Task 1 - Curve Stable Swap

$$4A(X+Y)+D=4AD+\frac{D^3}{4XY}$$

price goes $P \to P_1$

then $X \to X_1$

$Y \to Y_1$

$$Z(X,Y)=(4A+1)D+\frac{D^3}{4XY}-4A(X+Y)$$

$$\Rightarrow \text{price } P=\frac{\partial Z/\partial Y}{\partial Z/\partial X}=\frac{-\frac{D^3}{4XY^2}-4A}{-\frac{D^3}{4X^2Y}-4A}=\frac{\frac{D^3}{4XY^2}+4A}{\frac{D^3}{4X^2Y}+4A}$$

In Curve Stable Swap D calculated after every swap $\Rightarrow$ after arbitrage pool will have X_1, Y_1, P_1, D_1 params

price at moment $t=t_0$: $$P=\frac{\frac{(X+Y)^3}{4XY^2}+4A}{\frac{(X+Y)^3}{4X^2Y}+4A}$$

price at moment $t=t_1$: $$P_1=\frac{\frac{(X_1+Y_1)^3}{4X_1Y_1^2}+4A}{\frac{(X_1+Y_1)^3}{4X_1^2Y_1}+4A}$$

Impermanent Loss : $IL = 1-\frac{V_{held}}{V_{pool}}$;

$$IL=1-\frac{X\cdot P_1+Y}{X_1\cdot P_1+Y_1} \Rightarrow \text{need to find } X_1, Y_1$$

$$\begin{cases} 4A(X_1+Y_1)+X+Y=4A(X+Y)+\frac{(X+Y)^3}{4X_1Y_1} \\ P_1=\frac{\frac{(X_1+Y_1)^3}{4X_1Y_1^2}+4A}{\frac{(X_1+Y_1)^3}{4X_1^2Y_1}+4A} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (4A-1)(X+Y) = 4A(X_1+Y_1) - \dfrac{(X+Y)^3}{4X_1Y_1} \\ P_1 = \dfrac{(X_1+Y_1)^3 X_1 + 16AX_1^2Y_1^2}{(X_1+Y_1)^3 Y_1 + 16AX_1^2Y_1^2} \end{cases}$$

2 unknown - X_1, Y_1

- => single solution!

~~Fatal~~ Final IL solution

$$\begin{cases} (4A-1)(x+y) = 4A(X_1+Y_1) - \dfrac{(X+Y)^3}{4X_1Y_1} \\ P_1 = \dfrac{(X_1+Y_1)^3 X_1 + 16AX_1^2Y_1^2}{(X_1+Y_1)^3 Y_1 + 16AX_1^2Y_1^2} \\ I.L. = 1 - \dfrac{X \cdot P_1 + Y}{X_1 \cdot P_1 + Y_1} \end{cases}$$

- single solution.

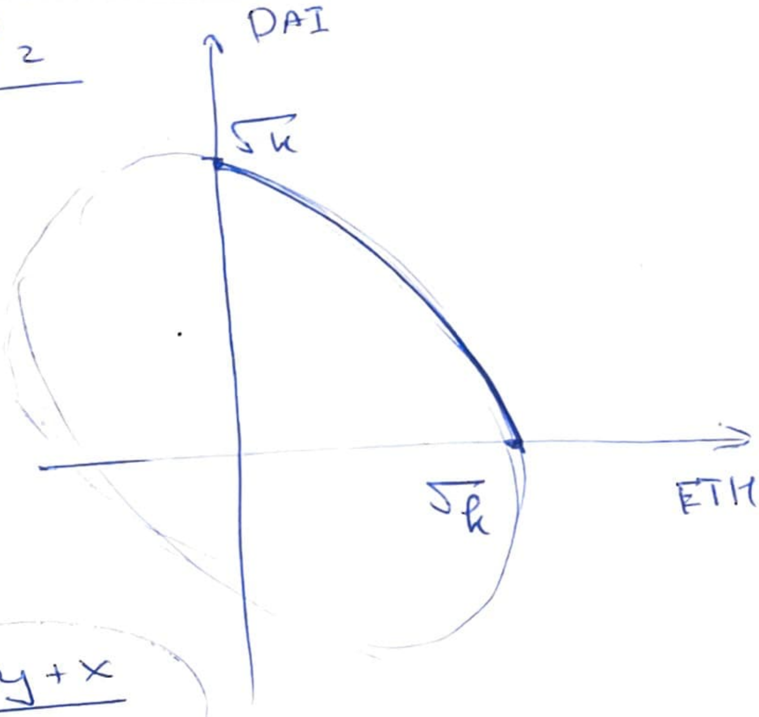
If we wand to compensate IL with fees

=> IL should be 0

$$\begin{cases} (4A-1)(X+y) = 4A(X_1+Y_1) - \dfrac{(X+Y)^3}{4X_1Y_1} \\ P_1 = \dfrac{(X_1+Y_1)^3 X_1 + 16AX_1^2Y_1^2}{(X_1+Y_1)^3 Y_1 + 16AX_1^2Y_1^2} \\ 1 = \dfrac{XP_1 + Y}{X_1P_1 + Y_1} \end{cases}$$

=> fees $= (X_1P_1 + Y_1) \cdot IL.$

Task2 - Uniswap V2



$X^2 + XY + Y^2 = k$ (1)

Let's calculate p:

$Z(x,y,k) = x^2 + xy + y^2 - k$.

Spot exchange rate:

$$p(x,y,k) = \frac{\partial Z/\partial Y}{\partial Z/\partial X} = \frac{2y+x}{2x+y}$$

If price goes $p \to p_1$: Find X_1, Y_1?

$$I.L = 1 - \frac{V_{held}}{V_{pool}} = 1 - \frac{Xp_1 + Y}{X_1P_1 + Y_1}$$

It's true that $P_1 = \frac{2Y_1 + X_1}{2X_1 + Y_1}$, fill it in (1):

$$X_1 = \frac{2Y_1 - Y_1P_1}{2P_1 - 1}$$

$$\left(\frac{2Y_1 - Y_1P_1}{2P_1 - 1}\right)^2 + \frac{2Y_1 - Y_1P_1}{2P_1 - 1} \cdot Y_1 + Y_1^2 = k.$$

$$4Y_1^2 - 4Y_1^2P_1 + Y_1^2P_1^2 + 4Y_1^2P_1 - 2P_1^2Y_1^2 - 2Y_1^2 + Y_1^2P_1 + 4P_1^2Y_1^2 - 4P_1Y_1^2 + Y_1^2 = k(2P_1 - 1)^2$$

$$3Y_1^2 - 3Y_1^2P + 3Y_1^2P_1^2 = k(2P_1 - 1)^2$$

$$Y_1 = \frac{\sqrt{k}(2P_1 - 1)}{\sqrt{3(1 - P_1 + P_1^2)}} \Rightarrow X_1 = \frac{\sqrt{k}(2 - P_1)}{\sqrt{3(1 - P_1 + P_1^2)}}$$

$$I.L = 1 - \frac{\sqrt{k}\,(2p_1 - p_1^2 + 2p_1 - 1)\sqrt{3(1-p+p^2)}}{\sqrt{3(1-p_1+p_1^2)}\,\sqrt{k}\,(2p_1 - p_1 p + 2p - 1)} =$$

$$= 1 - \frac{(p_1^2 + 4p_1 - 1)}{(2p_1 - p_1 p + 2p - 1)}\sqrt{\frac{1-p+p^2}{1-p_1+p_1^2}}$$

In Uni V2 whenever we collect fees they immediately added to pool – resulting in k increasing

We want to compensate IL:

$IL = 0 \Rightarrow \underline{X_1 P_1 + Y_1 = X P_1 + Y.}$ $(V_{pool} = V_{held})$

If we calculate fees: new k

$$V_{pool} = \frac{\sqrt{k_1}\,(p_1^2 + 4p_1 \mp 1)}{\sqrt{3(1+p_1^2-p_1)}} \quad \text{(see first item ↑)}$$

$$\frac{\sqrt{k_1}\,(p_1^2 - 4p_1 + 1)}{\sqrt{3(1+p_1^2-p_1)}} = \frac{\sqrt{k}\,(2p_1 - p_1 p + 2p - 1)}{\sqrt{3(1+p^2-p)}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k_1} = \frac{\sqrt{k}\,(2p_1 - p_1 p + 2p - 1)}{(p_1^2 + 4p_1 \mp 1)} \cdot \sqrt{\frac{1+p_1^2-p_1}{1+p^2-p}}$$

according to whitepaper $f_{01} = 1 - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k_1}} \Rightarrow$

$$f_{01} = 1 - \frac{\cancel{\sqrt{k}}}{\cancel{\sqrt{k}}}\,\frac{(p_1^2 + 4p_1 \mp 1)}{(2p_1 - p_1 p + 2p - 1)} \cdot \sqrt{\frac{1+p^2-p}{1+p_1^2-p_1}}$$

Task - 3:

Оценить размер начисленных комиссий на позицию в Uniswap V3. Для этого требуется использовать contract calls, доступные через Etherscan. Проделать последовательность действий:

- Наблюдение

Был выбран пул USDC/ETH под с адресом - [0x8ad599c3A0ff1De082011EFDDc58f1908eb6e6D8]()

Позиция по номером [236595]() в момент observation:

```
observationIndex = 976
observationCardinality = 1440
observationCardinalityNext = 1440
```

Через etherscan были получены все необходимые для вычислений значения

Все вычисления выполнены в [Google Colab Notebook]()

- Как вычисляются начисленные fees на позицию в Uniswap V3 [whitepaper]()

Для каждого тика мы вводим переменные - `feeGrowthOutside0X128`, `feeGrowthOutside0X128`, которые обозначают сколько комиссий было накоплено на единицу ликвидности выше данного тика. Обозначаем *f_o*

Для каждой позиции вводим переменные - `feeGrowthInside0LastX128`, `feeGrowthInside0LastX128`, которые обозначают кол-во комиссий, накоплено на ренж [tickLower, tickUpper] до момента последнего вывода комиссий, *f_r(t_0)*

Также каждый пул имеет глобальные переменные, которые обозначают комиссии на единицу ликвидности, накопленные на текущий момент, *f_g* – `feeGrowthGlobal0X128`, `feeGrowthGlobal1X128`

Тогда несобранные комиссии выражаются так: $f_u = l \cdot (f_r(t_1) - f_r(t_0))$, где

$$f_r = f_g - f_b(i_l) - f_a(i_u)$$

$$f_a(i) = \begin{cases} f_g - f_o(i) & i_c \geq i \\ f_o(i) & i_c < i \end{cases}$$

$$f_b(i) = \begin{cases} f_o(i) & i_c \geq i \\ f_g - f_o(i) & i_c < i \end{cases}$$

Что не совсем похоже на правду если брать реальные данные - на более чем 10 различный позициях у меня получается отрицательные collected fees

Об этом также спорили здесь -
https://ethereum.stackexchange.com/questions/101955/trying-to-make-sense-of-uniswap-v3-fees-feegrowthinside0lastx128-feegrowthglob
Тут за несобранные комиссии обозначается другая величина - tokensOwed, что более похоже на правду
https://javamana.com/2021/10/20211014022902929t.html

Мне кажется, что скорее всего - формула для комиссии выглядит так

$$f_u = l \cdot (f_r(t_1)$$

Этот результат более правдоподобен

```
Ucollected fees in 0 token for now, f_r -  4.6626585112054
Ucollected fees in 0 token for now, f_r -  3811.339904485574
```

Все вычисления и примеры в Google Collab Notebook