026	1.944286	1.273402	0.651513	0.445349	0.774069	1.472996	2.23102

یکی دیگر از خروجی‌های شبیه‌سازی فایل داده‌ای حاوی همهٔ مؤلفه‌های گرادیان گرانش بصورت یکجا است. در شکل زیر تصویر سطرهای اولیه این فایل داده نشان داده شده است.

Latitude(deg)	Longitude(deg)	Txx	Tyy	Tzz	Txy	Txz	Tyz
17	63	0.28924	-1.1585	0.86923	-0.8624	0.84634	2.38168
17	63.2	0.03347	-3.2226	3.18917	-0.9754	0.24432	0.35447
17	63.4	0.17946	-2.5205	2.34107	-0.6865	-0.2511	-2.5434
17	63.6	0.65191	0.04254	-0.6944	-0.2343	-0.2839	-3.354
17	63.8	1.09085	1.79442	-2.8853	-0.0554	0.05338	-1.6079
17	64	1.18047	1.32319	-2.5037	-0.3404	0.25609	0.56772
17	64.2	0.90384	-0.2542	-0.6496	-0.8038	-0.1042	1.05298
17	64.4	0.49446	-0.8786	0.38412	-0.9447	-0.9223	-0.0543
17	64.6	0.17901	0.0747	-0.2537	-0.5583	-1.6231	-0.9019
17	64.8	-0.0004	1.26921	-1.2688	0.03082	-1.7201	-0.1793
17	65	-0.1239	1.0849	-0.961	0.28073	-1.3189	1.442
17.2	63	0.99519	-0.8018	-0.1934	-0.4088	0.58702	2.62841
17.2	63.2	0.60415	-3.0847	2.48058	-0.8215	0.39791	0.92141
17.2	63.4	0.6338	-2.7727	2.13892	-1.0249	-0.1904	-2.0508
17.2	63.6	1.09646	-0.3658	-0.7307	-0.803	-0.7573	-3.2769
17.2	63.8	1.59061	1.64216	-3.2328	-0.3816	-0.9235	-1.8417
17.2	64	1.67375	1.55739	-3.2311	-0.1613	-0.7493	0.48453

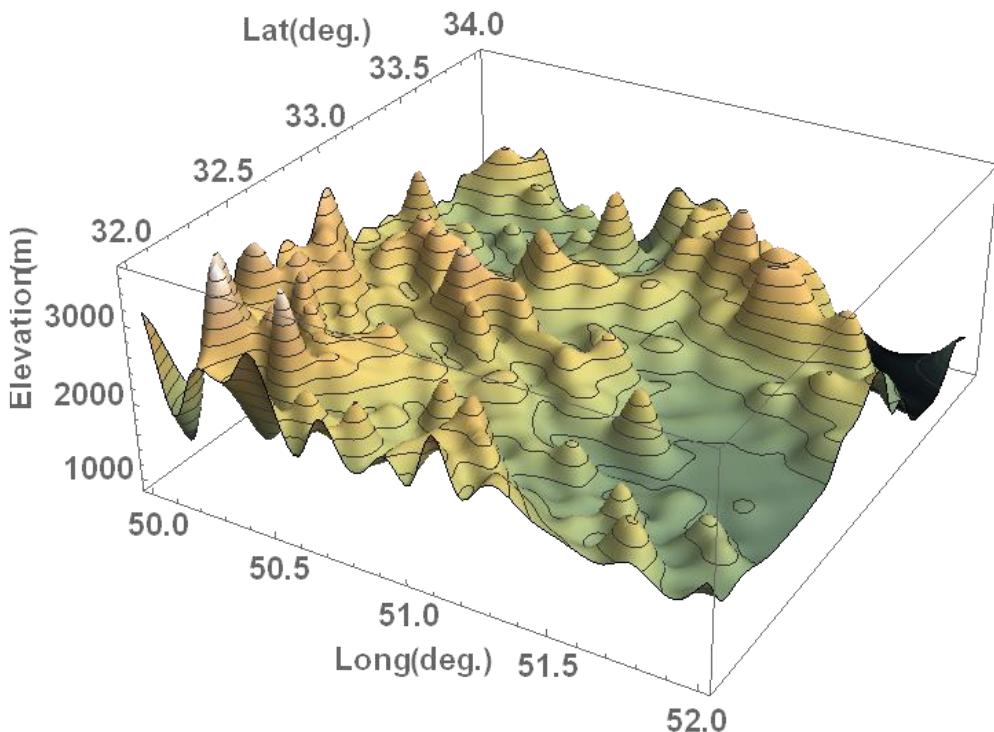
شکل ۳۳- فایل داده‌های خروجی شبیه‌سازی دریای عمان

۲-۷ منطقه‌ای در خشکی (استان اصفهان)

منطقه‌ی موردنظر به ابعاد $2^{\circ} \times 2^{\circ}$ در استان اصفهان و بخش‌هایی از استان‌های مرکزی و خوزستان واقع شده که طول جغرافیایی آن از 52° درجه تا 55° درجه و عرض جغرافیایی از 32° درجه تا 34° درجه می‌باشد. در شکل زیر این محدوده بر روی نقشه نشان داده شده است.



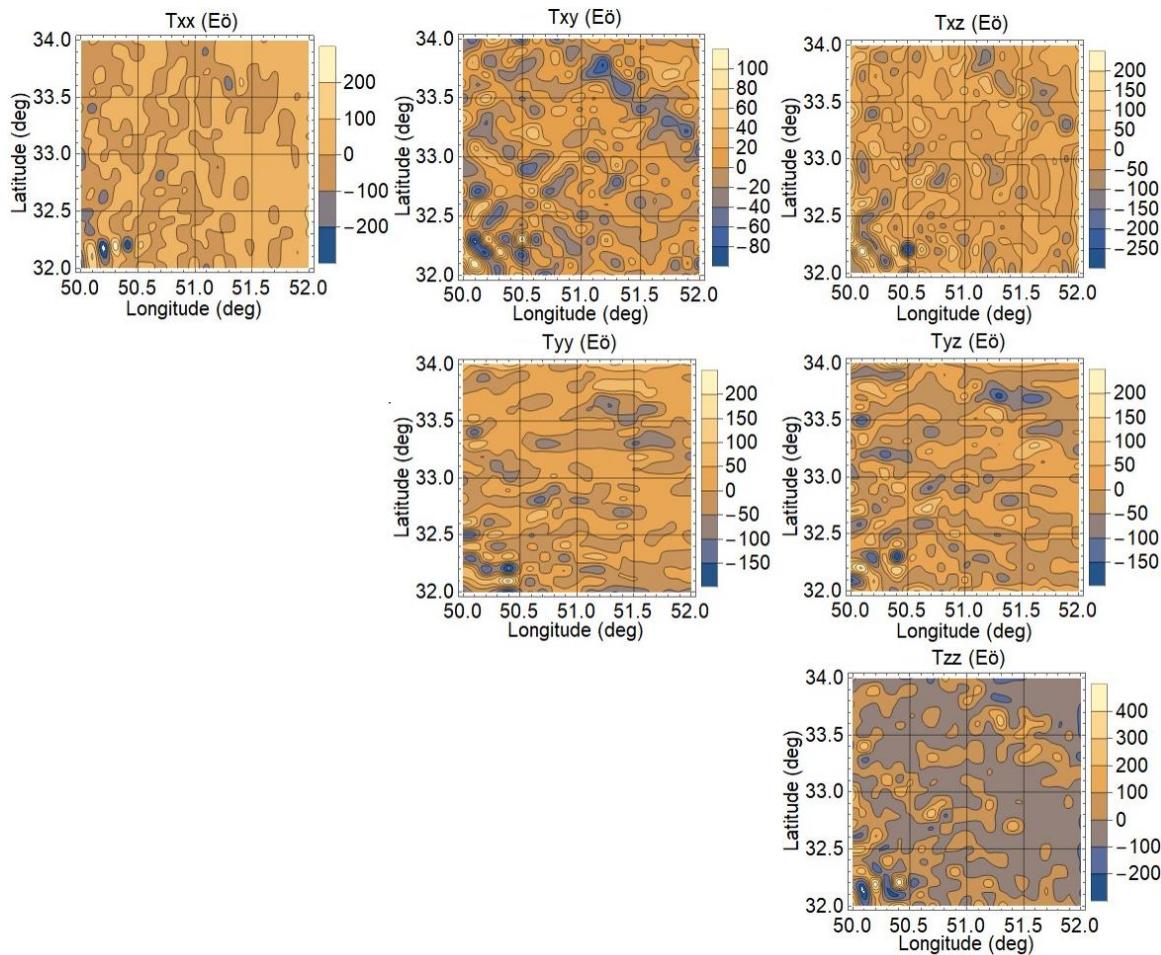
شکل ۳۴- منطقه‌ی مورد نظر در سطح خشکی در استان اصفهان و بخش‌هایی از مرکزی و خوزستان در شکل زیر نقشه سه‌بعدی ارتفاعات عوارض در منطقه‌ی مذکور بر حسب متر رسم شده است. این نقشه با استفاده از مدل *GTOPO30* بدست آمده است.



شکل ۳۵- نقشه ارتفاعات عوارض منطقه موردنظر در استان اصفهان و حومه حال می‌خواهیم نقشه گرادیان گرانش این منطقه را در ارتفاع ۱۰۰۰ متری از سطح متوسط عوارض زمین بدست آوریم. به این منظور دو نقشه از گرادیان گرانش ارائه می‌دهیم. یک نقشه گرادیان گرانش ناشی

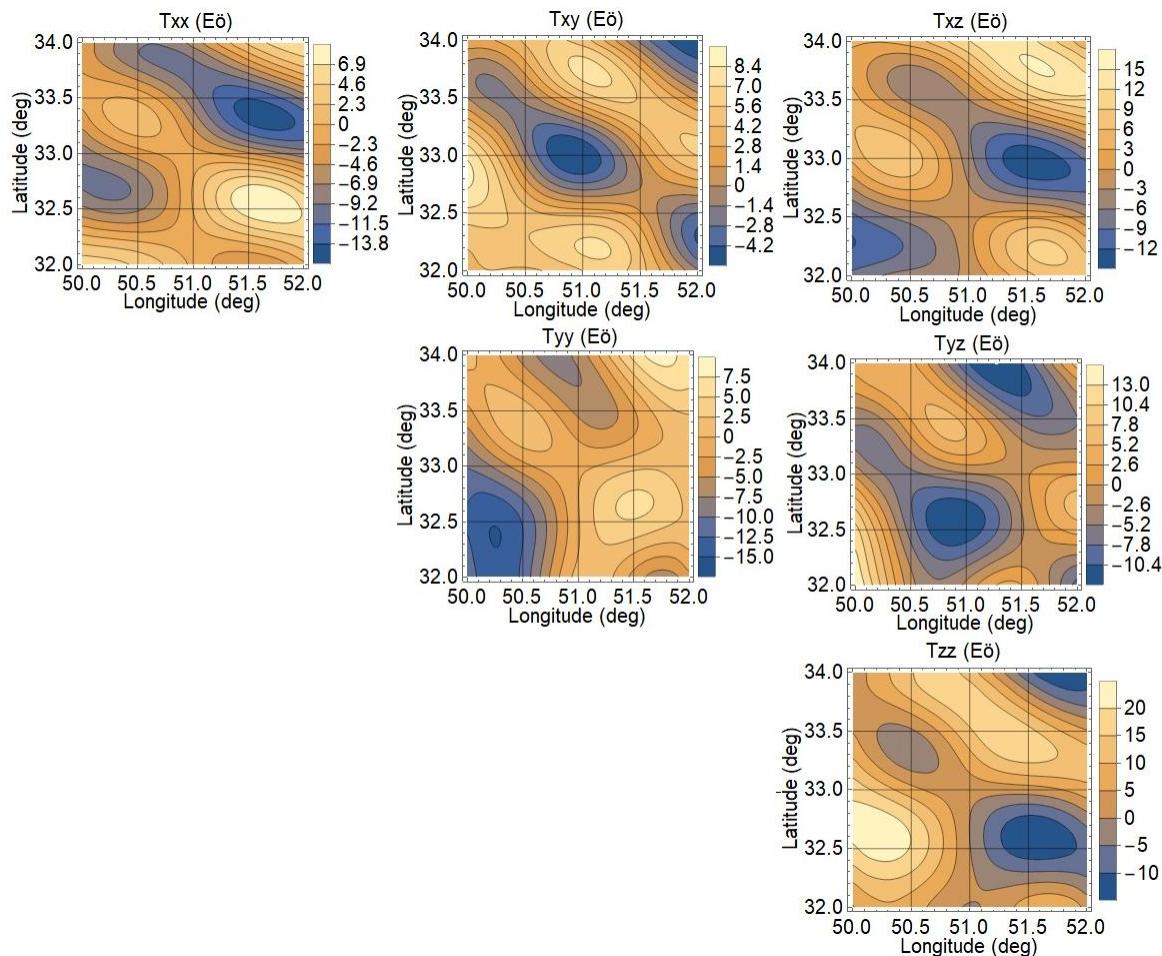
از عوارض زمین و نقشه‌ی دیگر گرادیان گرانش ناشی از مدل گرانشی *EGM96*. توجه شود که اولی حاوی طول موج‌های کوتاه میدان گرانشی بوده و دومی حاوی طول موج‌های بلند.

در شکل زیر خروجی شبیه‌سازی انجام شده نقشه‌ی گرادیان گرانش ناشی از عوارض زمین برای مؤلفه‌های T_{xx} و T_{xy} و T_{xz} و T_{yy} و T_{yz} در منطقه‌ی مورد شبیه‌سازی در استان اصفهان آورده شده است. این شبیه‌سازی با رزو لوشن 0.1° انجام گردید.



شکل ۳۶- شش مؤلفه تansور گرادیان گرانش ناشی از عوارض زمین در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح متوسط عوارض در استان اصفهان

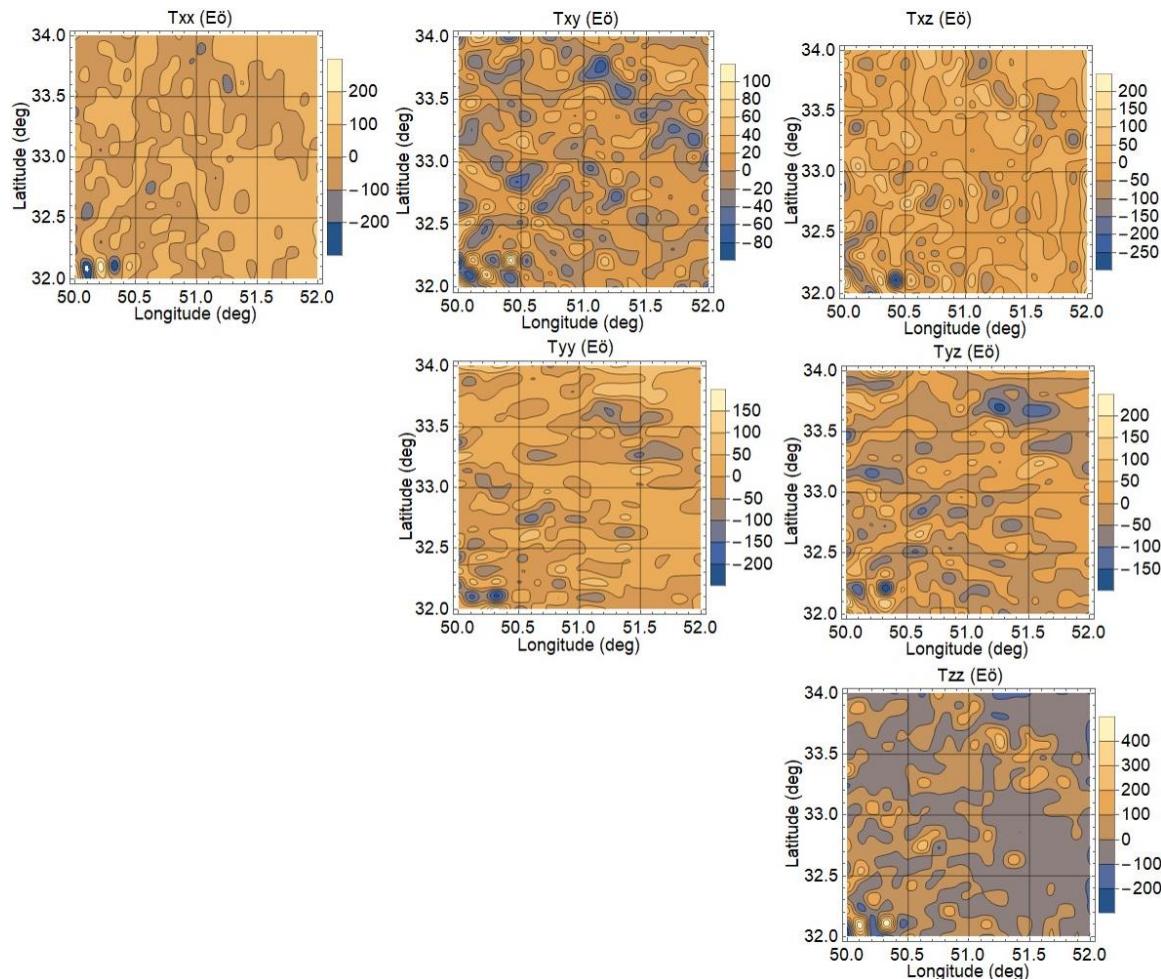
در شکل زیر خروجی شبیه‌سازی انجام شده نقشه‌ی گرادیان گرانش ناشی از مدل گرانشی *EGM96* برای مؤلفه‌های T_{xx} و T_{xy} و T_{xz} و T_{yy} و T_{yz} در منطقه‌ی مورد شبیه‌سازی در استان اصفهان آورده شده است. این شبیه‌سازی نیز با رزو لوشن 0.1° انجام گردید.



شکل ۳۶- شش مؤلفه تانسور گرادیان گرانش ناشی از مدل EGM96 در ارتفاع ۱۰۰ امتاری از سطح متوسط عوارض در استان اصفهان

با مقایسه نقشه‌های گرادیان گرانش ناشی از عوارض با نقشه‌های ناشی از مدل EGM96 در شکل ۳۶ و شکل ۳۷ مشخص است که داده‌های گرادیان گرانش حاصل از عوارض دارای دامنه‌ی بزرگتری بوده و تغییرات شدیدتری نسبت به داده‌های گرادیان گرانش حاصل از مدل گرانشی EGM96 دارند. این همان مطلبی است که در بخش ۵ ذکر شد که اثرا عوارض زمین منجر به تغییرات شدید در گرادیان گرانش می‌شوند. البته بزرگی و شدت تغییرات گرادیان گرانش به منطقه‌ی موردنظر نیز بستگی دارد؛ بطوريکه در دشت‌ها و کویرها مقدار آن‌ها کوچک است و در دریاها به مینیمم مقدار خود می‌رسد و بر عکس در کوهستان‌ها و مناطق پر شب دارای اندازه بزرگ و تغییرات شدید است. از آنجاییکه منطقه‌ی موردنظر در این شبیه‌سازی بیشتر شامل نواحی غرب استان اصفهان و بخش‌هایی از استان‌های مرکزی و خوزستان را شامل می‌شود و این مناطق اکثرًا کوهستانی هستند (در شکل ۳۵ این موضوع قابل مشاهده است)، لذا همانطورکه انتظار می‌رفت، اندازه گرادیان‌های گرانش بزرگ هستند.

حال، طبق رابطه (۱۴) باید داده‌های گرادیان گرانش متناظر حاصل از این دو منبع با یکدیگر جمع شوند تا گرادیان گرانش کامل بدست آید. با توجه به اینکه در این منطقه اندازه‌ی گرادیان‌های ناشی از عوارض خیلی بزرگتر از اندازه گرادیان‌های ناشی از مدل گرانشی *EGM96* هستند، لذا انتظار می‌رود نقشه‌ی گرانشی کامل بیشتر شبیه به نقشه‌ی حاصل از عوارض باشد. در شکل زیر نقشه‌ی گرادیان گرانش کامل منطقه‌ی موردنظر نشان داده شده است.



شکل ۳۸- شش مؤلفه تأثیرگذار گرانش کامل (ناشی از مدل *EGM96* و عوارض توپوگرافی) در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح متوسط عوارض در استان اصفهان

همانند مورد قبلی دریای عمان، در اینجا نیز داده‌های حاصل از تمام مؤلفه‌های گرادیان گرانش بصورت فایل‌های *CSV* اکسپورت می‌شوند و ما بجهت عدم تکرار از آوردن آن‌ها در اینجا خودداری می‌کنیم.



مراجع



مراجع ۸

- [1] Hofmann-Wellenhof, Bernhard, and Helmut Moritz. *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] Barthelmes, Franz. "Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models: theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM), <http://icgem.gfz-potsdam.de/>." (2009): 1-32.
- [3] Li and H. J. Gotze, "Tutorial: Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics," *Geophysics*, vol. 66, pp. 1660-1668, 2001.
- [4] Navigation basics and Inertial Navigation, Available at: <http://www.aerostudents.com/files/avionics/navigationBasicsAndInertialNavigation.pdf>
- [5] Mickus, K. L., and Hinojosa, J. H., "The complete gravity gradient tensor derived from the vertical component of gravity: a Fourier transform technique," *Journal of Applied Geophysics*, Vol. 46, 2001, pp. 159-174.
- [6] A. Jircitano, J. White, and D. Dosch, "Gravity based navigation of AUVs" *Proceeding of the Symposium on Autonomous Underwater Vehicle Technology*, 177-180 (1990).
- [7] C. A. Affleck, A. Jircitano, "Passive gravity gradiometer navigation system," *Proceeding of the IEEE Position Location and Navigation Symposium*, 60-66 (1990).
- [8] Bell, Robin E. "Gravity gradiometry," *Scientific American*, Vol. 278, No. 6: 74 (June 1998).
- [9] J. Parmentola, "The gravity gradiometer as a verification tool," *Science and Global Security*, vol. 2, pp. 43-57, 1990.
- [10] Yan Lei, Feng Hao, Deng Zhongliang, Gao Zhengbing, "Study on a Three-Dimensional Gravity Model Applied in Underwater Navigation", *Acta Geologica Sinica* (English Edition), Vol.78 No. 3, pp. 838-842, 2004.
- [11] P. Dehlinger, *Marine gravity* [M], first edition, New York: Elsevier, 1978.
- [12] Nagy, D., Papp, G., Benedek, J., "The gravitational potential and its derivatives for the prism," *Journal of Geodesy*, Vol. 74, 2000, pp. 552-560.
- [13] Rogers, M. M., "An Investigation into the Feasibility of Using a Modern Gravity Gradient Instrument for Passive Aircraft Navigation and Terrain Avoidance," *Master's Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Air Force Institute of Technology*, Wright-Patterson AFB, OH, March 2009.
- [14] Eshagh M, Alamdar MN, Farnin A (2006) Investigation of long wavelength spheroids of EIGEN geopotential models in Iran. *Proceedings of the FIG conference*, Sofia, Bulgaria
- [15] R. Kiamehr and M. Eshagh, "Egmlab, a scientific software for determining the gravity and gradient components from global geopotential models," *Journal of Earth Science Informatics*, vol. 1, no. 2, pp. 93-103, 2008.



- [16] Kirby JF, Featherstone WE, Kearsley AHW (1998) Tests of the DMA/GSFC geopotential models over Australia. *Geophys J Int* 7:2–13.
- [17] F. G. Lemoine, S. C. Kenyon, J. K. Factor, R. G. Trimmer, N. K. Pavlis, D. S. Chinn, C. M. Cox, S. M. Klosko, S. B. Luthcke, M. H. Torrence, Y. M. Wang, R. G. Williamson, E. C. Pavlis, R. H. Rapp, and T. R. Olsen, “The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96,” *NASA, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Tech. Rep. NASA/TP-1998-206861*, 1998.
- [18] Richeson, J. A., “Gravity Gradiometry Aided Inertial Navigation within Non-GNSS Environments,” *Ph.D. Dissertation, University of Maryland*, College Park, MD, 2008.
- [19] (2008, Sep.). [Online]. Available: <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravmod/egm2008/index.html>
- [20] Forste, C., Bruinsma, S., Flechtner, F., Marty, J.-C., Lemoine, J.-M., Dahle, C., Abrikosov, O., Neumayer, K.-H., Biancale, R., Barthelmes, F., & Balmino, G., 2012. A preliminary update of the Direct approach GOCE Processing and a new release of EIGEN-6C, *Paper presented at the AGU Fall Meeting 2012*, San Francisco, USA, 3-7 Dec, Abstract No. G31B-0923.
- [21] National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) Standardization Document, Department of Defense World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems, 2014-07-08, Version 1.0.0.
- [22] NATIONAL IMAGERY AND MAPPING AGENCY TECHNICAL REPORT 8350.2, Third Edition, 3 Jan. 2000, Department of Defense, World Geodetic System 1984.
- [23] M. Petrovskaya and A. Vershkov, “Non-singular expressions for the gravity gradients in the local north-oriented and orbital reference frames,” *Journal of Geodesy*, vol. 80, pp. 117-127, 2006.
- [24] D. M. Gleason, “Passive airborne navigation and terrain avoidance using gravity gradiometry,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 6, pp. 1450-1458, 1995.
- [25] R. L. Parker, “The rapid calculation of potential anomalies,” *The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, vol. 31, no. 4, pp. 447-455, 1972.
- [26] C. Jekeli and L. Zhu, “Comparison of methods to model the gravitational gradients from topographic data bases,” *Geophys. J. Int.*, vol. 166, pp. 999-1014, 2006.
- [27] C. Jekeli, “Statistical analysis of moving-base gravimetry and gravity gradiometry,” *The Ohio State University, Columbus, OH*, Tech. Rep. 466, 2003.
- [28] L. Zhu, “Gradient modeling with gravity and DEM,” *Ph.D. dissertation, The Ohio State University, Columbus, OH*, 2007.
- [29] D. M. Gleason, “Obtaining Earth surface and spatial deflections of the vertical from free-air gravity anomaly and elevation data without density assumptions,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 95, no. B5.
- [30] Anthony DeGregoria, “Gravity Gradiometry and Map Matching: an Aid to Aircraft Inertial Navigation Systems,” *M. S. dissertation, Department of Aeronautics and*



Astronautics, Air Force Institute of Technology, Air University (AFIT/GAE/ENY/10-M06), March 2010.

[31] Franz Barthelmes and Christoph Förste, “The ICGEM-format,” GFZ Potsdam, Department 1 “*Geodesy and Remote Sensing*”, 7. June 2011 (available at: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>).

[32] Abramowitz, M., Stegun, I. A., & Romer, R. H. (1988). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*.

[33] GTOPO30 Documentation ReadMe, available at: <https://www.usgs.gov/media/files/gtopo30-readme>