

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین سوم نمایش سری فوریه سیگنال‌های متناوب پیوسته-زمان

استاد درس
دکتر راستی

توضیحات:

- مهلت تحویل بخش تئوری تا جمعه ۱۲ آذر و بخش شبیه‌سازی تا جمعه ۲۶ آذر در نظر گرفته شده است و به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد. امکان استفاده از ۱۰ روز تاخیر مجاز برای این تمرین بسته به نتیجه نظرسنجی در سایت درس، اعلام خواهد شد.
- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- پاسخ بخش‌های تئوری و شبیه‌سازی تمرین را در قالب یک فایل PDF یا ZIP با نام «HW3_StudentNumber» در سایت درس بارگذاری کنید.
- سوالات خود را از طریق ایمیل ss.fall.2021@gmail.com با تدریس‌یاران درس مطرح کنید. موضوع ایمیل را «تمرین n : سوال m » برای سوالات تمرین و «سوال از فصل x » برای سوالات درسی قرار دهید.

نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بخش تئوری

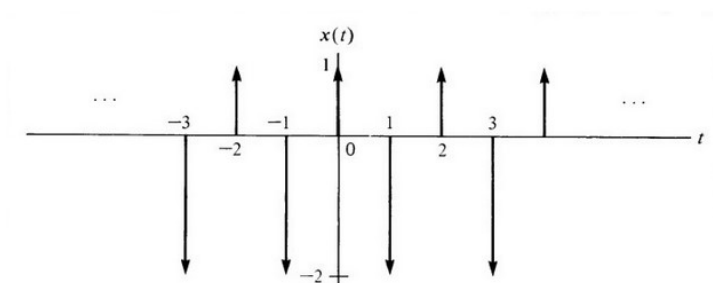
سوال ۱ -

ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را محاسبه نمایید.

a) $x(t) = e^{-t}$ for $0 \leq t \leq 1$, $T_0 = 1$

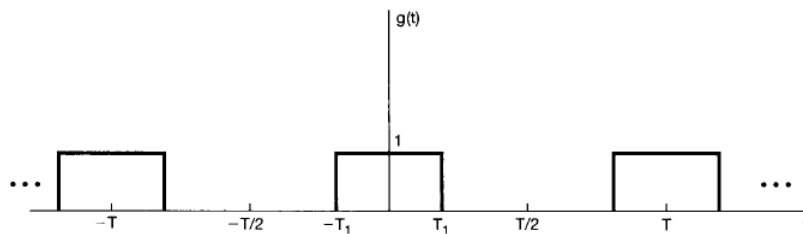
b) $x(t) = [1 + \cos(2\pi t)] [\sin(10\pi t + \frac{\pi}{6})]$

c)

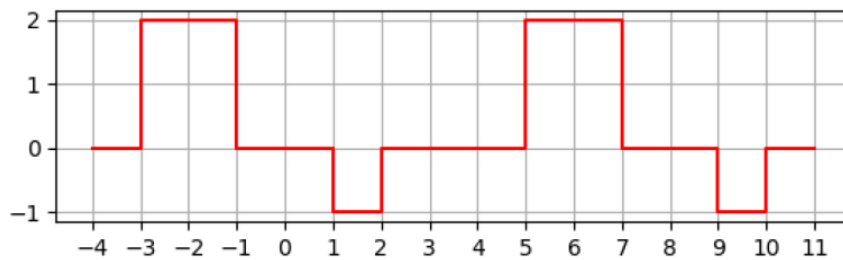


سوال ۲ -

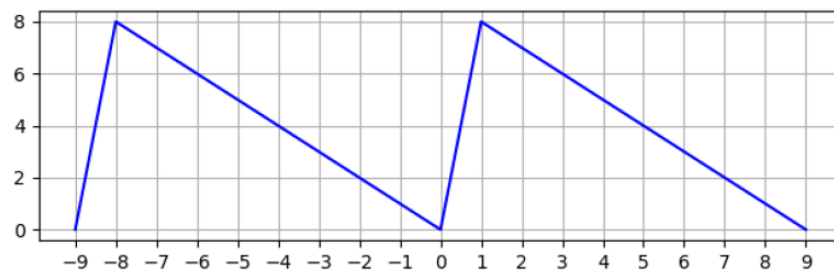
(آ) ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را به صورت پارامتری محاسبه کنید.



(ب) با استفاده از بخش قبل، ضرایب سری فوریه را برای سیگنال‌های زیر محاسبه کنید.



(i)



(ii)

سوال ۳ -

اگر $x(t) \xleftrightarrow{\text{F.S.}} a_k$ و $\hat{x}(t) \xleftrightarrow{\text{F.S.}} c_k$ باشد، آنگاه c_k را برحسب a_k محاسبه کنید (در قسمت (c) اگر از ویژگی‌های سری فوریه استفاده می‌کنید، باید آن را اثبات کنید).

$$a) \hat{x}(t) = 2x(1-t) + 1$$

$$b) \hat{x}(t) = x^*(2t) + x\left(\frac{-t}{2}\right), T = 2$$

$$c) \hat{x}(t) = x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$$

سوال ۴ -

توان متوسط سیگنال زیر را بدست آورید.

$$x(t) = 3e^{j3t} + \cos(2t) + e^{j4t}$$

سوال ۵-

در مورد سیگنال $x(t)$ ، حقایق زیر را می‌دانیم.

- سیگنال حقیقی است و دوره تناوب اساسی آن $T = 6$ است.
 - برای $k = 0$ و $|k| > 2$ ضرایب سری فوریه آن برابر صفر و در $k = 1$ ضریب سری فوریه آن عددی حقیقی و مثبت است.
 - برای این سیگنال $x(t) = -x(t - 3)$ است.
 - $\int_{-3}^3 |x(t)| dt = 12\pi$
- ضرایب سری فوریه و از طریق آن، سیگنال $x(t)$ را بدست آورید.

سوال ۶-

با ذکر دلیل، به سوالات زیر درباره خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = 25te^{-3t}u(t)$ پاسخ دهید.

(آ) به ازای ورودی $x(t)$ با دوره تناوب اصلی $T_0 = 2$ ، چه هارمونیک‌هایی در سیگنال خروجی $y(t)$ با اندازه^۱ کاهش یافته ظاهر می‌شوند؟ به عبارت دیگر، اگر $x(t) \xrightarrow{\text{F.S.}} a_k$ و $y(t) \xrightarrow{\text{F.S.}} c_k$ باشد، به ازای چه مقادیری از k عبارت $|c_k| < |a_k|$ برقرار است؟

(ب) به ازای ورودی $x(t)$ با دوره تناوب اصلی $T_0 = 4\pi$ ، چه هارمونیک‌هایی در سیگنال خروجی $y(t)$ با اندازه کاهش یافته ظاهر می‌شوند؟

¹Magnitude

بخش شبیه‌سازی

سوال ۱ -

همانطور که می‌دانید سری فوریه، توابع متناوب حقیقی را به جمع توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس تبدیل می‌کند.

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

ضرایب a_k و b_k در فرمول فوق از طریق انتگرال‌های زیر محاسبه می‌شوند.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

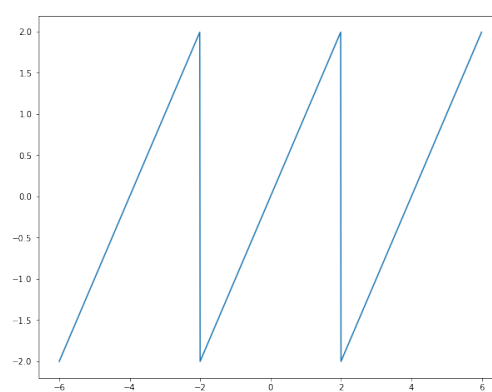
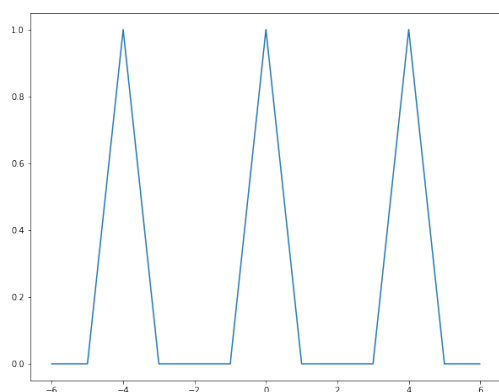
آ) ابتدا تابعی بنویسید که با دریافت یک سیگنال متناوب، k ضریب اول سری فوریه آن را باز گرداند. سپس توابع متناوب زیر را به ازای هارمونیک‌های مشخص شده رسم کنید.

a) $k \in [0, 2]$

c) $k \in [0, 50]$

b) $k \in [0, 10]$

d) $k \in [100, 200]$



ب) کدام هارمونیک‌ها در تقریب سیگنال نقش اساسی دارند؟ کدام هارمونیک‌ها انرژی اصلی سیگنال را در خود ذخیره کرده‌اند؟

سوال ۲ -

صوت یک موج مکانیکی است که در اثر ارتعاش اجسام انجام می‌شود. صوت می‌تواند به وسیله گازها، مایعات و جامدات منتقل شود. یک میکروفون یا حتی گوش انسان با دریافت صوت آن را به اختلاف پتانسیل الکتریکی تبدیل می‌کند. با روش‌های نمونه‌برداری که در فصل‌های آینده با آن آشنا خواهید شد سیگنال صوتی را به یک سیگنال دیجیتال تبدیل می‌کنیم. در حقیقت با نمونه برداری، یک سیگنال پیوسته-زمان به یک سیگنال گسسته-زمان تبدیل می‌شود. هرچه فواصل زمانی نمونه برداری کمتر باشد سیگنال دیجیتال به سیگنال اصلی شبیه‌تر خواهد بود. از آنجا که نرخ نمونه برداری برای سیگنال‌های صوتی بالا (در حدود 40,000 Hz) است، با آن‌ها مانند سیگنال‌های پیوسته برخورد می‌کنیم.

در این سوال قصد داریم با کمک سری فوریه به بررسی سیگنال‌های صوتی بپردازیم. همراه این تمرین یک فایل صوتی به نام sound.wav در اختیار شما قرار گرفته است. این فایل را با تابع [scipy.io.wavfile.read](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.io.wavfile.read.html) بازکنید. این تابع نرخ نمونه‌برداری و سیگنال صوتی را در قالب آرایه کتابخانه numpy به شما بازمی‌گرداند.

(آ) هزار نمونه ابتدایی این سیگنال را در حوزه زمان رسم کنید. دقت کنید که محور افقی باید زمان را نشان دهد. پس ابتدا با استفاده از فرکانس نمونه‌برداری، فاصله‌ی زمانی دو نمونه را محاسبه کنید.

(ب) همانطور که از بخش قبل قابل مشاهده است، این صوت یک سیگنال متناوب است. دوره تناوب این سیگنال را 61.16ms در نظر بگیرید. ضرایب a_k و b_k را برای $k \in [0, 150]$ محاسبه کرده و در نهایت $a_k + b_k$ را در حوزه فرکانس رسم کنید (هر a_k یا b_k نظیر فرکانس $k\omega_0$ است).

(پ) این سیگنال صوتی از چه فرکانس‌هایی تشکیل شده است؟ مقادیر تقریبی آن‌ها را بدست آورید.

(ت) به جز دو فرکانس اول، باقی فرکانس‌ها را حذف کنید و سیگنال خروجی را برای هزار نمونه اول رسم کنید. این فرآیند را برای دو فرکانس آخر نیز تکرار کنید. (امتیازی)

(ث) دو سیگنال مرحله‌ی قبل را به فایل صوتی تبدیل کنید. می‌توانید از تابع [scipy.io.wavfile.write](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.io.wavfile.write.html) کمک بگیرید. به صوت این دو سیگنال گوش دهید. در شدت صوت‌های یکسان رابطه‌ی انرژی یک سیگنال صوتی با زیر و بم بودن صدا چیست؟ (امتیازی)