بسمه تعالی

محاسبات عددی

فهرست مطالب

فصل اول دقت صحت و خطاهای مختلف محاسبات

فصل دوم روشهای حل معادلات غیرخطی

فصل سوم روشهای عددی برای محاسبه مشتق توابع

فصل چهارم محاسبه انتگرال توابع به روش عددی

فصل پنجم حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول و خطی به روش عددی

مراجع درسی سه اصلیترین مرجع درسی همان جزوه کلاسی است

مراجع کمکی

1. Applied Numerical Methods with MATLAB
   by: steven chapra (2012)

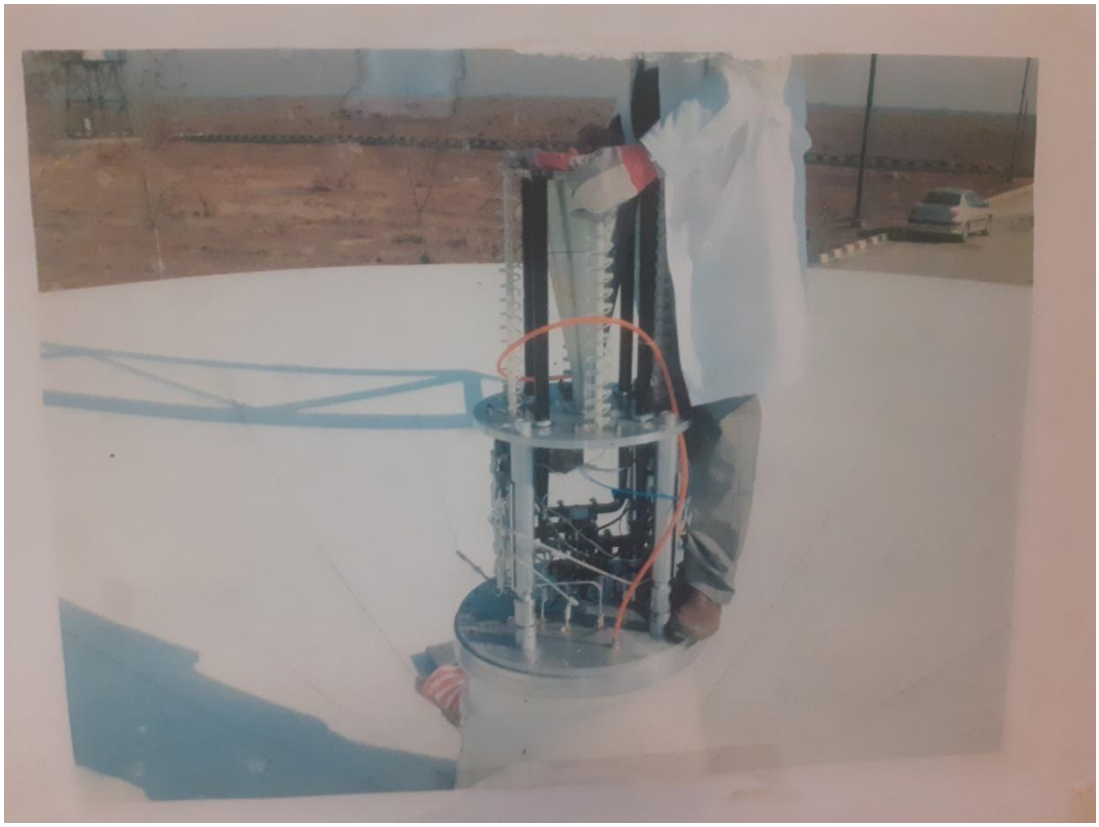
2. Numerical Methods in Engineering with MATLAB
   Jaan kiusalaas (2005)
   pennsylvania state university

3 - محاسبات عددی دکتر مسعود نیکوکار ۱۳۸۴

تکالیف جلسه بعد:

- نصب و تهیه نرم افزار MATLAB برای جلسه بعد — MATLAB 2013 (4.7G)
- تهیه یک ماشین حساب مهندسی مناسب

ماشین حساب قابلیت ذخیره تصاویر و اتصال به کامپیوتر را نداشته باشد



بسمه تعالی
یادمان پرتاب موفقیت آمیز ماهواره ملی نوید علم و صنعت
در پرتو عنایات و الطاف خاص حضرت ولی عصر (عج) و دوران
زعامت حضرت آیت الله العظمی امام خامنه‌ای (مد ظله العالی)،
ماهواره نوید علم و صنعت به عنوان اولین ماهواره ملی بومی دانشگاهی
کشور، توسط مرکز تحقیقات فضایی دانشگاه علم و صنعت ایران
به دست دانشمندان جوان و انقلابی طراحی و ساخته شده و در
۱۰ ایام مبارک دهه فجر پیروزی انقلاب اسلامی مقارن با روز
جمعه چهارم بهمن ماه سال ۱۳۹۰ با حضور ریاست محترم جمهوری
اسلامی ایران، جناب آقای دکتر محمود احمدی نژاد با موفقیت
به فضا پرتاب و با ارسال پیام مبارک با مهدی (عج) رسماً مورد
بهره برداری قرار گرفت.

کاربردهای روشهای عددی در مهندسی برق

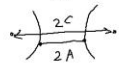
الکترونیک

مخابرات ← طراحی آنتن ها

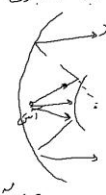
قدرت

کنترل

مهندسی پزشکی



آنتنهایی که برای کاربردهای مخابراتی استفاده می شود



برای محاسبه نقطه بهینه برای قرار گرفتن آنتن در ساختار فوق به معادله ریاضی زیر میرسیم

$$f(A) = 4C_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{C_3}{C_2+A}\right)}{2}\right) - 2C_4 A = 0$$

C_1 و C_2 و C_4 مشخص و اعداد ثابت هستند

که معادله فوق با روش عددی که در فصل دوم ذکر می شود حل شده است

مسئله دوم که در طراحی آنتنهای سیمی با آن مواجه می شویم

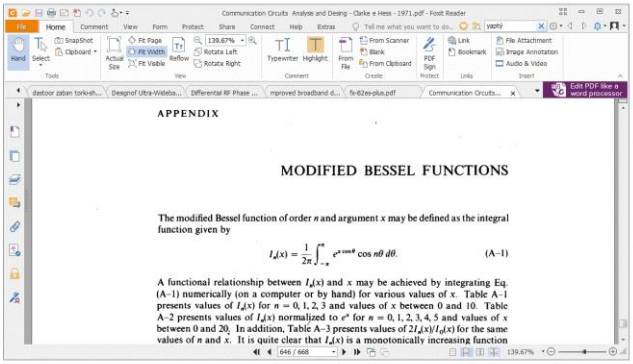
مسئله محاسبه مقاومت ورودی آنتن است که با انتگرال زیر مواجه می شویم

در کتابهای ریاضی انتگرال فوق بصورت $\int_0^{\gamma} \frac{\cos x}{1-x^2}\, dx$

جداول موجود است (برحسب γ)

در درس مدارهای مخابراتی با انتگرال روبرو $\int_0^{\gamma} e^{x\cos\theta}\, d\theta$

مواجه می شویم که بصورت جداول در کتابها موجود نمی باشد



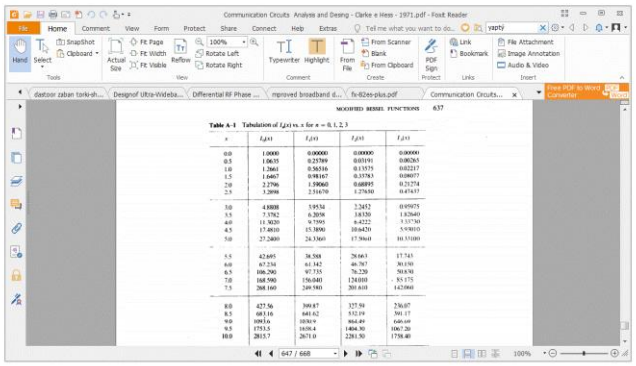
APPENDIX

MODIFIED BESSEL FUNCTIONS

The modified Bessel function of order n and argument x may be defined as the integral function given by

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta. \qquad \text{(A–1)}$$

A functional relationship between $I_n(x)$ and x may be achieved by integrating Eq. (A–1) numerically (on a computer or by hand) for various values of x. Table A–1 presents values of $I_n(x)$ for $n = 0, 1, 2, 3$ and values of x between 0 and 10. Table A–2 presents values of $I_n(x)$ normalized to e^x for $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ and values of x between 0 and 20. In addition, Table A–3 presents values of $2I_n(x)/I_0(x)$ for the same values of n and x. It is quite clear that $I_n(x)$ is a monotonically increasing function

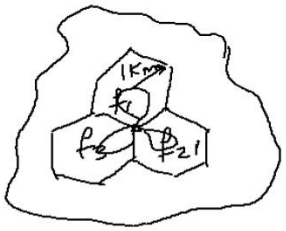


MODIFIED BESSEL FUNCTIONS 637

Table A-1 Tabulation of $I_n(x)$ vs. x for $n = 0, 1, 2, 3$

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$I_2(x)$	$I_3(x)$
0.0	1.0000	0.00000	0.00000	0.00000
0.5	1.0635	0.25789	0.03191	0.00263
1.0	1.2661	0.56516	0.13575	0.02217
1.5	1.6467	0.98167	0.33783	0.09077
2.0	2.2796	1.59060	0.68895	0.21274
2.5	3.2898	2.51670	1.27650	0.47437
3.0	4.8808	3.9534	2.2452	0.95975
3.5	7.3782	6.2058	3.8320	1.82640
4.0	11.3020	9.7595	6.4222	3.33730
4.5	17.4810	15.3890	10.6420	5.97810
5.0	27.2400	24.3360	17.5960	10.37100
5.5	42.695	38.588	28.663	17.743
6.0	67.234	61.342	46.787	30.150
6.5	106.290	97.735	76.220	50.830
7.0	168.590	156.040	124.080	85.175
7.5	268.160	249.580	201.610	142.080
8.0	427.56	399.87	327.91	236.07
8.5	681.16	641.62	532.19	391.17
9.0	1093.6	1030.9	864.49	646.69
9.5	1755.5	1659.4	1404.30	1067.20
10.0	2815.7	2671.0	2281.50	1758.40

کاربرد حل عددی معادلات دیفرانسیل و معادلات شامل مشتق در مهندسی برق در سیستم موبایل در شهر یا ناحیه بصورت زیر است



برای از بین بردن نقاط کور در یک ناحیه لازم است که سطح سیگنال در نقاط مختلف محاسبه شود و دکلهای مخابراتی در محل های مناسبتر نصب شوند برای این منظور باید میدانهای الکتریکی و مغناطیسی محاسبه شوند معادلات حاکم معادلات ماکسول هستند

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \end{cases}$$

$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ $\quad \bar{B} = \mu \bar{H}$

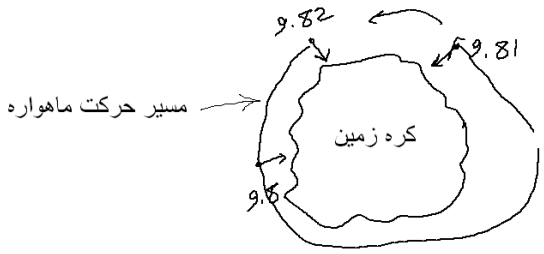
بستگی به جنس محیط دارد

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{a_y} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{a_z}$$

مشتقات جزئی

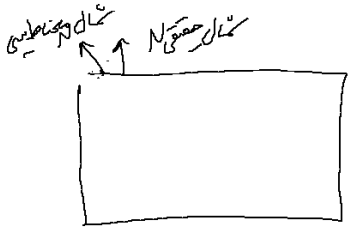
حل تحلیلی این معادلات در محیطهای نامنظم امکان پذیر نیست ولذا باید ناحیه را به نقاط همفاصله تقسیم بندی کرد و بجای مشتق از مشتق های عددی استفاده کنیم و از حل دستگاه معادلات حاصله میدانها محاسبه می شوند

مثالهای دیگر کاربردی مباحث عددی
در رشته‌های عمران و نقشه‌برداری -
ژئودزی ماهواره‌ای :



برای تعیین یک مدار مناسب برای حرکت ماهواره لازم است شتاب جانبه زمین
در نقاط مختلف این مسیر به دقت محاسبه شود

از حل معادلات دیفرانسیل
موجود و با توجه به ساختار
زمین در نقاط مختلف
شتاب جاذبه محاسبه می‌شود
که در آنجا نیز حتماً باید از روشهای عددی استفاده شود



برای تعیین دقیق جهت شمال
مغناطیسی لازم است معادلات
دیفرانسیل بصورت عددی حل شوند

خطائی که در محاسبات با آن مواجه هستیم
در کاربردهای مختلف متفاوت است
مثلاً در موقعیت‌یابی ممکن است دقت 1m یا 1mm مورد نیاز باشد

روش ارزشیابی

میانترم 8 نمره ← معمولاً 50 دقیقه زمان و پنج سؤال طولانی دارد
از متن جزوه و تکالیف کلاسی سؤال پرسیده می‌شود

پایانترم 8 نمره ← ″ ″ ″ ″

تکالیف 2 نمره ← در کلاس مطرح می‌شود

حضور (مفید) در کلاس 2 نمره
غیبت غیرموجه بیش از سه جلسه در طی ترم باعث حذف درس می‌شود

اگر غیبت‌ها از طریق اطلاع‌رسانی حضوری یا ارسال ایمیل اعلام شوند
(از قبل) آن غیبت‌ها موجه لحاظ می‌شوند و درس حذف نمی‌شود
به ازای هر جلسه غیبت 0.75 کم می‌شود (غیرموجه)
(حداکثر دو نمره کم می‌شود)

برای موجه نمودن غیبت ها از طریق ایمیل، حتما نام و نام خانوادگی و شماره گروه درسی و تاریخ انجام غیبت در ایمیل مربوطه درج شود.

sharifi.ieee@gmail.com

در برخی از جلسات از مطالب مطرح شده در آن جلسه یک سؤال پاکوئیز پرسیده می‌شود و پاسخ آن بعنوان حضور مفید لحاظ می‌شود

برای جبران کردن نمرات از دست رفته:

1- مبتدی‌های کلاسی - به ازای تذکر اشتباهات احتمالی جزوه +0.25 لحاظ می‌شود

2- به ازای حل مسائل در کلاس +0.5 لحاظ می‌شود
مبتدی‌های کلاسی به نمرات از دست رفته اولویت دارند و حداکثر دو نمره برای نمره کلاسی در نظر گرفته می‌شود

همراه داشتن ماشین حساب در جلسات الزامی است
باید روش وارد کردن فرمول ریاضی در ماشین حساب را بدانیم

کتاب راهنمای ماشین حسابهای مهندسی مختلف در اینترنت به زبانهای فارسی و انگلیسی موجود است. برای مثال برای دریافت فایل راهنمای ماشین حساب مهندسی مدل fx-82es، با زبان فارسی ، در صفحه www.google.com در قسمت جستجو تایپ بفرمایید : دانلود کتاب راهنمای ماشین حساب مهندسی fx-82es (یا هر ماشین حساب دیگری که در اختیار دارید)

یا تایپ بفرمایید : casio fx-82es user manual pdf download تا فایل کتاب راهنمای مربوطه به زبان انگلیسی را بتوانید از سایتهای مربوطه دریافت نمایید. در قسمت فایلها، کتاب راهنمای این ماشین حساب برای نمونه برای دانشجویان در سایت تهیه شده است که میتوانید دانلود بفرمایید.
روش تنظیم وضعیتهای مختلف محاسباتی در این مدل ماشین حساب در صفحه 12 آمده است و روش وارد کردن یک فرمول و محاسبه آن به ازای مقادیر مختلف داده ها در صفحه 88 این کتاب راهنما ذکر شده است.

مثال مشتق e^{3x} در $x=2$ با دقت 4 رقم اعشار حساب کنید

$f(x) = x^5 + 4x^3 + 5x + 3$

مقدار تابع فوق را در نقاط $x=0.2$ و $x=0.7$ و $x=0.8$ محاسبه کنید
(با دقت چهار رقم)

درصورت یادگیری طرز کار با ماشین حساب در نمره پایانی موفق تر خواهم بود

مروری بر نرم افزار MATLAB

مثال: محاسبه معکوس یک ماتریس

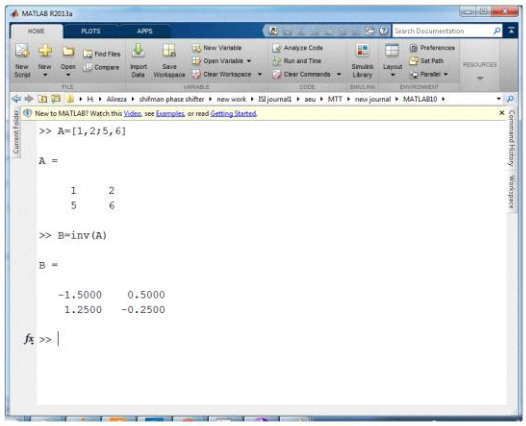
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB با دستورات زیر به سادگی می توان محاسبات فوق را انجام دهیم

```
A = [1,2;5,6]

B = inv(A)
```

بعنوان تمرین معکوس ماتریس روبرو را با نرم افزار MATLAB بدست آورید

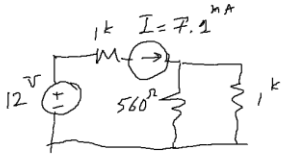
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



فصل اول

تعریف دقت و صحت در محاسبات و در هنگام اندازه‌گیری کمیت ها

مقدمه: فرض کنید در مدار زیر میخواهیم با استفاده از یک آمپر متر جریان مدار را اندازه گیری کنیم.

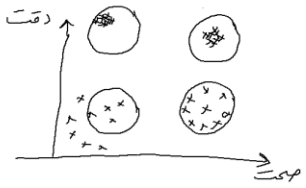


ممکن است در تکرار مجدد
7.3 mA یا 7.5 mA
یا 6.9 mA باشد
یا ممکن است در روزهمه به پاسخ
10 mA برسم

جواب دقیق 8.8 mA با استفاده از فرم اخوار محاسبه شده است
علت اختلاف مقادیر اندازه‌گیری شده با مقدار دقیق ممکن است
موارد زیر باشد
1- اختلاف مقدار مقاومتها با مقدار دقیق که هر مقاومت مقدار
5% خطا نسبت به مقدار واقعی دارد
2- وجود نویز الکتریکی در محیط اندازه‌گیری که باعث جمع شدن ولتاژ اضافی
بر روی مقدار ولتاژ عناصر مدار می شود
3- وجود خطای انسانی

تعریف دقت در محاسبات : (precision)
نشان می دهد که مقدار محاسبه شده در تکرارهای مختلف تا چقدر
به هم نزدیک هستند
تعریف صحت محاسبات (accuracy)
نشان می دهد مقادیر محاسبه شده یا اندازه‌گیری شده تا چه حد به جواب
واقعی نزدیک هستند

فرض کنید میخواهیم با چند تیر به سمت یک هدف فرضی شلیک کنیم. در شکل زیر چهار حالت مختلف مشخص شده اند که محورهای افقی و عمودی به ترتیب صحت و دقت را نشان میدهند. هرچه دقت بالاتر باشد شلیکهای متوالی به هم نزدیکتر هستند و هرچه صحت بالاتر باشد، این شلیکها به مرکز هدف نزدیکتر شده اند.

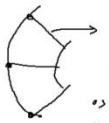


انواع خطاهاکه دردرسمان با آنها برخورد داریم (Error)

خطای ذاتی

خطای بریدن truncation

خطای گرد کردن round off



پایه هائی که برای نگهداری آنتن استفاده می شود جلوی انتشار امواج را گرفته و خطا ایجاد می کنند

یا ناهمواریهای سطوح فلزی ایجاد خطا می کنند

خطائی که در هنگام تبدیل یک مسئله فیزیکی به ریاضی ایجاد می شود خطای ذاتی می نامیم

مثال دیگر: صرفنظر کردن از اثر اصطکاک هوا در هنگام پرتاب یک گلوله

خطای بریدن معمولاً در سری تیلور اتفاق می افتد که از یک سری از جملات که تاثیرشان ناچیز است صرفنظر می کنیم

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \cdots$$

$h = 0.1$, $f(x_0+h) \to 2.1$, $f(x_0) \to 2$, $\frac{h^2}{2} \to 0.01$, $\frac{h^3}{3!} \to 0.001$

چون h^4 و h^5 و h^6 و غیره خیلی کوچک می شوند از این جملات صرفنظر کردیم و ایجاد خطا می کند

خطای بعدی خطای گرد کردن یا رونه کردن است

مثلاً e^3 را با ماشین حساب که حساب می کنیم پاسخ زیر را می دهد

$e^3 = 20.08553692$

$\pi = 3.141592654$

چون معمولاً از دقت دو یا سه رقم اعشار استفاده می شود بجای اعداد فوق از اعداد زیر در محاسبات بهتر استفاده می شود

با دو رقم اعشار $\rightarrow$ $e^3 = 20.09$

$\pi = 3.14$

با سه رقم اعشار $\Rightarrow$ $e^3 = 20.086$

$\pi = 3.142$

اختلاف مقدار دقیق با مقدار تقریبی را خطای رونه کردن می نامیم

شما نیز بعنوان تمرین عبارات فوق را با ماشین حساب محاسبه کرده و از فرایند محاسبات عکس رفته و به اینجانب ارسال نمایید.

قواعد روند کردن اعداد

روند کردن تا دو رقم اعشار:

به رقم سوم نگاه می‌کنیم اگر رقم سوم بزرگتر یا مساوی 5 باشد یک واحد به رقم دوم اضافه می‌شود مثلاً 20.0855 را بصورت 20.09 روند کرده‌ایم

مقدار تقریبی − مقدار واقعی = خطای واقعی

true Error (E_t)

$\rightarrow E_t = 20.0855 - 20.09 = -0.0045$

$|E_t| \leq 0.005 \; (5\times10^{-3})$

حالت تقریب سه رقم اعشار

$E_t = 20.0855 - 20.086$

$= -0.0005$

$|E_t| \leq 5\times10^{-4}$

اگر در هنگام روند کردن از دقت n رقم اعشار استفاده شود $|E_t|$ کوچکتر یا مساوی با $5\times10^{-(n+1)}$ می‌شود

تعریف خطای واقعی در فوق انجام شد

خطای واقعی نسبی را نسبت به پاسخ صحیح یا مقدار دقیق و واقعی می‌سنجیم

$$E_t = \frac{\text{مقدار تقریبی} - \text{مقدار درست}}{\text{مقدار درست}} \times 100\%$$

خطای واقعی نسبی را نسبت به پاسخ صحیح یا مقدار دقیق و واقعی می‌سنجیم

$$E_t = \frac{\text{مقدار تقریبی} - \text{مقدار درست}}{\text{مقدار درست}} \times 100\%$$

در حالتی که از دقت دو رقم اعشار استفاده می‌کردیم

$$\varepsilon_t = \frac{-0.0045}{20.0855} \times 100\% = -0.022\%$$

در حالتی که از دقت سه رقم اعشار استفاده کرده باشیم

$$\varepsilon_t = \frac{-0.0005}{20.0855} \times 100\% = -0.002\%$$

انتشار خطا در چهار عمل اصلی

ضرب - تقسیم - جمع و تفریق

می‌خواهیم ببینیم اگر بجای اعداد دقیق از اعدادی با دقت کمتر مثلاً دو رقم یا سه رقم اعشار استفاده شود در هنگام جمع و تفریق و ضرب و تقسیم حداکثر چقدر خطا ایجاد خواهد شد

$a \pm b$ (جمع و تفریق) → حداکثر خطا = (اندازه اختلاف بین مقدار واقعی و تقریبی)

$$= |E_{t_a}| + |E_{t_b}|$$

ab (ضرب) → کران خطا $\leq |a^*||E_{t_b}| + |b^*||E_{t_a}|$

$\frac{a}{b}$ (تقسیم) → کران خطا $\leq \dfrac{|a^*||E_{t_b}| + |b^*||E_{t_a}|}{|b^*|^2}$

توضیحات : در روابط فوق

$$E_{ta} = a - a^*$$

مقدار تقریبی مقدار درست

$$E_{tb} = b - b^*$$

منظور از خطای واقعی در عملیات جمع بصورت زیر است

$$E_{t(a+b)} = (a+b) - (a^* + b^*)$$

منظور از خطای واقعی در عملیات ضرب

$$E_{t(ab)} = ab - a^* b^*$$

منظور از خطای واقعی عملیات تقسیم

$$E_{t(\frac{a}{b})} = \left(\frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*}\right)$$

در هنگام محاسبه کران خطا همانطور که گفته شد باید اندازه یا قدر مطلق عبارت فوق محاسبه شوند

اثبات رابطه اول مربوط به کران خطای عملیات جمع

$$|E_{t(a+b)}| = |(a+b) - (a^* + b^*)| = |(a - a^*) + (b - b^*)|$$

$$= |E_{ta} + E_{tb}| \leq |E_{ta}| + |E_{tb}|$$

حالت تفریق را هم بعنوان تمرین تحویل دهید

$$|A \pm B| \leq |A| + |B|$$

مثال عددی از محاسبه کران خطا در عملیات جمع دو عدد تقریبی

فرض کنیم $a = 0.2235$ و $b = 0.33721$ باشد و می‌خواهیم بجای اعداد دقیق از اعداد تقریبی با دقت سه رقم اعشار استفاده کنیم

اولاً a^* و b^* را بدست آورید

ثانیاً Eta و Etb را محاسبه کنید

ثالثاً اگر بخواهیم بجای $a+b$ از a^*+b^* استفاده شود حداکثر چقدر خطا ایجاد خواهد شد (با استفاده از رابطه $|Eta|+|Etb|$)

رابعاً اندازه یا قدر مطلق خطای واقعی در هنگام عملیات جمع را بدست آورید و با نتیجه قسمت سوم مقایسه کنید

جواب الف ← $a^* = 0.224$ و $b^* = 0.337$

جواب ب ← $Eta = a - a^* = 0.2235 - 0.224 = -0.0005$

$Etb = b - b^* = 0.33721 - 0.337 = 0.00021$

جواب ج ← کران خطا = حداکثر خطا $\leq |Eta| + |Etb| = 0.00071$

جواب قسمت د ← ابتدا $(a+b)$ را محاسبه می‌کنیم سپس (a^*+b^*) محاسبه می‌شود

$$|Et(a+b)| = |(a+b) - (a^*+b^*)|$$

$$= |0.56071 - 0.561| = 0.00029 \leq 0.00071$$

مقدار دقیق خطای ایجاد شده

حداکثر خطای ممکن در هنگام جمع با استفاده از فرمول

مثال از عملیات ضرب دو عدد

فرض کنیم یک مستطیل با ابعاد

$a = 3.1415$ و $b = 2.7381$

داریم که می خواهیم از دقت دو رقم اعشار

برای تقریب a و b استفاده کرده و

مساحت مستطیل را بدست آوریم

الف) محاسبه a^* و b^*

ب) Eta و Etb

ج) کران خطا با استفاده از

$$|a^*||Etb| + |b^*||Eta|$$

الف) $a^* = 3.14$ و $b^* = 2.74$

ب)

$$Eta = a - a^* = 3.1415 - 3.14 = 0.0015$$

$$Etb = b - b^* = 2.7381 - 2.74 = -0.0019$$

ج)

$$|a^*||Etb| + |b^*||Eta| = 3.14 \times 0.0019 + 2.74 \times 0.0015$$

$$0.010076$$

بعنوان تمرین مثال فوق را در حالتی که $a = 1.4142$ و $b = 3.1415$

و بخواهیم از دو رقم اعشار بجای a و b استفاده کنیم و مساحت مستطیل را بدست

آوریم کران خطا چقدر می شود

کران خطای قوام ← فرض کنیم یک تابع $f(x)$ تک متغیره داشته باشیم که مقدار دقیق آن در نقطه $x_0 = 3.1415$ برابر با 3.7341 شده باشد می‌خواهیم ببینیم اگر بجای x_0 از $x_0^* = 3.14$ استفاده شود مقدار محاسبه شده چقدر با مقدار دقیق اختلاف خواهد داشت

$$\text{کران خطا} = |f(x_0) - f(x_0^*)|$$

$$x_0 - x_0^* = Et_{x_0} \rightarrow x_0 = x_0^* + Et_{x_0}$$

بصورت تقریبی صرفنظر می‌شود

$$f(x_0) = f(x_0^* + \underbrace{Et_{x_0}}_{\text{کوچک}}) = f(x_0^*) + Et_{x_0} f'(x_0^*) + \overbrace{\frac{(Et_{x_0})^2}{2} f''(x_0^*)}^{} + \cdots$$

$$|f(x_0) - f(x_0^*)| \approx |Et_{x_0} f'(x_0^*)| = |Et_{x_0}|\,|f'(x_0^*)|$$

حداکثر خطا در تابع تک متغیره بستگی به مشتق تابع در نقطه تقریبی x_0^* و همچنین به مقدار خطا در هنگام تقریب x_0 دارد

رابطه فوق رابطه تقریبی است چون از جملات مرتبه بالا شامل f'' و f''' و غیره صرفنظر شد

برای حالت تابع دو متغیره رابطه فوق بصورت زیر در می‌آید

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0^*, y_0^*)| \approx |Et_{x_0}|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, y_0^*)\right| + |Et_{y_0}|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0^*, y_0^*)\right|$$

برای حالت تابع سه متغیره

$$|f(x_0, y_0, z_0) - f(x_0^*, y_0^*, z_0^*)| \approx |Et_{x_0}|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, y_0^*, z_0^*)\right| + |Et_{y_0}|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0^*, y_0^*, z_0^*)\right| + |Et_{z_0}|\left|\frac{\partial f}{\partial z}(x_0^*, y_0^*, z_0^*)\right|$$

اثبات رابطه کران خطا در عملیات ضرب دو عدد

$|E_{ta}||b^*| + |E_{tb}||a^*|$

حل: درحالتی که تابع $f(x,y)=xy$ باشد چون مشتقات جزئی مرتبه دوم و بالاتر نسبت به x و y صفر خواهد شد در توسیعهایی که قبلاً استفاده شده، جملات حذف شده، صفر خواهند شد و رابطه بدست آمده قبلی درحالت دو متغیره رابطه کاملاً دقیقی خواهد بود

$$\text{کران خطا} = |E_{t_{x_0}}|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0^*, y_0^*)\right| + |E_{t_{y_0}}|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0^*, y_0^*)\right|$$

$$f(x,y)=xy \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\longrightarrow \text{کران خطا} = |E_{t_{x_0}}||y_0^*| + |E_{t_{y_0}}||x_0^*|$$

درحالت $\left|\frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*}\right|$ قبلاً گفته شد که کران خطا از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\frac{|E_{ta}||b^*| + |E_{tb}||a^*|}{|b^*|^2}$$

این رابطه را با استفاده از رابطه مربوط به کران خطای توابع دو متغیره $f(x,y)=\frac{x}{y}$ اثبات کنید (بعنوان تمرین بررسی شود)

فرض کنیم حجم مخروط از رابطه زیر بدست بیاید و بخواهیم بجای استفاده از اعداد با دقت چهار رقم اعشار از اعداد با دقت دو رقم اعشار در محاسبات استفاده شود. در اینصورت حداکثر چقدر خطا در محاسبه حجم ایجاد خواهد شد؟ (کران خطای محاسبه حجم را بدست آورید)

$$V = 0.3333 \times 3.1415 \times r^2 \times h$$

زمانی که $r = 1.2342$ و $h = 4$ باشد

حل مثال

چون می خواهیم بجای $\overset{x}{0.3333}$

از 0.33 و بجای $\underset{y}{3.1415}$ هم از 3.14

و بجای $\overset{z}{r = 1.2342}$ از 1.23 استفاده شود

تابع V را بصورت سه متغیره برابر با $V = xy^2z \times 4$

با توجه به رابطه ای که برای توابع سه متغیره جلسه گذشته نوشته شد داریم

$$\text{کران خطا} = |E_{tx}|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)\right| + |E_{ty}|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)\right| + |E_{tz}|\left|\frac{\partial f}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)\right|$$

در محاسبات کران خطا از دقت چهار رقم اعشار استفاده می کنیم

$$|E_{tx}| = |x - x^*| = |0.3333 - 0.33| = 0.0033$$

$$|E_{ty}| = |y - y^*| = |3.1415 - 3.14| = 0.0015$$

$$|E_{tz}| = |z - z^*| = |1.2342 - 1.23| = 0.0042$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)\right| = 4 \times y^* z^{*2} = 4 \times 3.14 \times 1.23^2 = 19.0020$$

$$f(x,y,z) = 4xyz^2$$

اگر صورت سؤال دقت محاسبات را مشخص نکند باید از حداکثر دقت استفاده شود.

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 4yz^2 \rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xz^2 \rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*, y^*, z^*} = 4 \times x^* \times z^{*2} = 4 \times 0.33 \times 1.23^2 = 1.9970$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 8xyz \rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x^*, y^*, z^*} = 8x^* y^* z^* = 8 \times 0.33 \times 3.14 \times 1.23 = 10.1962$$

$$\text{حداکثر خطا} = 0.0033 \times 19.0020 + 0.0015 \times 1.9970 + 0.0042 \times 10.1962 = 0.1085$$

در محاسبه حجم مفروض اگر از دقت دو رقم اعشار استفاده شود حداکثر خطا محاسبه حجم 0.1085 می‌شود و اگر بخواهیم خطا کمتر شود باید از اعداد با دقت سه رقم اعشار استفاده کنیم

فصل دوم : حل معادلات غیرخطی با روشهای مختلف عددی

- Bracketing
  - تنصیف (نصف کردن)
  - وتر secant
- open point
  - نیوتن
  - تکرار نقطه ثابت

معادلات غیرخطی

- تک متغیره
  - $e^x = \cos x$
- چند متغیره
  - $e^{x+y} = \cos x + y$
  - $x^2 + y^2 = 5$
  - سیستم معادلات
    - $\begin{cases} x + y x = C_1 y \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$

در این فصل ساده‌ترین حالت معادلات غیرخطی یعنی حالت تک متغیره را بررسی می‌کنیم برای حل مسئله ابتدا باید یک بازه که ریشه در آن واقع است حدس زده شود این کار با توجه به فیزیک مسئله یا از طریق ترسیم تقریبی نمودار تابع انجام می‌شود الگوریتم های مختلفی که برای یافتن ریشه استفاده می‌شوند با نرم‌افزار MATLAB قابل پیاده‌سازی هستند که در این فصل بحث خواهد شد در ابتدای فصل می‌خواهیم ریشه تقریبی تابع $f(x) = \ln x + 2x - 1$ را بدست آوریم

اولین گام برای محاسبه ریشه همانطور که گفته شد یافتن ترسیم تقریبی نمودار است

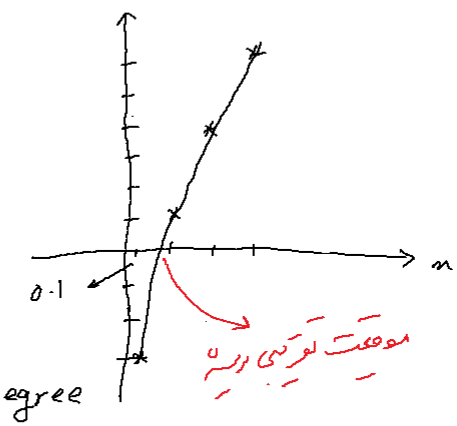
روش اول: بصورت دستی با استفاده از نقطه یابی مقدار تابع را در نقاط مختلف محاسبه کرده و از محل تلاقی تابع با محور xها موقعیت تقریبی ریشه را پیدا می‌کنیم

روش دوم : با استفاده از نرم افزار MATLAB می‌توان تابع را در بازه‌های دلخواه رسم کرد

روش اول: باید رابطه ذکر شده را در ماشین حساب تعریف می وارد کرده و در بازه دلخواه رابطه را محاسبه کنیم فرض کنیم بخواهیم $f(x)=\ln x+2x-1$ را در نقطه ۱- و 2- و 3- محاسبه کنیم مشاهده می شود که پیغام خطا می دهد

چون ln اعداد منفی تعریف نشده است پس بازه جدید را از [1,3] بصورت 3 و 2 و 1 فرض می کنیم

x	$f(x)$
1	1
2	3.7
3	6.1
0.1	-3.1



برای محاسبه توابع مثلثاتی باید به علامت D یا R دقت شود

Radiant degree

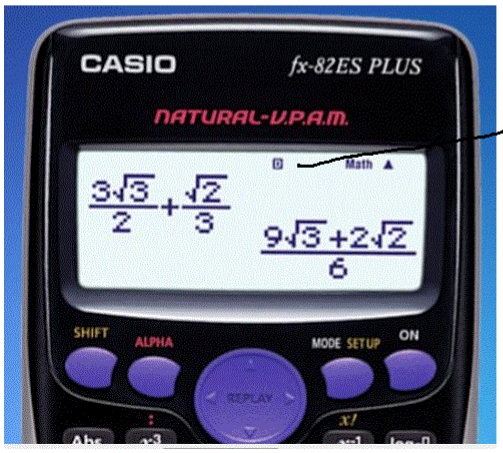
$f(x)=\ln x+2x-1 \rightarrow x=4 \rightarrow f(x)=$

تابع بعدی $f(x)=x^2-\frac{1}{4}\cos x+3$ را در نقطه ۰ و ۱ محاسبه کنیم

البته باید دقت شود که x برحسب (R) رادیان است

x	$f(x)$
0	2.75
1	3.86

بعنوان تمرین مقدار تابع فوق را به ازای مقادیر x=2,3,4 بدست آورید و از مراحل محاسبه توسط ماشین حساب و پاسخ نهایی عکس گرفته و نتیجه را ایمیل فرمایید.



درجه (D)

در این مدل ماشین حساب مهندسی برای تنظیم درجه و رادیان باید به توضیحات صفحه 12 کتاب راهنمای فارسی توجه نمود

روش تغییر تنظیمات

با فشاردادن کلیدهای (SETUP) MODE SHIFT فهرست تنظیمات به نمایش در می آیدو به شما این امکان را میدهد که چگونگی انجام محاسبات و نمایش آن را کنترل نمایید.فهرست تنظیمات در دو پنجره نمایش داده میشود و با کلیدهای ▲ و ▼ قابل تغییر میباشد.

برای فعال کردن گزینه هایی که با رنگ نارنجی بر روی صفحه کلید ماشین حساب فعال شده اند باید از دکمه shift (که آن هم با رنگ نارنجی مشخص شده است) استفاده نمود.

دوستانی که از ماشین حسابهای مهندسی با مدل های بجز مدل فوق استفاده میکنند ، لطفا با دانلود کردن کتاب راهنمای مربوطه به روشی که قبلا گفته شد، طرز تنظیم واحدهای درجه و رادیان را یاد بگیرند تا در جلسه امتحان به مشکل برخورد نکنند.

صفحه 21

روش وارد کردن یک فرمول و محاسبه آن در چند نقطه

در صفحه 88 از جزوه راهنما توضیح داده شده

ابتدا با مراجعه به توضیحات صفحه 12 کتاب راهنمای فارسی باید mode یا وضعیت محاسبات را در حالت جدول یا Table تنظیم کرد

روش تنظیم وضعیت (MODE) ماشین حساب

```
1:COMP   2:STAT
3:TABLE
```

(۱)جهت نمایش فهرست وضعیت محاسبات ،
کلید MODE رافشار دهید.
(۲)جهت انتخاب وضعیت مورد نظرتان ،کلیدِ عددِ متناظر با
آن وضعیت را فشار دهید.
* بعنوان مثال جهت انتخاب وضعیت محاسبات آماری ،کلید 2 را فشار دهید.

در صفحه 88 روش محاسبه تابع $f(x)=x^2+1/2$ در نقاط 1 و 2 و 3 توضیح داده شده که مطالعه شود. روشهای تبدیل مختصات قطبی به کارتزین و بر عکس که کاربرد وسیعی در دروس مدارهای الکتریکی و سیستمهای قدرت دارند را نیز بهتر است فرا بگیرید (استفاده از POL, REC). همچنین روشهای ذخیره یک عدد در یک کاراکتر مثلا $A=2.5$ را با توجه به توضیحات صفحه کتاب راهنمای فارسی و دکمه های STO , RCL مطالعه بفرمایید.

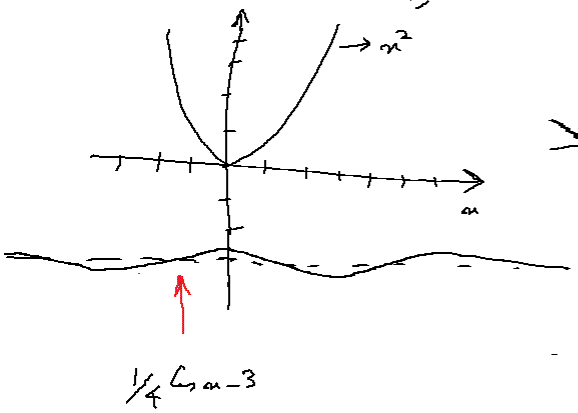
دوستانی که از ماشین حسابهای مهندسی با مدل های بجز مدل فوق استفاده میکنند ، لطفا با دانلود کردن کتاب راهنمای مربوطه به روشی که قبلا گفته شد، طرز استفاده از امکانات فوق در ماشین حسابهای خود را یاد بگیرند تا در جلسه امتحان به مشکل برخورد نکنند.

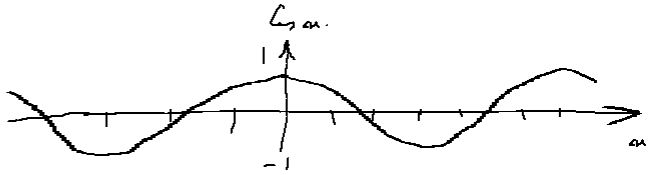
محاسبه $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}\cos x + 3$ در نقاط دیگر

برای پیدا کردن ریشه این تابع با استفاده از روش سعی و خطا لازم است مقدار تابع در چند نقطه مختلف محاسبه شود. چنانچه از جدول روبرو مشخص است، ظاهرا این تابع در نقاط مورد بررسی محور x ها را قطع نمیکند.

x	$f(x)$
-2	7.10
-1	3.86
0	2.75
1	3.86
2	7.10
3	12.25
4	19.16

در مثال فوق برای پیدا کردن ریشه بصورت سعی و خطا زمان زیادی صرف می‌شد و بهتر است نمودار تابع را بصورت دستی و تقریبی رسم کنیم. در روش اول تابع $x^2 - \frac{1}{4}\cos x + 3 = 0$ را بشکل $x^2 = \frac{1}{4}\cos x - 3$ در می‌آوریم سپس دو تابع x^2 و $\frac{1}{4}\cos x - 3$ را جداگانه رسم کرده و محل تلاقی آنها را مشخص کنیم





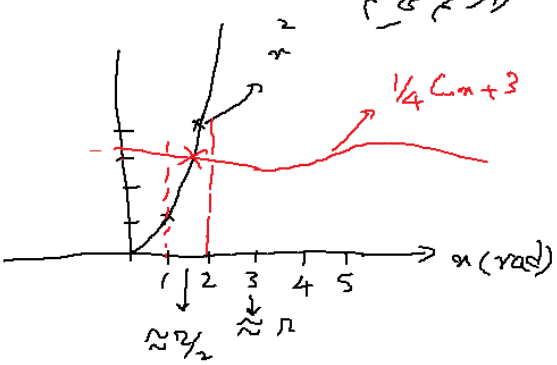
با توجه به شکل ها مشاهده می‌شود که دو تابع تلاقی ندارند و لذا تابع $f(x) = 0$ ریشه ای ندارد.

برای مثال بعدی تابع $f(x)=x^2-\frac{1}{4}\cos x-3$ را بررسی می‌کنیم

x	$f(x)$
0	-3.25
1	-2.14
2	1.1
3	6.25
4	13.16

با توجه به جدول ملاحظه می‌شود که ریشه در بازه [1و2] است

در روش رسم نمودار تابع را بصورت $x^2=\frac{1}{4}\cos x+3$ درآورده و دو منحنی x^2 و $\frac{1}{4}\cos x+3$ را رسم می‌کنیم



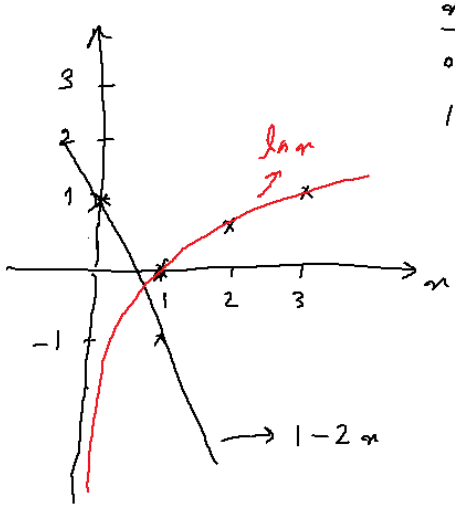
x	x^2	$\frac{1}{4}\cos x+3$
0	0	3.25
1	1	
2	4	
1.5	—	3
3		2.75

ملاحظه می‌شود که ریشه در بازه [1و2] است

مثال بعدی: تابع $f(x) = \ln x + 2x - 1$

در جلسه قبل از طریق محاسبه دستی در نقاط مختلف بررسی شد و مشخص شد که ریشه در بازه $[0,1]$ واقع است اکنون بصورت گرافیکی محل ریشه را مشخص می‌کنیم

تابع $f(x)$ را بشکل $\ln x = 1-2x$ درآورده و دو طرف تابع را رسم می‌کنیم



x	$1-2x$
0	1
1	-1

x	$\ln x$
0	$-\infty$
e	1
1	0
2	0.69

با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که دو منحنی در بازه $[0,1]$ همدیگر را قطع کرده‌اند البته چون $\ln x$ در $x=0$ تعریف نشده است بازه جستجوی ریشه را $[0.1,1]$ فرض می‌کنیم

روش بعدی برای رسم توابع استفاده از نرم افزار MATLAB می باشد

فرض کنیم می خواهیم $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}\cos x - 3$ را در $[-3 , 3]$ رسم کنیم

یا اینکه دو تابع x^2 و $\frac{1}{4}\cos x + 3$ را بصورت جداگانه روی یک نمودار رسم کنیم و سپس تلاقی را مشخص کنیم مراحل رسم تابع بصورت زیر میباشد

① مشخص کردن ورودی و نقطه ابتدائی و انتهائی و فاصله بین نقاط

فرض کنیم ابتدا -3

انتها 3

گام 1

روش اول ← $x = [-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3]$

روش دوم ← $x = -3 : 1 : 3$

ابتدا گام انتها

x بصورت بردار مشخص شد

ماتریس (1x7)

② مشخص کردن تابع خروجی بصورت زیر

$y = x^2 - (1/4) * \cos(x) - 3$

نکته: x بصورت از پیش تعریف شده برحسب رادیان می باشد

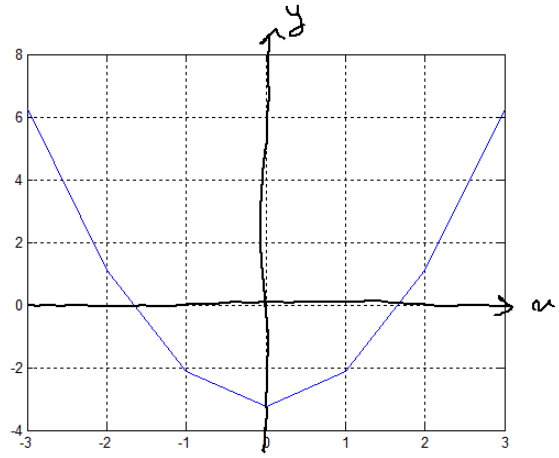
نکته: چون ورودی x یک بردار یا ماتریس 1x7 است اگر از x^2 استفاده شود پیام خطا ظاهر می شود برای برطرف شدن آن از $x.^2$ استفاده می کنیم تا عناصر ماتریس x را بصورت تکی به توان 2 برساند

③ باید y را برحسب x رسم کنیم ←

figure

plot(x,y)

با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که محل ریشه در بازه [1 و 2] می‌باشد



در مرحله بعدی نمودارهای x^2 و $3+\frac{1}{4}\cos x$ را در یک نمودار بصورت جداگانه رسم می‌کنیم

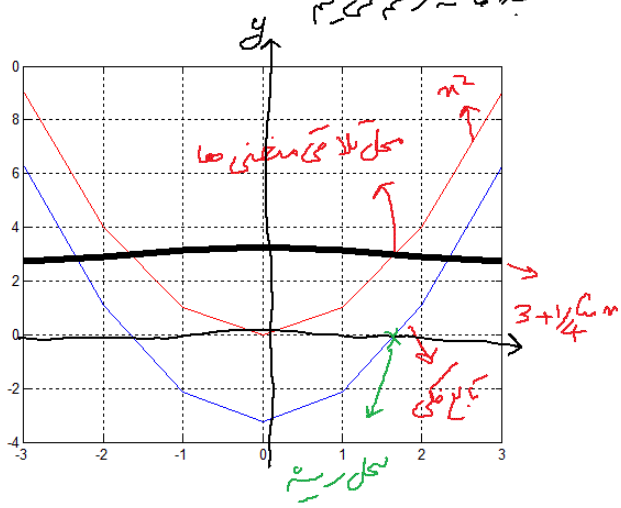
برنامه نوشته شده بصورت m فایل در متلب به شکل زیر میباشد

```
x=-3:1:3
y=x.^2-(1/4)*cos(x)-3
figure
plot(x,y)
grid on
y2=x.^2
y3=3+(1/4)*cos(x)
hold on
plot(x,y2,'-r')
plot(x,y3,'-.k','linewidth',5)
```

آبی

red قرمز

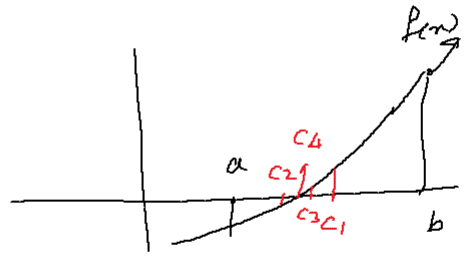
سیاه black



بعنوان تمرین تابع $y=\ln x+2x-1$ را در بازه [0.1 و 10] رسم کنید سپس توابع $\ln x$ و $1-2x$ را هم بصورت جداگانه در همان نمودار رسم کرده و شماره دانشجویی را در متن برنامه بنویسید

روش تنصیف برای پیدا کردن ریشه یک معادله غیرخطی تک متغیره

Bisection
↓ ↓
دو - بخش



① در این روش ابتدا بازه مورد نظر که ریشه در آن واقع شده است $[a,b]$ به برنامه داده می‌شود

و همچنین خود تابع و دقت مورد نظر برای یافتن ریشه باید مشخص شود

$\varepsilon \to ep$ $\quad y$

و بصورت انتخابی و سلیقه‌ای می‌توان حداکثر تعداد تکرارها را نیز مشخص کرد

↓
NMAX

② $c=\frac{a+b}{2}$ محاسبه کرده

③ $f(c)$ را محاسبه می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا $|f(c)|<ep$

اگر با صفر مساوی باشد به ریشه رسیده‌ایم که همان c می‌باشد

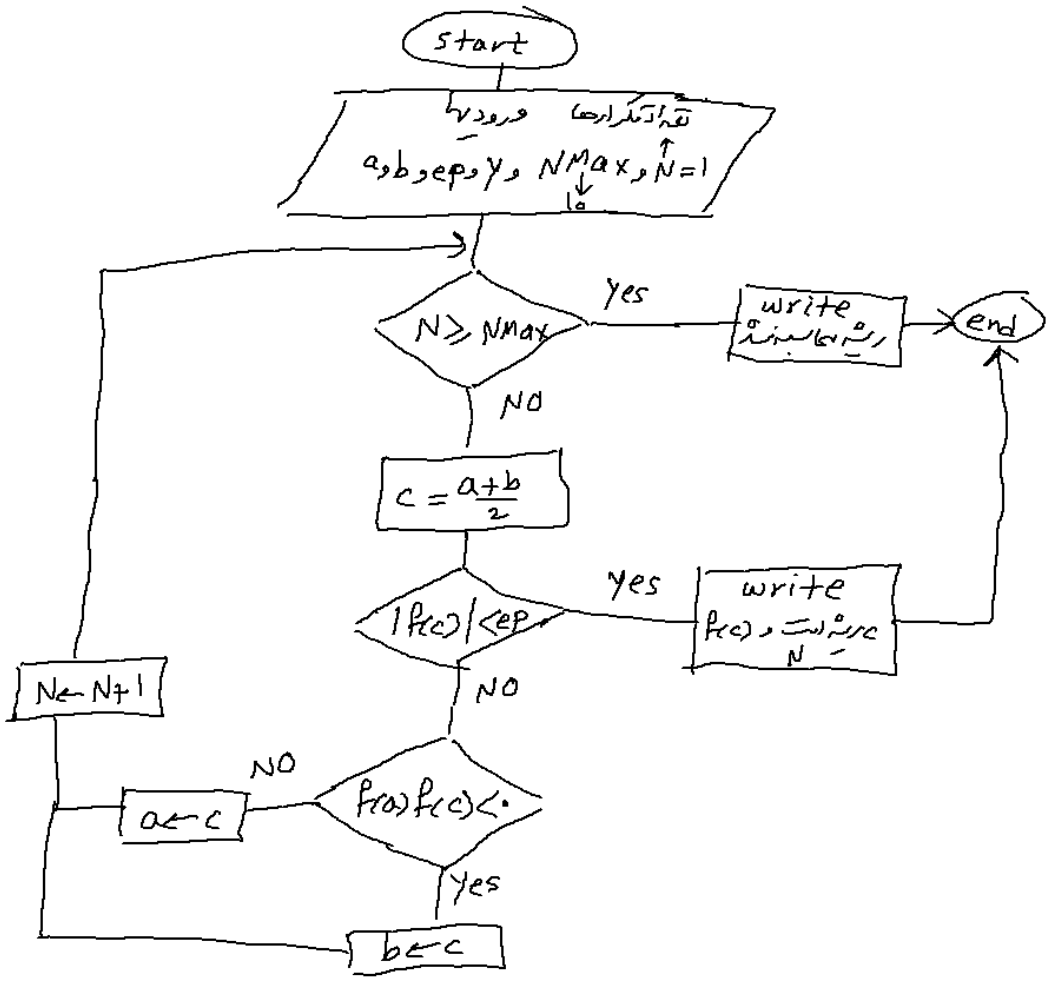
باید در خروجی c را بعنوان ریشه چاپ کند و بصورت اختیاری

می‌توانیم تعداد تکرارها را بنویسیم و مقدار تابع را هم در c محاسبه کرده

و در خروجی برای کاربر بنویسیم

4 اگر با سعی منفی باشد ابتدا باید $f(a)f(c)$ را محاسبه کنیم اگر $f(a)f(c)<0$ باشد ریشه در فاصله $[a,c]$ واقع است پس بازه جدید $[a,c]$ می‌شود و باید بجای $b=c$ و ادامه دهیم در غیر اینصورت ریشه در فاصله $[c,b]$ واقع شده است و $a=c$ جایگذاری می‌شود و باید از ابتدای برنامه ادامه بدهیم تا زمانی که به ریشه برسیم

در ابتدای برنامه بصورت اختیاری می‌توانیم تعداد تکرارهای انجام شده را بررسی کنیم که اگر از NMax بیشتر شد از برنامه خارج شود



فلوچارت روش تنصیف برای پیدا کردن ریشه تابع تک متغیره بشکل فوق است

صفحه 30 بعنوان مثال فرض کنید می خواهیم ریشه $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}\ln x - 3$

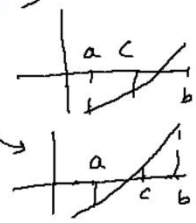
[2و1] با دقت $\varepsilon = 0.01$ مشخص کنیم و $NMax = 10$ باشد

البته از روش محاسبه دستی ریشه را محاسبه کرده سپس با نرم افزار محاسبه می کنیم

نکته: در محاسبه ریشه C=(a+b)/2 از بالاترین دقت استفاده میکنیم . اما در محاسبه f(a), f(b) چون دقت بالا مورد نیاز نیست و تنها علامت این توابع مهم است از دقت دو رقم اعشار استفاده میکنیم. (چون $\varepsilon = 0.01$ دقت دو رقم اعشار دارد)

n	a	b	c	f(a)	f(c)	|f(c)|	علامت f(a)f(c)
1	1	2	1.5	-2.14	-0.77	$0.77 > \varepsilon$	+
2	1.5	2	1.75	-0.77	+0.11	$0.11 > \varepsilon$	−
3	1.5	1.75	1.625	-0.77	-0.35	$0.35 > \varepsilon$	+
4	1.625	1.75	1.6875	-0.35	-0.12	$0.12 > \varepsilon$	+
5	1.6875	1.75	1.71875	-0.12	-0.009	$0.009 < 0.01$	

محاسبات تابع با دقت دو رقم اعشار



به جواب رسیده ایم

از بالاترین دقت

ریشه $c = 1.71875$ می شود

تعداد تکرارها $N = 5$

مقدار تابع -0.009 می شود

دو تمرین از روش تنصیف

ریشه تقریبی معادله $\ln x + 2x - 1 = 0$ را با روش تنصیف با دقت $\varepsilon = 0.01$ بیابید و ریشه و تعداد تکرارها و مقدار تابع در آنها محاسبه شود

(الف) بازه اولیه $[1, 1.5]$

(ب) بازه اولیه $[0.6, 0.7]$ ← سریعتر به جواب می‌رسد

برای هر دو حالت حل شود

ریشه c با دقت 4 رقم اعشار محاسبه شود

مقدار تابع را می‌توان با دقت دو رقم اعشار محاسبه کرد

جواب آخر

$c = 0.6875$

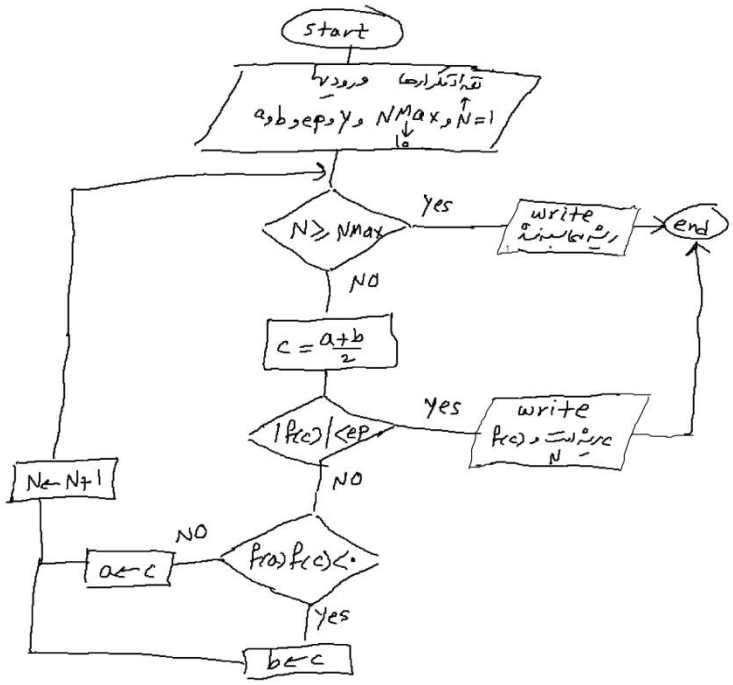
$f(c) = 0.0003$

$n = 3$

در ادامه می‌خواهیم الگوریتم مربوط به روش تنصیف را با نرم افزار MATLAB پیاده سازی کنیم

چنانچه از حل مثال قبلی ملاحظه شد فرآیند یافتن ریشه بصورت دستی با ماشین حساب زمانبر و مشکل است و در صورتی که دقت دلخواه یعنی ε کمتر شود (مثلاً $\varepsilon = 0.001$) یافتن ریشه بصورت دستی مشکلتر خواهد شد بنابراین از نرم افزار MATLAB برای یافتن $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}\cos x - 3$ در بازه $[1, 2]$ و با دقت $\varepsilon = 0.01$ استفاده می‌کنیم و مراحل انجام الگوریتم را با روش دستی مقایسه می‌کنیم در صورت صحیح بودن پاسخها می‌توان $\varepsilon = 0.001$ را به راحتی در نظر گرفته و ریشه دقیق‌تر را بدست آوریم یا می‌توانیم تابع و بازه مورد نظر را در متن برنامه تغییر دهیم و به راحتی ریشه یابی کنیم

```
a = 1
b = 2
ep = 0.01
NMax = 10
N = 1
while (1)        → شروع حلقه
    if N >= NMax
        break
    end
    c = (a+b)/2
    fc = c^2 - (1/4) * cos(c) - 3
    if abs(fc) < ep
        c
        fc   } در خروجی چاپ می‌شوند
        N
        break
    else
        fa = a^2 - (1/4) * cos(a) - 3
        if fa * fc < 0
            b = c
            N = N + 1
        else
            a = c
            N = N + 1
        end
    end
    pause  → از کاربر اجازه می‌گیرد که دوباره حلقه را اجرا کند
end
NMax  → تعداد تکرارها نوشته می‌شود
```



بعنوان تمرین این مسئله را در بازه [1.5 و 1.8] حل کنید

شماره دانشجوئی در متن برنامه نوشته شود و از خروجیها و

متن برنامه پرینت تهیه شود

با شش مرتبه تکرار به جواب می‌رسد

با اجرای برنامه نوشته شده فوق و انجام تغییرات طبق مواردی که در زیر با علامت * مشخص شده اند میتوان به خروجیهای مربوطه رسید.

* در مرحله بعد دقت محاسبات را $\varepsilon=0.001$ فرض می‌کنیم

بازه [1 و 2] فرض می‌شود

بعد از یازده مرتبه تکرار به ریشه 1.7212 رسیده‌ایم

مقدار تابع هم -4×10^{-5} می‌شود

* در مرحله بعد می‌خواهیم تابع مورد نظر و بازه جدید را جایگزین نمائیم

تابع مورد نظر همان $\ln x+2x-1=0$ است و در بازه [0.1 و 1]

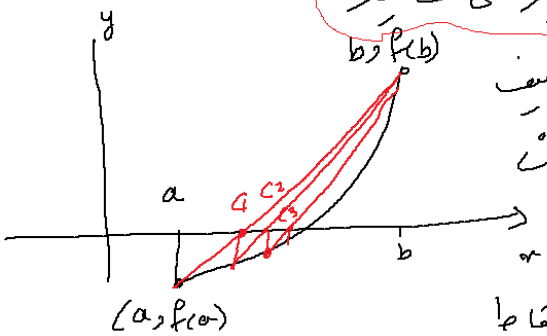
حل می‌کنیم بعد از 8 مرتبه تکرار به پاسخ $c=0.6871$ رسیده‌ایم و

مقدار تابع هم -0.001 شده است

اگر بازه [0.6 و 0.7] فرض شود بعد از سه مرتبه تکرار به ریشه

$c=0.6875$ رسیده است و مقدار تابع هم 3×10^{-4} می‌شود

روش وتر در محاسبه ریشه توابع غیرخطی تک متغیره



این روش مشابه با روش تنصیف است و تنها تفاوت آن، روش محاسبه نقطه c می باشد

c محل تلاقی خطی است که نقاط (a و f(a)) و (b و f(b)) را به هم متصل می کند برای پیدا کردن c باید معادله خط عبوری از نقاط (a و f(a)) و (b و f(b)) را بنویسیم و y را برابر با صفر قرار دهیم تا x بدست آید و x=c می شود

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

اثبات:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(x_1, y_1) = (a, f(a))$$

$$(x_2, y_2) = (b, f(b))$$

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$y = 0 \rightarrow x = \frac{(b-a)(-f(a))}{f(b) - f(a)} + a$$

$$x = \frac{f(a)(a-b) + af(b) - af(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = c \Rightarrow c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

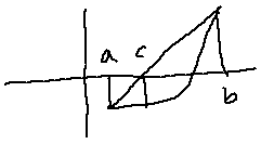
می‌خواهیم روش وتر (secant) را از لحاظ سرعت محاسبات و دقت پیدا کردن ریشه با روش قبلی یعنی bisection مقایسه کنیم. برای این منظور لازم است از یک تابع مشخص که قبلاً با روش bisection حل شده بود در همان بازه قبلی و با همان دقت eps قبلی استفاده شود.

بعنوان مثال فرض کنیم می‌خواهیم ریشه معادله $y = x^2 - \frac{1}{4}\cos x - 3$ را در فاصله [2 و 4] با دقت $\varepsilon = 0.01$ مشخص کنیم و $NMax = 10$ باشد. ابتدا از روش محاسبه دستی ریشه را محاسبه کرده سپس با نرم‌افزار محاسبه می‌کنیم (می‌خواهیم از روش وتر استفاده کنیم)

$y = x^2 - \frac{1}{4}\ln x - 3$

n	a	b	c	f(a) (A)	f(b) (B)	f(c)	|f(c)|	f(a)f(c)
1	1	2	1.6592	-2.1351	1.1040	-0.2251	$>\varepsilon$	+
2	1.6592	2	1.7169	-0.2251	1.1040	-0.0158	$>\varepsilon$	+
3	1.7169	2	1.7209	-0.0158	1.1040	-0.0011	$<\varepsilon$	

به ریشه رسیده ایم



$$c = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

در محاسبات از دقت چهار رقم اعشار استفاده می کنیم

نکته: می توانیم f(a) را در متغیر A دوباره حساب ذخیره کنیم

ابتدا عدد را وارد می کنیم مثلا 9 را وارد کرده و = را می زنیم

shift + Rcl + (-)^A → A = 9

برای بازخوانی ← Rcl + (-)^A → A = 9

همین مثال قبلا با روش تنصیف حل شده بود که در آنجا پس از n=5 مرتبه تکرار به ریشه c=1.71875 رسیدیم و مقدار تابع به ازای c برابر شد با f(c)= -0.009

ریشه نهایی c = 1.7209 و مقدار تابع f(c) = -0.0011 و n = 3 و این روش از روش تنصیف سریعتر به جواب می رسد و چون مقدار تابع f(c) کمتر از 0.009 است این روش دقیقتر به جواب رسیده است

دو تمرین از روش وتر

ریشه تقریبی معادله $\ln x + 2x - 1 = 0$ را با روش سکانت با دقت $\varepsilon = 0.01$ بیابید و ریشه و تعداد تکرارها و مقدار تابع در آنها محاسبه شود و با روش تنصیف مقایسه شود

(الف) بازه اولیه $[0.1 \text{ و } 1]$

(ب) بازه اولیه $[0.6 \text{ و } 0.7]$ ← سریعتر به جواب می‌رسد

برای هر دو حالت حل شود

جواب آخر برای حالت بازه $[0.6 \text{ و } 0.7]$ ← ریشه = 0.6878 و مقدار تابع $f(c) = 0.0012$ و تعداد تکرارها یک مرحله می‌شود

جواب آخر برای حالت بازه $[0.1 \text{ و } 1]$ ← بعد از $n=5$ مرحله به ریشه $c=0.6887$ و $fc = 0.0043$ شده است

مثال محدودی با استفاده از
ماشین حساب بررسی شد و ملاحظه شد
که برای حل دستی چه مشکلاتی وجود دارد
اکنون می خواهم مثال قبلی را با استفاده از
نرم افزار MATLAB حل کرده و پاسخها را مقایسه
کنیم برای این منظور از همان الگوریتم و
فلوچارتی که قبلاً در روش bisection
استفاده می شد استفاده می کنیم
با این تفاوت که در محاسبه c باید از
رابطه زیر استفاده شود

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

در برنامه MATLAB هم متناسب با تغییراتی
که در فلوچارت ایجاد شده است باید
در متن برنامه تغییراتی ایجاد شود

تابع مثال حل شده را بررسی می کنیم

$y = x^2 - \frac{1}{4}\cos x - 3$

در فاصله [1و2] و $ep=0.01$

```
a = 1
b = 2
ep = 0.01
NMax = 10
N = 1
while (1)
    if N >= NMax
        break
    end
    fa = a^2 - (1/4)*cos(a) - 3
    fb = b^2 - (1/4)*cos(b) - 3
    c = (a*fb - b*fa)/(fb - fa)
    fc = c^2 - (1/4)*cos(c) - 3
    if abs(fc) < ep
        c
        fc
        N
        break
    else
        fa = a^2 - (1/4)*cos(a) - 3
        if fa*fc < 0
            b = c
            N = N + 1
        else
            a = c
            N = N + 1
        end
    end
    pause
end
```

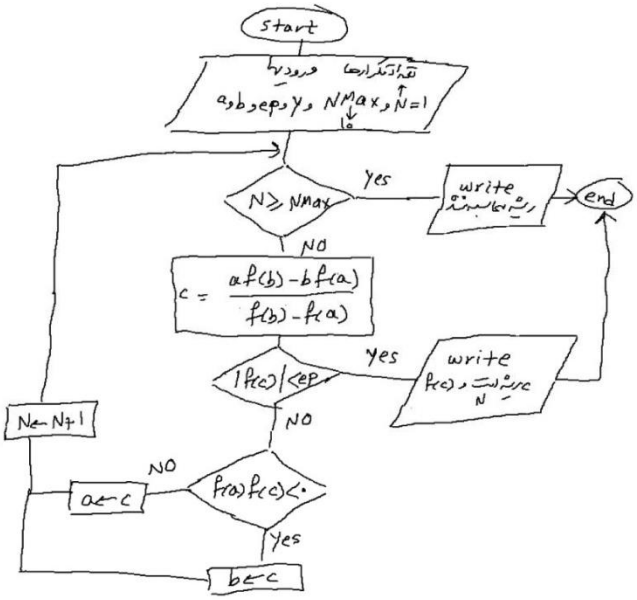
سرفصل حلقه

تغییرات برنامه

در خروجی چاپ می شوند

از کاربر اجازه می گیرد که دوباره حلقه را اجرا کند

NMax → تعداد تکرارها نوشته می شود



با مقایسه پاسخهای برنامه کامپیوتری با جوابهای
روش دستی، درستی برنامه چک می‌شود
اکنون می‌توانیم دقت محاسبات را افزایش
مثلاً برای حالتی که $\varepsilon = 0.0001$ باشد پس از
اجرای برنامه با سخنهای زیر می‌رسیم
پس از $n=4$ مرحله تکرار به ریشه $c=1.7212$
می‌رسد و مقدار تابع $f_c = -7\times10^{-5}$ می‌شود

بعنوان تمرین برنامه فوق را در
حالتی که بازه $[1.6, 1.9]$ باشد نوشته و شماره دانشجوئی هم
در متن برنامه بعنوان کامنت نوشته شود (با دقت
$\varepsilon = 0.001$ انجام شود)

بعد از دو مرحله $(n=2)$
به ریشه $c = 1.7209$ می‌رسد و
مقدار تابع $f(c) = -9\times10^{-4}$ می‌شود

مثال: فرض کنید می‌خواهیم تمرین جلسه قبل را با کامپیوتر حل کنیم

$[0.1, 1]$ و $y = \ln x + 2x - 1$ و $\varepsilon = 0.01$ می‌باشد

در متن برنامه باید تابع و بازه اولیه عوض شوند بنابراین هر جا

f_a یا f_b یا f_c محاسبه شده بود باید تابع جدید وارد شود

روش نیوتن رافسون Newton-Raphson

روش بعدی برای یافتن ریشه توابع غیرخطی تک متغیره

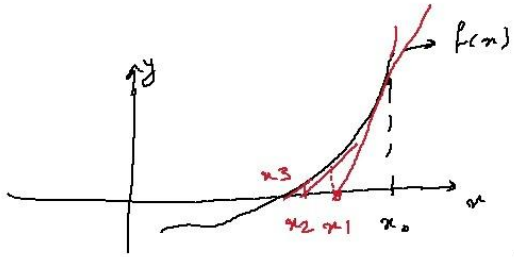
این روش با روش‌های قبلی تفاوت دارد زیرا به بازه اولیه نیاز ندارد و تنها یک نقطه اولیه برای شروع کافی است

تفاوت بعدی ← رابطه تکرار در این روش متفاوت است و نقطه بعدی از رابطه زیر برحسب نقطه قبلی محاسبه می‌شود

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

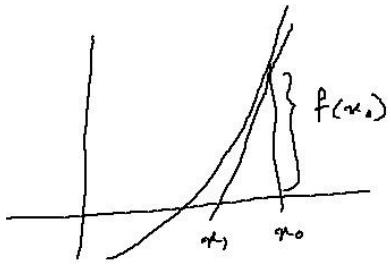
تفاوت بعدی ← در این روش به مشتق تابع هم نیاز داریم

تفاوت بعدی ← معیار توقف این روش متفاوت است $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$



در این روش با شروع از یک نقطه اولیه x_0 یک خط مماس بر منحنی

در این نقطه رسم می‌شود این خط محور x ها را در x_1 قطع می‌کند اگر $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ متوقف می‌شویم و x_1 ریشه تابع است در غیر اینصورت این فرایند را تکرار می‌کنیم تا زمانی که $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ باشد



اثبات رابطه تکرار :

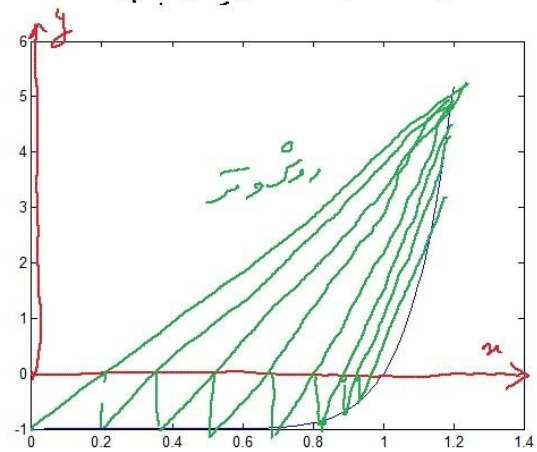
$$\text{شیب خط} = \text{مشتق تابع در } x_0 = f'(x_0)$$

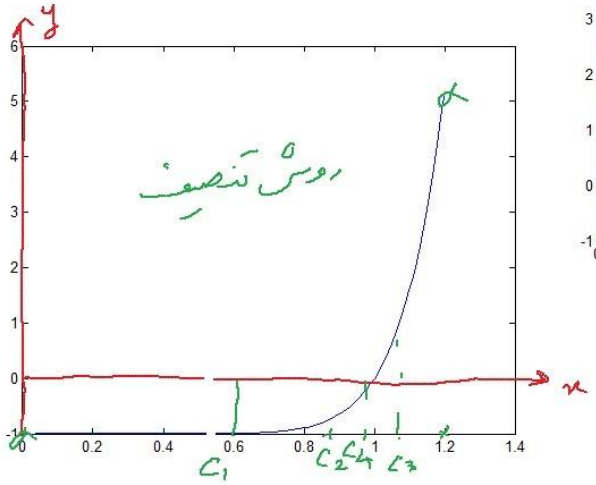
$$= \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \rightarrow x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \longrightarrow$$ به مشتق تابع هم در x_0 نیاز داریم

این روش ممکن است نسبت به روشهای دیگر سریعتر باشد البته قاعده کلی وجود ندارد که کدام روش سریعتر به جواب می‌رسد و بستگی به شکل تابع و انتخاب نقطه اولیه دارد در روشهای وتر و تنصیف هم ممکن است روش تنصیف در برخی موارد سریعتر به جواب برسد مثلاً تابع زیر را در نظر بگیرید

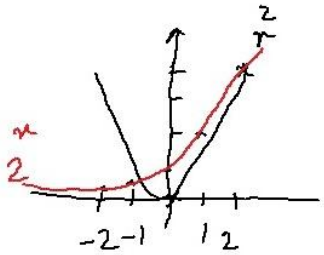
$$f(x) = x^{10} - 1 \qquad [0 , 1.2]$$





مثال: می‌خواهیم با استفاده از روش نیوتن ریشه منفی معادله $(x^2 = 2^x)$ را با دقت دو رقم اعشار بدست آوریم یعنی زمانی که $|x_n - x_{n-1}|$ کوچکتر مساوی $\varepsilon = 5\times10^{-3}$ باشد متوقف شود نقطه اولیه را $x_0 = -0.8$ در نظر می‌گیریم

توضیحات: در این مثال هدف یافتن ریشه منفی معادله $f(x) = 2^x - x^2$ می‌باشد در صورت مسئله نقطه اولیه $x_0 = -0.8$ داده شده اما اگر این نقطه را نداده باشند باید از طریق ترسیم نمودار همانطور که در روشهای تنصیف و وتر توضیح داده شد یک نقطه اولیه در اطراف ریشه حدس بزنیم



$x^2 = 2^x$

x	x^2	2^x
-2	4	1/4
-1	1	1/2
0	0	1
1	1	2
2	4	4

با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که یک ریشه مثبت در 2 و یک ریشه منفی در فاصله [0و1-] وجود دارد البته ممکن است تابع $f(x)$ ریشه‌های دیگری هم داشته باشد که مورد نظر ما نیست در اینجا $x_0 = -0.8$ در نظر گرفته شده است تا به ریشه منفی برسیم

برای حل این مسئله باید مشتق تابع محاسبه شود. درمتن این تابع از رابطه 2^x استفاده شده است . میدانیم که در حالت کلی اگر $u = a^x$ باشد $\frac{du}{dx} = (\ln a)a^x$ میشود

اثبات: فرض کنیم $u = a^x$. اگر از طرفین تساوی ln بگیریم داریم:

$$\ln u = x \ln a \longrightarrow \int \frac{du}{u} = x \ln a$$

اگر از طرفین تساوی مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{du}{u} = dx \ln a \rightarrow \frac{du}{dx} = u \ln a = a^x \ln a$$

$$f'(x) = (\ln 2)2^x - 2x \longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{2^{x_0} - x_0^2}{\ln 2 \times 2^{x_0} - 2x_0}$$

$x_0 = -0.8$

$x_1 = -0.7671 \rightarrow |x_1 - x_0| \overset{?}{\leq} 5 \times 10^{-3} \longrightarrow 0.0329 \nleq 0.005$

محاسبات با دقت چهار رقم انجام می شود

برای محاسبه قدرمطلق از دکمه Abs در ماشین حساب استفاده می شود

$x_2 \rightarrow -0.7667$

در محاسبه x_2 باید x_1 را با دقت چهار رقم اعشار وارد کنیم

$\longrightarrow |x_2 - x_1| = 0.0004 \leq 0.005$

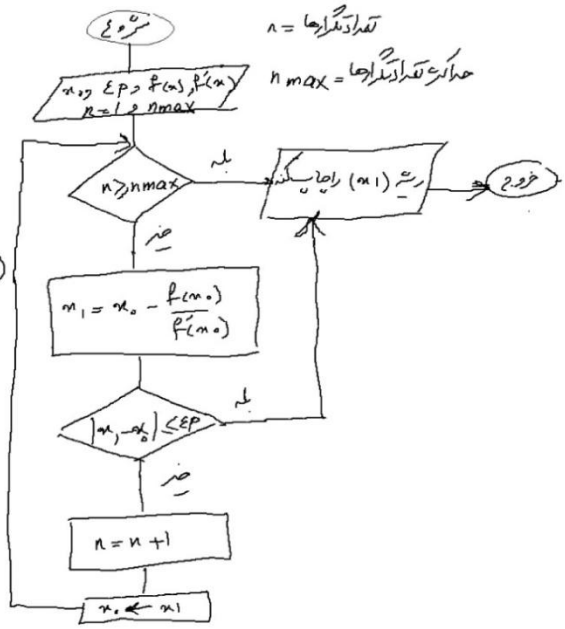
به ریشه رسیده ایم و مقدار ریشه $x_2 = -0.7667$ شده است

تعداد تکرارها دو مرتبه شده است

بعنوان تمرین $x_0 = -0.5$ در نظر بگیریم و مثال فوق را حل کنید

در مرحله بعدی می‌خواهیم با استفاده از نرم افزار MATLAB از روش نیوتن تابع فوق را ریشه یابی کنیم و این روش را برای توابع دیگر و با دقت های بهتر بکار ببریم

```
x0= -0.8
Ep= 0.005
n=1
nmax = 10
while(1)
  if n>= nmax
    break
  end
  x1=x0 -(2^x0 - x0^2)/(log(2)*2^x0 -2*x0)
  if abs(x1-x0)<= Ep
    break
  end
  n=n+1
  x0=x1
end
root = x1
n
abs(x1-x0)
```



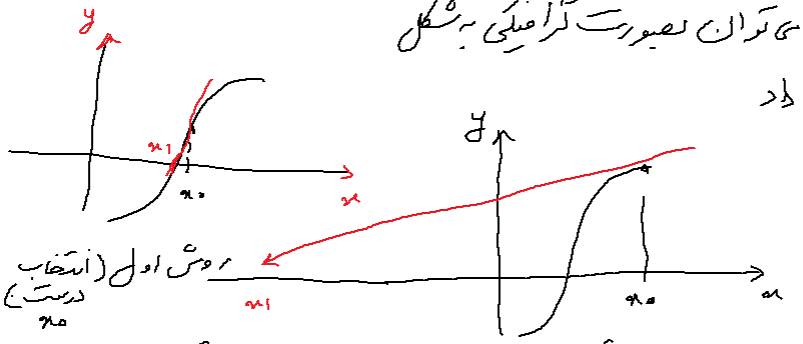
بعنوان تمرین این برنامه را برای حالت $\begin{cases} \varepsilon p = 0.005 \\ x_0 = -0.5 \end{cases}$ اجرا کنید و شماره دانشجویی در متن برنامه نوشته شود. خروجیها و متن برنامه تحویل داده شود

تمرین: با شروع از $x_0=0.8$ ریشه مثبت $f(x)=2^x-x^2$ را با دقت $\varepsilon=0.005$ بیابید

شرایط همگرایی روش نیوتن و نحوه انتخاب نقطه اولیه

با توجه به رابطه تکرار که بصورت $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ می باشد ملاحظه می شود که اگر x_0 در نقطه ای انتخاب شود که مشتق تابع در آنجا صفر یا نزدیک به صفر باشد مخرج رابطه فوق به سمت صفر میل می کند و کل کسر به سمت بینهایت می رود و باعث می شود که از ریشه مورد نظر دور شویم و روش نیوتن همگرا نمی شود

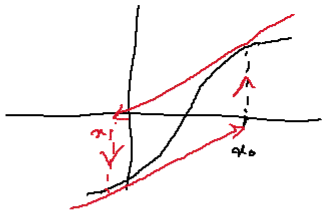
این مسئله را می توان بصورت گرافیکی به شکل روبرو نمایش داد



روش اول (انتخاب درست x_0)

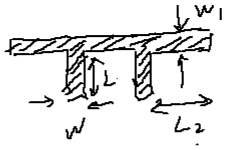
روش دوم (انتخاب نادرست x_0 باعث همگرا نشدن روش نیوتن شده است)

هرچه مشتق تابع یا شیب منحنی در محل x_0 بیشتر باشد این روش سریعتر به جواب می رسد



در اینجا با شروع از x_0 به x_1 می‌رسیم و پس از x_1 دوباره به x_0 رسیده است که این روند تا بینهایت ادامه می‌یابد و هرگز به ریشه نمی‌رسیم و باید از x_0 دیگری استفاده شود

مسئله انتخاب نقطه اولیه برای مسائل بهینه‌سازی توابع خطا در کاربردهای مهندسی خیلی مهم است مثلاً یک فیلتر مایکروویو را در نظر بگیرید

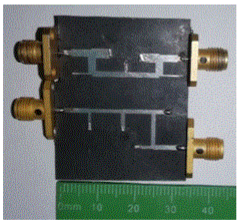


$f(W_1, W_2, L_1, L_2, \ldots)$

برای به دست آوردن مشخصه مناسب باید تابع خطا بهینه‌سازی شود و برای شروع بهینه‌سازی باید از مقدارهای اولیه مناسب استفاده شود

اگر مقادیر اولیه تصادفی انتخاب شوند ممکن است عرض برخی از خطوط خیلی کوچک شود و قابل ساخت نباشد و یا ناپیوستگی‌ها ظاهر شده باشند

باید با توجه به فیزیک مسئله مقادیر اولیه مناسب در نظر گرفته شود تا به جواب برسیم

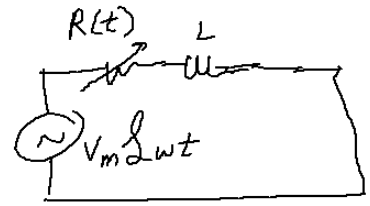


تصویر یک شیفت دهنده فاز مایکروویو در محدوده فرکانسی 18 گیگا هرتز که توسط اینجانب در ترم گذشته ساخته شده و به بهره برداری رسیده است.

فصل سوم روشهای محاسبه مشتق توابع به روشهای عددی

مقدمه: کاربردهای محاسبه مشتق به روش عددی

* برای حل معادلات دیفرانسیل مثلاً فرض کنید می خواهیم جریان مدار زیر را بدست آوریم



$$V_m \sin \omega t = R(t)\, i + L \frac{di}{dt}$$

$$\overset{\times\sqrt{2}}{220} \sin \omega t = (5t^2 + 6t^3 + 7)\, i + 10^{m} \frac{di}{dt}$$

$i(0) = 0$

در لحظات زمانی مختلف می خواهیم معادله فوق را حل کنیم $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

در اینجا برای حل معادله باید بجای $\frac{di}{dt}$ از $\frac{i(t=1) - i(t=0)}{1-0}$ استفاده شود در اینصورت می توانیم جریان در $t=1$ را برحسب $t=0$ بدست آوریم

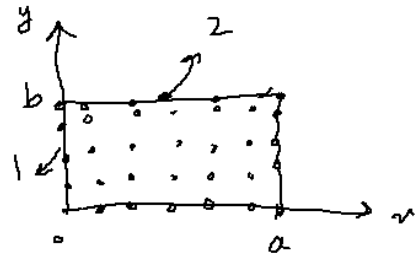
در مثال قبل از روش پیشرو (Forward) برای جایگذاری مشتق استفاده شد در این فصل می خواهیم ببینیم چه روشهای دیگری برای محاسبه مشتق بصورت عددی وجود دارند و چه خطاهائی ایجاد می کنند و کدام روش مناسبتر است برای محاسبه مشتق مرتبه دوم هم مشابه با مشتق مرتبه اول می توان روابطی را بدست آورد

در این فصل تنها توابع تک متغیره بررسی می‌شوند در حالت چند متغیره با مشتقات جزئی برخورد می‌شود مثلاً دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + y^2$$

$$0 \le x \le a$$

$$0 \le y \le b$$



دو شرط مرزی نیاز داریم

$$f(0,y) = 1$$

$$f(x,b) = 2$$

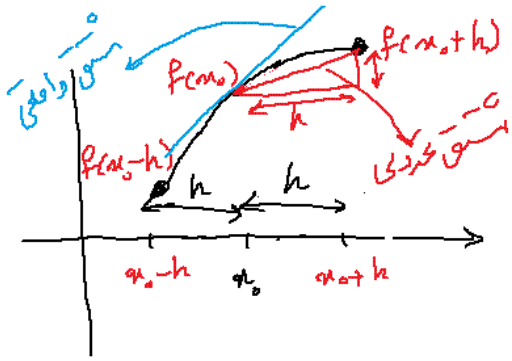
ابتدا باید محور x ها و y ها را تقسیم بندی به نقاط متساوی الفاصله کنیم و در هر کدام از 35 نقطه مورد نظر معادله دیفرانسیل را به معادله تفاضلی تبدیل کرده و یک دستگاه معادلات بدست می‌آید که مجهولات آنها همان مقدار تابع در این 35 نقطه می‌شود با حل دستگاه معادلات فوق مقدار تابع در این ناحیه بدست می‌آید

روشهای محاسبه مشتق به روش عددی

روش پیشرو Forward روش پسرو Backward

روش میانی centered

ابتدا روشهای محاسبه مشتق را بصورت گرافیکی نشان داده و
خطائی که ایجاد می شود را بصورت گرافیکی بررسی می کنیم



مثلاً در روش پیشرو از یک نقطه جلوتر نسبت به نقطه ای که لازم است مشتق در آنجا محاسبه شود استفاده می کنیم

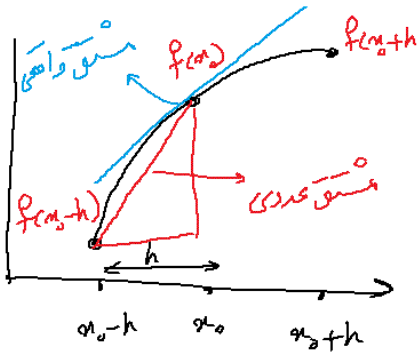
در محاسبه مشتق باید محور x را به نقاط متساوی الفاصله با فاصله h تقسیم بندی کنیم

برای محاسبه مشتق تابع در نقطه x_0 از رابطه زیر استفاده می شود $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

با توجه به شکل ملاحظه شد که مشتق عددی با مشتق واقعی متفاوت می باشد

و خطائی که ایجاد می شود با کاهش h کمتر می شود

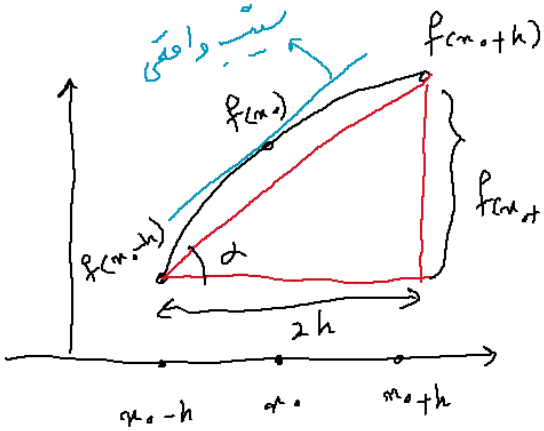
روش پسرو Backward در محاسبه مشتق



در این روش از نقطه قبلی x_0 برای محاسبه مشتق عددی استفاده می شود

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

با توجه به شکل ملاحظه می شود که در اینجا نیز مشتق عددی با مشتق واقعی متفاوت می باشد و خطا وجود دارد که با کاهش h کمتر می شود.



محاسبه مشتق عددی از روش میانی

centered

$f(x_0+h) - f(x_0-h)$

مشتق عددی = شیب خط = $\operatorname{tg}\alpha$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

در این روش خطای محاسبه نسبت به روشهای قبلی کمتر می شود

می خواهیم روابط پیشرو - پسرو - میانی را با
استفاده از سری تیلور بدست آوریم

استخراج رابطه روش پیشرو

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x_0) + \cdots$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x_0) - \cdots = h f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(x_0) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_0) - \cdots$$

محاسبه از روش پیشرو

خطا را تشکیل می دهند

معمولاً h کمتر از یک است ($h=0.1$ ، $h=0.01$) و h^2 خیلی کوچکتر از h می شود
و تاثیر جملات $\frac{h^2}{6} f^{(3)}(x)$ نسبت به جمله $\frac{h}{2} f''(x_0)$ خیلی کمتر است
پس جمله غالب در خطا همان جمله اول است ($\frac{h}{2} f''(x_0)$) و در اصطلاح
می گویند خطا متناسب با h است یا از order با مرتبه h است
و با $O(h)$ نشان می دهند اگر h را نصف کنیم خطا هم نصف می شود
order

رابطه روش پسرو یا backward را با استفاده از سری تیلور بعنوان تمرین بدست
آورید (در آنجا نیز خطا از مرتبه h یا $O(h)$ می شود)

استخراج رابطه روش میانی برای مشتق مرتبه اول

$$(*)\quad f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) + \cdots$$

$$(*)\quad f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) - \cdots$$

رابطه (*) را منفی ضرب کرده و با رابطه بالائی جمع می کنیم

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x_0) + \cdots$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h) - \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x_0) - \cdots}{2h} = \frac{2hf'(x_0)}{2h}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_0) - \cdots$$

رابطه روش میانی

خطا را تشکیل می دهند

خطا $\propto h^2 \equiv O(h^2)$

چون خطا متناسب با h^2 است و h مقداری کمتر از یک دارد معمولاً خطا در روش میانی نسبت به روشهای پیشرو - پسرو کمتر خواهد بود

اگر h نصف شود خطا در روشهای قبلی نصف می شود اما در روش میانی خطا یک چهارم می شود

مثال اول: فرض کنیم $f(x)=e^{3x}$ باشد و $h=0.1$ در اینصورت با روش میانی

مقدار مشتق $f'(2)$ را محاسبه کرده و خطای واقعی را بدست آورید (در محاسبات از

دقت سه رقم اعشار استفاده می‌کنیم)

$$\text{روش عددی} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \rightarrow \frac{f(2.1)-f(1.9)}{2\times 0.1}$$

$$= \frac{e^{6.3}-e^{5.7}}{0.2} = 1228.523$$

$$\text{خطا واقعی} = E_t = \text{مقدار واقعی} - \text{مقدار محاسبه‌شده}$$

$$\text{مقدار واقعی} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x}\Big|_{x=2} = 1210.286 \quad \text{خطای واقعی}$$

$$= 1210.286 - 1228.523 = -18.237$$

مثال دوم: تابع چند جمله‌ای مفروض است $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$

می‌خواهیم مقدار مشتق تابع را در نقطه $x_0=0.5$ محاسبه کرده و از روشهای پیشرو، پسرو و میانی

نیز محاسبه کنیم $(h=.5)$ و می‌خواهیم خطای واقعی نسبی را در روشهای مختلف با هم مقایسه کنیم

در محاسبات از دقت سه رقم اعشار استفاده می‌کنیم

در محاسبه خطای واقعی نسبی باید از رابطه زیر استفاده شود

$$\varepsilon_t = (\text{مقدار واقعی} - \text{مقدار محاسباتی}) / \text{مقدار واقعی} \times 100\%$$

مقدار واقعی مشتق

$$f'(0.5) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25\Big|_{x=0.5}$$

$$= -0.9125 \simeq -0.913$$

محاسبه مشتق از روش پیشرو

$$f'(0.5) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$h = 0.5$
$x_0 = 0.5$ $\rightarrow f'(0.5) = \dfrac{f(1) - f(0.5)}{0.5} = \dfrac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45$

$f(0) = 1.2$
$f(1) = 0.2$
$f(0.5) = 0.925$

خطای واقعی نسبی $\varepsilon_t = \dfrac{-0.913 - (-1.45)}{-0.913} \times 100\%$

$= -58.8\%$

روش پیشرو $\rightarrow f'(x_0) = \dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \dfrac{f(0.5) - f(0)}{0.5}$

$x_0 = 0.5$ $\quad f(0) = 1.2$
$h = 0.5$ $\quad f(0.5) = 0.925$ $\rightarrow f'(0.5) = \dfrac{0.925 - 1.2}{0.5} = -0.55$

خطای واقعی = مقدار تقریبی − مقدار واقعی $= -0.913 - (-0.55) = -0.363$

خطای واقعی نسبی = $\dfrac{\text{خطای واقعی}}{\text{مقدار واقعی}} \times 100\% = \dfrac{-0.363}{-0.913} \times 100\% = 40\%$

محاسبه مشتق از روش میانی $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

$f(1) = 0.2$

$$= \frac{f(1) - f(0)}{2 \times 0.5} = \frac{0.2 - 1.2}{1} = -1$$

خطای واقعی $= -0.913 - (-1) = 0.087$

خطای واقعی نسبی $= \dfrac{0.087}{-0.913} \times 100\% = -9.5\%$

با توجه به اعداد فوق نیز متوجه می‌شویم که روش میانی پاسخهای دقیقتری دارد

در قسمت دوم مسئله با به $h=0.25$ درنظر گرفته شود و از روشهای پیشرو و پسرو و میانی مقدار مشتق و خطای واقعی نسبی و مطلق را بدست آوریم که بعنوان تمرین انجام شود - پاسخهای نهائی:

forward $\rightarrow f'(0.5) = -1.15$, $|\varepsilon_t| = 26.5\%$

backward $\rightarrow f'(0.5) = -0.712 \rightarrow |\varepsilon_t| = 21.9\%$

centered $\rightarrow f'(0.5) = -0.934 \rightarrow |\varepsilon_t| = 2.4\%$

نتیجه گیری: در روشهای پیشرو و پسرو با نصف کردن h خطا تقریباً نصف شده است و در روش میانی خطا یک چهارم (تقریباً) شده است علت آن همانطور که قبلاً گفته شد این است که خطا در روشهای پیشرو - پسرو متناسب با h $O(h)$ بوده اما در روش میانی متناسب با h^2 می باشد $O(h^2)$

محاسبه مشتق مرتبه دوم از روشهای عددی

مشابه با مشتق مرتبه اول پیشرو
خطا از مرتبه h می‌شود

$$\text{forward} \rightarrow f''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2} + O(h)$$

$$\text{backward} \rightarrow f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{h^2} + O(h)$$

مشابه با روش پسرو برای
مشتق مرتبه اول

$$\text{centered} \rightarrow f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + O(h^2)$$

بعنوان نمونه رابطه اول را اثبات می‌کنیم

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2h f'(x_0) + \underbrace{\frac{(2h)^2}{2}}_{2h^2} f''(x_0) + \underbrace{\frac{(2h)^3}{3!}}_{\frac{8h^3}{6}} f^{(3)}(x_0) + \cdots$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x_0) + \cdots$$

از معادلات فوق باید $f'(x_0)$ حذف شود تا $f''(x_0)$ برحسب $f(x_0+2h)$ و $f(x_0+h)$
و $f(x_0)$ بدست آید پس رابطه پایینی را در -2 ضرب می‌کنیم و با رابطه بالا جمع می‌کنیم

$$f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0) - 2f(x_0)}_{-f(x_0)} + \underbrace{2h^2 f''(x_0) - h^2 f''(x_0)}_{h^2 f''(x_0)} + \underbrace{\left(\frac{8h^3}{6} - 2\times\frac{h^3}{6}\right)\times f^{(3)}(x_0)}_{h^3 f^{(3)}(x_0)} + \cdots$$

$$\frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2} - \frac{h^3 f^{(3)}(x_0) + \cdots}{h^2} = \frac{h^2 f''(x_0)}{h^2}$$

$$\rightarrow f''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2} + O(h)$$

بعنوان تمرین رابطه‌های پسرو و میانی را هم برای مشتق مرتبه دوم مشابه با روش
فوق ثابت کنید

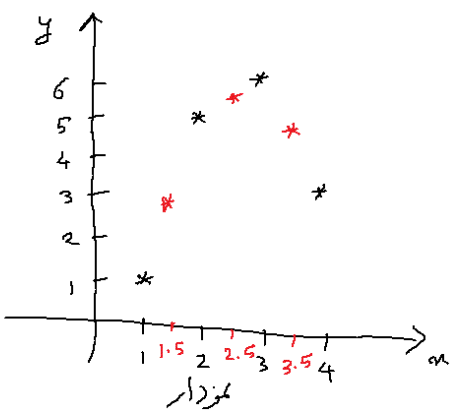
استفاده از نرم‌افزار MATLAB برای مشتق‌گیری

محاسبه تحلیلی به با استفاده از symbolic Toolbox

```
syms x,y
y = x^2+ 3*x^4
pretty(y)
diff(y)
```

$\longrightarrow 2x+12x^3$

محاسبه عددی مشتق برای محاسبه مشتق داده‌های ورودی از دستورهای diff و gradient استفاده می‌شود معمولاً داده‌ها یا بصورت جدول یا بصورت نمودار وارد می‌شوند



نمودار

x	y
1	1
2	5
3	6
4	3

جدول

$A=[1, 5, 6, 3]$ و $\rightarrow$ diff(A) = [4 و 1 و -3] $\rightarrow$ خروجی سه عنصری می‌شود

gradient(A) = [4, 2.5, -1 و -3]

خروجی چهار عنصری می‌شود

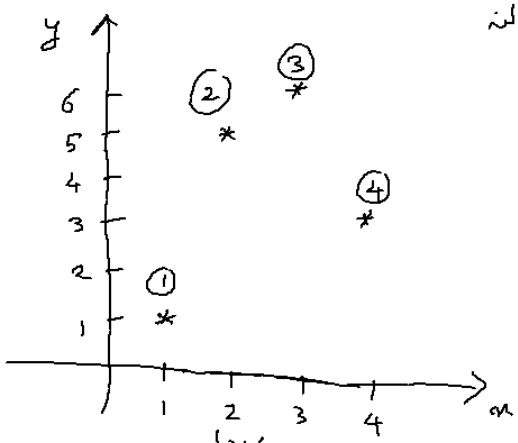
بررسی روشهای محاسبه مشتق در دستورات diff و gradient

دستور diff مشتق را در نقاط مابین داده‌ها (از روش میانی) بدست می‌آورد یعنی در $x_i = 1.5, 2.5, 3.5$ بنابراین

$$f'(1.5) = \frac{f(2)-f(1)}{1} = \frac{5-1}{1} = 4 \qquad f'(2.5) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{6-5}{1} = 1$$

$$f'(3.5) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{3-6}{1} = -3$$

دستور gradient مشتق را درخود نقاط حساب می‌کند



نمودار

در نقطه اول باید از روش پیشرو استفاده کند

$$f'(1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{5-1}{1} = 4$$

در نقطه دوم از روش میانی استفاده می‌کند

$$f'(2) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{6-1}{2} = 2.5$$

در نقطه سوم از روش میانی

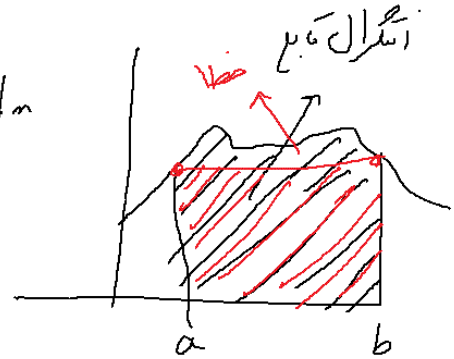
$$f'(3) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{3-5}{2} = -1$$

$$f'(4) = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{3-6}{1} = -3$$

تمرین: بردار $A=[1, 5, -3, 6, 7]$ داده شده است مشتق مرتبه اول را از دستورات diff(A) و gradient(A) بدست آورید

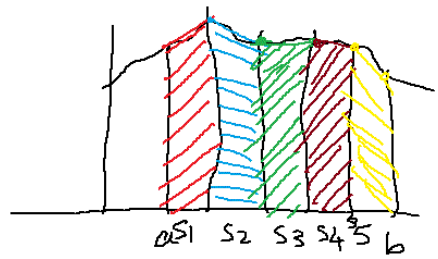
فصل چهارم: روشهای عددی برای محاسبه انتگرال توابع تک متغیره و از نوع معین بررسی می شوند و از لحاظ میزان خطایی که ایجاد می شود با هم مقایسه می شوند

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2}\,dx \qquad \int_{-2}^{2} \frac{\sin x}{x}\,dx$$



روش ذوزنقه ای ساده

روش ذوزنقه ای مرکب

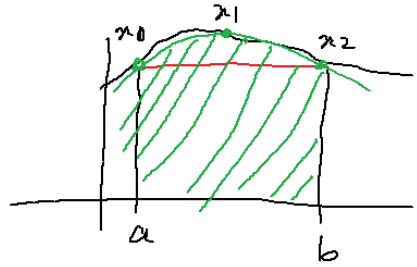


$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

خطا کم می شود (نسبت به ذوزنقه ای ساده)

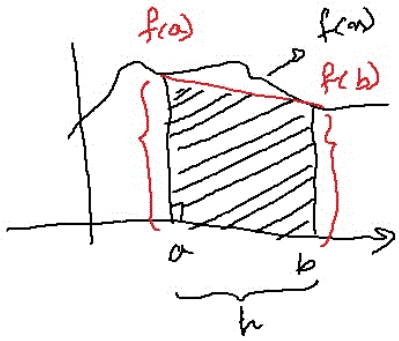
$1/3$, $3/8$ > Simpson's rule روش سیمپسون ساده

$1/3$, $3/8$ > روش سیمپسون مرکب



روش سیمپسون ساده $1/3$ از تابع درجه دوم بجای تابع خطی برای تقریب زدن منحنی استفاده می کند از اطلاعات 3 نقطه برای محاسبه انتگرال استفاده می کند

روش سیمپسون ساده $3/8$ از تابع درجه سوم برای تقریب تابع اصلی استفاده می کند که خطای کمتری را دارد



رابطه انتگرال عددی از روش ذوزنقه ای ساده

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{میانگین دو قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$(b-a)\times\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

برای اثبات رابطه فوق می توانیم تابع $f(x)$ را در فاصله (a,b) بصورت یک خط مستقیم فرض کنیم که از نقاط $(\overset{x_1,\,y_1}{a,\ f(a)})$ و $(\overset{x_2,\,y_2}{b,\ f(b)})$ بگذرد (یعنی از تقریب خطی استفاده کنیم) سپس از تابع بدست آمده در فاصله (a,b) انتگرال گرفته می شود

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \rightarrow y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\rightarrow y=f(a)+\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

$$I=\int_a^b y\,dx \rightarrow \int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx$$

$$f(a)\left[b-a\right]+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_a^b$$

$$f(a)\left[b-a\right]+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\underbrace{\frac{b^2}{2}-ab-\left[\frac{a^2}{2}-a^2\right]}_{\frac{b^2}{2}-ab+\frac{a^2}{2}=\frac{(b-a)^2}{2}}\right]$$

$$-\frac{a^2}{2}$$

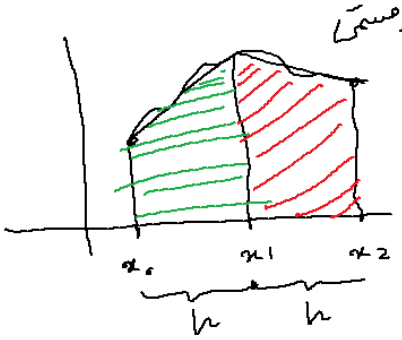
$$f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$f(a)(b-a) + (f(b)-f(a))\frac{(b-a)}{2} = (b-a)\left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2}\right]$$

$$(b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$ ← تکمیل اثبات رابطه ذوزنقه‌ای ساده

رابطه روش ذوزنقه مرکب

حالت دو قسمتی



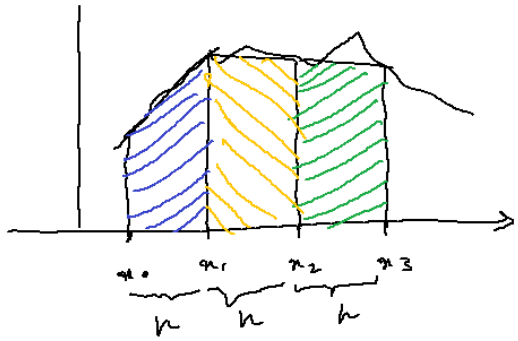
$$I_{کل} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$$

$$I_2 = \frac{h}{2}\left(f(x_2) + f(x_1)\right)$$

$$I_{کل} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\right]$$

حالت سه قسمتی



$$I_{کل} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)\right]$$

مثال عددی : تابع $f(x)$ مفروض است

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

در بازه (0 و 0.8) - از این تابع با روش ذوزنقه ای ساده انتگرال گرفته و خطای واقعی E_t و خطای واقعی نسبی ε_t را بدست آورید

بعنوان تمرین انتگرال تابع فوق را از روش تحلیلی با دقت 6 رقم اعشار بدست آورید : جواب آخر = 1.640533

$a = 0 \rightarrow f(a) = 0.2$

$b = 0.8 \rightarrow f(b) = 0.232$

از دقت 6 رقم استفاده شود

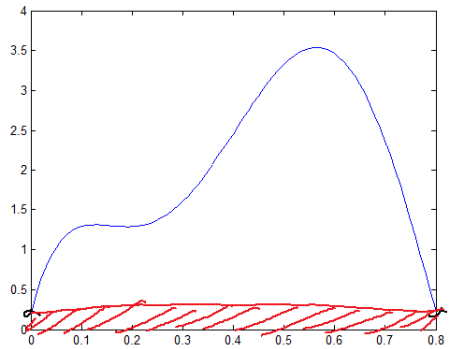
$$I = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a) + f(b)\right) = \frac{0.8}{2} \times (0.2 + 0.232)$$

$$= 0.1728$$

$$E_t = \text{مقدار واقعی} - \text{مقدار تقریبی} = 1.640533 - 0.1728 = 1.467733$$

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{\text{مقدار واقعی}} \times 100\% = \frac{1.467733}{1.640533} \times 100\% = \%89$$

علت خطای زیاد در این روش با توجه به شکل تابع قابل توجیه است

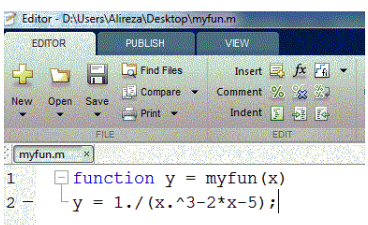


$$\int_0^1 x\,dx = 1/2 \qquad \int_0^1 \left(x + \frac{x^2}{2}\right) dx$$

برای محاسبه انتگرال‌های فوق از نرم افزار MATLAB با روش تحلیلی از دستورات زیر استفاده می‌شود

```
>> syms x
>> int(x+x^2/2,0,1)

ans =

2/3
```

یا میتوانیم ابتدا یک m فایل بنام myfunc.m بصورت زیر ایجاد کنیم و در یک دایرکتوری ذخیره کنیم سپس زمانی که برنامه در همان دایرکتوری باشد دستور زیر را در محیط کامند بنویسیم.



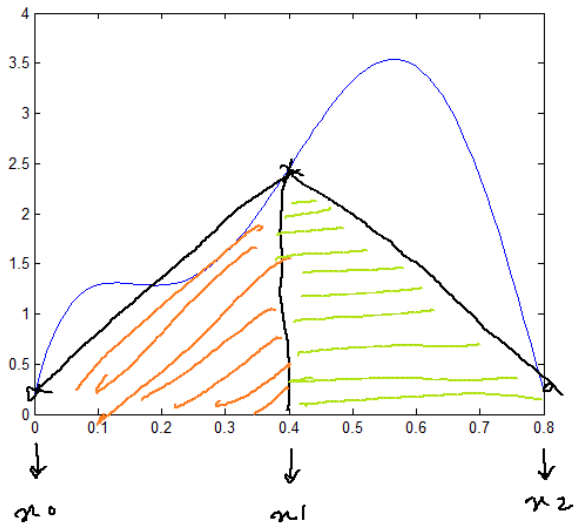

```
>> quad(@myfun,0,2)

ans =

   -0.4605
```

برای محاسبه مشتق تابع که در فصل قبل بحث شد با استفاده از نرم افزار متلب به شکل زیر عمل میکنیم

```
>> syms x
>> f(x) = x^2 -3*x + 2

f(x) =

x^2 - 3*x + 2
```

```
>> g=diff(f)

g(x) =

2*x - 3

>> g(1)

ans =

-1
```

مثال بعدی : استفاده از روش ذوزنقه ای مرکب دو قسمتی برای محاسبه انتگرال تابع قبلی



$$h = x_1 - x_0 = 0.4$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 0.2$$

$$x_1 = 0.4 \rightarrow f(x_1) = 2.456$$

$$x_2 = 0.8 \rightarrow f(x_2) = 0.232$$

$$I = \frac{0.4}{2}\left[0.2 + 2 \times 2.456 + 0.232\right] = 1.0688$$

$$E_t = 1.640533 - 1.0688 = 0.57173$$

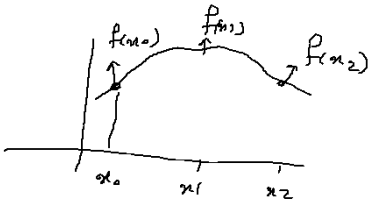
$$\varepsilon_t = 34.9\,\%$$

استفاده از قواعد سیمپسون Simpson در محاسبه انتگرال معین

همانطور که گفته شد برای افزایش دقت انتگرالگیری می‌توان بجای تقریب خطی تابع اصلی در فاصله (a,b) که در روش ذوزنقه استفاده می‌شد از توابع با مرتبه بالاتر مثل تابع درجه دوم یا سوم استفاده کرد در این روش ما به ابتدا تابع اصلی را در فاصله (a,b) با یک تابع درجه دوم تقریب بزنیم (در روش 1/3 سیمپسون) سپس از این تابع انتگرال بگیریم

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

A و B و C مجهول هستند



$$\begin{cases} f(x_0) = Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ f(x_1) = Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ f(x_2) = Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{cases}$$

برای بدست آوردن A و B و C می‌توانیم مشابه زیر از MATLAB استفاده کنیم

$$\begin{cases} 1 = 2A + 3B + C \\ 2 = A + 6B + 5C \\ -5 = -A + 7B + 9C \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}^{-1}}_{M^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}}_{\times\ N} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.3 \\ 7.6 \\ -7.3 \end{bmatrix}$$

پس از محاسبه A و B و C از رابطه $y = Ax^2 + Bx + C$ در فاصله (a,b) باید انتگرال گرفته شود

$$I = \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

h فاصله بین (x_0, x_1) یا (x_1, x_2) می‌باشد $h = \frac{(b-a)}{2}$

علت اینکه قاعده سیمپسون 1/3 نامگذاری شده به دلیل ضریب 1/3 در رابطه فوق می‌باشد

در برخی موارد این رابطه $I = \frac{(b-a)}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$ بشکل روبرو هم نوشته می‌شود

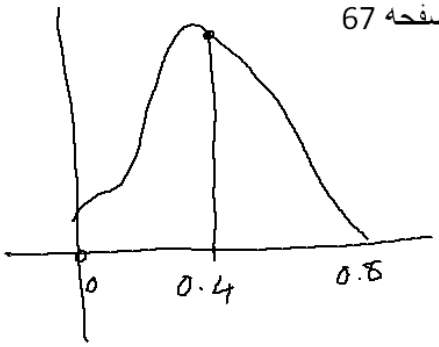
مثال عددی از روش سیمپسون 1/3

تابع زیر مفروض است

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

از این رابطه در فاصله (0 و 0.8) انتگرال بگیرید (با روش سیمپسون 1/3)

خطای واقعی و خطای واقعی نسبی را بدست آورید



$$h = \frac{b-a}{2} = 0.4$$

$$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 0.2$$

$$x_1 = 0.4 \rightarrow f(x_1) = 2.456$$

$$x_2 = 0.8 \rightarrow f(x_2) = 0.232$$

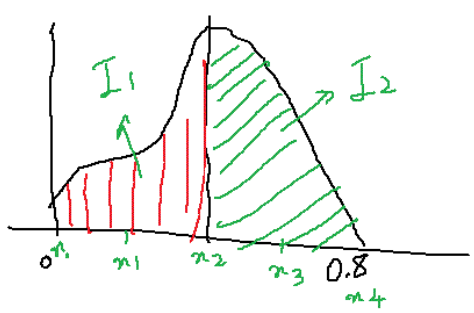
$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] = \frac{0.4}{3}\left[0.2 + 4 \times 2.456 + 0.232\right]$$

$$= 1.367467 \longrightarrow E_t = 1.640533 - 1.367467 = 0.273067$$

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{\text{مقدار واقعی}} \times 100\% = \frac{0.273067}{1.640533} \times 100\% = 16.6\%$$

قاعده سیمپسون 1/3 بصورت مرکب هم قابل استفاده است (مشابه با قاعده ذوزنقه‌ای مرکب)

بعنوان تمرین قاعده سیمپسون 1/3 دو قسمتی را برای حل انتگرال مثال فوق استفاده کنید

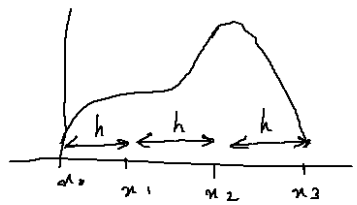


$$I = I_1 + I_2$$

قاعده سیمپسون 3/8 بجای استفاده از چند جمله‌ای درجه دوم از درجه سوم استفاده می‌کند

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

نیاز به چهار نقطه x_0 و x_1 و x_2 و x_3 دارد



$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

پس از این معادله در (a,b) انتگرال میگیرد

$$I = \frac{3}{8} h \left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$

مثال عددی: همان انتگرال مثال قبل را با روش 3/8 حل می‌کنیم

$$h = \frac{(b-a)}{3} = \frac{0.8}{3} =$$

$$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 0.2$$

$$x_1 = 0.2667 \rightarrow f(x_1) = 1.432724$$

$$x_2 = 0.5333 \rightarrow f(x_2) = 3.487177$$

$$x_3 = 0.8 \rightarrow f(x_3) = 0.232$$

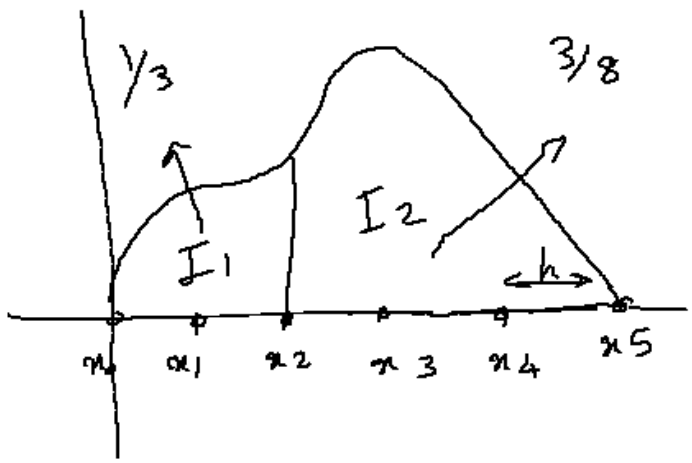
$$I = \frac{3}{8} \times \frac{0.8}{3} \left[0.2 + 3 \times 1.432724 + 3 \times 3.487177 + 0.232 \right]$$

$$= 1.519170 \quad , \quad E_t = 1.640533 - 1.519170 = 0.121363$$

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{1.640533} \times 100\% = \frac{0.121363}{1.640533} = 7.4\%$$

از مقایسه خطای نسبی در روشهای مختلف
نتیجه گیری می شود که روش 3/8 بالاترین
دقت را در محاسبه انتگرال معین دارد

تمرین: مثال قبل را بصورت ترکیبی با استفاده
از روشهای سیمپسون 1/3 و 3/8 حل کنید



$$I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 = 1.645077$$

$$I_1 = 0.380324$$

$$I_2 = 1.264754$$

فصل پنجم : حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تک متغیره با روشهای عددی

از طریق حل یک مثال عددی این روش بررسی می شود فرض کنیم یک تابع $y(t)$ که تابعی از زمان باشد موضوع است که در معادله زیر صدق می کند

$$y'(t) + 0.5y(t) = 4e^{0.8t}$$ → این معادله از نوع تک متغیره و مرتبه اول و غیر همگن است ابتدا پاسخ تحلیلی آنرا بدست آورده و سپس با نتایج عددی مقایسه می کنیم

جواب کلی بصورت مجموع پاسخ عمومی که از حل معادله دیفرانسیل همگن بدست می آید و با y_h نشان داده می شود و پاسخ خصوصی که با y_p نشان داده می شود می باشد

homogenious

private

$$[y_{کل} = y_p + y_h]$$

معادله همگن → $y'(t) + 0.5\,y(t) = 0 \rightarrow y_h = c\,e^{-0.5t}$

برای محاسبه y_p باید جوابی را بدست آوریم که در معادله اصلی صدق کند معمولاً این پاسخ بصورت حاصلضرب یک تابع مجهول u در y_h در نظر گرفته می شود

$$y_p = u(t)\,e^{-0.5t}$$

$$y = u e^{-0.5t} \rightarrow$$

$$y' = u' e^{-0.5t} - 0.5 u e^{-0.5t}$$

$$y' + 0.5y = 4 e^{0.8t}$$

$$\rightarrow u' e^{-0.5t} - \cancel{0.5 u e^{-0.5t}} + \cancel{0.5 u e^{-0.5t}} = 4 e^{0.8t}$$

$$u' = 4 e^{1.3t} \rightarrow u = \frac{4}{1.3} e^{1.3t} \rightarrow y_p = u e^{-0.5t}$$

شرط اولیه

$$= \frac{4}{1.3} e^{0.8t}$$

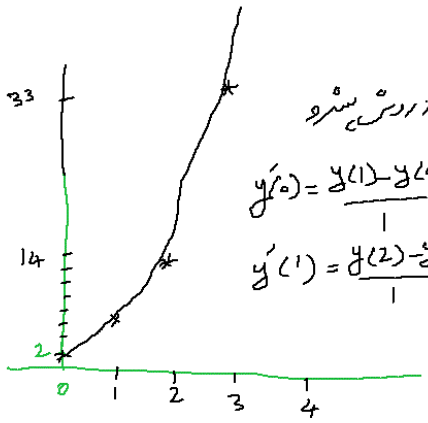
$y(t) =$ جواب کلی $= y_p + y_h = C e^{-0.5t} + \frac{4}{1.3} e^{0.8t} \xrightarrow{y(0)=2}$

$$y(0) = C + \frac{4}{1.3} = 2 \rightarrow C = 2 - \frac{4}{1.3} \rightarrow y_{\text{کل}} = \left(2 - \frac{4}{1.3}\right) e^{-0.5t} + \frac{4}{1.3} e^{0.8t}$$

در لحظات $t=0$ و $t=1$ و $t=2$ و $t=3$ و $t=4$

جواب دقیق بشکل زیر می شود

t	$y(t)$
0	2
1	6.19463
2	14.84392
3	33.67717
4	75.33896



از روش پیشرو

$$y'(0) = \frac{y(1)-y(0)}{1}$$

$$y'(1) = \frac{y(2)-y(1)}{1}$$

برای حل مسئله از روش عددی باید بجای $y'(t)$ در نقطات مختلف بصورت فوق جایگذاری شود (از روش پیشرو)

$$y' + 0.5y = 4e^{0.8t}$$

① $\rightarrow y'(t) = 4e^{0.8t} - 0.5\,y(t) = f(y,t)$

② $\rightarrow t=0 \rightarrow y'(0) = 4e^{0} - 0.5 \times y(0) = \frac{y(1)-y(0)}{1}$

و $y(0)=2 \rightarrow 4 - 0.5\times 2 = y(1) - 2$

$\varepsilon_t = \frac{6.19463-5}{6.19463} \times 100\% = 19.28\% \rightarrow y(1) = 5 \rightarrow$ با روش عددی

③ $\rightarrow t=1 \rightarrow y'(1) = 4e^{0.8\times 1} - 0.5 \times y(1) = \frac{y(2)-y(1)}{1}$

$4e^{0.8\times 1} - 0.5\times 5 = y(2) - 5$

بجای $y(1)$ از پاسخ بدست آمده در مرحله قبل جایگذاری می‌شود

$y(2) = 11.40216$

$$\varepsilon_t = \frac{14.84392 - 11.40216}{14.84392} \times 100\% = 23.18\%$$

④ $\rightarrow t=2 \rightarrow$ بعنوان تمرین $\rightarrow y(3) = 25.51321$

$\varepsilon_t = 24.24\%$

⑤ $\rightarrow t=3 \rightarrow$ بعنوان تمرین $\rightarrow y(4) = 56.84931$

$\varepsilon_t = 24.54\%$

main.m

```
clc; clear; clear all
y0=2
x=0:1:4
[x,y] = ode45(@(x,y) (-0.5)*y+(4*exp(0.8*x)) ,x,y0);
plot(x,y);grid on
```

Command Window

Name	Value	Min	Max
x	[0;1;2;3;4]	0	4
y	[2;6.1946;14.8439;33.6...	2	75.3390
y0	2	2	2