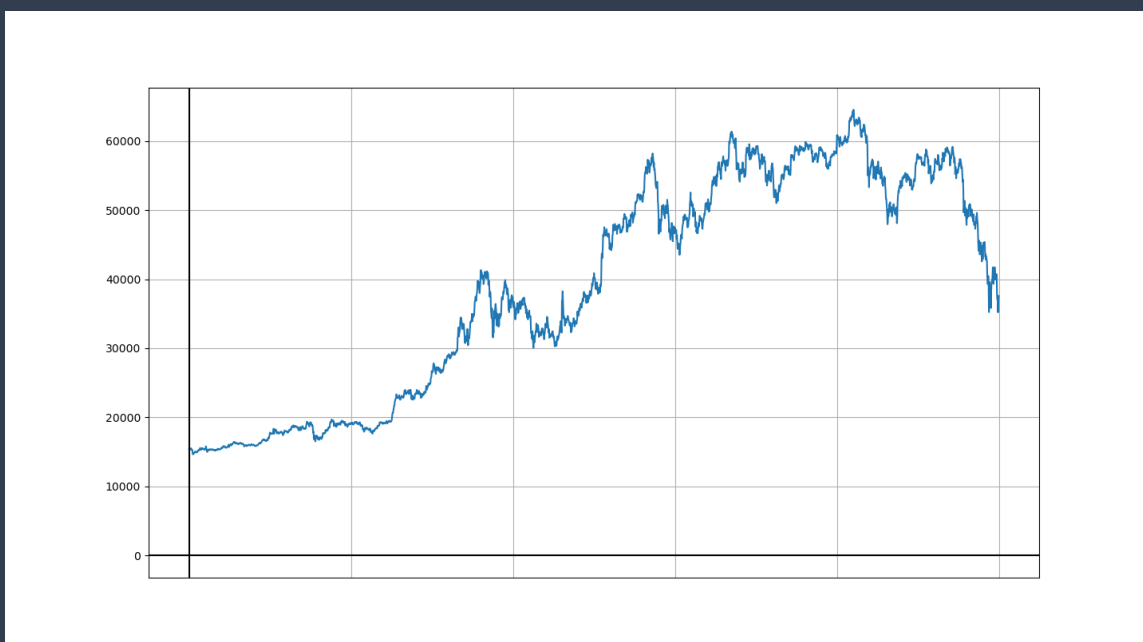




دانستیم که پاسخ least-squares معادله $Ax = y$ ، برداری است که مقدار تابع هدف $\|Ax - y\|^2$ را کمینه می‌کند. در این تمرین یکی از کاربردهای این مسئله را بررسی می‌کنیم.

ابتدا فایل `btc_price.npy` را با تابع `load` باز کنید و با استفاده از تابع `plot` در کتابخانه `matplotlib` آرایه لود شده را در قالب نمودار رسم کنید. نمودار رسم شده قیمت هر ۲ ساعت بیت‌کوین از اواخر سال ۲۰۲۰ تا بیستم ماه می است. همانطور که می‌بینید این نمودار دارای نوسان بسیاری است و کار کردن با آن می‌تواند مشکل باشد. در اینجا می‌خواهیم با استفاده از least-squares این نمودار را دی‌نویز کنیم.



فرض کنید بردار y بردار مقادیر قیمت بیت‌کوین، بردار مجهول x بردار بدون نویز قیمت که به دنبال آن هستیم و بردار v بردار نامشخص نویز است. یعنی داریم:

$$y = x + v$$

یا:

$$y = Ix + v$$

اگر برای معادله بالا، پاسخ least-squares معادله $Ix = y$ را حل کنیم، در واقع تابع زیر را کمینه کرده‌ایم.

$$\min_x \|Ix - y\|^2$$

کمینه کردن این تابع باعث می شود تا مقادیر بردار x نزدیک به y باشند. اما این شرط به تنهایی باعث دی نویز شدن بردار نمی شود. شرط لازم دیگر، کم بودن اختلاف دو درایه مجاور از بردار x است. پس تابع هدف بالا را با اضافه کردن شرط دوم به شکل زیر می نویسیم (λ پارامتر مسئله است که نسبت تاثیر دو شرط گفته شده در پاسخ مسئله را تنظیم می کند).

$$\min_x \|Ix - y\|^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

عبارت دوم را می توانیم به شکل $\|Dx\|^2$ نیز بنویسیم که در آن D برابر ماتریس $(n-1) \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

است. پس در نهایت هدف ما کمینه کردن تابع

$$\min_x \|Ix - y\|^2 + \|\sqrt{\lambda}Dx\|^2$$

است. تابع بالا را در قالب ماتریس های بلوکی زیر نیز می توان نوشت:

$$\min_x \left\| \begin{bmatrix} I \\ \sqrt{\lambda}D \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2$$

پس توانستیم تابع هدف خود را به شکل تابع هدف مسئله least-squares در بیاوریم.

در این تمرین شما باید با کمینه کردن تابع بالا به کمک پاسخ مسئله least-squares آرایه داده شده را دی نویز کرده و آن را رسم کنید. این کار را برای مقادیر مختلفی از پارامتر λ امتحان کنید. به ازای چه مقداری از λ نمودار حاصل شباهت کافی به نمودار اصلی دارد و به خوبی نیز دی نویز شده است؟

✓ کد پایتون خود را به همراه عکس از نمودارهای رسم شده در قالب یک فایل زیپ ارسال کنید. همچنین استفاده از ژوپیتِر برای اجرای مرحله به مرحله برنامه و دیدن نتایج آن توصیه می شود.

موفق باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی کاربردی

بهار ۱۴۰۰