بسمه تعالی

پاسخ تمرینات سری اول سیگنال و سیستم

۱-

A- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-|t+4k|}$

$= \dots + e^{-|t+4|} + e^{-|t|} + e^{-|t-4|} + \dots$

بدیهی است اگر سیگنال $x(t)$ را با مقداری از ۴ به سمت راست انتقال دهیم سیگنال حاصل باز با $x(t)$ برابر خواهد بود و $x(t)$ با دوره تناوب $T=4$ متناوب است

$$x(t+4m) = x(t)$$

B- $x(t) = \left|\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right| + \cos\left(\frac{3}{2}t\right)$

$\left|\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right| \longrightarrow T_1 = \dfrac{\pi}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2\pi}{3}$

$\cos\left(\frac{3}{2}t\right) \longrightarrow T_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4\pi}{3}$

$$\mathrm{Lcm}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\mathrm{Lcm}(a, b)}{\gcd(b, d)}$$

$\longrightarrow \quad T = \mathrm{Lcm}(T_1, T_2) = \mathrm{Lcm}\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$

$= \dfrac{\mathrm{Lcm}(2\pi, 4\pi)}{\gcd(3, 3)} = \dfrac{4\pi}{3} = \boxed{\dfrac{4\pi}{3}}$

C- $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

D- $\cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right)$

$$x[n+N] = x[n]$$

$$\rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}(n+N)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right)$$

$$\rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8} n^2 + \frac{\pi}{8} N^2 + \frac{\pi}{4} nN\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right)$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{\pi}{8} n^2} + \frac{\pi}{8} N^2 + \frac{\pi}{4} nN = \cancel{\frac{\pi}{8} n^2} + 2k\pi$$

$$\rightarrow \frac{N^2}{8} + \frac{nN}{4} = 2k$$

با سعی و خطا $N = 8$ بدست می‌آید

E- $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right)$

از فرمول ضرب به جمع می‌دانیم

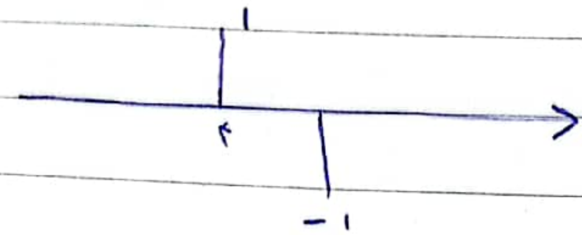
$$x[n] = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{3} n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{3} n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{6} n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} n\right)\right]$$

$$\operatorname{lcm}\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{lcm}(5\pi, \pi)}{\gcd(6,6)} = \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$T = \frac{5\pi}{6}$$

F. $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{ \delta(n-4k) - \delta(n-1-4k) \}$



$T = 4$

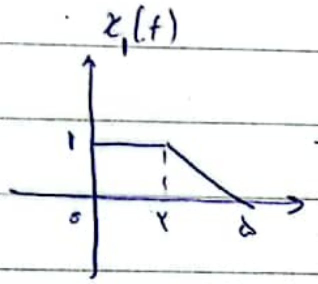
* سیگنال در صورت سوال اندیس K بوده که به اشتباه n نوشته شده.
در این صورت دوره تناوب ۴ است.

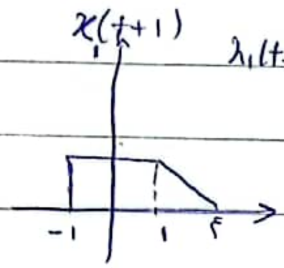
$$x(t) \xrightarrow{t \to t+1} x(t+1) \xrightarrow{t \to -t} x(-t+1)$$
$$\xrightarrow{t \to 3t} x(-3t+1)$$

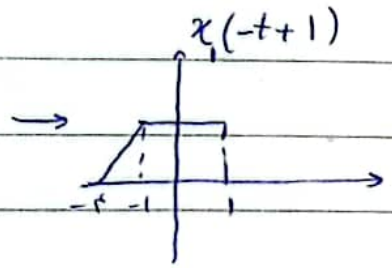
با توجه به $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ ، اندازه‌ی ضربه با تغییر مقیاس ، برابر ۱ می‌شود

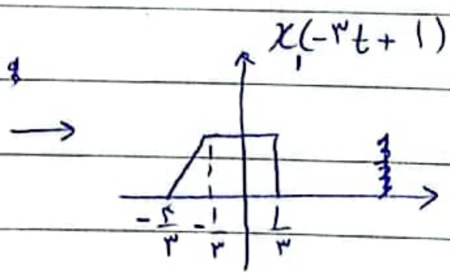
$$3\delta(t+4) \xrightarrow{t \to -3t+1} 3\delta(-3t+1+4) = 3\delta(-3t+5)$$
$$= 3\delta\left(-3\left(t-\frac{5}{3}\right)\right) = \delta\left(t-\frac{5}{3}\right)$$

ابتدا شکل را بدون δ در نظر بگیریم $x_1(t)$

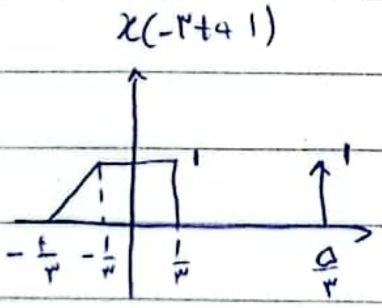


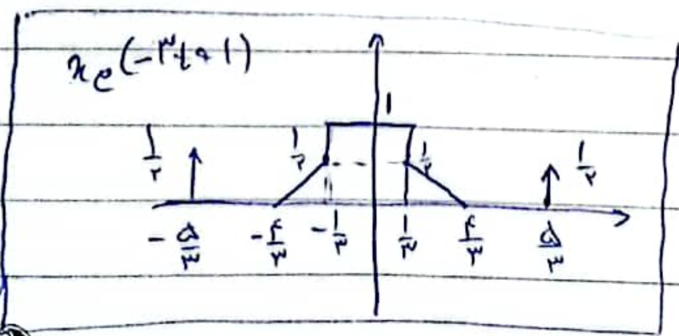






حال تابع $\delta(t-\frac{5}{3})$ را به شکل بالا اضافه می‌کنیم





۳_

الف)

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{2}(t)\,dt = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2} \times \Delta = \frac{1}{\Delta} \underset{\Delta \to 0}{=} \infty$$

ب)

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n-2m|}$$

$x[n]$ سیگنالی متناوب با دوره تناوب $N=2$ است.

پس انرژی سیگنال $x[n]$ ، بی‌نهایت است. برای محاسبه‌ی توان، توان آن را در یک دوره تناوب محاسبه می‌کنیم.

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n-2m|} = \dots + 2^{-|n+4|} + 2^{-|n+2|} + 2^{-|n|} + 2^{-|n-2|} + \dots$$

یک دوره تناوب

$$= \dots + 2^{-(n+4)} + 2^{-(n+2)} + 2^{-n} + 2^{n-2} + 2^{n-4} + \dots \quad , \ 0 \le n \le 1$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{-(n-2m)} + \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{(n-2m)} \quad , \ 0 \le n \le 1$$

$$= 2^{-n} \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{2m} + 2^{n} \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-2m}$$

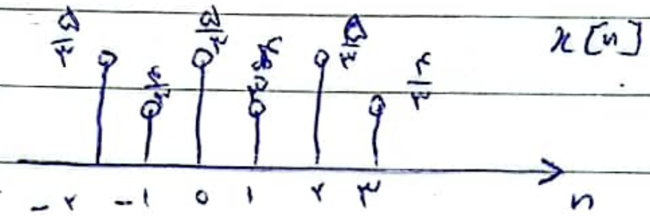
$$= 2^{-n} \sum_{m=-\infty}^{0} 4^{m} + 2^{n} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{m} \quad , \ 0 \le n \le 1$$

تصاعد هندسی :

$$x[n] = ۲^{-n}\,\frac{۴^{-\infty} - ۴^{۰+۱}}{۱-۴} + ۲^{n}\,\frac{\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱} - \left(\frac{۱}{۴}\right)^{+\infty+۱}}{۱-\frac{۱}{۴}}$$

$$= \frac{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n} + \frac{۱}{۳}(۲)^{n} \quad , \quad ۰ \leq n \leq ۱$$

پس $x[۰] = \frac{۵}{۳}$ ، $x[۱] = \frac{۴}{۳}$ $\qquad N = ۲$



$$P_\infty = P_N = \frac{۱}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^{۲} = \frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{۱} |x[n]|^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(|x[۰]|^{۲} + |x[۱]|^{۲}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲۵}{۹} + \frac{۱۶}{۹}\right) = \boxed{\frac{۴۱}{۱۸}}$$

ج)

$$x(t) = e^{j(۲t+\frac{\pi}{۴})} \qquad |x(t)| = 1$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^{۲}\, dt = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{۲T} |x(t)|\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{۲T} \int_{-T}^{T} 1\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{۲T}{۲T} = 1$$

د) پایا است ، بررسی کنیم انرژی سیگنال محدود است یا خیر

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|t|^3)^2} dt$$

$$= \underbrace{2\int_0^1 \frac{1}{(1+|t|^3)^2} dt}_{< 2\int_0^1 (1) dt} + \underbrace{2\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+|t|^3)^2} dt}_{< 2\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^6}\right) dt}$$

$$\rightarrow E_\infty < 2 + 2\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^6}\right) dt = 2 + 2\int_1^{+\infty} t^{-6} dt$$

$$= 2 + 2 \left.\frac{t^{-5}}{-5}\right|_1^{+\infty} < \infty \rightarrow$$ سیگنال انرژی است.

۴-

A) $e^{-t}\delta'(t) = \delta'(t) + \delta(t)$

$e^{-t}\delta(t) = e^{-(۰)}\delta(t) = \delta(t)$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} \left[e^{-t}\delta(t)\right]' = \left[\delta(t)\right]'$

$\rightarrow -e^{-t}\delta(t) + e^{-t}\delta'(t) = \delta'(t)$

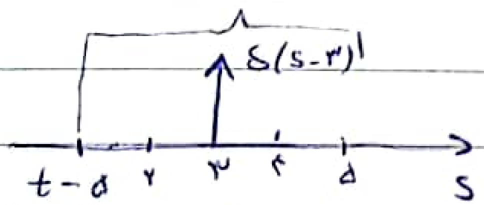
$\rightarrow -e^{-۰}\delta(t) + e^{-t}\delta'(t) = \delta'(t)$

$\rightarrow -\delta(t) + e^{-t}\delta'(t) = \delta'(t)$

$\rightarrow \boxed{e^{-t}\delta'(t) = \delta'(t) + \delta(t)}$

B) $\int_{t-۵}^{۵} s^{۲}\,\delta(-۲(s-۳))\,ds = \int_{t-۵}^{۵} s^{۲}\,\frac{۱}{۲}\,\delta(s-۳)\,ds$

$= \frac{۹}{۲}\int_{t-۵}^{۵} \delta(s-۳)\,ds$



$t-۵ < ۳ \rightarrow ۸-t > ۰$

با ترسیم شکل داریم:

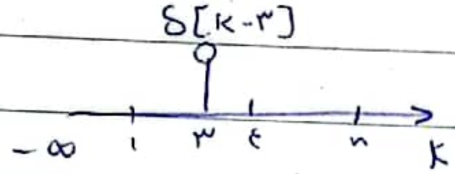
$\frac{۹}{۲}\int_{t-۵}^{۵} \delta(s-۳)\,ds = \frac{۹}{۲}\begin{cases} ۱ & ۸-t>۰ \\ ۰ & o.w. \end{cases}$

$= \frac{۹}{۲}\,u(۸-t)$

c)

$$\sum_{k=-\infty}^{n} ۲^{k}\,\delta[۳-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} ۲^{k}\,\delta[k-۳]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} ۲^{۳}\,\delta[k-۳] = ۸\sum_{-\infty}^{n} \delta[k-۳]$$



با توجه به شکل:

$$۸\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k-۳] = ۸\begin{cases} ۱, & n \geq ۳ \\ ۰, & o.w \end{cases}$$

$$= ۸\begin{cases} ۱, & n-۳ \geq ۰ \\ ۰, & o.w \end{cases} = ۸\,u[n-۳]$$

۵-

a) $Re\{x(t)\}$

غیرخطی

$$Re\{jx(t)\} \neq jRe\{x(t)\}$$

b)
$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{x^3(t+1)}{x(t)} & x(t)\neq 0\\ 1 & x(t)=0\end{cases}$$

$$T\{x_1(t)\}=\begin{cases}\dfrac{x_1^3(t+1)}{x_1(t)} & x_1(t)\neq 0\\ 1 & x_1(t)=0\end{cases}$$

غیرخطی

$$T\{x_2(t)\}=\begin{cases}\dfrac{x_2^3(t+1)}{x_2(t)} & x_2(t)\neq 0\\ 1 & x_2(t)=0\end{cases}$$

$$T\{x_1(t)+x_2(t)\}=\begin{cases}\dfrac{[x_1(t+1)+x_2(t+1)]^3}{x_1(t)+x_2(t)} & x_1+x_2\neq 0\\ & x_1+x_2=0\end{cases}$$

$$\neq T\{x_1(t)\}+T\{x_2(t)\}$$

c) $\cos^2(t-\frac{\pi}{3})\,x^2(t)$

بدون حافظه

زیرا خروجی در هر لحظه t_0 به ورودی در همان لحظه بستگی دارد.

d) $\dfrac{dx(t)}{dt}$

بررسی علی بودن:

$$y(t)=x'(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}$$

چون Δ هم به 0^+ و هم به 0^- میل می‌کند، غیرعلی است

برای پایداری :

مثلاً $x(t) = u(t) \longrightarrow y(t) = \delta(t)$

پس سیستم ناپایدار است.

e) $y[n] = \begin{cases} n & n < x[-n] \\ x[n] & n > x[-n] \end{cases}$

واضح است که خروجی در لحظات $n<0$ ، به ورودی در $n>0$ بستگی دارد و بنابراین غیر علی است.

f) $y[n] = \sum_{-\infty}^{n-1} x[k]\delta[k+2]$

$\cancel{y[n] = \sum_{-\infty}^{n-1} x[k]}$

$= x[-2] \sum_{k=-\infty}^{n-1} \delta[k+2] = x[-2]u[n+1]$

$= \begin{cases} x[-2], & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$

سیستم علی است.

g) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha^2} x(\alpha - t)\, d\alpha$

$$T(x(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha^2} x(\alpha - t - t_0)\, d\alpha$$

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-\alpha^2} x(\alpha - (t-t_0))\, d\alpha$$

$\rightarrow T(x(t-t_0)) \neq y(t-t_0)$ تغییرپذیر با زمان

Sarv

$$h)\quad y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)\geq t \\ x(t)-1 & x(t)<t \end{cases}$$

شرط‌ها، همه‌ی زمان‌ها را پوشانده و شامل اند. سعی می‌کنیم ورودی را
برحسب خروجی بنویسیم:

$$\begin{cases} x(t)=y(t) & y(t)\geq 1 \\ x(t)=y(t)+1 & y(t)+1<t \end{cases} \longrightarrow x(t)=\begin{cases} y(t) & y(t)\geq t \\ y(t)+1 & y(t)<t-1 \end{cases}$$

چون همپوشانی بین شرط‌ها وجود ندارد و $x(t)$ از روی $y(t)$ بدست می‌آید
(به طور یکتا) پس سیستم وارون‌پذیر است.

$$i)\quad y[n]=\sum_{k=-n}^{n} x[k]=\begin{cases} n=0: & y[0]=x[0] \\ n=1: & y[1]=x[-1]+x[0]+x[1] \\ & \quad =y[0]+x[-1]+x[1] \\ n=2: & y[2]=x[-2]+x[-1]+x[0] \\ & \quad +x[1]+x[2] \\ & \quad =y[1]+x[-2]+x[2] \\ \ldots & \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که نمی‌توان $x[-1]$ و $x[1]$ و $x[2]$ و $x[-2]$ و ... را به طور جداگانه
از روی مقادیر y بدست آورد. پس سیستم وارون‌ناپذیر است.

j) $y(t) = \begin{cases} \dfrac{x^{۲}(t-1)}{t-۳} & t \neq ۳ \\ ۳ & t = ۳ \end{cases}$

فرض در نقطه $t_0 \to ۳$ نامحدود است (اگر x محدود باشد) پس سیستم ناپایدار است.

k) $y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[k]$

فرض کنید $x[n]$ محدود و برابر c باشد. $y[n]$ نامحدود می‌شود

$$\sum_{-\infty}^{n} c = \infty$$

پس سیستم ناپایدار است.