IUT Aix-en-Provence Année 2024-2025
BUT1 Informatique `morgan.morancey@univ-amu.fr`

Notes du cours R2.09 'Méthodes numériques'

Table des matières

1 Rappels sur les fonctions numériques

1.1 Notions de base

Définition 1.1. Une fonction est une application

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x).$$

Définition 1.2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est dite *croissante* sur un intervalle I si pour tout x, y dans I

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

- La fonction f est dite *décroissante* sur un intervalle I si pour tout x, y dans I

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

Si les inégalités sont strictes, on parle de croissance ou décroissance stricte.

Limite
La notion de limite est ici définie "avec les mains". La formalisation de cette définition n'est pas au programme de ce cours.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a noté $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si

"$f(x)$ peut être aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a".

Proposition 1.1. *Lorsque $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, elle est unique.*

Proposition 1.2. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si les limites $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent*

- $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, ***sauf** si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.*
- $\lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x)) \times (\lim_{x\to a} g(x))$, ***sauf** si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.*
- *Si $\lim_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim_{y\to b} f(y) = c$ alors $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = c$.*

Remarque 1.1. Les quatres formes indéterminées sont

$$+\infty + (-\infty), \qquad 0 \times \pm\infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Exemple 1.1. Soient $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto -x$ et $h : x \mapsto -x^2$ définies sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}(f+h)(x)$ sont des formes indéterminées. Pourtant, $(f+g)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = 0$ et

$$(f+h)(x) = x - x^2 = x(1-x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Remarque 1.2. La factorisation permet généralement de se débarrasser des formes indéterminées.

Continuité. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3. Soit $a \in I$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
La fonction f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Proposition 1.3. *La somme et le produit de fonctions continues en a sont continues en a.*

Proposition 1.4. *Si g est continue en a et f est continue en $g(a)$ alors $x \mapsto f\big(g(x)\big)$ est continue en a.*

Corollaire 1.1. *Soient $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a. Si $g(a) \neq 0$ alors le quotient $\frac{f}{g}$ est continu en a.*

Proposition 1.5. *Les fonctions usuelles : polynômes, inverse, racine carrée,* cos, sin, ln, exp *sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.*

1.2 Rappels sur les fonctions usuelles

Polynôme de degré 2.
On considère une fonction polyomiale de degré 2

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines réelles distinctes (i.e. la fonction f s'annule exactement deux fois) données par

  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  On peut alors écrire la fonction f sous forme factorisée

  $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

  La fonction f est du signe de a sur $]-\infty, x_1[\, \cup\,]x_2, +\infty[$ (en dehors des racines) et du signe de $-a$ sur l'intervalle $]x_1, x_2[$.

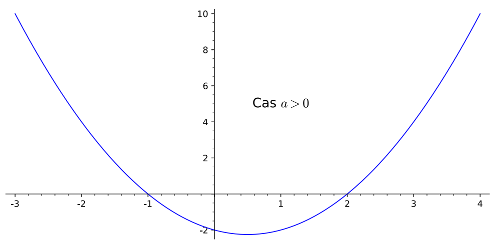


FIGURE 1 – Polynôme de degré 2, $\Delta > 0$ ($a > 0$)

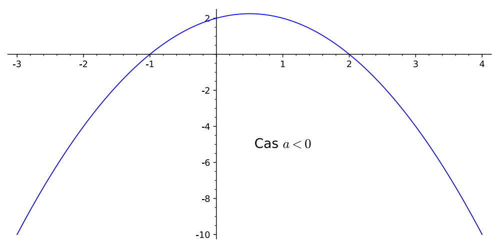


FIGURE 2 – Polynôme de degré 2, $\Delta > 0$ ($a < 0$)

- Si $\Delta = 0$, alors f admet une unique racine réelle double (i.e. la fonction f s'annule exactement une fois) donnée par

  $$x_1 = \frac{-b}{2a}.$$

  On peut alors écrire la fonction f sous forme factorisée

  $$f(x) = a(x - x_1)^2, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

  La fonction f est du signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

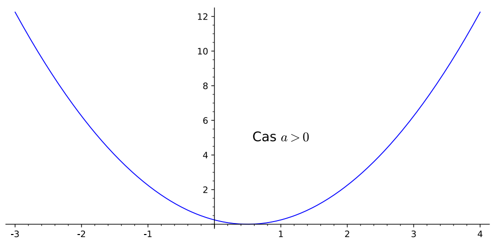


FIGURE 3 – Polynôme de degré 2, $\Delta = 0$ ($a > 0$)

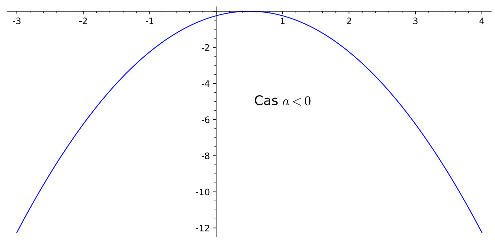


FIGURE 4 – Polynôme de degré 2, $\Delta = 0$ ($a < 0$)

- Si $\Delta < 0$, alors f n'admet aucune racine réelle (i.e. la fonction f ne s'annule jamais). La fonction f est du signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, ses limites en $\pm\infty$ sont $+\infty$ si $a > 0$ et $-\infty$ si $a < 0$. On le démontre en factorisant par x^2.

Exponentielle et logarithme népérien.
Les définitions des fonctions *exponentielle* et *logarithme népérien* ne sont pas abordées ici. Le domaine de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$, le domaine de définition de la fonction ln est $]0, +\infty[$.
On note $e = \exp(1)$. On a les valeurs remarquables suivantes

$$\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

Ces deux fonctions sont inverses l'une de l'autre : on a

$$\ln\big(\exp(x)\big) = x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$
$$\exp\big(\ln(x)\big) = x, \quad \text{pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

Elles vérifient les propriétés suivantes liant l'addition et la mutliplication.

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y), \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R},$$
$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y), \quad \text{pour tout } x, y \in]0, +\infty[.$$

Ces propriétés sont cohérentes avec la notation $\exp(x) = e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

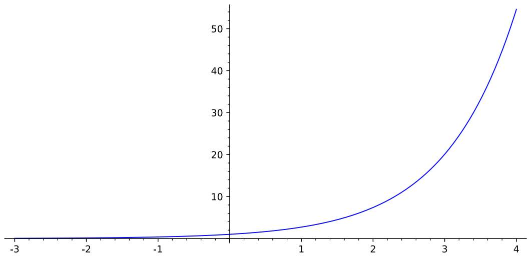


FIGURE 5 – Graphe de $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$

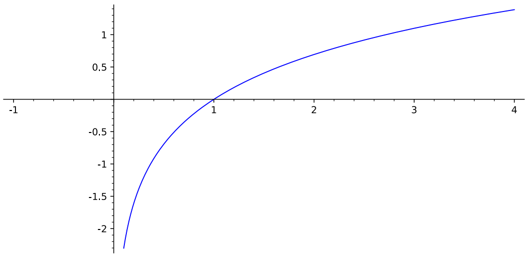


FIGURE 6 – Graphe de $x \in]0, +\infty[\mapsto \ln(x)$

On a les limites suivantes

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Fonctions trigonométriques.

Les fonctions *cosinus* et *sinus* sont définies à l'aide du cercle trigonométrique (c'est-à-dire le cercle centré en l'origine de rayon 1). On considère une demi-droite formant un angle (orienté) t avec l'axe des abscisses. Le point d'intersection de cette demi-droite et du cercle trigonométrique a pour abscisse $\cos(t)$ et pour ordonnée $\sin(t)$.

Ces fonctions sont périodiques de période 2π c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(t + 2\pi) = \cos(t), \qquad \sin(t + 2\pi) = \sin(t).$$

Elles vérifient l'identité suivante pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

On a les valeurs remarquables suivantes

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ldots$$

$$\sin(0) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \ldots$$

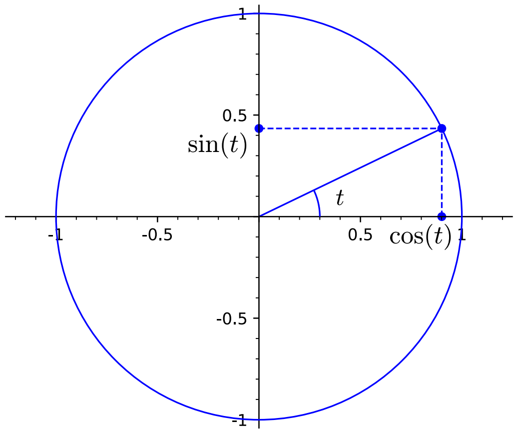


FIGURE 7 – Cercle Trigonométrique

L'utilisation du cercle trigonométrique permet aussi de déduire les identités suivantes pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-t) = \cos(t), \qquad \sin(-t) = -\sin(t).$$

On déduit aussi que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$-1 \leq \cos(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(t) \leq 1.$$

1.3 Dérivabilité d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.4. Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f au point a. On dit que f est dérivable sur I si elle dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on peut définir la fonction $f' : x \in I \mapsto f'(x)$ appelée dérivée de f.

Remarque 1.3. Si on applique la définition précédente avec $x = a + h$ on obtient la définition équivalente

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Proposition 1.6. *(**Opérations sur les dérivées**). Soient f, g deux fonctions définies sur I et $a \in I$.*

- *Si f et g sont dérivables en a alors $(f+g)$ et $f \times g$ sont dérivables en a et*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a).$$

- *Si g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$ alors la fonction $h : x \mapsto f\big(g(x)\big)$ est dérivable en a et*

$$h'(a) = g'(a) \times f'(g(a)).$$

Proposition 1.7. ***(Dérivées classiques).***

$f(x)$	$f'(x)$	*domaine de dérivabilité*
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$ ***(Attention !)***
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Corollaire 1.2. *Soient f, g deux fonctions dérivables en a avec $g(a) \neq 0$. Alors,*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Remarque 1.4. Sous les hypothèses précédentes, la formule de dérivation des fonctions composées permet de montrer que

$$(f^n)'(a) = nf'(a)f^{n-1}(a), \quad (exp(f))'(a) = f'(a)exp(f(a)),$$

et si g est strictement positive,

$$(\ln(g))'(a) = \frac{g'(a)}{g(a)}.$$

Proposition 1.8. ***(Formule de Taylor-Young d'ordre 1)*** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$$

et pour tout $x \in I$

$$f(x) = f(a) + (x-a) \times f'(a) + (x-a) \times \epsilon(x).$$

Corollaire 1.3. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f continue en a.*

Définition/Proposition 1.1. (Equation de la tangente). Soit f une fonction continue sur I et dérivable en $a \in I$. La tangente au graphe de f au point a est la droite d'équation

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

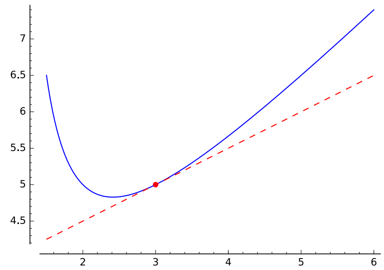


FIGURE 8 – Tangente en un point

Proposition 1.9. ***(Dérivée et sens de variation)***. *Soit f une fonction dérivable sur I.*

- *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.*

Si les inégalités sont strictes (sauf peut être en un nombre fini de points) alors la monotonie est stricte.

Définition 1.5. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in I$.

- On dit que c est un maximum local de f si pour tout $x \in I$ "proche" de c, on a $f(x) \leq f(c)$;
- on dit que c est un minimum local de f si pour tout $x \in I$ "proche" de c, on a $f(x) \geq f(c)$.

On dit que c est un extremum local de f si c est soit un minimum local soit un maximum local de f.

Proposition 1.10. ***(Condition nécessaire d'extremum local)***. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et c un point à l'intérieur de l'intervalle I. On suppose que f est dérivable au point c. Si f admet un extremum local au point c alors $f'(c) = 0$.*

L'étude de l'annulation de la dérivée d'une fonction est donc essentielle pour sa minimisation.

2 Etude des suites

2.1 Monotonie

Définition 2.1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite $(u_n)_{n\in D}$ est une application de $D := \{n \geq n_0\} \subset \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite est dite *monotone* si elle soit croissante soit décroissante.

Remarque 2.1. Parfois, on peut se limiter à étudier ces notions seulement à partir d'un certain rang.

"Recettes" : Pour étudier le sens de variation d'une suite, on dispose de plusieurs méthodes :

- étude du signe de $u_{n+1} - u_n$,
- étude du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (si $u_n \neq 0$),
- étude des variations de la fonction f si $u_n = f(n)$,
- démonstration par récurrence, etc...

Rappel : principe de récurrence.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On veut démontrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

- Initialisation : on montre que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
- Récurrence : on montre que si pour n'importe quel entier $k \geq n_0$ fixé la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie alors la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 2.1. On considère la suite définie par la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = 2u_n, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n u_0$.
On définit la propriété $\mathcal{P}_n$: "$u_n = 2^n u_0$" et on montre qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation. On a $u_0 = 2^0 u_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^n u_0$. Montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1} u_0$. Par définition, on a
$$u_{n+1} = 2u_n.$$
Par hypothèse de récurrence on a $u_n = 2^n u_0$. Ainsi,
$$u_{n+1} = 2u_n = 2 \times 2^n u_0 = 2^{n+1} u_0.$$
- Conclusion. La propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour $n = 0$ et héréditaire donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n u_0$.

Remarque 2.2. **Attention !** Si l'on veut étudier la monotonie d'une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, le sens de variation de la suite n'est pas donné uniquement par l'étude de la fonction f.
Considérons la suite définie dans l'exemple précédent. Elle est de la forme

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x.$$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pourtant, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n u_0$ donc la suite $(u_n)_n$ est croissante si u_0 positif mais elle est décroissante si u_0 négatif.

2.2 Convergence des suites

Définition 2.2. (**Suite convergente**). On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si pour tout intervalle centré sur ℓ il existe un rang à partir duquel cette intervalle contient tous les termes de la suite.
Formellement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

Sinon, on dit que la suite est divergente. On distingue deux cas :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: pour tout $M > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq M$. Idem pour $-\infty$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Par exemple : $u_n = (-1)^n$.

Proposition 2.1. ***(Unicité de la limite)****. Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe, elle est unique.*

Proposition 2.2. ***(Opérations sur les limites)****. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant des limites (finies ou infinies). Alors*

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, ***sauf** si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) \times (\lim\limits_{n\to+\infty} v_n)$, ***sauf** si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Proposition 2.3. *Soient $a, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.*

Corollaire 2.1. *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant une limite,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n},$$

avec les conventions $\dfrac{1}{0^\pm} = \pm\infty$ *et* $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$.

Remarque 2.3. Les quatres formes indéterminées sont

$$+\infty + (-\infty), \qquad 0 \times \pm\infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

On s'en débarrasse généralement en factorisant par la plus grande puissance de n.

Exemple 2.2. Calculer la limite de la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^3 - n$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. C'est donc une forme indéterminée. En factorisant, on obtient

$$n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exemple 2.3. Calculer la limite de la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \frac{4n^2 + 1}{n - 1}.$$

Le numérateur comme le dénominateur tendent vers $+\infty$. C'est donc une forme indéterminée. En factorisant, on obtient

$$u_n = \frac{4n^2+1}{n-1} = \frac{n\left(4n+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{4n+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Définition 2.3.

- On dit que la suite $(u_n)_n$ est majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que la suite $(u_n)_n$ est minorée si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On dit que la suite $(u_n)_n$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque 2.4. Toute suite croissante est minorée. Toute suite décroissante est majorée.

Proposition 2.4. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Par hypothèse, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|).$$

□

Remarque 2.5. La réciproque n'est pas vraie, par exemple la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

Critères de convergence

Proposition 2.5. ***(Convergence et monotonie)****. Toute suite monotone bornée est convergente i.e.*

- *toute suite croissante majorée est convergente ;*
- *toute suite décroissante minorée est convergente.*

Dans ce cas, si on note m et M respectivement des minorants et majorants de $(u_n)_n$ alors la limite ℓ vérifie $m \leq \ell \leq M$.

Remarque 2.6. Cette proposition **ne permet pas de donner la valeur de la limite** : ce n'est pas parce que l'on montre que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que $u_n \leq M$ pour tout n que la limite sera M.

Proposition 2.6.

- *Toute suite croissante non majorée est divergente vers $+\infty$;*
- *toute suite décroissante non minorée est divergente vers $-\infty$.*

Le résultat suivant permet de calculer la valeur de la limite si l'on sait déjà que la suite converge.

Proposition 2.7. ***(Point fixe - calcul de la valeur de la limite)****. Soit $(u_n)_n$ une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la fonction f est continue. Si la suite $(u_n)_n$ converge alors la limite ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.*

Démonstration. Soient $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ les suites définies par $v_n = u_{n+1}$ et $w_n = f(u_n)$. Par hypothèse $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par continuité de f, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Comme $v_n = w_n$, par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$.

□

Proposition 2.8. ***(Théorème de comparaison)****. Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$,*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors, la suite $(u_n)_n$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Exemple 2.4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2 - \cos(n)}{1 - n^2}$.

On a pour tout $n \geq 2$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ d'où, comme $1 - n^2 < 0$,

$$\frac{4n^2 + 1}{1 - n^2} \leq \frac{4n^2 - \cos(n)}{1 - n^2} \leq \frac{4n^2 - 1}{1 - n^2}.$$

En factorisant et en simplifiant par n^2 on obtient donc

$$\frac{4 + \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{1}{n^2}} \leq \frac{4n^2 - \cos(n)}{1 - n^2} \leq \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2 - \cos(n)}{1 - n^2} = -4$.

Exercice 2.1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{sin(n)}{n} = 0$.

Proposition 2.9. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que*

$$u_n \leq v_n, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- *Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\tilde{\ell} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existent alors $\ell \leq \tilde{\ell}$.*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Remarque 2.7. Les deux propositions précédentes restent vraies si les inégalités sont seulement vérifiées pour tout n suffisamment grand.

Remarque 2.8. Même si on a $u_n < v_n$ on n'a pas nécessairement $\ell < \tilde{\ell}$.
Par exemple, si on définit pour tout $n \geq 1$ les suites $u_n = \frac{-1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a pour tout $n \geq 1$, $u_n < 0 < v_n$ mais pourtant

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Exemple 2.5. On considère la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Si la suite converge, quelle peut être la valeur de sa limite ?
3. On note $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$. En utilisant le fait que la fonction f est croissante, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est effectivement convergente. Quelle est sa limite ?

1. La suite étant définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, elle n'est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ que si $u_n \geq 0$. Montrons le par récurrence.
On a $u_0 = \frac{1}{2} \geq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$. Alors, on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ bien défini et $u_{n+1} \geq 0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et la suite est bien définie.
2. La suite est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$. La fonction f étant continue, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors cette limite vérifie
$$f(\ell) = \ell \iff \sqrt{\ell} = \ell \iff \Big(\ell = \ell^2 \text{ et } \ell \geq 0\Big) \iff \Big(\ell = 0 \text{ ou } \ell = 1\Big).$$
Les limites possibles de la suite $(u_n)_n$ sont donc 0 ou 1.
3. On le montre par récurrence sur n.
On a $u_1 = \sqrt{u_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$, on obtient bien que
$$u_0 = \frac{1}{2} \leq u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1.$$
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \leq u_{k+1} \leq 1$. Comme $u_k \geq 0$ (voir qu. 1) et que f est croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que
$$f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1) = 1$$
c'est-à-dire
$$u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1.$$
Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$
4. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par 1 donc elle converge. On note ℓ sa limite. D'après la question 2., $\ell \in \{0, 1\}$.
La suite $(u_n)_n$ étant croissante, on a pour tout n, $u_n \geq u_0 = \frac{1}{2}$. Donc $\ell \geq \frac{1}{2}$. Finalement,
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Définition 2.4. (**Suites adjacentes**). On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si elles vérifient les trois propriétés suivantes
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0.$

Proposition 2.10. *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

Démonstration. Par hypothèse, les suites $(u_n)_n$ et $(-v_n)_n$ sont croissantes. Ainsi la suite $(u_n - v_n)_n$ est croissante. De plus, cette suite tend vers 0 : elle est donc négative i.e. $u_n \leq v_n$.
En utilisant la croissance de la suite $(u_n)_n$ et la décroissance de la suite $(v_n)_n$, on obtient alors pour tout n,

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Les deux suites sont donc monotones et bornées donc convergentes de limites ℓ et $\tilde{\ell}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \ell - \tilde{\ell}$ on obtient par unicité de la limite que $\ell = \tilde{\ell}$.

□

2.3 Suites classiques

Suites arithmétiques.

Définition/Proposition 2.1. On appelle suite *arithmétique* de raison $a \in \mathbb{R}$ toute suite de la forme $u_{n+1} = u_n + a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = na + u_0.$$

Démonstration.
La démonstration se fait par récurrence. On a pour $n = 0$, $u_0 = 0 \times a + u_0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = na + u_0$. On montre que $u_{n+1} = (n+1)a + u_0$.
Par définition, $u_{n+1} = u_n + a$. Par hypothèse de récurrence, $u_n = na + u_0$ d'où

$$u_{n+1} = u_n + a = na + u_0 + a = (n+1)a + u_0.$$

La récurrence est établie, la propriété étant vraie pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Proposition 2.11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison a. Alors, pour tout $n \geq 1$,*

$$u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Démonstration. Commençons par démontrer la formule dans le cas $u_0 = 0$ et $a = 1$. c'est-à-dire que l'on montre par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, la propriété

$$\mathcal{P}_n : "1 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}"$$

est vérifiée. On a pour $n = 1$,

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}.$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie i.e.

$$1 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie i.e.

$$1 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1) \times (n+2)}{2}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}1+\cdots+(n+1) = 1+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= (n+1)\times\left(\frac{n}{2}+1\right)\\ &= (n+1)\times\frac{(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

La récurrence est établie, la propriété étant vraie pour $n=1$, elle est vraie pour tout $n\geq 1$.
D'après la proposition précédente, $u_n = na+u_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}u_0+\cdots+u_n &= u_0+(u_0+a)+\cdots+(u_0+n\times a)\\ &= (n+1)u_0 + a\times(1+\cdots+n)\\ &= (n+1)u_0 + a\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)}{2}\times(u_0+u_0+n\times a)\\ &= (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.12. *Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison a.*
- *Si $a=0$, la suite est constante ;*
- *si $a>0$, la suite est divergente vers $+\infty$;*
- *si $a<0$, la suite est divergente vers $-\infty$.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate de la formule

$$u_n = na+u_0, \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

□

Suites géométriques.

Définition/Proposition 2.2. On appelle suite *géométrique* de raison $q\in\mathbb{R}$ toute suite de la forme $u_{n+1}=qu_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n = q^n u_0.$$

Démonstration.
La démonstration se fait par récurrence.
Pour $n=0$, comme $q^0=1$, on a bien $u_0=q^0u_0$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n=q^nu_0$. Par définition, on a $u_{n+1}=qu_n$ et par hypothèse de récurrence, on a $u_n=q^nu_0$. On en déduit que

$$u_{n+1}=qu_n=q\times q^n\times u_0=q^{n+1}u_0.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=q^nu_0$. □

Proposition 2.13. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors,*

$$u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad si\ q \neq 1.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = q^k u_0$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

On montre que

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad \text{si } q \neq 1.$$

En effet,

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= (1-q)\big(q^0 + q^1 + \cdots + q^n\big) \\ &= \big(q^0 + q^1 + \cdots + q^n\big) - \big(q^1 + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}\big) = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

d'où si $q \neq 1$,

$$u_0 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

□

Exercice 2.2. Soit $x \geq -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
On définit $\mathcal{P}_n$ la propriété "$(1+x)^n \geq 1 + nx$".
On vérifie que $\mathcal{P}_0$ est vraie : $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times x$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Alors

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \quad \text{par hypothèse de récurrence et car } 1+x \geq 0, \\ &= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ est alors vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.14. *Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q.*
- *Si $q = 1$ la suite est constante ;*
- *si $|q| < 1$ alors $(u_n)_n$ converge vers 0 ;*
- *dans tous les autres cas la suite est divergente.*

Démonstration.
Par définition, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n) = qu_n$ où $f : x \in \mathbb{R} \mapsto qx$. Par continuité de f, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $f(\ell) = \ell$. D'où

$$q\ell = \ell \quad \Longrightarrow \quad q = 1 \text{ ou } \ell = 0.$$

Ainsi, si $q \neq 1$, une suite géométrique de raison q ne peut converger que vers 0.
- Si $q = 1$, $u_n = q^n u_0 = u_0$.

- Supposons que $|q| < 1$. Par définition, on a $|u_{n+1}| = |q||u_n|$ donc la suite $(|u_n|)_n$ est géométrique de raison $|q|$.
Comme $|q| < 1$,
$$|u_{n+1}| = |q||u_n| \quad \Longrightarrow \quad |u_{n+1}| < |u_n|.$$
Alors la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente. La suite $(|u_n|)_n$ étant géométrique et convergente, sa limite est donc 0. Ce qui implique que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.
- Si $q = -1$, alors $u_n = (-1)^n u_0$ et la suite n'admet pas de limite.
Le dernier cas restant est $|q| > 1$ alors $(|u_n|)_n$ tend vers $+\infty$.
En effet, on peut montrer par récurrence que $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour tout $x \geq -1$ (voir Exercice 2.2). Comme $|q| > 1$, on peut écrire $|q| = 1 + \tilde{q}$ avec $\tilde{q} > 0$. Ainsi, la suite $(|u_n|)_n$ étant géométrique de raison $|q|$ on obtient
$$|u_n| = |q|^n |u_0| = (1+\tilde{q})^n |u_0| \geq (1 + n\tilde{q})|u_0| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
D'où $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la suite $(u_n)_n$ n'est pas bornée.

$\square$

3 Méthodes numériques

On présente brièvement différentes méthodes numériques pour la résolution d'équations, la minimisation de fonctions, l'interpolation ou la détermination de valeurs propres. Ces méthodes numériques seront étudiées plus en détails lors des TDs/TPs.

3.1 Résolution d'équations

Dans cette section, on considère des algorithmes permettant la résolution approchée d'équations de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction.

• **Méthode de point fixe**.
On considère la fonction

$$h : x \mapsto f(x) - x$$

et la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = h(x_n)$.
Si la suite $(x_n)_n$ converge (et si la fonction f est continue) alors la limite x vérifie

$$h(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0.$$

• **Algorithme de dichotomie**.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Hypothèses : on suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
On détaille l'algorithme dans le cas où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. L'autre cas est similaire.
L'algorithme de dichotomie est la construction de deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que

$$f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n), \qquad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}. \qquad (*)$$

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soient a_n et b_n construits vérifiant $a_n < b_n$ et $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$. On va construire a_{n+1} et b_{n+1} en calculant $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$.

si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ **alors**
| on arrête l'algorithme et on pose $c = \frac{a_n+b_n}{2}$
sinon si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$ **alors**
| on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$
sinon
| on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$
fin

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. De plus, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ construites par l'algorithme de dichotomie convergent vers c.*

La proposition précédente est connue sous le nom de Théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration. Si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$, la preuve est terminée.
Sinon, par construction, les inégalités $(*)$ sont vérifiées pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.
En effet, d'après $(*)$, la suite $(a_n)_n$ est croissante et la suite $(b_n)_n$ est décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$. Ainsi, par récurrence, on obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = \frac{b - a}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ces suites sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite $c \in [a,b]$. Comme la fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b]$,

$$f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c) \qquad \text{et} \qquad f(b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c).$$

Or par construction $f(a_n) \le 0$ donc $f(c) \le 0$ et $f(b_n) \ge 0$ donc $f(c) \ge 0$. D'où $f(c) = 0$. □

Remarque 3.1. Dans l'algorithme de dichotomie on a

$$c \in [a_n, b_n], \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, le nombre d'itérations nécessaires à l'approximation de c avec une précision donnée est explicitement connu.

Remarque 3.2. **Attention** ! Si on a $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ alors on construit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a_n) \ge 0 \ge f(b_n) \qquad \text{et} \qquad a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n.$$

Remarque 3.3. Une fonction peut très bien s'annuler sans qu'on puisse appliquer l'algorithme de dichotomie (ni le théorème des valeurs intermédiaires).
Par exemple, la fonction $f : x \in [0,2] \mapsto (x-1)^2$ s'annule sur $[0,2]$ mais vérifie $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in [0,2]$: on ne peut pas lui appliquer l'algorithme de dichotomie.

Exemple 3.1. Calcul approché de racines carrées. Soit $\alpha \in]0,+\infty[$. On veut calculer de manière approchée $\sqrt{\alpha}$.
Soient $f : x \in [0,+\infty[\mapsto x^2 - \alpha$ et $b > \sqrt{\alpha}$ (on peut par exemple choisir $b = \alpha + 1$). On a $f(0) = -\alpha < 0$ et $f(b) = b^2 - \alpha > 0$. La fonction f étant continue sur $[0,b]$, on en déduit qu'il existe $c \in [0,b]$ tel que

$$f(c) = 0 \iff c^2 - \alpha = 0 \iff c = \sqrt{\alpha}.$$

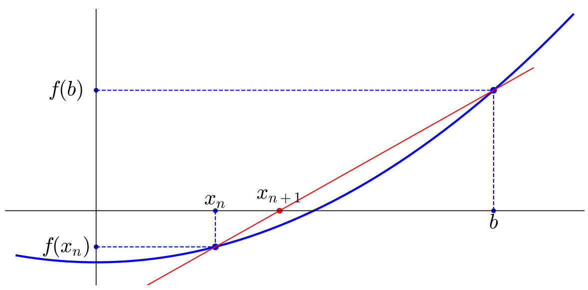
L'algorithme de dichotomie fournit une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \le \sqrt{\alpha} \le b_n \qquad \text{avec} \qquad b_n - a_n = \frac{1}{2^n} b.$$

Si l'on souhaite connaître une valeur approchée de $\sqrt{\alpha}$ à ε près il suffit d'effectuer k itérations de l'algorithme avec k tel que $\frac{1}{2^k} b \le \varepsilon$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction s'annule sur l'intervalle $[a,b]$.
On étudie ici la méthode de la sécante qui est un algorithme différent de la méthode de dichotomie pour approcher une solution de l'équation $f(x) = 0$. On pose $x_0 = a$ et on construit les itérées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit

tant que *la précision souhaitée n'est pas atteinte* **faire**
  Calculer l'équation de la droite passant par les points $(x_n, f(x_n))$ et $(b, f(b))$;
  Définir x_{n+1} comme étant l'abscisse du point d'intersection entre cette droite et l'axe des abscisses
fin



On verra en TD/ TP que sous certaines conditions,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{avec} \quad f(\ell) = 0.$$

Cet algorithme permet donc, comme l'algorithme de dichotomie, de fournir une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

3.2 Algorithmes de minimisation

Dans cette section on considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ que l'on supposera dérivable et l'on cherche son minimum.

• Annulation de la dérivée
On rappelle (voir Proposition 1.10) que si $c \in I$ est un point à l'intérieur de I et un extremum local de la fonction f alors il vérifie $f'(c) = 0$.
On peut donc, si les conditions le permettent, rechercher de potentiels extrema en appliquant les algorithmes de la section précédente à la fonction dérivée f'.

• Descente de gradient
Ces algorithmes consistent à dire que pour déterminer le minimum d'une fonction on va à chaque itération suivre la direction opposée à celle de la dérivée. Il se présente sous la forme

Data : x_0 donné.
tant que *la précision souhaitée n'est pas atteinte* **faire**
  On calcule la direction de descente $f'(x_k)$.
  On choisit un pas de descente $\rho_k > 0$.
  On calcule l'itérée suivante
$$x_{k+1} = x_k - \rho_k f'(x_k).$$
fin

On peut considérer que l'algorithme a convergé soit lorsque $|x_{k+1} - x_k|$ est suffisamment petit soit lorsque $|f'(x_k)|$ est suffisamment proche de 0.
Bien évidemment le choix du pas est une étape cruciale. Deux choix classiques sont
- ◦ l'algorithme de gradient à pas constant : $\rho_k = \rho > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;
- ◦ l'algorithme de gradient à pas optimal :

$$\rho_k = \underset{\rho>0}{\operatorname{argmin}} f\big(x_k - \rho f'(x_k)\big).$$

L'implémentation de cet algorithme, le choix du pas ainsi qu'une variante lorsque le calcul de la dérivée n'est pas connu (ou pas souhaitable) seront étudiés en TD/TP.
Des généralisations de cet algorithme (pour des fonctions dépendant d'un très grand nombre de variables) sont le cœur de l'implémentation d'un réseau de neurones.

3.3 Interpolation

Soit f une fonction et soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. La question de l'interpolation est de trouver une fonction simple, typiquement un polynôme, qui coincide avec la fonction f aux points $x_0, \dots, x_n$.

Proposition 3.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et pour tout $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{R}$, il existe un (unique) polynôme P de degré inférieure ou égal à n tel que*

$$P(x_i) = f_i, \qquad \textit{pour tout } 0 \le i \le n.$$

Démonstration. Pour tout $0 \leq i \leq n$, on définit le polynôme élémentaire de Lagrange

$$L_{x_i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

C'est un polynôme de degré n tel que

$$L_{x_i}(x_i) = 1 \qquad \text{et} \qquad L_{x_i}(x_j) = 0, \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq n,\ j \neq i.$$

Ainsi, le polynôme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \times L_{x_i}(x)$$

vérifie toutes les propriétés voulues. □

Remarque 3.4. Le polynôme construit dans la démonstration précédent est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange.

La mise en œuvre ainsi que les limites de cette implémentation seront étudiées en TP.

Exemple 3.2. Donner l'expression d'un polynôme P vérifiant

$$P(1) = 2, \qquad P(2) = 3, \qquad P(3) = 4.$$

On commence par calculer les polynômes de Lagrange élémentaires L_1, L_2 et L_3 vérifiant

$$\begin{array}{lll} L_1(1) = 1 & L_2(1) = 0 & L_3(1) = 0 \\ L_1(2) = 0 & L_2(2) = 1 & L_3(2) = 0 \\ L_1(3) = 0 & L_2(3) = 0 & L_3(3) = 1 \end{array}$$

Par définition, on a

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + 6\right).$$

De même,

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -x^2 + 4x - 3$$

et

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + 2\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} P(x) &= 2 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) + 4 \times L_3(x) \\ &= \left(x^2 - 5x + 6\right) + 3\left(-x^2 + 4x - 3\right) + 2\left(x^2 - 3x + 2\right) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

est solution du problème d'interpolation donné.

3.4 Détermination de valeurs propres et vecteurs propres

Soient $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille N, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^N$ un vecteur.
On dit que λ est une valeur propre de A et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si $X \neq 0$ et

$$AX = \lambda X.$$

• **Quelques éléments de contexte**.
Le calcul (exact ou approché) de valeurs propres et de vecteur propres d'une matrice est un élément crucial qui possède de nombreuses applications dans des domaines très variés

- analyse de la stabilité d'un système dynamique ;
- analyse des possibles niveaux d'énergie d'un système quantique ;
- analyse de clusters (groupements) sur un graphe ;
- décomposition en valeurs singulières utilisée pour la réduction de bruit de données ou la compression de données ;
- réduction de dimension et analyse en composantes principales (big data, reconnaissance faciale ...) ;
- classement de données comme dans l'algorithme PageRank de Google qui est l'objet d'étude de la SAE S2.02.

• **Détermination de valeurs propres**.
Pour que $\lambda \in \mathbb{R}$ soit une valeur propre de A il faut et il suffit que le système

$$AX = \lambda X \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I_N)X = 0$$

possède une solution non nulle où I_N est la matrice identité de taille N. C'est équivalent à dire que la matrice $(A - \lambda I_N)$ n'est pas inversible c'est-à-dire (voir le cours de R1.07)

$$\det(A - \lambda I_N) = 0.$$

En développant par rapport aux lignes (ou aux colonnes) on peut montrer que $\det(A - \lambda I_N)$ est un polynôme de degré N en la variable λ appelé *polynôme caractéristique* de la matrice A. Il y a donc au plus N valeurs propres pour la matrice A qui peuvent, par exemple, être approchées en cherchant à annuler la fonction polynomiale de degré N

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_N).$$

• **Détermination de vecteurs propres**.
Si la valeur propre λ est connue alors un vecteur propre X peut être déterminé en résolvant le système linéaire de N équations à N inconnues donné par $AX = \lambda X$. Cette résolution peut se faire, par exemple, avec l'algorithme du pivot de Gauss.

On propose ici un autre algorithme, la **méthode de la puissance itérée**, permettant de calculer (de façon approchée) certaines valeurs propres et vecteurs propres associés.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$, on définit sa norme par

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}.$$

On peut noter que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^N$, tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\|aX\| = |a|\|X\| \qquad \text{et} \qquad \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Proposition 3.3. *On suppose que la matrice A possède N valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. On ordonne les valeurs propres de façon à avoir*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_N|.$$

On définit la suite $(X_n)_n$ par la formule de récurrence

$$X_{n+1} = \frac{AX_n}{\|AX_n\|}.$$

Alors pour presque tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, si $\lambda_1 > 0$,

$$\|AX_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$$

et $(X_n)_n$ converge vers un vecteur propre pour la valeur propre λ_1.

On en déduit l'algorithme suivant pour approcher la plus grande valeur propre (en valeur absolue) ainsi qu'un vecteur propre associé.

Data : $X_0 \in \mathbb{R}^N$ défini aléatoirement
tant que *la précision souhaitée n'est pas atteinte* **faire**

$$X_{n+1} = \frac{AX_n}{\|AX_n\|}.$$

fin
Result : $\|AX_n\|$ approximation de λ_1 ;
X_n approximation du vecteur propre associé.

Remarque 3.5. On suppose que A est une matrice stochastique : ses coefficients sont tous entre 0 et 1 et la somme de chaque colonne est égale à 1.

Alors, on peut montrer que 1 est valeur propre et que c'est la plus grande valeur propre (en valeur absolue). Dans ce cas, la méthode de la puissance itérée permet d'obtenir l'approximation d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Dans ce cas, on peut simplifier l'algorithme de la puissance itérée comme suit. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^N$. On définit la suite $(X_n)_n$ par

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Alors pour presque tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite $(X_n)_n$ converge vers un vecteur propre pour la valeur propre 1.