ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Մեկամյա դասընթաց ակտուարական և ֆինանսական մաթեմատիկայի երկրորդ կուրսի ուսանողների համար

ՎԻԿՏՈՐ ՕՀԱՆՅԱՆ

ԵՐԵՎԱՆ 2020/2021

§1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մեզանից յուրաքանչյուրը ունի իր ինտուիտիվ պատկերացումը հավանականության գաղափարի վերաբերյալ: Կարող ենք տալ այնպիսի հարցեր՝ "Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ վաղը կլինի անձրև", "Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ ավտոբուսի սպասման ժամանակը կլինի 10 րոպեից պակաս", և այլն: Երբ խոսում ենք հավանականության մասին, սովորաբար մտաբերում ենք խաղոսկրերի նետում, խաղաքարտեր կամ այլ մոլեխաղեր:

Հավանականությունների տեսության ծնունդը համարվում է $XVII$ դարը և կապվում է մոլեխաղերի կոմբինատոր խնդիրների հետ: Մոլեխաղերը դժվար է համարել լուրջ զբաղմունք, սակայն հենց այդ խնդիրներն են բերել այն պրոբլեմներին, որոնք չէին լուծվում այդ պահին գոյություն ունեցող մաթեմատիկական անալիզի շրջանակներում: Հավանականային մոդելները ըմբռնելու համար մենք հաճախակի կանդրադառնանք մոլեխաղերի ամենատարբեր օրինակների:

Նախորդ դարի սկզբին բնագիտության կարիքներից առաջացան ավելի լուրջ խնդիրներ: Այդ խնդիրները բերեցին մաթեմատիկայի այն բաժնի զարգացմանը, որն այսօր անվանում են Հավանականությունների տեսություն: Այսօր հավանականությունների տեսությունն ունի կիրառությունների լայն շրջանակ: Նա հիմնավորում է ժառանգականության տեսությունը և այդ իսկ պատճառով մեծ դեր է խաղում գենետիկայում: Տարրական մասնիկների ժամանակակից տեսությունները օգտագործում են հավանականային մոդելներ: Ինֆեկցիոն հիվանդությունների համաճարակային տարածումը դիտարկվում է հավանականությունների տեսության նոր ճյուղում՝ համաճարակաբանությունում: Հերթերի տեսությունը օգտագործում է հավանականային մոդելներ տարբեր սպասարկման համակարգերի համար: Անորոշությունը հնարավոր չէ շրջանցել ճարտարագիտական համակարգերի կառուցման և պլանավորման ժամանակ: Այդ իմաստով, հավանականությունների տեսության սկզբունքները մաթեմատիկական հիմք են հանդիսանում անորոշության մոդելավորման համար և նրա ազդեցությանը ճարտարագիտական համակարգերի վրա:

Բազմությանը կամ որևէ օբյեկտին իրական թիվ վերագրելու գաղափարը ծանոթ է բոլորին: Մենք կարող ենք խոսել հատվածի երկարության, եռանկյան մակերեսի, գնդի ծավալի մասին, կամ ֆիզիկական մարմնի զանգվածի, իր ջերմաստիճանի մասին և այլն: Բոլոր այդ օրինակները կարող են արտահայտվել իրական թվերով: Պատահույթի հավանականությունը նույնպես կարելի է արտահայտել թվերով: Այդ եղանակը շատ նման է ենթաբազմություններին երկարություն, մակերես, ծավալ վերագրելու գաղափարին:

Այսպիսով, հավանականությունների տեսությունը ուսումնասիրում է պատահական եր– նույթները: Ինչպես և մաթեմատիկայի բոլոր ճյուղերում, հավանականությունների տեսութ– յունը կառուցվում է աքսիոմատիկ հիմքի վրա: 1933 թ. Ա. Ն. Կոլմոգորովը առաջարկեց հավանականությունների տեսության աքսիոմատիկ մոտեցումը և նա այսօր միակ ընդունված մոդելն է: Ներկայումս ընդունված է հավանականությունների տեսության կառուցման հետևյալ մոտեցումը:

§2. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Պատահույթների հավանականությունների գաղափարը ներմուծելու համար մեզ անհրաժեշտ է փորձի **պատահույթների** գաղափարը: Յուրաքանչյուր փորձին համապատասխանում է որևէ ոչ դատարկ բազմություն՝ պարունակող տվյալ փորձի բոլոր հնարավոր ելքերը: Այդ բազմությունը նշանակենք Ω-ով, այն կոչվում է **բոլոր հնարավոր ելքերի բազմություն** կամ **տարրական պատահույթների բազմություն**: Ω-ի տարրը նշանակվում է ω: Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1. Եթե փորձը վերաբերվում է նորածին երեխայի սեռի որոշմանը, ապա

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\},$$

որտեղ ω_1 ելքը նշանակում է, որ նորածինը աղջիկ է, իսկ ω_2-ը՝ տղա:

Օրինակ 2. Եթե փորձը վերաբերվում է հարթ մակերևույթի վրա մետաղադրամի նետմանը, ապա Ω-ն նույնն է, ինչպես Օրինակ 1-ում, այսինքն

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\},$$

որտեղ ω_1-ը համապատասխանում է գերբին, իսկ ω_2-ը՝ գիրին:

Օրինակ 3. Եթե մենք նետենք համաչափ խաղոսկրը հարթ մակերևույթի վրա, ապա

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

որտեղ ω_i-ն համապատասխանում է ելքին, որ բացված նիստը պարունակում է i կետեր, $i = 1, 2, ..., 6$:

Օրինակ 4. Այժմ փորձը կայանում է նրանում, որ հարթ մակերևույթի վրա նետում են 2 մետաղադրամ: Այս դեպքում որպես հնարավոր ելքերի բազմություն (այսինքն որպես տարրական պատահույթների բազմություն) վերցնում ենք 4 տարրանոց բազմություն՝

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

որտեղ

$\omega_1 = (1, 1)$ ելքը՝ առաջին նետումից բացվել է գերբ և երկրորդ նետումից բացվել է գերբ;

$\omega_2 = (1, 0)$ ելքը՝ առաջին նետումից բացվել է գերբ և երկրորդ նետումից բացվել է գիր;

$\omega_3 = (0, 1)$ ելքը՝ առաջին նետումից բացվել է գիր և երկրորդ նետումից բացվել է գերբ;

$\omega_4 = (0, 0)$ ելքը՝ առաջին նետումից բացվել է գիր և երկրորդ նետումից բացվել է գիր:

Օրինակ 5. Դիցուք նետում են երկու համաչափ խաղոսկր հարթ մակերևույթի վրա: Այդ դեպքում

$$\Omega = \{\omega_1 = (1, 1), \quad \omega_2 = (1, 2), \quad \omega_3 = (2, 1), ..., \quad \omega_{36} = (6, 6)\},$$

որտեղ (i, j) այն ելքն է, երբ առաջին խաղոսկրի ցուցանիշը հավասար է i, իսկ երկրորդ խաղոսկրի ցուցանիշը՝ j, այսինքն Ω-ն 36 տարրանոց բազմություն է:

Օրինակ 6. 52 խաղաքարտերի կապուկից պատահականորեն ընտրվում է 1 խաղաքարտ: Ω-ն 52 տարրանոց բազմություն է:

Դիտողություն 1. Հարկավոր է նշել, որ փորձի փարրական պատահույթների բազմությունը կարելի է կառուցել ոչ միակ ձևով: Տարբեր մարդիկ կարող են կառուցել փարրական պատահույթների փարբեր բազմություններ: Օրինակ 2-ում Ω բազմությունը կարող է պարունակել 3 փարր, եթե կամենանք ավելացնել այն հնարավորությունը, որ մետաղադրամը կարող է կանգնել իր կողի վրա: Այդ դեպքում

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

որտեղ ω_1, ω_2-ը համապատասխանում են Օրինակ 2-ում նշված դեպքերին, իսկ ω_3 ելքը համապատասխանում է դրամի իր կողի վրա կանգնելու հնարավորությանը:

Գոյություն ունի նաև 4-րդ հնարավորություն՝ դրամը կարող է կորչել: Այդ դեպքում Ω-ն կլինի

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

որտեղ ω_4 ելքը համապատասխանում է կորչելու հնարավորությանը:

Այս օրինակներում Ω-ն վերջավոր փարրերից կազմված բազմություն է: Սակայն կան փորձեր, որտեղ Ω-ի փարրերի քանակը անվերջ է:

Օրինակ 7. Դիցուք նետում են մետաղադրամը մինչև առաջին անգամ զինանշանի բացվելը: Այդ դեպքում

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\},$$

որտեղ ω_i-ն համապատասխանում է այն ելքին, երբ առաջին անգամ զինանշանը բացվում է i-րդ նետման ժամանակ, այսինքն մենք պետք նետենք մետաղադրամը i անգամ, մինչև զինանշանի բացվելը:

Օրինակ 8. Դիցուք պատահականորեն ընտրում են կետ n–չափանի Էվկլիդեսյան $\mathbb{R}^n$ փարածության D սահմանափակ ենթաբազմությունից: Այդ դեպքում

$$\Omega = D:$$

Օրինակ 7-ում Ω-ն հաշվելի բազմություն է, իսկ Օրինակ 8-ում Ω-ն կոնտինիում բազմություն է:

Ընդհանուր դեպքում, Ω բազմությունը կանվանենք **դիսկրետ**, եթե նա ունի վերջավոր կամ հաշվելի տարրեր: Եթե Ω-ի կետերը (ելքերը) ունեն կոնտինիում հզորություն, օրինակ՝ բոլոր կետերը ուղղի վրա, բոլոր կետերը ուղղագիծ հատվածի վրա, կամ հարթության բոլոր կետերը, ապա Ω բազմությունը անվանում են **անընդհատ**:

Եթե փորձի ելքը պատկանում է A-ին, ապա ասում ենք, որ A-ն տեղի է ունեցել: $\omega \in A (\omega \notin A)$ նշանակում է, որ ω-ն պատկանում է (չի պատկանում) A ենթաբազմությանը: Մասնավորապես, Ω-ն հանդիսանում է ինքն իր ենթաբազմությունը:

Ω-ի կամայական A և B ենթաբազմությունների համար սահմանենք նոր պատահույթ՝

$$A \cup B,$$

որը կանվանենք A և B ենթաբազմությունների **միավորում**, որը պարունակում է այն ելքերը, որոնք պատկանում են առնվազն մեկին՝ կամ A-ին, կամ B-ին:

Նմանապես, ցանկացած A և B բազմությունների համար

$$A \cap B$$

կոչվում է A-ի և B-ի **հատում** և պարունակում է բոլոր ելքերը, որոնք պատկանում են և A-ին, և B-ին:

Եթե $A \cap B = \emptyset$, այսինքն A և B-ն միասին չեն կարող իրականանալ, ապա A-ն և B-ն կոչվում են **անհամատեղելի**: Օրինակ 4-ում $A = \{\omega_1\}$ և $B = \{\omega_4\}$ պատահույթները անհամատեղելի են:

Կամայական A բազմության համար $\overline{A}$-ը կոչվում է A-ի **լրացում** և պարունակում է Ω-ի բոլոր ելքերը, որոնք չեն պատկանում A-ին:

Կամայական A և B բազմությունների համար, եթե A-ի բոլոր ելքերը պատկանում են նաև

B-ին, ապա կասենք, որ A-ն հանդիսանում է B-ի ենթաբազմություն և կգրենք $A \subset B$: Եթե $A \subset B$ և $B \subset A$, ապա A-ն և B-ն համընկնում են և կգրենք $A = B$:

Կարող ենք սահմանել երկուսից ավելի բազմությունների միավորումը և հատումը: $A_1, A_2, ..., A_n$ բազմությունների **միավորումը** նշանակում են

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

որը պարունակում է այն ելքերը, որոնք պատկանում են A_i, $i = 1, ..., n$ բազմություններից առնվազն մեկին: Նմանապես, $A_1, A_2, ..., A_n$ բազմությունների **հատումը** նշանակում են

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k,$$

որը պարունակում է այն ելքերը, որոնք պատկանում են բոլոր A_i, $i = 1, 2, ..., n$ բազմություններին: Այլ կերպ ասած, A_i-երի միավորումը տեղի ունի, երբ տեղի ունի A_i բազմություններից առնվազն մեկը, իսկ հատումը տեղի ունի, երբ տեղի ունեն բոլոր A_i բազմությունները:

Նույն կերպ կարելի է սահմանել

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{և} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

կամայական $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ բազմությունների հաջորդականության համար:

$\{A_i\}$ բազմությունների կամայական ընտանիքի համար երեք հիմնական գործողությունները կապող (միավորումներ, հատումներ և լրացումներ) բանաձևերը հայտնի են որպես Դե Մորգանի կանոն՝

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i} : \tag{1}$$

Մասնավորապես, ունենք

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{և} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Վարժություն 1. Ապացուցել Դե Մորգանի կանոնը:

Ցուցում. Երկու բազմությունների հավասարությունը հաստատող արտահայտությունները ապացուցվում են հետևյալ եղանակով. վերցնում ենք հավասարության ձախ կողմին պատկանող կետ և ցույց ենք տալիս, որ կետը պատկանում է հավասարության աջ կողմին և հակառակը: Այս տիպի պնդումների ապացույցները միշտ բաց կթողնվեն:

Սահմանում 1. Ω-ի ենթաբազմությունների ոչ դատարկ $\mathcal{A}$ դասը կոչվում է հանրահաշիվ, եթե այն բավարարում է հետևյալ երկու հատկություններին՝

ա) Եթե $A \in \mathcal{A}$, ապա $\overline{A}$-ն ևս պատկանում է $\mathcal{A}$-ին;

բ) Եթե A և B-ն պատկանում են $\mathcal{A}$-ին, ապա $A \cap B$-ն ևս պատկանում է $\mathcal{A}$-ին:

Վարժություն 2. Ապացուցել, որ ցանկացած հանրահաշիվ օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1) $\varnothing \in \mathcal{A}$ և $\Omega \in \mathcal{A}$;

2) Եթե A և B-ն պատկանում են $\mathcal{A}$-ին, ապա $A \cup B \in \mathcal{A}$:

Հետևաբար, հանրահաշիվը Ω-ի ենթաբազմությունների դաս է, որը փակ է լրացումների, վերջավոր թվով միավորումների և հատումների նկատմամբ:

Սահմանում 2. Ω-ի ենթաբազմությունների ոչ դատարկ $\mathcal{F}$ դասը կոչվում է $\sigma-$հանրահաշիվ, եթե բավարարում է հետևյալ երկու հատկություններին՝

ա) Եթե $A \in \mathcal{F}$, ապա $\overline{A}$ -ն ևս պատկանում է $\mathcal{F}$-ին;

բ) Եթե կամայական A_n, $n = 1, 2...$ ենթաբազմությունների հաջորդականությունը պատկանում է $\mathcal{F}$-ին, ապա $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ևս պատկանում է $\mathcal{F}$-ին:

Վարժություն 3. Ապացուցել, որ կամայական $\sigma-$հանրահաշիվ օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1) կամայական $\sigma-$հանրահաշիվ նույնպես հանրահաշիվ է;

2) եթե կամայական A_n, $n = 1, 2...$ ենթաբազմությունների հաջորդականությունը պատկանում է $\mathcal{F}$-ին, ապա $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ևս պատկանում է $\mathcal{F}$-ին:

Հետևաբար, $\sigma-$հանրահաշիվը Ω-ի ենթաբազմությունների մի դաս է, որը փակ է լրացումների, վերջավոր և հաշվելի միավորումների և հատումների նկատմամբ:

Սահմանում 3. Ω բազմության A ենթաբազմությունը կոչվում է **պատահույթ**, եթե այն պատկանում է $\mathcal{F}$-ին: $(\Omega, \mathcal{F})$ զույգը կոչվում է **չափելի տարածություն**:

Եթե Ω-ն դիսկրետ է, ապա որպես $\mathcal{F}$ σ-հանրահաշիվ մենք կարող ենք միշտ վերցնել Ω-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը:

$\{\emptyset, \Omega\}$ դասը, որը բաղկացած է $\emptyset$ և Ω ենթաբազմություններից, Ω-ի ամենանեղ հանրահաշիվն է:

Օրինակ 1-ում եթե $A = \{\omega_1\}, B = \{\omega_2\}$, ապա $A \cup B = \Omega$, այսինքն $A \cup B$ հավաստի պատահույթ է, իսկ $A \cap B$ չի պարունակում որևէ ելք և հետևաբար տեղի չունի: Այդ պատահույթը անվանելու համար ներմուծենք **անհնար պատահույթի** գաղափարը և նշանակենք այն $\emptyset$: Այսպիսով $\emptyset$ նշանակում է մի պատահույթ, որը ելքեր չի պարունակում:

Բերենք պատահույթների մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1-ում եթե $A = \{\omega_2\}$, ապա A-ն պատահույթ է, որ երեխան տղա է:

Օրինակ 2-ում եթե $A = \{\omega_1\}$, ապա A-ն պատահույթ է, որ դրամը նետելիս բացվել է գերբ:

Օրինակ 3-ում եթե $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, ապա A-ն պատահույթ է, որ բացվել է զույգ թիվ:

Օրինակ 4-ում եթե $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, ապա A-ն պատահույթ է, որ բացվել է առնվազն մեկ գերբ:

Օրինակ 7-ում եթե $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_7\}$, ապա A-ն պատահույթ է, որ դրամի նետումների թիվը չի գերազանցում 7-ը:

Օրինակ 9. Դիտարկենք մի փորձ, որը պարունակում է որոշակի խաչմերուկում ճանապարհատրանսպորտային պատահարների թիվը որոշակի ժամանակահատվածում: Տարրական պատահույթների բազմությունն է

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, ...\} :$$

"Տրանսպորտային պատահարների թիվը փոքր է կամ հավասար 7-ից" պնդումը նկարագրում է $\{0, 1, ..., 7\}$ պատահույթը: $A = \{5, 6, 7, ...\}$ պատահույթը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, եթե տրանսպորտային պատահարների թիվը մեծ կամ հավասար է 5-ի:

Մասնավորապես, Ω-ն հանդիսանում է ինքն իր ենթաբազմությունը և հետևաբար նաև պատահույթ է (այսինքն $\Omega \subset \Omega$ և $\Omega \in \mathcal{F}$): Ω-ն կանվանենք **հավաստի պատահույթ**, քանի որ Ω-ի կառուցման մեթոդի համաձայն այն միշտ տեղի ունի: Բազմության լրացումը հավանականությունների տեսության մեջ անվանում են **հակադիր պատահույթ**:

Կասենք, որ

$$\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_N\}$$

բազմությունների համակարգը ձևավորում է Ω բազմության տրոհում, իսկ D_i-երը տրոհման ատոմներն են, եթե D_i բազմությունները դատարկ չեն, D_i-երը զույգ առ զույգ անհամատեղելի են ($D_i \cap D_j = \varnothing$ կամայական $i \neq j$ համար) և նրանց միավորումը հավասար է Ω-ի: Եթե Ω-ն պարունակում է 3 կետ, ապա գոյություն ունեն Ω բազմության 5 տարբեր տրոհումներ:

Վարժություն 4. Դիցուք Ω-ն բաղկացած է n կետերից: Ցույց տալ, որ Ω-ի բոլոր տարբեր տրոհումների $d(n)$ թիվը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$d(n) = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} :$$

Ցուցում. Ապացուցել, որ

$$d(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} d(k),$$

որտեղ $d(0) = 1$ և ստուգել, որ նախորդ բանաձևը բավարարում է անդրադարձ առընչություններին:

Վարժություն 5. Դիցուք Ω-ն վերջավոր բազմություն է: Եթե $\mathcal{D}$-ն Ω բազմության տրոհումն է, ապա գոյություն ունի միակ $\mathcal{A}$ հանրահաշիվ, ծնված $\mathcal{D}$ տրոհմամբ (այսինքն $\mathcal{A}$ հանրահաշվի տարրերը հանդիսանում են դատարկ բազմությունը և բազմությունների միավորումները, որոնք $\mathcal{D}$ տրոհման ատոմներն են):

Հակառակը նույնպես ճիշտ է: Դիցուք B-ն Ω վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների հանրահաշիվ է: Այդ դեպքում գոյություն ունի Ω-ի միակ $\mathcal{D}$ տրոհում, որի ատոմները հանրահաշվի տարրերն են այնպես, որ B հանրահաշիվը ծնվում է $\mathcal{D}$ տրոհումով:

§3. ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ

Դիտարկենք որևէ փորձ և դիցուք Ω-ն այդ փորձի տարրական պատահույթների բազմությունն է: **Հավանականություն** Ω-ում հանդիսանում է P իրական ֆունկցիան, որը որոշված է Ω-ի պատահույթների վրա և բավարարում է հետևյալ երեք աքսիոմներին՝

Աքսիոմ 1. $P(A) \geq 0$ ցանկացած A պատահույթի համար:

Աքսիոմ 2. $P(\Omega) = 1$:

Աքսիոմ 3. A_1, A_2, ... զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթների ցանկացած հաջորդականության համար (այսինքն պատահույթներ, որոնց համար $A_i \cap A_j = \varnothing$, եթե $i \neq j$) տեղի ունի

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) : \tag{2}$$

$P(A)$-ն կանվանենք A պատահույթի հավանականություն:

Այսպիսով, Աքսիոմ 1-ը պնդում է, որ հավանականությունը որ փորձի ելքը պատկանում է A-ին, հանդիսանում է որոշակի ոչ բացասական թիվ: Աքսիոմ 2-ը պնդում է, որ հավաստի պատահույթի հավանականությունը միշտ հավասար է մեկի: Աքսիոմ 3-ը պնդում է, որ կամայական $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթների հաջորդականության համար հավանականությունը, որ պատահույթներից առնվազն մեկը տեղի կունենա, հավասար է նրանց համապատասխան հավանականությունների գումարին:

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Օրինակ 10. Օրինակ 2-ում ենթադրենք, որ գիր և գերբ բացվելու հավանականությունները հավասարահնարավոր են, այսինքն

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2} :$$

Մյուս կողմից, եթե նետում ենք ոչ համաչափ մետաղադրամ և նկատել ենք, որ գերբը բացվում է երկու անգամ ավելի հաճախ, քան գիրը, ապա

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{2}{3}, \qquad P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3} :$$

Օրինակ 11. Օրինակ 3-ում ենթադրելով, որ բոլոր ելքերը հավասարահնարավոր են, կունենանք

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = ... = P(\{\omega_6\}) = \frac{1}{6} :$$

Աքսիոմ 3-ից հետևում է, որ զույգ թիվ բացվելու հավանականությունը կլինի

$$P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}) = P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_6\}) = \frac{1}{2} :$$

Այդ աքսիոմներից կօգտվենք հավանականության հատկությունները ապացուցելու համար:

Հատկություն 1. $P(\emptyset) = 0$: Անհնար պատահույթի հավանականությունը հավասար է 0:

Ապացույց. Դիտարկենք $A_1, A_2, ...$ զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթների հաջորդականություն, որտեղ $A_1 = \Omega$, $A_k = \emptyset$, $k > 1$ համար: Քանի որ $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ապա Աքսիոմ 3-ի համաձայն ունենք

$$P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) :$$

Քանի որ ըստ Աքսիոմ 2-ի $P(\Omega) = 1$, ստանում ենք

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0,$$

որտեղից հետևում է, որ $P(\emptyset) = 0$:

Նշենք նաև, որ ցանկացած վերջավոր թվով $A_1, ..., A_n$ զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթների համար

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) : \tag{3}$$

Մասնավորապես, կամայական երկու անհամատեղելի A և B պատահույթների համար

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) : \tag{4}$$

(3)-ի ապացույցը հետևում է Աքսիոմ 3-ից: Վերցնելով $A_i = \emptyset$, $i = n+1, n+2, ...$, կունենանք

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcup \left[\bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) :$$

Քանի որ $P(\emptyset) = 0$, կստանանք (3)-ը:

Հետևաբար Աքսիոմ 3-ը տեղի ունի ինչպես վերջավոր թվով պատահույթների համար (տես (3) և (4)), այնպես էլ հաշվելի թվով պատահույթների համար:

Հատկություն 2. Կամայական A պատահույթի համար

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) :$$

Ապացույց. Նախ և առաջ նշենք, որ A և $\overline{A}$ միշտ անհամատեղելի են: Քանի որ $A \cup \overline{A} = \Omega$, ապա Աքսիոմ 3-ի համաձայն

$$P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \quad \text{և ըստ Աքսիոմ 2-ի} \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1 :$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Որպես մասնավոր դեպք գտնում ենք, որ $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$, քանի որ անհնար պատահույթը հանդիսանում է Ω-ի լրացում:

Հատկություն 3. Կամայական A և B պատահույթների համար

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) : \tag{5}$$

Ապացույց. $A \cap B$ և $B \cap \overline{A}$ պատահույթները անհամատեղելի են և նրանց միավորումը տալիս է B: Հետևաբար, ըստ Աքսիոմ 3-ի, $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$, որտեղից անմիջապես հետևում է (5)-ը, քանի որ $B \setminus A = B \cap \overline{A}$:

Հատկություն 4. Եթե $A \subset B$, ապա

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) :$$

Ապացույց. Հատկություն 4-ը հետևում է Հատկություն 3-ից:

Հատկություն 5. Եթե $A \subset B$, ապա $P(A) \leq P(B)$, այսինքն P հավանականությունը հանդիսանում է չնվազող ֆունկցիա:

Ապացույց. Քանի որ $P(B \setminus A) \geq 0$, ապա Հատկություն 5-ը բխում է Հատկություն 4-ից:

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 3

Հատկություն 6. Կամայական A պատահույթի համար

$$P(A) \leq 1:$$

Հատկություն 6-ը անմիջապես հետևում է Հատկություն 5-ից, որտեղ ենթադրում ենք $B = \Omega$ և Աքսիոմ 2-ից (քանի որ ցանկացած A պատահույթ հանդիսանում է հավաստի պատահույթի ենթապատահույթ):

Հետևաբար, Աքսիոմ 1-ը և Հատկություն 6-ը պնդում են, որ փորձի ելքը A-ում պարունակվելու հավանականությունը 0-ի և 1-ի միջև ընկած թիվ է՝

$$0 \leq P(A) \leq 1:$$

Հատկություն 7. Կամայական A և B պատահույթների համար

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B): \tag{6}$$

Ապացույց. Դժվար չէ ապացուցել հետևյալ նույնությունը՝

$$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A}),$$

որտեղ A և $B \cap \overline{A}$-ն անհամատեղելի են: Ըստ Աքսիոմ 3-ի կստանանք

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}): \tag{7}$$

Քանի որ $B \cap \overline{A} = B \setminus A$, ըստ Հատկություն 3-ի կստանանք

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B): \tag{8}$$

Տեղադրելով (8)-ը (7)-ի մեջ, կստանանք (6)-ը: Հատկությունն ապացուցվեց:

Օրինակ 12. 52 խաղաքարտերից բաղկացած կապուկից պատահականորեն ընտրում են մեկը: Կգրանցի հաղթանակ, եթե ընտրված խաղաքարտը կամ խաչ է, կամ արքա: Գտնել հաղթելու հավանականությունը:

Լուծում. Նշանակենք A-ով պատահույթը, որ խաղաքարտը խաչ է, իսկ B-ով, որ այն արքա է: Պահանջվող հավանականությունը հավասար կլինի $P(A \cup B)$: Հատկություն 7-ից հետևում է, որ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) :$$

Քանի որ

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{52} \quad \text{և} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{52},$$

ապա կստանանք

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13} :$$

Հատկություն 8 (Կցման և արտաքսման սկզբունքը) . Կամայական A_1, A_2, ..., A_n պատահույթների համար ունենք

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k<j} P(A_k \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{k<j<i} P(A_k \cap A_j \cap A_i) - ... + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) : \tag{9}$$

Վարժություն 6. Ապացուցել Հատկություն 8-ը:

Ցուցում. Նշենք, որ (6)-ը հանդիսանում է (9)-ի մասնավոր դեպք, երբ $n = 2$: Ապացույցի համար բավական է կիրառել մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը[1]:

Հատկություն 9. Կամայական A և B պատահույթների համար տեղի ունի

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) : \tag{10}$$

[1] Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը կայանում է նրանում, որ $p(n)$ պնդումը, որը կախված է n ամբողջ թվից, ճիշտ է $n = 2, 3, ...$ համար, եթե ցույց տանք, որ (ա) նա ճիշտ է $n = 2$ համար և (բ) $p(n)$-ից բխում է $p(n+1)$ ցանկացած n-ի համար:

Ապացույցը բխում է (6)-ից:

Հատկություն 10 (Բուլի անհավասարություն). $A_1, ..., A_n, ...$ պատահույթների կամայական հաջորդականության համար

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) : \tag{11}$$

Ապացույց. (11)-ը ապացուցելու համար ներկայացնենք $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ հետևյալ տեսքով՝

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n),$$

որտեղ

$$B_n = \overline{\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k} \quad (B_1 = \Omega,\ B_2 = \overline{A_1},\ B_3 = \overline{A_1 \cup A_2} \quad ... \quad) :$$

Հետևաբար

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n)\right) :$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $\{A_n \cap B_n\}$ պատահույթները անհամատեղելի են: Հետևաբար ունենք

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B_n) :$$

Քանի որ $P(A_n \cap B_n) \le P(A_n)$ (ըստ Հատկություն 5-ի), ապացույցն ավարտվեց:

Հատկություններ 9 և 10-ը պնդում են, որ $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ պատահույթներից առնվազն մեկի տեղի ունենալու հավանականությունը չի գերազանցում այդ պատահույթների հավանակա–նությունների գումարին:

Սահմանում 4. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ եռյակը կոչվում է **հավանականային տարածություն**, որտեղ Ω-ն տարրական պատահույթների բազմությունն է, $\mathcal{F}$-ը σ-հանրահաշիվ է, իսկ P-ն $\mathcal{F}$-ի վրա որոշված հավանականություն է, որը բավարարում է 1, 2 և 3 Աքսիոմներին:

Հիշեցնենք, որ կամայական հավանականություն բավարարում է հետևյալ աքսիոմին.

Աքսիոմ 3. Կամայական A_1, A_2, ... զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթների համար (այսինքն այն պատահույթները, որոնց համար $A_i \cap A_j = \varnothing$ եթե $i \neq j$) տեղի ունի

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n):$$

Ներմուծենք նաև վերջավոր գումարականության աքսիոմը.

Աքսիոմ $3'$. Վերջավոր թվով կամայական A_1, A_2, ..., A_N զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթների համար տեղի ունի

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n):$$

Նախորդ դասախոսության ժամանակ մենք ապացուցել ենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 1. Կամայական հավանականություն բավարարում է $3'$ Աքսիոմին:

§4. ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՈՐՊԵՍ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

$\{A_n,\ n \geq 1\}$ հաջորդականությունը կոչվում է աճող, եթե

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1} \subset ...$$

և նվազող, եթե

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset A_{n+1} \supset ... :$$

Սահմանում 5. Կասենք, որ $\{A_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճելով ձգտում է A պատահույթին և կնշանակենք

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow A_n = A \qquad \text{կամ} \quad A_n \uparrow A,$$

եթե բավարարվում են հետևյալ երկու պայմանները՝

1) $\{A_n\}$-ը պատահույթների աճող հաջորդականություն է (այսինքն $A_n \subset A_{n+1}$, կամայական $n = 1, 2, ...$ համար);

2) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$:

Եթե մենք ունենք աճող հաջորդականություն, ապա սահմանը բնականորեն սահմանվում է որպես բոլոր A_n պատահույթների միավորում:

Սահմանում 6. Կասենք, որ $\{A_n\}$ հաջորդականությունը նվազելով ձգտում է A պատահույթին և կնշանակենք

$$\lim_{n\to\infty} \downarrow A_n = A \qquad \text{կամ} \quad A_n \downarrow A,$$

եթե բավարարվում են հետևյալ երկու պայմանները՝

1) $\{A_n\}$-ը պատահույթների նվազող հաջորդականություն է (այսինքն $A_n \supset A_{n+1}$, կամայական բնական n-ի համար);

2) $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$:

Եթե ունենք նվազող հաջորդականություն, ապա սահմանը բնականորեն սահմանվում է որպես բոլոր A_n պատահույթների հատում:

Հետևաբար կամայական $\{A_n\}$ մոնոտոն հաջորդականության համար գոյություն ունի սահման: Մասնավորապես, $A_n \downarrow \emptyset$, եթե $\{A_n, \quad n \geq 1\}$ նվազող հաջորդականություն է և

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset :$$

Ներմուծենք հետևյալ աքսիոմը.

Աքսիոմ $3''$**.** Պատահույթների բազմության վրա որոշված P ֆունկցիան անընդհատ է $\emptyset$-ում, եթե կամայական $\{A_n\}$ պատահույթների հաջորդականության համար այնպիսին, որ $A_n \downarrow \emptyset$ բխում է

$$P(A_n) \downarrow 0 :$$

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 4

Լեմմա 2. Կամայական P հավանականությունը անընդհատ է $\emptyset$-ում:

Ապացույց. Դիցուք $A_n \downarrow \emptyset$, այսինքն $A_{n+1} \subset A_n$ կամայական n-ի համար և

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset : \tag{12}$$

Պետք ապացուցել, որ $P(A_n) \downarrow 0$:

Դժվար չէ սփուգել, որ կամայական $\{A_n\}$ նվազող հաջորդականության համար ունենք

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1}) \bigcup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) :$$

Հարկավոր է ապացուցել, որ եթե ելքը պատկանում է նույնության ձախ կողմին, ապա ելքը կպատկանի աջ կողմին և հակառակը (այս պնդման ապացույցը բաց ենք թողնում):

(12)-ից հետևում է, որ

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1})$$

և $\{A_k \setminus A_{k+1}\}$ զույգ առ զույգ անհամատեղելի են: Այսպիսով,

$$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1}) : \tag{13}$$

Գրենք այս հավասարումը $n = 1$ համար, կունենանք

$$P(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1}) :$$

Քանի որ ըստ Աքսիոմ 1-ի և Հատկություն 6-ի ($0 \leq P(A) \leq 1$) գալիս ենք եզրահանգման, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1})$$

շարքը զուգամետ է: Ինչպես գիտենք $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ զուգամետ շարքի $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$ մնացորդը ձգտում է 0-ի, երբ $N \to \infty$, հետևաբար ըստ (13)-ի, $P(A_n) \downarrow 0$:

Թեորեմ 1. Աքսիոմ 3-ը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն Աքսիոմ– ներ $3'$ և $3''$-ը:

Լեմմա 1 և 2-ում ապացուցել ենք, որ Աքսիոմ 3 $\Rightarrow$ Աքսիոմներ $3'$ և $3''$:

Ապացուցենք, որ Աքսիոմներ $3'$ և $3''$ $\Rightarrow$ Աքսիոմ 3:

Ակնհայտ է, որ կամայական N-ի համար ըստ Աքսիոմ $3'$-ի ունենք

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) + P\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) : \tag{14}$$

Եթե (14)-ի երկու կողմերում անցնենք սահմանի, երբ $N \to \infty$, կստանանք

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) :$$

Այժմ ապացուցենք, որ

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = 0 : \tag{15}$$

Նշանակենք

$$B_N = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n :$$

Քանի որ $B_N \downarrow \emptyset$, ըստ Աքսիոմ $3''$-ի կստանանք (15)-ը:

Հատկություն 11. Եթե $A_n \downarrow A$, ապա $P(A_n) \downarrow P(A)$:

Հատկություն 12. Եթե $A_n \uparrow A$, ապա $P(A_n) \uparrow P(A)$:

Հատկություններ 11 և 12 պնդում են, որ կամայական հավանականություն անընդհատ է պատահույթների մոնոտոն աճող և նվազող հաջորդականությունների նկատմամբ:

Հատկություն 11-ի ապացույցը. $A_n \downarrow A$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $(A_n \setminus A) \downarrow$

$\varnothing$: Հետևաբար, ըստ Թեորեմ 1-ի, $P(A_n \setminus A) \downarrow 0$: Ըստ Հատկություն 4-ի ստանում ենք $P(A_n) - P(A) \downarrow 0$: Ապացույցն ավարտվեց:

Հատկություն 12-ի ապացույցը. $A_n \uparrow A$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $(A \setminus A_n) \downarrow \varnothing$: Հետևաբար, ըստ Թեորեմ 1-ի, $P(A \setminus A_n) \downarrow 0$: Ըստ Հատկություն 4-ի ստանում ենք $P(A) - P(A_n) \downarrow 0$: Հետևաբար $P(A_n) \uparrow P(A)$: Ապացույցն ավարտվեց:

Վարժություն 7. Տրված Ω-ի համար սահմանենք μ ֆունկցիան Ω-ի ենթաբազմությունների վրա հետևյալ կերպ՝

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad A \neq \Omega \\ 1, & \text{եթե} \quad A = \Omega: \end{cases}$$

μ-ն հավանականություն է, թե՝ ոչ՞:

Դիտողություն 2. Մենք ենթադրել էինք, որ $P(A)$-ն որոշված է պարրական պատահույթների պարածության A պատահույթների համար, այսինքն $A \in \mathcal{F}$: Սակայն եթե պարրական պատահույթների բազմությունը հաշվելի է, $P(A)$-ն սահմանված է բոլոր $A \subset \Omega$ ենթաբազմությունների համար

§5. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում 7. Ω բազմությունը կոչվում է վերջավոր, եթե փորձի հնարավոր ելքերի թիվը վերջավոր է, այսինքն

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} :$$

Այլ կերպ ասած, Ω-ն վերջավոր բազմություն է, որը նշանակում է որ պատահական փորձը պարունակում է վերջավոր թվով հնարավոր ելքեր:

Սահմանում 8. Միանդամ պատահույթը մի պատահույթ է, որը պարունակում է ճշգրիտ մեկ ելք:

Եթե A պատահույթը ունի միայն մեկ ω_i ելք, ապա այդ փաստը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝ $A = \{\omega_i\}$: Այսպիսով $\{\omega_i\}$-ն պատահույթ է, որը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ պատահական փորձի ընթացքում տեղի է ունեցել ω_i ելքը:

Դիցուք Ω-ն վերջավոր բազմություն է: Վերցնենք p_i թվերը այնպես, որ $p_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$ և $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$: Ենթադրենք

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i : \tag{16}$$

Վարժություն 8. Ապացուցել, որ (16)-ում սահմանված ֆունկցիան հավանականություն է:

Ցուցում. Պետք է ստուգել Աքսիոմներ 1, 2 և 3-ը:

Վարժություն 9. Ցույց տալ, որ եթե P-ն հավանականություն է $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$-ի վրա, ապա գոյություն ունեն $p_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$ թվեր և $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ այնպես, որ (16)-ը տեղի ունի $p_i = P(\{\omega_i\})$-ի համար:

Ցուցում. Գոյություն ունեն n վերջավոր տարրանոց բազմության 2^n հնարավոր պատահույթներ: Դիցուք A-ն որևէ պատահույթ է: Մենք կարող ենք ներկայացնել $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}\}$, $k < \infty$: Ω-ի վրա որոշված $P(\cdot)$ հավանականությունը կարելի է սահմանել, տալով $P(\{\omega_i\})$ արժեքները $\{\omega_i\}$ միանդամ պատահույթների վրա, որոնք համապատասխանում են Ω-ի տարրերին: Նրա $P(A)$ արժեքը A պատահույթի վրա կարելի է հաշվել

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{\omega_{i_j}\})$$

բանաձևով:

Վարժություն 10. Դիցուք Ω-ն 2 տարրանոց բազմություն է, այսինքն $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$: Ենթադրենք, որ $p_1 = p$ և $p_2 = 1 - p$, որտեղ $0 \leq p \leq 1$: Այս օրինակը նկարագրում է բոլոր փորձերը, որոնք ունեն երկու ելք: Եթե փորձը վերաբերվում է մետաղադրամի նետմանը և եթե ենթադրենք, որ զերբը և գիրը հավասարահնարավոր են, ապա կունենանք $p = 1/2$: Մյուս կողմից, եթե մետաղադրամը անհամաչափ է և զերբը բացվում է 2 անգամ ավելի հաճախ, քան գիրը, ապա կունենանք $p = 2/3$ (տես Օրինակներ 2 և 10):

§6. ՀԱՎԱՍԱՐԱՀՆԱՐԱՎՈՐ ԵԼՔԵՐՈՎ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Շատ դեպքերում, երբ առաջանում են տարրական պատահույթների վերջավոր բազմություններ, կարելի է ենթադրել, որ բոլոր ելքերը հավասարահնարավոր են, այսինքն բոլոր ելքերը Ω-ում ունեն տեղի ունենալու հավասար հավանականություններ: Ավելի ճշգրիտ, սահմանենք տարրական պատահույթների բազմությունը՝ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, որպես հավասարահնարավոր պատահույթներ ունեցող, եթե նրա բոլոր միանդամ պատահույթները ունեն հավասար հավանականություններ՝

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = ... = P(\{\omega_n\}) = p :$$

Աքսիոմներ 2-ից և 3-ից բխում է, որ

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = p \cdot n :$$

Հետևաբար

$$P(\{\omega_i\}) = p = \frac{1}{n} \qquad \text{կամայական} \quad i = 1, 2, ..., n \ \text{համար} :$$

Պարզ է, որ $\{\omega_i\}$ միանդամ պատահույթներից յուրաքանչյուրը ունի $1/n$ հավանականություն, քանի որ գոյություն ունեն n պատահույթներ, որոնցից յուրաքանչյուրը ունի հավասար հավանականություն, իսկ նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի՝ հավաստի պատահույթի հավանականությանը:

Աքսիոմ 3-ից բխում է, որ կամայական A պատահույթի համար

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \frac{A\text{-ի ելքերի քանակը}}{n} :$$

Հետևաբար հավասարահնարավոր ելքերով փարրական պատահույթների փարածությունում սահմանված որևէ պատահույթի հավանականության հաշվումը կարելի է բերել պատահույթի փարրերի քանակի հաշվմանը: Ըստ (16)-ի, A-ի հավանականությունը հավասար է A-ում պարունակվող ելքերի թիվը բազմապատկած $1/n$-ով: Այլ կերպ ասած, **A-ի հավանականությունը հավասար է A-ի և Ω-ի կետերի թվի հարաբերությանը:**

Եթե A պատահույթի ելքերի քանակը նշանակենք $N(A)$-ով, ապա նախորդ եզրահանգումները կարելի է իմի բերել հետևյալ բանաձևով՝

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{A\text{-ի հզորությունը}}{\Omega\text{-ի հզորությունը}} = \frac{A\text{-ի նպաստավոր ելքերի թիվը}}{\text{բոլոր հնարավոր ելքերի թիվը}} :$$

Սա հավանականության դասական սահմանումն է, որը առաջին անգամ ձևակերպվել է Լապլասի կողմից 1812 թվականին: Մի քանի դար շարունակ հավանականությունների տեսությունը հիմնված է եղել դասական սահմանման վրա: Այդ գաղափարը օգտագործվում է այսօր վիճակագրական փվյալներ հետազոտելու համար և որպես գործող վարկած: Պետք է նշել սակայն, որ $N(\Omega)$ և $N(A)$ թվերի իմաստը ոչ միշտ է պարզ:

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 5

Օրինակ 13. Նետում են 2 զառ: Պետք է գտնել հավանականությունը, որ բացված թվերի գումարը հավասար է 7-ի:

Լուծում. ա) Որպես հնարավոր ելքեր վերցնենք գումարի 11 հնարավոր արժեքներ՝ 2, 3, ..., 12: Դրանցից միայն մեկն է նպաստավոր 7 գումարին, հետևաբար $p = \frac{1}{11}$: Արդյունքը իհարկե սխալ է:

բ) Որպես հնարավոր ելքեր վերցնենք թվերի բոլոր զույգերը, չտարբերելով առաջին և երկրորդ զառերը: Ուստի ունենք 21 ելքեր, որոնց թվում $\{3,4\}$, $\{5,2\}$ և $\{6,1\}$ նպաստավոր զույգերը: Հետևաբար $p = \frac{3}{21}$: Այս արդյունքը նույնպես սխալ է:

գ) Այժ նկատենք, որ վերը նշված լուծումները սխալ են, քանի որ ա) և բ) կետերում ելքերը հավասարահնարավոր չեն: Խնդիրը "ճիշտ" լուծելու համար մենք պետք է հաշվենք առաջին և երկրորդ զառերի վրայի թվերի տարբեր զույգերը: Ընդհանուր ելքերի քանակը այժմ կլինի 36-ը, իսկ նպաստավոր ելքերն են հետևյալ 6 զույգերը՝ $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(2,5)$, $(6,1)$ և $(1,6)$: Հետևաբար

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}:$$

§7. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Դիցուք Ω-ն բազմություն է Օրինակ 8-ից, այսինքն պատահականորեն նշում են կետ n–չափանի Եվկլիդեսյան $\mathbb{R}^n$ տարածության սահմանափակ D ենթաբազմության մեջ: Հետևաբար $\Omega = D$ և պատահույթները D-ի չափելի ենթաբազմություններ են: Ենթադրենք, որ D-ի ծավալը հավասար չէ 0, $V(D) \neq 0$ (V-ով նշանակել ենք ծավալը): Սահմանենք $P(A)$ հավանականությունը հետևյալ բանաձևով՝

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}. \tag{17}$$

Մասնավորապես, երբ $n = 2$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \tag{18}$$

որտեղ S-ը մակերեսն է:

Վարժություն 12. Ապացուցել, որ (17) բանաձևով սահմանված P-ն հավանականություն է:

Դիտողություն 3. Դպրոցից հայտնի է, որ $0+0=0$, այսինքն վերջավոր թվով զրոների գումարը հավասար է 0-ի: Հետո մենք սովորեցինք, որ հաշվելի թվով զրոների գումարը հավասար է 0-ի, այսինքն $\sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$ (տես սույն դասախոսության Լեմմա 3-ը): Սակայն անհաշվելի թվով պատահույթների համար դա ճիշտ չէ: Դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 14. Դիցուք $\Omega = [0,1] \times [0,1]$:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = S(A) \qquad (S(\Omega) = 1) :$$

Նշանակենք

$$A_y = \{(x,y) \;\; y\text{-ը ֆիքսված է}\} :$$

$$P(A_y) = 0 \quad \text{կամայական} \quad y \in [0,1] \quad \text{համար և} \quad \Omega = \bigcup_{y \in [0,1]} A_y, \quad P(\Omega) = 1 :$$

Վարժություն 13. Բերել ժխտօրինակներ հետևյալ պնդումների համար.

ա) եթե $P(A) = 0$, ապա $A = \varnothing$,

բ) եթե $P(A) = 1$, ապա $A = \Omega$:

Լեմմա 3. Եթե $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ վերջավոր կամ անվերջ հաջորդականության պատահույթներից յուրաքանչյուրն ունի 1-ին հավասար հավանականություն (այսինքն $P(A_k) = 1$ կամայական $k = 1, 2, ...$ համար), ապա

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1 :$$

Լեմմա 4. Եթե $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ վերջավոր կամ անվերջ հաջորդականության պատահույթներից յուրաքանչյուրն ունի 0-ին հավասար հավանականություն (այսինքն $P(A_k) =$

0 **կամայական** $k = 1, 2, ...$ **համար), ապա**

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0 :$$

Վարժություն 14. Ապացուցել Լեմմաներ 3 և 4-ը:

§8. ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԻՆ ԵՎ ՍՏՈՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ

Սահմանում 9. Կամայական $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ պատահույթների հաջորդականության համար

$$\limsup_{n\to\infty} A_n$$

վերին սահմանը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Սահմանում 10. Կամայական $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ պատահույթների հաջորդականության համար

$$\liminf_{n\to\infty} A_n$$

ստորին սահմանը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Սահմանում 11. Վերին և ստորին սահմանները հավասար են

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

ապա ասում ենք, որ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ունի սահման, և

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Վարժություն 13. Ապացուցել ստորին և վերին սահմանների հավանականային իմաստը.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n =$$

$\{\omega \in \Omega :$ գոյություն ունի ենթահաջորդականություն A_{n_k}, որ ցանկացած k -ի համար $\omega \in A_{n_k}\}$;

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \text{գոյություն ունի } N, \text{ որ ցանկացած } n > N\text{-ի համար } \omega \in A_n\};$$

Հետևաբար, կամայական $\{A_n\}_{n\geq 1}$ պատահույթների հաջորդականության համար ունենք

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Օրինակ 15. Պատահույթների յուրաքանչյուր մոնոտոն հաջորդականություն ունի սահման, բացի այդ

ա) եթե $\{A_n\}_{n\geq 1}$ մոնոտոն աճող է, այսինքն

$A_n \subset A_{n+1}$, կամայական n-ի համար, ապա

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

բ) եթե $\{A_n\}_{n\geq 1}$ մոնոտոն չնվազող է, այսինքն

$A_{n+1} \subset A_n$, կամայական n-ի համար, ապա

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Լեմմա 5 (Բորել-Կանտելի). Եթե պատահույթների հաջորդականության համար

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

շարքը զուգամետ է, ապա

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Լեմմա 5-ի ապացույցը. Ունենք

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n,$$

որտեղ

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Հաջորդիվ, ըստ Հատկություն 10-ի ունենք

$$P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$$

քանի որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ շարքը զուգամետ է: Ապացույցն ավարտվեց:

§8. ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Այս պարագրաֆում մենք քննարկելու ենք հետևյալ հարցը. ենթադրենք տեղի է ունեցել որևէ A պատահույթ: Օգտագործելով այդ տեղեկատվությունը ինչպես կփոխվեն մնացած պատահույթների հավանականությունները՞: B պատահույթի նոր հավանականությունը կանվանենք **B-ի պայմանական հավանականություն A պատահույթի պայմանով** և կնշանակենք $P(B\,/A)$-ով:

$P(B\,/A)$ պայմանական հավանականությունը նշանակում է B-ում ω ելքի իրագործումը այն պայմանում, որ ω-ն պատկանում է A-ին: Այլ կերպ ասած, մեզ հետաքրքրում է B պատահույթի հավանականությունը վերակառուցված $\Omega = A$ հավանականային տարածության վրա, որտեղ կդիտարկենք $P(B\,/A)$ պայմանական հավանականությունը:

Օրինակ 15. Նետում են խաղոսկր: Դիցուք B-ն "6" բացվելու պատահույթն է: Դիցուք A-ն 4-ից մեծ թիվ բացվելու պատահույթն է: Նախքան փորձ կատարելը $P(B) = 1/6$: Այժմ ենթադրենք , որ A պատահույթը տեղի է ունեցել: Այս տեղեկատվությունը նշանակում է, որ տեղի ունեն միայն երկու հնարավոր ելքեր՝ 5 և 6: Քանի որ ուրիշ տեղեկատվություն բացակայում է, մենք կարող ենք ենթադրել, որ այդ ելքերը հավասարահնարավոր են, այնպես որ B-ի հավանականությունը A-ի տեղի ունենալու պայմանով կլինի $1/2$, այսինքն $P(B\,/A) = 1/2$:

Սահմանում 9. Դիցուք A-ն և B-ն Ω-ի պատահույթներ են, որի ենթաբազմությունների վրա սահմանված է $P(\cdot)$ հավանականությունը: B պատահույթի պայմանական հավանականություն A պատահույթի պայմանով նշանակում են

$$P(B\,/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}, \qquad \text{եթե} \quad P(A) \neq 0 \tag{19}$$

իսկ եթե $P(A) = 0$, ապա $P(B\,/A)$-ն որոշված չէ:

Բազմապատկելով (19) հավասարության երկու կողմերը $P(A)$-ով, կստանանք

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B\,/A) = P(B)\cdot P(A\,/B)\,: \tag{20}$$

Օրինակ 16. Ենթադրենք, որ սափորը պարունակում է 8 կարմիր և 4 սպիտակ գնդակներ: Սափորից պատահականորեն առանց վերադարձման հանում են 2 գնդակ: Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ հանված գնդակները կարմիր են (A պատահույթ):

Լուծում. A_1 և A_2-ով նշանակենք պատահույթները, որ առաջին և երկրորդ հանված գնդակները կարմիր են: Ըստ (20)-ի

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \,/\, A_1) :$$

Ակնհայտ է, որ $P(A_1) = \dfrac{8}{12}$:

Այժմ փրված է, որ առաջին ընտրված գնդակը կարմիր է, գոյություն ունեն 7 կարմիր և 4 սպիտակ գնդակներ և հետևաբար $P(A_2 \,/\, A_1) = \dfrac{7}{11}$: Պահանջվող հավանականությունն է՝

$$P(A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33} :$$

Իհարկե այս հավանականությունը կարելի էր հաշվել նաև դասական սահմանման միջոցով

$$P(A) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} :$$

(20) հավասարման ընդհանրացումը երբեմն վերագրում են **բազմապատկման կանոնին**

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \,/\, A_1) \cdot P(A_3 \,/ (A_1 \cap A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_n \,/ (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})) :$$

Բազմապատկման կանոնը ապացուցելու համար նրա աջ կողմում կիրառենք պայմանական հավանականության սահմանումը: Կստանանք

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{P(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k)}{P(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k)}$$

և կրճատելով կստանանք $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$:

§9. ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԿԱԽՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Պատահույթների կախվածության և անկախության գաղափարը կենտրոնական դեր է խաղում հավանականությունների տեսության մեջ: Եթե A և B պատահույթները ունեն հատկություն, որ B-ի պայմանական հավանականությունը ըստ A պայմանի հավասար է B-ի ոչ պայմանական հավանականությանը, ապա ինտուիտիվ կարելի է զգալ, որ B-ն վիճակագրորեն անկախ է A-ից, այն իմաստով, որ A-ի տեղի ունենալը չի ազդում B-ի հավանականության վրա:

Քանի որ $P(B\,/A\,) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, ապա տեսնում ենք, որ B-ն անկախ է A-ից, եթե

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\ : \tag{21}$$

Քանի որ (21)-ը համաչափ է ըստ A-ի և B-ի, ապա այստեղից հետևում է, որ եթե B-ն անկախ է A-ից, ապա A-ն անկախ է B-ից:

Սահմանում 10. Կասենք, որ A և B պատահույթները անկախ են, եթե տեղի ունի (21) հավասարությունը: Եթե A և B պատահույթները անկախ չեն, ապա ասում են, որ նրանք կախյալ են:

Օրինակ 17. Ենթադրենք նետում են երկու խաղոսկր և 36 ելքերը հավասարահնարավոր են, այսինքն յուրաքանչյուրն ունի $\dfrac{1}{36}$ հավանականություն: Ենթադրենք հայտնի դարձավ, որ առաջին խաղոսկրի վրա բացվել է 4-ը: Ինչի՞ է հավասար հավանականությունը, որ երկու խաղոսկրերի վրա բացված թվերի գումարը հավասար է 8-ի (B պատահույթ), եթե առաջինի վրա բացվել է 4-ը (A պատահույթ):

Լուծում. A պատահույթը բաղկացած է 6 ելքերից՝

$$\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}\ :$$

B պատահույթը բաղկացած է 5 ելքերից՝

$$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}:$$

$A\cap B$ պատահույթը բաղկացած է 1 ելքից՝ $\{(4,4)\}$, Ω-ն 36 տարրանոց բազմություն է: Ստանում ենք

$$P(A)=\frac{1}{6} \qquad P(B)=\frac{5}{36} \qquad P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$

և

$$P(B\,/\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{6}:$$

Հետևաբար $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ և A և B պատահույթները անկախ չեն:

Օրինակ 18. 52 խաղաքարտերի կապուկից պատահականորեն ընտրում են մեկ խաղաքարտ: Եթե A-ն պատահույթ է, որ ընտրվածը "արքա " է, իսկ B-ն՝ ընտրվածը "խաչ" է, ապա A-ն և B-ն անկախ են: Սա բխում է հետևյալից՝

$$P(A\cap B)=\frac{1}{52}, \quad P(A)=\frac{4}{52} \quad \text{և} \quad P(B)=\frac{13}{52}:$$

§10. ԱՆԿԱԽ ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Հատկություն 1. Եթե $P(A)\neq 0$, ապա A և B-ն անկախ են այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$P(B\,/\,A)=P(B):$$

Ապացույց. Ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Դիցուք A-ն և B-ն անկախ են, հետևաբար $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$: Այստեղից կստանանք

$$P(B\,/\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(A)}=P(B):$$

Այժմ ենթադրենք, որ $P(B\,/A\,) = P(B)$: Հետևաբար

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B\,/A\,) = P(A)\cdot P(B),$$

այսինքն A և B-ն անկախ են:

Հատկություն 2. Եթե A-ն և B-ն անկախ են, ապա A և $\overline{B}$-ը ևս անկախ են:

Հետևաբար, եթե A և B-ն անկախ են, ապա

$$A \text{ և } \overline{B}; \qquad \overline{A} \text{ և } B; \qquad \overline{A} \text{ և } \overline{B}$$

նույնպես անկախ են:

Ապացույց. Քանի որ A և B-ն անկախ են, ապա

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) :$$

Դժվար չէ սրուգել, որ $A\cap\overline{B} = A\setminus(A\cap B)$: Հետևաբար

$$P(A\cap\overline{B}) = P\left(A\setminus(A\cap B)\right) = P(A) - P(A\cap B) =$$

$$= P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)\left[1 - P(B)\right] = P(A)\cdot P(\overline{B}) :$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Հատկություն 3. Եթե A-ն անկախ է B_i, $i = 1, 2$ պատահույթներից և $B_1\cap B_2 = \emptyset$, ապա A-ն անկախ է $B_1\cup B_2$-ից:

Կառուցենք A_1, A_2, A_3 պատահույթների օրինակ այնպես, որ

$$P(A_1\cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2), \qquad P(A_1\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_3),$$

$$P(A_2\cap A_3) = P(A_2)\cdot P(A_3),$$

(այսինքն A_1, A_2, A_3 զույգ առ զույգ անկախ են), բայց

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) :$$

Ապացույց. Ունենք $P(A \cap B_i) = P(A) \cdot P(B_i), i = 1, 2$: Հետևաբար

$$P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) =$$

$$= P(A) \cdot P(B_1) + P(A) \cdot P(B_2) = P(A) \cdot [P(B_1) + P(B_2)] = P(A) \cdot P(B_1 \cup B_2) :$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Օրինակ 19. Նետում են երկու համաչափ խաղոսկր: A_1-ով նշանակենք պատահույթը, որ առաջին խաղոկրի վրա բացվել է 4-ը, իսկ A_2-ով՝ երկրորդի վրա բացվել է 3-ը: A_3-ով նշանակենք պատահույթը, որ բացված միավորների գումարը հավասար է 7-ի: Ունենք

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{6},$$

և

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36} :$$

Հետևաբար A_1, A_2, A_3 պատահույթները զույգ առ զույգ անկախ են (համեմատել Օրինակ 17-ի հետ):

Դժվար չէ ստուգել, որ

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) :$$

Հետևաբար, անկախության գաղափարը երկուսից ավել պատահույթների համար ավելի բարդ է: Այդ իսկ պատճառով գալիս ենք հետևյալ սահմանմանը:

Սահմանում 11. Կասենք, որ $A_1, ..., A_n$ պատահույթները անկախ են, եթե կամայական k-ի $(1 \leq k \leq n)$ համար և այդ պատահույթների կամայական $A_{i_1}, ..., A_{i_k}$ ենթաբազմությունների համար տեղի ունի

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}) :$$

§11. ԼՐԻՎ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԲԱՅԵՍԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Երբեմն A պատահույթի հավանականությունը ուղղակիորեն հնարավոր չէ հաշվել: Սակայն, նրա տեղի ունենալը կախված է ուրիշ B_i, $i \geq 1$ պատահույթների տեղի ունենալուց այնպես, որ A պատահույթի հավանականությունը կլինի միջինացված հավանականություն (այսինքն կշռավորված միջին B_i կշիռներով): Այս տիպի խնդիրների համար պահանջվում է **Լրիվ Հավանականության բանաձևը**:

Դիցուք A-ն $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ -ի ենթապատահույթ է (այսինքն $A \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$), $\{B_n\}$-երը զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթներ են և $P(B_n) \neq 0$ կամայական n-ի համար: Այդ դեպքում

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)\, P(A\,/B_n\,) : \tag{22}$$

(22) բանաձևը կանվանենք **Լրիվ հավանականության բանաձև**:

Ապացույց. Քանի որ A-ն B_n-երի միավորման ենթապատահույթ է, ապա

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n),$$

որտեղ $\{A \cap B_n\}$ զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, քանի որ $\{B_n\}$-երը զույգ առ զույգ անհամատեղելի են: Հետևաբար, ըստ Աքսիոմ 3-ի

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n)$$

և ըստ (20) բանաձևի՝ $P(A \cap B_n) = P(B_n) \cdot P(A\,/B_n\,)$: Ապացույցն ավարտվեց:

Օրինակ 20. Առաջին սափորը պարունակում է 6 սպիտակ և 4 սև գնդակներ, երկրորդ սափորը պարունակում է 5 սպիտակ և 2 սև գնդակներ: Առաջին սափորից պատահականորեն մեկ գնդակ փեղափոխվում է երկրորդ սափոր, ապա երկրորդ սափորից առանց վերադարձման պատահականորեն հանում են 2 գնդակ: Ինչպիսի՞ն է այդ երկու գնդակների սպիտակ լինելու հավանականությունը:

Լուծում. Նշանակենք B_1-ով պատահույթը, որ առաջին սափորից տեղափոխել են սպիտակ գնդակ, իսկ B_2-ով պատահույթը, որ առաջին սափորից տեղափոխել են սև գնդակ: Նշանակենք A-ով պատահույթը, որ երկրորդ սափորից հանել են 2 սպիտակ գնդակ: Ըստ (22) բանաձևի՝

$$P(A) = P(B_1)\, P(A\,/B_1\,) + P(B_2)\, P(A\,/B_2\,) :$$

Քանի որ

$$P(B_1) = \frac{3}{5}, \quad P(B_2) = \frac{2}{5}, \quad P(A\,/B_1\,) = \frac{15}{28}, \quad P(A\,/B_2\,) = \frac{5}{14}$$

ստանում ենք

$$P(A) = \frac{13}{28} :$$

Այսպիսով, կամայական A պատահույթի համար $P(A)$ ոչ պայմանական հավանականությունը կարելի է արտահայտել $P(A\,/B_1\,), ..., P(A\,/B_n\,)...$ պայմանական հավանականությունների և $P(B_1), ..., P(B_n)....$ ոչ պայմանական հավանականությունների միջոցով:

Գոյություն ունի լրիվ հավանականության բանաձևի հետաքրքիր հետևանք: Ենթադրենք լրիվ հավանականության բանաձևի բոլոր պայմանները բավարարված են: Հետևյալ բանաձևը

$$P(B_i\,/A\,) = \frac{P(B_i) \cdot P(A\,/B_i\,)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(B_n)\, P(A\,/B_n\,)} \qquad i = 1, 2, ... \tag{23}$$

հայտնի է որպես **Բայեսի բանաձև**:

Սովորաբար B_n պատահույթները անվանում են “վարկածներ”, որոնք նախքան փորձը ունեն $P(B_n)$ հավանականություններ: Բայեսի բանաձևը թույլ է տալիս վերաբաշխել B_i վարկածների հավանականությունները՝ հենվելով փորձի արդյունքի վրա:

Ապացուցենք (23)-ը: Կիրառելով (20) բանաձևը A և B_i պատահույթների նկատմամբ, կստանանք

$$P(B_i) \cdot P(A\,/B_i\,) = P(A) \cdot P(B_i\,/A\,) :$$

Հետևաբար ստանում ենք պահանջվող հավանականությունը՝

$$P(B_i\,/A\,) = \frac{P(B_i) \cdot P(A\,/B_i\,)}{P(A)} : \tag{24}$$

Օգտագործելով լրիվ հավանականության բանաձևը, (24)-ից կստանանք (23)-ը:

Օրինակ 21. Դիցուք սափորում կան n գնդակներ: Յուրաքանչյուր գնդակ կամ սպիտակ է, կամ սև: Սպիտակ և սև գնդակների քանակը սափորում անհայտ է: Մեր նպատակն է գտնել այդ թիվը:

Սահմանենք վարկածները: Նշանակենք B_i-ով պատահույթը, որ սափորը պարունակում է ճշգրիտ i սպիտակ գնդակներ (n գնդակներից), $i = 0, 1, 2, ..., n$: Քանի որ մենք չունենք լրացուցիչ տեղեկություն սափորի պարունակության վերաբերյալ, հետևաբար բոլոր վարկած– ները հավասարահնարավոր են, այսինքն

$$P(B_i) = \frac{1}{n+1}, \quad \text{կամայական} \quad i = 0, 1, ..., n \quad \text{համար :}$$

Ենթադրենք ընտրել ենք որևէ գնդակ և այն սպիտակ է (A պատահույթ): Ակնհայտ է, որ պետք է ձևափոխել B_i պատահույթների հավանականությունները: Օրինակ,

$$P(B_0\,/A\,) = 0 :$$

Ինչի՞ են հավասար մնացած հավանականությունները: Օգտվենք Բայեսի բանաձևից:

$$P(B_i\,/A\,) = \frac{P(B_i) \cdot P(A\,/B_i\,)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P(B_k)\, P(A\,/B_k\,)} \qquad i = 0, 1, ...n :$$

Քանի որ

$$P(B_i)=\frac{1}{n+1}, \qquad P(A\,/B_i)=\frac{i}{n},$$

ստանում ենք

$$P(B_i\,/A)=\frac{\frac{i}{n}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{n}}=\frac{2i}{n(n+1)}, \qquad i=0,1,...n\ :$$

Մասնավորապես, $n=3$ դեպքում ստանում ենք

$$P(B_0\,/A)=0, \quad P(B_1\,/A)=\frac{1}{6}, \quad P(B_2\,/A)=\frac{1}{3}, \quad P(B_3\,/A)=\frac{1}{2}\ :$$

§12. ԱՆԿԱԽ ՓՈՐՁԵՐ

Շատ հավանականային փորձեր կարելի է դիտարկել որպես ենթափորձերի որևէ հա–ջորդականություն: Օրինակ, եթե փորձը իրենից ներկայացնում է դրամի նետում n անգամ, ապա յուրաքանչյուր նետում կարող ենք դիտարկել որպես ենթափորձ: Եթե ենթափորձերի ցանկացած խմբի ելքերը չունեն ազդեցություն ուրիշ ենթափորձերի ելքերի հավանակա–նությունների վրա, ապա կասենք, որ ենթափորձերը անկախ են:

Եթե յուրաքանչյուր ենթափորձ միանման է, այսինքն եթե յուրաքանչյուր ենթափորձ ունի միևնույն հավանականային փարածությունը և միևնույն հավանականային ֆունկցիան՝ որոշված իր պատահույթների վրա, ապա ենթափորձերը անվանում են **անկախ**:

Հավանականությունների տեսության շատ խնդիրներ կարելի է դիտարկել որպես անկախ կրկնվող փորձեր, որոնց ելքերը դասակարգվում են երկու փիպի՝ " հաջողություն" (A պա–տահույթ) և "անհաջողություն" ($\overline{A}$ պատահույթ): A պատահույթի հավանականությունը սովորաբար նշանակում են p-ով ($P(A)=p$) և հետևաբար $P(\overline{A})=1-p$, որտեղ $0\le p\le 1$: Այդպիսի փորձերը կոչվում են Բեռնուլիի անկախ փորձեր:

Այժմ դիտարկենք n անկախ կրկնվող փորձեր, որտեղ "կրկնվող" բառը նշանակում է, որ հաջողության ($P(A)=p$) և անհաջողության ($P(\overline{A})=1-p$) հավանականությունները մնում են հաստատուն: Տարրական պատահույթների Ω բազմությունը, որը համապատաս– խանում է n անկախ կրկնվող Բեռնուլիի փորձերին, պարունակում է 2^n ելքեր: Հետևաբար, այս պարագրաֆում դիտարկվող խնդիրներում պետք է անենք հետևյալ ենթադրությունները.

1. Յուրաքանչյուր փորձ ունի միայն երկու հնարավոր ելք, որոնք կոչվում են "հաջողությ– յուն" և "անհաջողություն", առանց ենթադրության, որ հաջողությունը գերադասելի է:

2. Հաջողության հավանականությունը նույնն է յուրաքանչյուր փորձի համար:

3. Գոյություն ունեն n փորձեր, որտեղ n-ը հաստատուն է:

4. n փորձերը անկախ են:

Եթե այս ենթադրությունները տեղի չունեն, ապա այստեղ նկարագրված տեսությունը կիրառելի չէ:

Մեզ հետաքրքրում է Բեռնուլիի n փորձերում **հաջողությունների թիվը**: Այժմ հաշվենք $P_n(k)$ հավանականությունները, որ հաջողությունների թիվը հավասար կլինի k, կամայական k ամբողջ թվի համար՝ $k = 0, 1, 2, ..., n$: "k հաջողություն n անկախ փորձերում" պատահույթը կարող է տեղի ունենալ այնքան եղանակներով, որքան k հատ նույնանման տառեր կարող ենք բաշխել n տեղերում: Հետևաբար, գոյություն ունեն C_n^k ելքեր, որոնք պարունակում են ճշգրիտ k հաջողություններ և $n - k$ անհաջողություններ (որտեղ $k = 0, 1, ..., n$): Այսպիսով,

$$P_n(k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k} \; : \tag{25}$$

(25)-ում ներկայացված օրենքը անվանում են **բինոմական օրենք**, քանի որ (25)-ում ներ– կայացված $P_n(k)$ մեծությունները ստացվում են Նյուտոնի երկանդամի վերլուծությունից՝

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k b^{n-k}$$

կամայական իրական a և b թվերի համար: Տեղադրելով $a = p$ և $b = 1 - p$, անմիջապես կստանանք, որ

$$1=(p+(1-p))^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} P_n(k)\ :$$

Տեղադրելով $a=b=1$, ստանում ենք, որ բոլոր բինոմական գործակիցների գումարը հավասար է 2^n՝

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n\ :$$

Տեղադրելով $b=1$ և $a=-1$, ստանում ենք

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k=0\ :$$

Նշենք, որ (25)-ը ներկայացնում է հավանականային խնդիր, որի ելքերը հավասարահնարավոր չեն:

n անկախ փորձերում առնվազն մեկ հաջողություն ունենալու հավանականությունը որոշելու համար, հեշտ է հաշվել հակադիր պատահույթի հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում չի լինի ոչ մի հաջողություն: Ունենք

$$P(\text{առնվազն մեկ հաջողություն } n \text{ փորձերում})=1-P_n(0)=1-(1-p)^n\ :$$

Օրինակ 22. Նետում են չորս կանոնավոր մետաղադրամ: Ելքերի անկախության ենթադրության դեպքում գտնել հավանականությունը, որ իրականացել է երկու գերբ և երկու գիր պատահույթը:

Լուծում. Ունենք չորս անկախ փորձ $n=4$, $p=0.5$ և $k=2$ պարամետրերով: Հետևաբար, ըստ (25)-ի կստանանք

$$P_4(2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\ :$$

Օրինակ 23. Կանոնավոր խաղոսկրը նետում են 5 անգամ: Գտնել հավանականությունը, որ “6” կբացվի ճշգրիտ երկու անգամ:

Լուծում. Խաղոսկրի մեկ նետման ժամանակ $A = \{\text{վեց}\}$ պատահույթի հավանականությունը հավասար է $1/6$: Տեղադրելով $n = 5$, $k = 2$, $p = P(A) = 1/6$ (25) բանաձևի մեջ, կստանանք

$$P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888} = 0,160751 :$$

Օրինակ 24. Կանոնավոր խաղոսկրերի զույգը նետում են 4 անգամ: Գտնել երկու խաղոսկրերի վրա միավորների գումարը 7 լինելու պատահույթի ոչ մի անգամ տեղի չունենալու հավանականությունը:

Լուծում. $A = \{$ խաղոսկրերի նիշերի գումարը հավասար է 7-ի$\}$ պատահույթը բաղկացած է վեց նպաստավոր ելքերից՝ $\{(3,4),(4,3),(5,2),(2,5),(6,1),(1,6)\}$: Հետևաբար, $P(A) = p = 1/6$: $n = 4$ և $k = 0$ պայմաններից, (25)-ից բխում է

$$P_4(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 :$$

ՀԱՎԵԼՎԱԾ–1

$P(\cdot\,/B\,)$-ն հավանականություն է:

Պայմանական հավանականությունները բավարարում են սովորական հավանականություն–ների բոլոր հատկություններին: Սա ապացուցվել է Թեորեմ 2-ում, որը ցույց է տալիս, որ $P(\cdot\,/B\,)$-ն բավարարում է հավանականության երեք աքսիոմներին:

Թեորեմ 2. $P(A\,/B\,)$ պայմանական հավանականությունը որպես ֆունկցիա A պատահույթից, բավարարում է հետևյալ հատկություններին՝

ա) $P(A\,/B\,)\geq 0$ կամայական A-ի համար;

բ) $P(\Omega\,/B\,)=1$;

գ) Եթե A_i պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, ապա

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big/B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\,/B\,):$$

Ապացույց. ա) պայմանը ակնհայտ է: բ) պայմանը տեղի ունի, քանի որ

$$P(\Omega\,/B\,)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1:$$

գ) պայմանը տեղի ունի, քանի որ

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big/B\right)=\frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\bigcap B\right)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i\bigcap B)\right)}{P(B)}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\bigcap B)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\,/B\,),$$

որտեղ վերջին հավասարությունը տեղի ունի, քանի որ $A_i\cap A_j=\varnothing$-ից բխում է $(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=\varnothing$: Ապացույցն ավարտվեց:

Եթե սահմանենք $P_1(A) = P(A\,/B)$ (B պատահույթը ֆիքսված է և $P(B) \neq 0$), ապա Թեորեմ 2-ից հետևում է, որ $P_1(\cdot)$-ը հանդիսանում է հավանականություն Ω-ի պատահույթների վրա: Հետևաբար, բոլոր հատկությունները, որոնք ապացուցվել են հավանականությունների համար, կիրառելի են:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ -2

Խնդիր. Կամայական A և B պատահույթների համար տեղի ունի

$$|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4} : \qquad (A1)$$

Լուծում. Սկսենք հետևյալ պնդումից.

Պնդում 1. Կամայական A պատահույթի համար

$$P(A) \cdot P(\overline{A}) \leq \frac{1}{4}, \qquad (A2)$$

որտեղ $\overline{A}$-ն A-ի հակադիրն է:

Նշանակելով $P(A) = x$ և $P(\overline{A}) = 1 - x$, պետք ապացուցենք, որ

$$f(x) = x\,(1-x), \qquad x \in [0,1]$$

ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն արժեքին $x = \frac{1}{2}$ կետում: Ապացույցն ակնհայտ է:

Կամայական A_1 և A_2 պատահույթների համար

$$P(A_1) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap \overline{A}_2) : \qquad (A3)$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \bigcup (A_1 \cap \overline{A_2})$$

հավասարությունից: Տեղադրելով $A_1 = B$ և $A_2 = A$ $(A3)$ բանաձևի մեջ, կստանանք

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \leq P(A \cap B) + P(\overline{A}) : \qquad (A4)$$

$(A4)$ մենք օգտագործել ենք նաև այն փաստը, որ P-ն մոնոտոն ֆունկցիա է, այսինքն կամայական $A_1 \subset A_2$ համար

$$P(A_1) \leq P(A_2): \tag{A5}$$

Քանի որ $\overline{A} \cap B \subset \overline{A}$, որտեղից բխում է, որ $P(\overline{A} \cap B) \leq P(\overline{A})$:

Բազմապատկելով $(A4)$-ի երկու կողմերը $P(A)$-ով, կստանանք

$$P(A) \cdot P(B) \leq P(A) \cdot P(A \cap B) + P(A) \cdot P(\overline{A}) \leq P(A \cap B) + P(A) \cdot P(\overline{A}),$$

այստեղ մենք օգտվեցինք այն փաստից, որ $P(A) \leq 1$:

Հետևաբար ստանում ենք

$$P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B) \leq P(A)\, P(\overline{A})$$

անհավասարությունը: $(A2)$-ից բխում է, որ

$$P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}: \tag{A6}$$

Օգտվելով հավանականության $(A5)$ հատկությունից, կստանանք

$$P(B) \geq P(A \cap B) \quad \text{և} \quad P(A) \geq P(A \cap B),$$

որտեղից հետևում է, որ

$$P(A) \cdot P(B) \geq P(A \cap B) \cdot P(A \cap B):$$

Հետևաբար

$$P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B) \geq P(A \cap B) \cdot P(A \cap B) - P(A \cap B) =$$

$$= -P(A \cap B) \cdot P(\overline{A \cap B}) \geq -\frac{1}{4},$$

որտեղ վերևի հավասարությունը սփացվում է հաշվի առնելով

$$P(A \cap B) - 1 = -P(\overline{A \cap B})$$

և $(A2)$-ը: Այսպիսով սփանում ենք երկու անհավասարություններ (համեմատել $(A6)$-ի հետ)

$$P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B) \leq \frac{1}{4},$$

$$P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B) \geq -\frac{1}{4}:$$

Այժմ $(A1)$-ը հետևում է այս երկու անհավասարություններից: Ապացույցն ավարտվեց:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ-3

Խնդիր. Դիցուք A և B-ն փորձի անհամատեղելի պատահույթներ են: Այդ դեպքում, երբ այդ փորձը անկախ կրկնենք, ապա A պատահույթը կիրականանա B պատահույթից շուտ հետևյալ հավանականությամբ՝

$$\frac{P(A)}{P(A)+P(B)} :$$

Լուծում. Եթե C_n-ով նշանակենք պատահույթը, որ ոչ A-ն և ոչ B-ն տեղի չեն ունեցել առաջին $n-1$ փորձերում և A-ն տեղի է ունեցել n-րդ փորձում, ապա հավանականությունը, որ A պատահույթը կիրականանա B պատահույթից շուտ կլինի՝

$$p = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) :$$

Այժմ, քանի որ $P(A$ ցանկացած փորձում$) = P(A)$ և $P(B$ ցանկացած փորձում$) = P(B)$, փորձերի անկախության շնորհիվ կստանանք

$$P(C_n) = [1-(P(A)+P(B))]^{n-1} P(A),$$

և հետևաբար

$$p = P(A) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [1-(P(A)+P(B))]^{n-1} =$$

(օգտվելով երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարի բանաձևից, առաջին անդամը հավասար է 1)

$$= P(A) \cdot \frac{1}{1-(1-(P(A)+P(B)))} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)} :$$

§11. ԼՐԻՎ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԲԱՅԵՍԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Երբեմն A պատահույթի հավանականությունը ուղղակիորեն հնարավոր չէ հաշվել: Սակայն, նրա տեղի ունենալը կախված է ուրիշ B_i, $i \geq 1$ պատահույթների տեղի ունենալուց այնպես, որ A պատահույթի հավանականությունը կլինի միջինացված հավանականություն (այսինքն կշռավորված միջին B_i կշիռներով): Այս տիպի խնդիրների համար պահանջվում է **Լրիվ Հավանականության բանաձևը**:

Դիցուք A-ն $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ -ի ենթապատահույթ է (այսինքն $A \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$), $\{B_n\}$-երը զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթներ են և $P(B_n) \neq 0$ կամայական n-ի համար: Այդ դեպքում

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)\, P(A\,/B_n)\,: \tag{22}$$

(22) բանաձևը կանվանենք **Լրիվ հավանականության բանաձև**:

Ապացույց. Քանի որ A-ն B_n-երի միավորման ենթապատահույթ է, ապա

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n),$$

որտեղ $\{A \cap B_n\}$ զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, քանի որ $\{B_n\}$-երը զույգ առ զույգ անհամատեղելի են: Հետևաբար, ըստ Աքսիոմ 3-ի

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n)$$

և ըստ (20) բանաձևի՝ $P(A \cap B_n) = P(B_n) \cdot P(A\,/B_n)$: Ապացույցն ավարտվեց:

Օրինակ 20. Առաջին սափորը պարունակում է 6 սպիտակ և 4 սև գնդակներ, երկրորդ սափորը պարունակում է 5 սպիտակ և 2 սև գնդակներ: Առաջին սափորից պատահականորեն մեկ գնդակ տեղափոխվում է երկրորդ սափոր, ապա երկրորդ սափորից առանց վերադարձման պատահականորեն հանում են 2 գնդակ: Ինչպիսի՞ն է այդ երկու գնդակների սպիտակ լինելու հավանականությունը:

Լուծում. Նշանակենք B_1-ով պատահույթը, որ առաջին սափորից տեղափոխել են սպիտակ գնդակ, իսկ B_2-ով պատահույթը, որ առաջին սափորից տեղափոխել են սև գնդակ: Նշանա– կենք A-ով պատահույթը, որ երկրորդ սափորից հանել են 2 սպիտակ գնդակ: Ըստ (22) բանաձևի՝

$$P(A) = P(B_1)\, P(A\,/B_1) + P(B_2)\, P(A\,/B_2)\,:$$

Քանի որ

$$P(B_1) = \frac{3}{5}, \quad P(B_2) = \frac{2}{5}, \quad P(A\,/B_1\,) = \frac{15}{28}, \quad P(A\,/B_2\,) = \frac{5}{14}$$

ստանում ենք

$$P(A) = \frac{13}{28} :$$

Այսպիսով, կամայական A պատահույթի համար $P(A)$ ոչ պայմանական հավանականությունը կարելի է արտահայտել $P(A\,/B_1\,), ..., P(A\,/B_n\,)$... պայմանական հավանականությունների և $P(B_1), ..., P(B_n)$.... ոչ պայմանական հավանականությունների միջոցով:

§11. ԼՐԻՎ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԲԱՅԵՍԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Երբեմն A պատահույթի հավանականությունը ուղղակիորեն հնարավոր չէ հաշվել: Սակայն, նրա տեղի ունենալը կախված է ուրիշ B_i, $i \geq 1$ պատահույթների տեղի ունենալուց այնպես, որ A պատահույթի հավանականությունը կլինի միջինացված հավանականություն (այսինքն կշռավորված միջին B_i կշիռներով): Այս տիպի խնդիրների համար պահանջվում է **Լրիվ Հավանականության բանաձևը**:

Դիցուք A-ն $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ -ի ենթապատահույթ է (այսինքն $A \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$), $\{B_n\}$-երը զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթներ են և $P(B_n) \neq 0$ կամայական n-ի համար: Այդ դեպքում

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)\, P(A\,/B_n\,) : \tag{22}$$

(22) բանաձևը կանվանենք **Լրիվ հավանականության բանաձև**:

Ապացույց. Քանի որ A-ն B_n-երի միավորման ենթապատահույթ է, ապա

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n),$$

որտեղ $\{A \cap B_n\}$ զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, քանի որ $\{B_n\}$-երը զույգ առ զույգ անհամատեղելի են: Հետևաբար, ըստ Աքսիոմ 3-ի

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n)$$

և ըստ (20) բանաձևի՝ $P(A \cap B_n) = P(B_n) \cdot P(A\,/B_n\,)$: Ապացույցն ավարտվեց:

Օրինակ 20. Առաջին սափորը պարունակում է 6 սպիտակ և 4 սև գնդակներ, երկրորդ սափորը պարունակում է 5 սպիտակ և 2 սև գնդակներ: Առաջին սափորից պատահականորեն մեկ գնդակ տեղափոխվում է երկրորդ սափոր, ապա երկրորդ սափորից առանց վերադարձման պատահականորեն հանում են 2 գնդակ: Ինչպիսի՞ն է այդ երկու գնդակների սպիտակ լինելու հավանականությունը:

Լուծում. Նշանակենք B_1-ով պատահույթը, որ առաջին սափորիցսպիտակ գնդակ իսկ B_2-ով պատահույթը, որ առաջին սափորից փեղափոխել են սև գնդակ: Նշանակենք A-ով պատահույթը, որ երկրորդ սափորից հանել են 2 սպիտակ գնդակ: Ըստ (22) բանաձևի՝

$$P(A) = P(B_1)\,P(A\,/B_1\,) + P(B_2)\,P(A\,/B_2\,) :$$

Քանի որ

$$P(B_1) = \frac{3}{5}, \quad P(B_2) = \frac{2}{5}, \quad P(A\,/B_1\,) = \frac{15}{28}, \quad P(A\,/B_2\,) = \frac{5}{14}$$

սփանում ենք

$$P(A) = \frac{13}{28} :$$

Այսպիսով, կամայական A պատահույթի համար $P(A)$ ոչ պայմանական հավանականությունը կարելի է արտահայտել $P(A\,/B_1\,), ..., P(A\,/B_n\,)...$ պայմանական հավանականությունների և $P(B_1), ..., P(B_n)....$ ոչ պայմանական հավանականությունների միջոցով:

Գոյություն ունի լրիվ հավանականության բանաձևի հեփաքրքրի հեփևանք: Ենթադրենք լրիվ հավանականության բանաձևի բոլոր պայմանները բավարարված են: Հեփևյալ բանաձևը

$$P(B_i\,/A\,) = \frac{P(B_i) \cdot P(A\,/B_i\,)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(B_n)\,P(A\,/B_n\,)} \qquad i = 1, 2, ... \tag{23}$$

հայտնի է որպես **Բայեսի բանաձև**:

Սովորաբար B_n պատահույթները անվանում են “վարկածներ”, որոնք նախքան փորձը ունեն $P(B_n)$ հավանականություններ: Բայեսի բանաձևը թույլ է տալիս վերաբաշխել B_i վարկածների հավանականությունները՝ հենվելով փորձի արդյունքի վրա:

Ապացուցենք (23)-ը: Կիրառելով (20) բանաձևը A և B_i պատահույթների նկատմամբ, կստանանք

$$P(B_i) \cdot P(A\,/B_i\,) = P(A) \cdot P(B_i\,/A\,) :$$

Հետևաբար ստանում ենք պահանջվող հավանականությունը՝

$$P(B_i\,/A\,) = \frac{P(B_i)\cdot P(A\,/B_i\,)}{P(A)}: \tag{24}$$

Օգտագործելով լրիվ հավանականության բանաձևը, (24)-ից կստանանք (23)-ը:

Օրինակ 21. Դիցուք սափորում կան n գնդակներ: Յուրաքանչյուր գնդակ կամ սպիտակ է, կամ սև: Սպիտակ և սև գնդակների քանակը սափորում անհայտ է: Մեր նպատակն է գտնել այդ թիվը: Սահմանենք այդ վարկածները:

Նշանակենք B_i-ով պատահույթը, որ սափորը պարունակում է ճշգրիտ i սպիտակ գնդակներ (n գնդակներից), $i = 0, 1, 2, ..., n$: Քանի որ մենք չունենք լրացուցիչ տեղեկություն սափորի պարունակության վերաբերյալ, հետևաբար բոլոր վարկածները հավասարահնարավոր են, այսինքն

$$P(B_i) = \frac{1}{n+1}, \quad \text{կամայական} \quad i = 0, 1, ..., n \quad \text{համար}:$$

Ենթադրենք ընտրել ենք որևէ գնդակ և այն սպիտակ է (A պատահույթ): Ակնհայտ է, որ պետք է ձևափոխել B_i պատահույթների հավանականությունները: Օրինակ,

$$P(B_0\,/A\,) = 0:$$

Ինչի՞ են հավասար մնացած հավանականությունները: Օգտվենք Բայեսի բանաձևից:

$$P(B_i\,/A\,) = \frac{P(B_i)\cdot P(A\,/B_i\,)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P(B_k)\,P(A\,/B_k\,)} \qquad i = 0, 1, ...n:$$

Քանի որ

$$P(B_i) = \frac{1}{n+1}, \qquad P(A\,/B_i\,) = \frac{i}{n},$$

ստանում ենք

$$P(B_i\,/A\,) = \frac{\frac{i}{n}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{n}} = \frac{2i}{n(n+1)}, \qquad i = 0, 1, ...n:$$

Մասնավորապես, $n = 3$ դեպքում ստանում ենք

$$P(B_0\,/A) = 0, \quad P(B_1\,/A) = \frac{1}{6}, \quad P(B_2\,/A) = \frac{1}{3}, \quad P(B_3\,/A) = \frac{1}{2}:$$

§12. ԱՆԿԱԽ ՓՈՐՁԵՐ

Շատ հավանականային փորձեր կարելի է դիտարկել որպես ենթափորձերի որևէ հաջորդականություն: Օրինակ, եթե փորձը իրենից ներկայացնում է դրամի նետում n անգամ, ապա յուրաքանչյուր նետում կարող ենք դիտարկել որպես ենթափորձ: Եթե ենթափորձերի ցանկացած խմբի ելքերը չունեն ազդեցություն ուրիշ ենթափորձերի ելքերի հավանականությունների վրա, ապա կասենք, որ ենթափորձերը անկախ են:

Եթե յուրաքանչյուր ենթափորձ միանման է, այսինքն եթե յուրաքանչյուր ենթափորձ ունի միևնույն հավանականային տարածությունը և միևնույն հավանականային ֆունկցիան՝ որոշված իր պատահույթների վրա, ապա ենթափորձերը անվանում են **անկախ**:

Հավանականությունների տեսության շատ խնդիրներ կարելի է դիտարկել որպես անկախ կրկնվող փորձեր, որոնց ելքերը դասակարգվում են երկու տիպի՝ "հաջողություն" (A պատահույթ) և "անհաջողություն" ($\overline{A}$ պատահույթ): A պատահույթի հավանականությունը սովորաբար նշանակում են p-ով ($P(A) = p$) և հետևաբար $P(\overline{A}) = 1 - p$, որտեղ $0 \leq p \leq 1$: Այդպիսի փորձերը կոչվում են Բեռնուլիի անկախ փորձեր:

Այժմ դիտարկենք n անկախ կրկնվող փորձեր, որտեղ "կրկնվող" բառը նշանակում է, որ հաջողության ($P(A) = p$) և անհաջողության ($P(\overline{A}) = 1 - p$) հավանականությունները մնում են հաստատուն: Տարրական պատահույթների Ω բազմությունը, որը համապատասխանում է n անկախ կրկնվող Բեռնուլիի փորձերին, պարունակում է 2^n ելքեր: Հետևաբար, այս պարագրաֆում դիտարկվող խնդիրներում պետք է անենք հետևյալ ենթադրությունները.

1. Յուրաքանչյուր փորձ ունի միայն երկու հնարավոր ելք, որոնք կոչվում են "հաջողություն" և "անհաջողություն", առանց ենթադրության, որ հաջողությունը գերադասելի է:

2. Հաջողության հավանականությունը նույնն է յուրաքանչյուր փորձի համար:

3. Գոյություն ունեն n փորձեր, որտեղ n-ը հաստատուն է:

4. n փորձերը անկախ են:

Եթե այս ենթադրությունները տեղի չունեն, ապա այստեղ նկարագրված տեսությունը կիրառելի չէ:

Մեզ հետաքրքրում է Բեռնուլիի n փորձերում **հաջողությունների թիվը**: Այժմ հաշվենք $P_n(k)$ հավանականությունները, որ հաջողությունների թիվը հավասար կլինի k, կամայական k ամբողջ թվի համար՝ $k = 0, 1, 2, ..., n$: "k հաջողություն n անկախ փորձերում" պատահույթը կարող է տեղի ունենալ այնքան եղանակներով, որքան k հատ նույնանման տառեր կարող ենք բաշխել n տեղերում: Հետևաբար, գոյություն ունեն C_n^k ելքեր, որոնք պարունակում են ճշգրիտ k հաջողություններ և $n - k$ անհաջողություններ (որտեղ $k = 0, 1, ..., n$): Այսպիսով,

$$P_n(k) = C_n^k \, p^k \, (1 - p)^{n-k} : \tag{25}$$

(25)-ում ներկայացված օրենքը անվանում են **բինոմական օրենք**, քանի որ (25)-ում ներկայացված $P_n(k)$ մեծությունները ստացվում են Նյուտոնի երկանդամի վերլուծությունից՝

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k b^{n-k}$$

կամայական իրական a և b թվերի համար: Տեղադրելով $a = p$ և $b = 1 - p$, անմիջապես կստանանք, որ

$$1 = (p + (1 - p))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) :$$

Տեղադրելով $a = b = 1$, ստանում ենք, որ բոլոր բինոմական գործակիցների գումարը հավասար է 2^n՝

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n :$$

Տեղադրելով $b = 1$ և $a = -1$, ստանում ենք

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 :$$

Նշենք, որ (25)-ը ներկայացնում է հավանականային խնդիր, որի ելքերը հավասարահնարավոր չեն:

n անկախ փորձերում առնվազն մեկ հաջողություն ունենալու հավանականությունը որոշելու համար, հեշտ է հաշվել հակադիր պատահույթի հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում չի լինի ոչ մի հաջողություն: Ունենք

$$P(\text{առնվազն մեկ հաջողություն } n \text{ փորձերում}) = 1 - P_n(0) = 1 - (1-p)^n :$$

Օրինակ 27. Նետում են չորս կանոնավոր մետաղադրամ: Ելքերի անկախության ենթադրության դեպքում գտնել հավանականությունը, որ իրականացել է երկու գերբ և երկու գիր պատահույթը:

Լուծում. Ունենք չորս անկախ փորձ $n = 4$, $p = 0.5$ և $k = 2$ պարամետրերով: Հետևաբար, ըստ (25)-ի կստանանք

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} :$$

Օրինակ 23. Կանոնավոր խաղոսկրը նետում են 5 անգամ: Գտնել հավանականությունը, որ “6” կբացվի ճշգրիտ երկու անգամ:

Լուծում. Խաղոսկրի մեկ նետման ժամանակ $A = \{\text{վեց}\}$ պատահույթի հավանականությունը հավասար է $1/6$: Տեղադրելով $n = 5$, $k = 2$, $p = P(A) = 1/6$ (25) բանաձևի մեջ, կստանանք

$$P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888} = 0,160751 :$$

Օրինակ 24. Կանոնավոր խաղոսկրերի զույգը նետում են 4 անգամ: Գտնել երկու խաղոսկրերի վրա միավորների գումարը 7 լինելու պատահույթի ոչ մի անգամ տեղի չունենալու հավանականությունը:

Լուծում. $A = \{$ խաղոսկրերի նիշերի գումարը հավասար է 7-ի$\}$ պատահույթը բաղկացած է վեց նպաստավոր ելքերից՝

$$\{(3,4),(4,3),(5,2),(2,5),(6,1),(1,6)\}:$$

Հետևաբար, $P(A) = p = 1/6$: $n = 4$ և $k = 0$ պայմաններից, (25)-ից բխում է

$$P_4(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4:$$

Օրինակ 25. Պատահականորեն նետում են n կետ $(0, T)$ միջակայքի մեջ: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ այդ կետերից k հատը կընկնեն (t_1, t_2) միջակայքի մեջ, $t_1 > 0$, $t_2 < T$:

Լուծում. Այս խնդիրը կարելի է դիտարկել որպես անկախ փորձերի խնդիր: Փորձը կայանում է $(0, T)$ միջակայքում մեկ կետ ընտրելու մեջ: Այս փորձում, $A = \{$ կետը կընկնի $(t_1, t_2)\}$ միջակայքի մեջ $\}$ պատահույթն ունի

$$p = P(A) = \frac{t_2 - t_1}{T}$$

հավանականություն: $\{A$-ն տեղի է ունենում k անգամ$\}$ պատահույթը նշանակում է, որ n կետերից k-ն ընկնում են (t_1, t_2) միջակայքի մեջ: Հետևաբար, ըստ (25)-ի

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{t_2 - t_1}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t_2 - t_1}{T}\right)^{n-k}:$$

Վարժություն 12 (Բինոմական հավանականությունների վարքը). Ցույց տալ, որ եթե k-ն փոխվում է 0-ից մինչև n, $P_n(k)$ հավանականությունները նախ մոնոտոն աճում են, այնուհետև մոնոտոն նվազում: $P_n(k)$-ն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, երբ k-ն բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$n \cdot p - (1 - p) \leq k \leq n \cdot p + p:$$

ՀԱՎԵԼՎԱԾ -4

Խնդիր. Կամայական A և B պատահույթների համար տեղի ունի

$$|P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| \leq \frac{1}{4}: \tag{A1}$$

Լուծում. Սկսենք հետևյալ պնդումից.

Պնդում 1. Կամայական A պատահույթի համար

$$P(A)\,P(\overline{A}) \leq \frac{1}{4}, \tag{A2}$$

որտեղ $\overline{A}$-ն A-ի հակադիրն է:

Նշանակելով $P(A) = x$ և $P(\overline{A}) = 1 - x$, պետք ապացուցենք, որ

$$f(x) = x\,(1-x), \qquad x \in [0,1]$$

ֆունկցիան հասնում է իր փոքրագույն արժեքին $x = \dfrac{1}{2}$ կետում: Ապացույցն ակնհայտ է:

Կամայական A_1 և A_2 պատահույթների համար

$$P(A_1) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap \overline{A}_2) : eqno(A3)$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \bigcup (A_1 \cap \overline{A_2})$$

հավասարությունից: Տեղադրելով $A_1 = B$ և $A_2 = A$ $(A3)$ բանաձևի մեջ, կստանանք

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \leq P(A \cap B) + P(\overline{A}) : \tag{A4}$$

Նախկինում մենք օգտագործել ենք նաև այն փաստը, որ P-ն մոնոտոն ֆունկցիա է, այսինքն կամայական $A_1 \subset A_2$ համար

$$P(A_1) \leq P(A_2)\,: \tag{A5}$$

Քանի որ $\overline{A} \cap B \subset \overline{A}$, որտեղից բխում է, որ $P(\overline{A} \cap B) \leq P(\overline{A})$:

Բազմապատկելով $(A4)$-ի երկու կողմերը $P(A)$-ով, կստանանք

$$P(A)\,P(B) \leq P(A)\,P(A \cap B) + P(A)\,P(\overline{A}) \leq P(A \cap B) + P(A)\,P(\overline{A}),$$

այստեղ մենք օգտվեցինք այն փաստից, որ $P(A) \leq 1$:

Հետևաբար ստանում ենք

$$P(A)\,P(B) - P(A \cap B) \leq P(A)\,P(\overline{A})$$

անհավասարությունը: $(A2)$-ից բխում է, որ

$$P(A)\,P(B) - P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}\,: \tag{A6}$$

Օգտվելով հավանականության $(A5)$ հատկությունից, կստանանք

$$P(B) \geq P(A \cap B) \quad \text{և} \quad P(A) \geq P(A \cap B),$$

որտեղից հետևում է, որ

$$P(A)\,P(B) \geq P(A \cap B)\,P(A \cap B)\,:$$

Հետևաբար

$$P(A)\,P(B) - P(A \cap B) \geq P(A \cap B)\,P(A \cap B) - P(A \cap B) =$$

$$= -P(A \cap B)\,P(\overline{A \cap B}) \geq -\frac{1}{4},$$

որտեղ վերևի հավասարությունը ստացվում է հաշվի առնելով

$$P(A \cap B) - 1 = -P(\overline{A \cap B})$$

և $(A2)$-ը: Այսպիսով ստանում ենք երկու անհավասարություններ (համեմատել $(A6)$-ի հետ)

$$P(A)\,P(B) - P(A \cap B) \leq \frac{1}{4},$$

$$P(A)\,P(B) - P(A \cap B) \geq -\frac{1}{4}\ :$$

Այժմ $(A1)$-ը հետևում է այս երկու անհավասարություններից: Ապացույցն ավարտվեց:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ-5

Խնդիր. Դիցուք A և B-ն փորձի անհամատեղելի պատահույթներ են: Այդ դեպքում, երբ այդ փորձը անկախ կրկնենք, ապա A պատահույթը կիրականանա B պատահույթից շուտ

$$\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}:$$

Լուծում. Եթե C_n-ով նշանակենք պատահույթը, որ ոչ A-ն և ոչ B-ն տեղի չեն ունեցել առաջին $n-1$ փորձերում և A-ն տեղի է ունեցել n-րդ փորձում, ապա հավանականությունը, որ A պատահույթը կիրականանա B պատահույթից շուտ կլինի՝

$$p = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n):$$

Այժմ, քանի որ $P(A$ ցանկացած փորձում$) = P(A)$ և $P(B$ ցանկացած փորձում$) = P(B)$, ւեփորձերի անկախության շնորհիվ կստանանք

$$P(C_n) = [1-(P(A)+P(B))]^{n-1} P(A),$$

և հետևաբար

$$p = P(A) \sum_{n=1}^{\infty} [1-(P(A)+P(B))]^{n-1} =$$

(օգտվելով երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարի բանաձևից, առաջին անդամը հավասար է 1)

$$= P(A) \frac{1}{1-(1-(P(A)+P(B)))} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}:$$

§13. ԲԵՌՆՈՒԼԻԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՅԻՆ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Նախորդ պարագրաֆում մենք դիտարկեցինք անկախ պատահական փորձերի հաջոր– դականություն, որտեղ հնարավոր էին ընդամենը երկու ելքեր: Բնական է դիտարկել անկախ փորձերի հաջորդականություն մի քանի հնարավոր ելքերով, օրինակ r հնարավոր ելքերով, այսինքն յուրաքանչյուր պատահական փորձում հնարավոր է տեղի ունենա A_1, A_2, ..., A_r պատահույթներից մեկը: Ենթադրենք, որ հայտնի են p_1, p_2, ..., p_r ոչ բացասական թվերը, որոնց գումարը հավասար է 1-ի, այնպես որ յուրաքանչյուր p_k հավանականությունն է, որ A_k- ն այդ անկախ փորձի ելքն է, ($P(A_k) = p_k, k = 1, ..., r$ և $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k = 1$): Բեռնուլիի անկախ փորձերում $r = 2$, $A_1 = A$ (հաջողություն) և $A_2 = \overline{A}$ (անհաջողություն) և $p_1 + p_2 = p + 1 - p = 1$: Հետևաբար Բեռնուլիի անկախ փորձերը մասնավոր դեպք են հանդիսանում $r = 2$ դեպքում: Երկանդամային օրենքի համապատասխան կունենաք բազմանդամային օրենքը . Հավանականությունը, որ n անկախ փորձերում A_1 պատահույթը կիրականանան k_1 անգամ, A_2 պատահույթը k_2 անգամ, ..., A_r պատահույթը՝ k_r անգամ, կամայական ոչ բացասական k_j ամբողջ թվերի համար, որոնք բավարարում են $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$ պայմանին, տրվում է հետևյալ բանաձևով

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_r) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdot ... \cdot k_r!} \quad p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_r^{k_r}. \tag{26}$$

(26) բանաձևը ապացուցելու համար հարկավոր է նշել միայն, որ Ω-ում ելքերի քանակը, որը պարունակում է k_1 հատ A_1, k_2 հատ A_2, ..., k_r հատ A_r հավասար է n չափանի բազմությունը բաժանել k_1, k_2, ..., k_r չափանի r ենթաբազմությունների քանակին, որը հավասար է

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdot ... \cdot k_r!}:$$

Այդ ելքերից յուրաքանչյուրը ունի $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_r^{k_r}$ հավանականություն: Հետևաբար, (26) բանաձևը ապացուցվեց: “Բազմանդամային օրենք” անվանումը ծագել է հետևյալ արտա–

հայտրությունից, որը տրված է բազմանդամային թեորեմի մեջ

$$(a_1 + ... + a_r)^n = \sum_{\substack{0\le k_i\le n \\ i=1,...,r \\ k_1+...+k_r=n}} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdot ...\cdot k_r!} \quad a_1^{k_1}\cdot a_2^{k_2}\cdot ...\cdot a_r^{k_r}.$$

Օրինակ 26. Սափորը պարունակում է 10 սպիտակ, 6 սև և 4 կարմիր գնդիկ: Պատահականորեն վերադարձումով հանում են 7 գնդիկ: Հաշվել հավանականությունը, որ

ա) հանվել է ճշգրիտ 4 սպիտակ գնդիկ:

բ) հանվել է 4 սպիտակ, 2 սև և 1 կարմիր գնդիկ:

Լուծում. ա) Պահանջվող հավանականությունը հիմնված է Բինոմական օրենքի վրա, այսինքն՝

$$P_7(4) = C_7^4(0.5)^7;$$

բ) Ըստ բազմանդամային օրենքի՝

$$n = 7,\ r = 3,\ k_1 = 4,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1,\ p_1 = 0,5,\ p_2 = 0,3,\ p_3 = 0,2.$$

Օրինակ 27. 10 կանոնավոր զառ նետում են հարթ մակերևույթի վրա: Հաշվել հավանա– կանությունը, որ

ա) կբացվի ճշգրիտ 4 հատ “6”,

բ) կբացվի 4 հատ “6”, 3 հատ “5” և 3 հատ “4” .

Լուծում. ա) Ըստ (25)-ի կունենանք պահանջվող հավանականությունը (երկանդամային օրենք)

$$P_{10}(4) = C_{10}^4\ (1/6)^4\ (5/6)^6;$$

բ) ըստ բազմանդամային օրենքի՝

$$n = 10,\ r = 4,\ k_1 = 4,\ k_2 = 3,\ k_3 = 3,\ k_4 = 0,\ p_1 = \frac{1}{6},\ p_2 = \frac{1}{6},\ p_3 = \frac{1}{6},\ p_4 = 0,5.$$

Օրինակ 28. Սափորը պարունակում է 5 սպիտակ և 10 սև գնդիկներ: Հաջորդաբար վերադարձումով 8 անգամ հանում են մեկ գնդակ: Ինչպիսի հավանականությամբ 2 հանված գնդիկները կլինեն սպիտակ, իսկ 6 գնդիկները՝սև:

Լուծում. Քանի որ գնդիկները ետ են վերադարձնում նախքան հաջորդի հանելը, սափորում պարունակությունը միշտ մնում է նույնը: Հետևաբար սպիտակ կամ սև գնդիկ հանելու հավանականությունը յուրաքանչյուր անկախ փորձում միշտ նույնն է: Սպիտակ գնդիկ հանելու հավանականությունը $1/3$ է, իսկ սև գնդիկ հանելունը՝ $2/3$: Հետևաբար ճշգրիտ 2 սպիտակ և 6 սև գնդիկ հանելու հավանականությունը 8 անկախ փորձերում հավասար է

$$P_8(2) = C_8^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{1792}{6561} = 0,273129 :$$

Օրինակ 29. Սափորը պարունակում է 5 սպիտակ և 10 սև գնդիկներ: Նրանցից 8-ը հանում են և տեղափոխում են մեկ այլ սափորի մեջ: Ինչպիսի հավանականությամբ վերջինս կպարունակի 2 սպիտակ և 6 սև գնդիկներ:

Լուծում. Այս օրինակը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ. Ինչպիսի հավա–նականությամբ հանված 8 գնդիկներից 2-ը կլինեն սպիտակ: Սա տարբերվում է նախորդ օրինակից, քանի որ փորձերը անկախ չեն: Այսինքն, առաջինը սպիտակ գնդիկ հանելու հավանականությունը $5/15$ է, իսկ երկրորդ գնդիկ հանելունը՝ $4/14$ կամ $5/14$ կախված առաջին գնդիկի սպիտակ կամ սև լինելու փաստից: Դա մենք կարող ենք հաշվել հավա–նականության դասական սահմանման համաձայն

$$\frac{C_5^2 \cdot C_{10}^6}{C_{15}^8},$$

որը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$C_8^2 \cdot \frac{5}{15}\,\frac{4}{14}\,\frac{10}{13}\,\frac{9}{12}\,\frac{8}{11}\,\frac{7}{10}\,\frac{6}{9}\,\frac{5}{8} = \frac{140}{429} = 0,3263403 :$$

Օրինակ 30. Ենթադրենք, որ որոշակի դասագրքի օրինակների 20%-ը չի անցել որոշակի ստուգումները: Նշանակենք $\eta(\omega)$-ով 15 պատահականորեն ընտրված օրինակներից ստուգումը ձախողած դասագրքերի թիվը: Հաշվել հավանականությունը, որ

ա) առավելագույնը 8-ը կձախողեն սպուգումը;

բ) ճշգրիտ 8-ը կձախողեն սպուգումը;

գ) առնվազն 8-ը կձախողեն սպուգումը;

դ) սպուգումը ձախողածների թիվը կգտնվի 4-ի և 7-ի միջև ներառյալ:

Լուծում.

ա) Հավանականությունը, որ առավելագույնը 8-ը կձախողեն սպուգումը հավասար է

$$P(\eta(\omega) \leq 8) = \sum_{k=0}^{8} P_{15}(k) = \sum_{k=0}^{8} C_{15}^{k} 0,2^{k}\, 0,8^{15-k} = 0,999 :$$

բ) Հավանականությունը, որ ճշգրիտ 8-ը կձախողեն սպուգումը հավասար է

$$P(\eta(\omega) = 8) = C_{15}^{8} 0,2^{8}\, 0,8^{7} = 0,003 :$$

գ) Հավանականությունը, որ առնվազն 8-ը կձախողեն սպուգումը հավասար է

$$P(\eta(\omega) \geq 8) = 1 - P(\eta(\omega) \leq 7) = 1 - \sum_{k=0}^{7} P_{15}(k) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{7} C_{15}^{k} 0,2^{k}\, 0,8^{15-k} = 1 - 0,996 = 0,004 :$$

դ) Վերջապես, հավանականությունը, որ ձախողվածների թիվը կգտնվի 4-ի և 7-ի միջև ներառյալ, հավասար է

$$P(4 \leq \eta(\omega) \leq 7) = \sum_{k=4}^{7} P_{15}(k) = \sum_{k=4}^{7} C_{15}^{k} 0,2^{k}\, 0,8^{15-k} = 0,348 :$$

§14. ՊՈՒԱՍՈՆԻ ՕՐԵՆՔԸ

Վերադառնանք Բեռնուլիի անկախ փորձերին և երկանդամային բաշխմանը (տես (25)): Շատ կիրառություններում անկախ փորձերի n թիվը մեծ է, և $P_n(k)$ -ի հաշվարկը կարող է լինել ծանր: Հետևաբար հետաքրքիր է տեսնել կարող ենք արդյոք գտնել որոշակի մոտարկում, երբ n-ը բավականաչափ մեծ է:

Պատահական երևույթը, որի բոլոր հնարավոր ելքերի բազմությունը՝ Ω-ն պարունակում է բոլոր ոչ բացասական ամբողջ թվերը, այսինքն $\Omega = \{0, 1, ..., k, ...\}$ և $P(\cdot)$ հավանականային ֆունկցիան սահմանվում է $\lambda > 0$ պարամետրի տերմիններով հետևյալ կերպ՝

$$p_k = P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \text{որտեղ} \quad k = 0, 1, ... \tag{27}$$

ասում են որ ունի Պուասոնյան հավանականային օրենք λ պարամետրով:

Ցույց տանք, որ Պուասոնյան հավանականային օրենքը բնականորեն առաջանում է երկանդամային օրենքից:

Թեորեմ 3 (Պուասոն, 1837). Դիտարկենք n անկախ կրկնվող Բեռնուլիի փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում հաջողության հավանականությունը՝ $p = P(A)$: Դիցուք անկախ փորձերի թիվը $n \to \infty$ և $\lambda = n \cdot p$, այդ դեպքում

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad n \to \infty \tag{28}$$

Այլ կերպ ասած, եթե n անկախ կրկնվող փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում "հաջողությունը" իրականանում է p հավանականությամբ, ապա երբ n-ը բավականաչափ մեծ է և p-ն բավականաչափ փոքր այնպես, որ $n \cdot p = \lambda$, հաջողությոունների թիվը մոտավորապես հավասար է Պուասոնի բաշխմանը $\lambda = n \cdot p$ պարամետրով:

Ապացույց. (28)-ը ապացուցելու համար պետք է միայն նրա ձախ մասը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝ (տեղադրելով p-ի փոխարեն $\frac{\lambda}{n}$)

$$\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}:$$

Քանի որ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=e^{-\lambda},$$

ապա կստանանք (28)-ը:

Օրինակ 31. 200 էջից բաղկացած գիրքը պարունակում է 100 տպագրական սխալ: Գտնել հավանականութոունը, որ պատահականորեն ընտրված էջը կպարունակի առնվազն 2 տպագրական սխալ:

Լուծում. Ունենքե $\lambda=\frac{100}{200}=\frac{1}{2}$, հետևաբար

$$P(\text{տպ. սխալների թիվը} \geq 2)=1-P(\text{տպ. սխալների թիվը} < 2)=1-p_0-p_1\approx$$

$$\approx 1-(0,6065+0,3033)=1-0,9098=0,0902:$$

Վարժություն 13 (Պուասոնյան հավանականությունների վարքը). Ցույց տալ, որ հավանականությունները Պուասոնյան հավանականային օրենքում, որոնք տրված են (27)-ում, մոնոտոն աճում են, ապա մոնոտոն նվազում են, երբ k-ն աճում է, և հասնում են իրենց մաքսիմումին, երբ k-ն ամենամեծ ամբողջ թիվն է, որը չի գերազանցում λ-ն:

§15. ՀԻՊԵՐԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼ

Հիպերերկրաչափական բաշխումը սերտորեն կապված է երկանդամային բաշխման հետ: n անկախ փորձերում հաջողությունների թիվը կարող է նկարագրվել երկանդամային մոդելով քանի դեռ փորձերը անկախ են, այսինքն հաջողության հավանականությունը մնում է հաստատուն յուրաքանչյուր փորձում: Սակայն ենթադրենք, որ ունենք N տարրերի վերջավոր բազմություն, որոնցից M-ը օժտված են ինչ-որ հատկությամբ, այնպես որ $(N-M)$ -ը օժտված չեն այդ հատկությամբ: Երբ պատահականորեն առանց վերադարձի ընտրում են վերջավոր քանակով տարրեր, փորձերը անկախ չեն, քանի որ հաջողության հավանականությունը l-րդ փորձում կախված է նախորդ փորձերի ելքերից:

Հիպերերկրաչափական բաշխմանը վերաբերվող ենթադրություններն են՝

1. Համախմբություն, որտեղից կատարվում է ընտրությունը, պարունակում է N տարրեր կամ օբյեկտներ (վերջավոր համախմբություն):

2. Յուրաքանչյուր տարր կարող է բնութագրվել որպես հաջողություն կամ անհաջողություն, և տեղի ունեն M հաջողություններ:

3. n տարրանոց ենթաբազմությունների ընտրությունն կատարվում է այնպես, որ յուրաքանչյուր տարրը հավասարահնարավոր լինի ընտրել:

Ինչպես Բինոմական օրենքում միայն այն փաստը ելքի մասին n անկախ փորձերում մենք հետաքրքրված ենք միայն հաջողությունների թվով:

Այժմ հաշվենք հավանականությունը, որ հաջողությունների թիվը հավասար կլինի k-ի, ցանկացած k ամբողջ թվի համար:

Եթե η-ն հաջողությունների թիվն է n չափանի պատահական նմուշում, որը պարունակում է M հաջողություններ և $(N-M)$ անհաջողություններ, ապա η-ի հավանականային բաշխումը, որն անվանում են **հիպերերկրաչափական բաշխում**, տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$P(\eta = k) = \frac{C_M^k \, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

որտեղ k-ն ամբողջ թիվ է, որը բավարարում է $0 \leq k \leq \min(n, M)$:

Օրինակ 31. 52 խաղաքարտերի կապուկից պատահականորեն ոչ կարգավորված ընտրել են 13 խաղաքարտ: Գոյություն ունեն C_{52}^{13} տարբերակներ, որը մոտավորապես հավասար է 635 միլիոնի: Քանի որ յուրաքանչյուր տեսակից կա 13 խաղաքարտ, ապա 2 տեսակի խաղաքարտեր պարունակող ընտրությունների թիվն է $C_{26}^{13} = 10400597$: C_{26}^{13} տարբերակներից մեկը բաղկացած է միայն սրտերից և մեկը բաղկացած է միայն խաչերից, հետևաբար

գոյություն ունեն
$$\left[C_{26}^{13}-2\right]$$
տարբերակներ բաղկացած միայն երկու տեսակներից: Ենթադրենք պատահականորեն ընտրում են 13 խաղաքարտ 52 խաղաքարտերի կապուկից: Նշանակենք

$$A=\{\text{ընտրված խաղաքարտերի մեջ կգտնվեն և սիրտ և խաչ տեսակի խաղաքարտեր}\},$$

$$B=\{\text{ընտրված խաղաքարտերը կպարունակեն ճշգրիտ երկու տեսակ}\} :$$

$N=C_{52}^{13}$ ելքերը հավասարահնարավոր են, հետևաբար

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{C_{26}^{13}-2}{C_{52}^{13}}=0,0000164.$$

Քանի որ գոյություն ունեն $C_4^2=6$ կոմբինացիաներ պարունակող 2 տեսակներ, որոնցից սիրտը և խաչը այդ տարբերակներից մեկն է, կստանանք

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{6\,\left[C_{26}^{13}-2\right]}{C_{52}^{13}}=0,0000984 :$$

§16. ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ճարտարագիտության և ֆիզիկական գիտությունների մեջ բազմաթիվ պատահական եր– ևույթների հետաքրքրությունը կապված են որոշ ֆիզիկական մեծության թվային ելքերի հետ: Այնուամենայնիվ, մենք տեսանք նաև այն օրինակները, որոնցում արդյունքները թվային տերմիններով չեն: Այս վերջին տիպի ելքերը կարելի է նաև արհեստականորեն թվայնացնել նշանակելով թվային արժեքները հնարավոր տարբերակներից յուրաքանչյուրի համար: Այլ խոսքերով, պատահական երևույթի հնարավոր ելքերը կարող են լինել թվային, բնականորեն կամ արհեստականորեն: Ցանկացած դեպքում ելքը կամ պատահույթը կարող է որոշվել ֆունկցիայի թվային արժեքների միջոցով: Փորձ կատարելուց մենք հիմնականում հետա– քրքրված ենք ելքերի որոշակի ֆունկցիայի մեջ, ի տարբերություն փաստացի ելքի ինքն իրեն: Օրինակ, զառեր նետելիս մենք հաճախ հետաքրքրվում ենք երկու զառերի գումարով և իրականում մփահոզված չենք ելքերի իրական արդյունքներով: Այսինքն, մենք կարող ենք հետաքրքրվել, իմանալով, որ գումարը յոթ է, և ոչ թե մփահոզվեք, արդյոք իրական ելքերը $(1,6)$ կամ $(6,1)$ կամ $(2,5)$ կամ $(5,2)$ կամ $(3,4)$ կամ $(4,3)$ էր: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $\omega \in \Omega$ ելքին համապատասխանության մեջ է դրվում $\eta(\omega)$ իրական թիվ: Կարճ ասած, իրական արժեքներ ընդունող ֆունկցիան որոշված Ω-ի վրա հայտնի է որպես պատահական մեծություն: Հետևաբար գալիս ենք հետևյալ սահմանմանը:

Սահմանում 12. Դիցուք $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -ն հավանականային տարածություն է, այսինքն Ω-ն տարրական պատահույթների բազմությունն է, $\mathcal{F}$ -ը σ-հանրահաշիվն է, որի վրա որոշված է P հավանականությունը: η **պատահական մեծությունը** չափելի ֆունկցիա է Ω բազմությունից իրական թվերի բազմության վրա

$$\eta : \quad \Omega \longmapsto \mathbb{R}^1,$$

այսինքն յուրաքանչյուր $\omega \in \Omega$ ելքի համար գոյություն ունի իրական թիվ, որը նշանակում են $\eta(\omega)$, որը անվանում են $\eta(\cdot)$-ի արժեք ω կետում և $\{\omega : \eta(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ կամայական $x \in \mathbb{R}^1$ համար:

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օրինակ 32. $\eta(\omega) \equiv const$ պատահական մեծություն է:

Օրինակ 33. $\eta(\omega) = I_A(\omega)$, որտեղ

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{եթե} \quad \omega \in A \\ 0, & \text{եթե} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

անվանում են A պատահույթի ինդիկատոր ֆունկցիա ($A \in \mathcal{F}$):

Քանի որ պատահական մեծության արժեքը սահմանվում է փորձի ելքով, մենք կարող ենք նշել պատահական մեծության հնարավոր արժեքի հավանականությունը:

Օրինակ 34. Ենթադրենք, որ պատահական փորձը կայանում է 3 կանոնավոր մետաղադրամ նետելու մեջ: Եթե $\eta(\omega)$-ով նշանակենք ՙգերբ՚-ի երևումների թիվը, ապա $\eta(\omega)$-ն կլինի պատահական մեծություն, որը ընդունում է $0, 1, 2, 3$ արժեքները համապատասխան հավանականություններով

$$p_0 = P(\omega : \eta(\omega) = 0) = \frac{1}{8},$$

$$p_1 = P(\omega : \eta(\omega) = 1) = \frac{3}{8},$$

$$p_2 = P(\omega : \eta(\omega) = 2) = \frac{3}{8},$$

$$p_3 = P(\omega : \eta(\omega) = 3) = \frac{1}{8} :$$

Քանի որ $\eta(\omega)$ -ն պետք է ընդունի 0-ից մինչև 3 արժեքները, ապա

$$1 = \sum_{k=0}^{3} p_k = \sum_{k=0}^{3} P(\omega \ \eta(\omega) = k),$$

որը իհարկե համապատասխանում է վերը գրված հավանականություններին:

Օրինակ 35. 6 գնդիկներ պարունակող սափորից, որոնցից 4-ը սպիտակ են, պատահականորեն առանց վերադարձի հանում են 2 գնդիկ: Դիցուք $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը հանված սպիտակ գնդիկների թիվն է: Ω բազմությունը պարունակում է 15 ելք և $\eta(\omega)$-ն պատահական մեծություն է , որը ընդունում է $0, 1, 2$ արժեքներից մեկը համապատասխան հավանականություններով՝

$$p_0 = P(\omega : \eta(\omega) = 0) = \frac{1}{15},$$

$$p_1 = P(\omega : \eta(\omega) = 1) = \frac{8}{15},$$

$$p_2 = P(\omega : \eta(\omega) = 2) = \frac{6}{15} :$$

Քանի որ $\eta(\omega)$ պետք է ընդունի 0, 1, 2 արժեքներից մեկը, ապա

$$1 = \sum_{k=0}^{2} p_k = \sum_{k=0}^{2} P(\omega \ \eta(\omega) = k)$$

որը իհարկե համապատասխանում է վերը գրված հավանականություններին:

Հետևաբար, պատահական մեծությունը կարելի է դիտարկել որպես կանոն, որը արտա– պատկերում է պատահույթները Ω-ի բազմությունից իրական առանցքի վրա: Նպատակը և առավելությունները թվային տերմիններով պատահույթների նույնականացման համար պետք է լինեն ակնհայտ, դա թույլ կտա հարմար վերլուծական նկարագրություն, ինչպես նաև պատահույթների գրաֆիկական ցուցադրումը և դրանց հավանականությունը:

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 9

§15. ՀԻՊԵՐԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼ

Հիպերերկրաչափական բաշխումը սերտորեն կապված է երկանդամային բաշխման հետ: n անկախ փորձերում հաջողությունների թիվը կարող է նկարագրվել երկանդամային մոդելով քանի դեռ փորձերը անկախ են, այսինքն հաջողության հավանականությունը մնում է հաստատուն յուրաքանչյուր փորձում: Սակայն ենթադրենք, որ ունենք N տարրերի վերջավոր բազմություն, որոնցից M-ը օժտված են ինչ-որ հատկությամբ, այնպես որ $(N-M)$ -ը օժտված չեն այդ հատկությամբ: Երբ պատահականորեն առանց վերադարձի ընտրում են վերջավոր քանակով տարրեր, փորձերը անկախ չեն, քանի որ հաջողության հավանականությունը l-րդ փորձում կախված է նախորդ փորձերի ելքերից:

Հիպերերկրաչափական բաշխմանը վերաբերվող ենթադրություններն են՝

1. Համախմբություն, որտեղից կատարվում է ընտրությունը, պարունակում է N տարրեր կամ օբյեկտներ (վերջավոր համախմբություն):

2. Յուրաքանչյուր տարր կարող է բնութագրվել որպես հաջողություն կամ անհաջողություն, և տեղի ունեն M հաջողություններ:

3. n տարրանոց ենթաբազմությունների ընտրությունն կատարվում է այնպես, որ յուրաքանչյուր տարրը հավասարահնարավոր լինի ընտրել:

Ինչպես Բինոմական օրենքում միայն այն փաստը ելքի մասին n անկախ փորձերում մենք հետաքրքրված ենք միայն հաջողությունների թվով:

Այժմ հաշվենք հավանականությունը, որ հաջողությունների թիվը հավասար կլինի k-ի, ցանկացած k ամբողջ թվի համար:

Եթե η-ն հաջողությունների թիվն է n չափանի պատահական նմուշում, ապա η-ի հավանականային բաշխումը, որն անվանում են **հիպերերկրաչափական բաշխում**, տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$P(\eta = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

որտեղ k-ն ամբողջ թիվ է, որը բավարարում է $0 \leq k \leq \min(n, M)$:

Օրինակ 32. 52 խաղաքարտերի կապուկից պատահականորեն ոչ կարգավորված ընտրել են 13 խաղաքարտ: Գոյություն ունեն C_{52}^{13} տարբերակներ, որը մոտավորապես հավասար է 635 միլիոնի: Քանի որ յուրաքանչյուր տեսակից կա 13 խաղաքարտ, ապա 2 տեսակի խաղաքարտեր պարունակող ընտրությունների թիվն է $C_{26}^{13} = 10400597$: C_{26}^{13} տարբերակներից մեկը բաղկացած է միայն սրտերից և մեկը բաղկացած է միայն խաչերից, հետևաբար գոյություն ունեն

$$\left[C_{26}^{13} - 2\right]$$

տարբերակներ բաղկացած միայն երկու տեսակներից: Ենթադրենք պատահականորեն ընտրում են 13 խաղաքարտ 52 խաղաքարտերի կապուկից: Նշանակենք

$$A = \{\text{ընտրված խաղաքարտերի մեջ կգտնվեն և սիրտ և խաչ տեսակի խաղաքարտեր}\},$$

$$B = \{\text{ընտրված խաղաքարտերը կպարունակեն ճշգրիտ երկու տեսակ}\} :$$

$N = C_{52}^{13}$ ելքերը հավասարահնարավոր են, հետևաբար

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_{26}^{13} - 2}{C_{52}^{13}} = 0,0000164 :$$

Քանի որ գոյություն ունեն $C_4^2 = 6$ կոմբինացիաներ պարունակող 2 տեսակներ, որոնցից սիրտը և խաչը այդ տարբերակներից մեկն է, կստանանք

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6\,\left[C_{26}^{13} - 2\right]}{C_{52}^{13}} = 0,0000984 :$$

§16. ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ճարտարագիտության և ֆիզիկական գիտությունների մեջ բազմաթիվ պատահական եր–

նույթների հետաքրքրությունը կապված են որոշ ֆիզիկական մեծության թվային ելքերի հետ: Այնուամենայնիվ, մենք պետանք նաև այն օրինակները, որոնցում արդյունքները թվային պերմիններով չեն: Այս վերջին տիպի ելքերը կարելի է նաև արհեստականորեն թվայնացնել նշանակելով թվային արժեքները հնարավոր տարբերակներից յուրաքանչյուրի համար: Այլ խոսքերով, պատահական երևույթի հնարավոր ելքերը կարող են լինել թվային, բնականորեն կամ արհեստականորեն: Ցանկացած դեպքում ելքը կամ պատահույթը կարող է որոշվել ֆունկցիայի թվային արժեքների միջոցով: Փորձ կապարելուց մենք հիմնականում հետա–քրքրված ենք ելքերի որոշակի ֆունկցիայով, ոչ թե ելքով: Օրինակ, զառեր նետելիս մենք հաճախ հետաքրքրվում ենք երկու զառերի գումարով և իրականում մտահոգված չենք ելքերի իրական արդյունքներով: Այսինքն, մենք կարող ենք հետաքրքրվել, իմանալով, որ գումարը յոթ է, և ոչ թե մտահոգվեք, արդյոք իրական ելքերը $(1,6)$ կամ $(6,1)$ կամ $(2,5)$ կամ $(5,2)$ կամ $(3,4)$ կամ $(4,3)$ էր: Սա նշանակում է, որ ցանկացած $\omega \in \Omega$ ելքին համապատասխա–նության մեջ է դրվում $\eta(\omega)$ իրական թիվ: Կարճ ասած, իրական արժեքներ ընդունող ֆունկցիան որոշված Ω-ի վրա հայտնի է որպես պատահական մեծություն: Հետևաբար գալիս ենք հետևյալ սահմանմանը:

Սահմանում 12. Դիցուք $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -ն հավանականային տարածություն է, այսինքն Ω-ն տարրական պատահույթների բազմությունն է, $\mathcal{F}$ -ը σ-հանրահաշիվն է, որի վրա որոշված է P հավանականությունը: η **պատահական մեծությունը** չափելի ֆունկցիա է Ω բազմությունից իրական թվերի բազմության վրա

$$\eta : \quad \Omega \longmapsto \mathbb{R}^1,$$

այսինքն յուրաքանչյուր $\omega \in \Omega$ ելքի համար գոյություն ունի իրական թիվ, որը նշանակում են $\eta(\omega)$, որը անվանում են $\eta(\cdot)$-ի արժեք ω կետում և $\{\omega : \eta(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ կամայական $x \in \mathbb{R}^1$ համար:

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օրինակ 33. $\eta(\omega) \equiv const$ պատահական մեծություն է:

Օրինակ 34. $\eta(\omega) = I_A(\omega)$, որտեղ

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{եթե} \quad \omega \in A \\ 0, & \text{եթե} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

անվանում են A պատահույթի ինդիկատոր ֆունկցիա ($A \in \mathcal{F}$)։

Քանի որ պատահական մեծության արժեքը սահմանվում է փորձի ելքով, մենք կարող ենք նշել պատահական մեծության հնարավոր արժեքի հավանականությունը։

Օրինակ 35. Ենթադրենք, որ պատահական փորձը կայանում է 3 կանոնավոր մետաղադրամ նետելու մեջ։ Եթե $\eta(\omega)$-ով նշանակենք "գերբ"-ի երևումների թիվը, ապա $\eta(\omega)$-ն կլինի պատահական մեծություն, որը ընդունում է $0, 1, 2, 3$ արժեքները համապատասխան հավանականություններով

$$p_0 = P(\omega : \eta(\omega) = 0) = \frac{1}{8},$$

$$p_1 = P(\omega : \eta(\omega) = 1) = \frac{3}{8},$$

$$p_2 = P(\omega : \eta(\omega) = 2) = \frac{3}{8},$$

$$p_3 = P(\omega : \eta(\omega) = 3) = \frac{1}{8} :$$

Քանի որ $\eta(\omega)$ -ն պետք է ընդունի 0-ից մինչև 3 արժեքները, ապա

$$1 = \sum_{k=0}^{3} p_k = \sum_{k=0}^{3} P(\omega\ \eta(\omega) = k),$$

որը իհարկե համապատասխանում է վերը գրված հավանականություններին։

Օրինակ 36. 6 գնդիկներ պարունակող սափորից, որոնցից 4-ը սպիտակ են, պատահականորեն առանց վերադարձի հանում են 2 գնդիկ։ Դիցուք $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը հանված սպիտակ գնդիկների թիվն է։ Ω բազմությունը պարունակում է 15 ելք և $\eta(\omega)$-ն պատահական մեծություն է, որն ընդունում է $0, 1, 2$ արժեքներից մեկը համապատասխան հավանականություններով՝

$$p_0 = P(\omega : \eta(\omega) = 0) = \frac{1}{15},$$

$$p_1 = P(\omega : \eta(\omega) = 1) = \frac{8}{15},$$

$$p_2 = P(\omega : \eta(\omega) = 2) = \frac{6}{15} :$$

Քանի որ $\eta(\omega)$ պետք է ընդունի 0, 1, 2 արժեքներից մեկը, ապա

$$1 = \sum_{k=0}^{2} p_k = \sum_{k=0}^{2} P(\omega : \eta(\omega) = k),$$

որն իհարկե համապատասխանում է վերը գրված հավանականություններին:

Հետևաբար, պատահական մեծությունը կարելի է դիտարկել որպես կանոն, որը արտապատկերում է պատահույթները Ω-ի բազմությունից իրական առանցքի վրա: Նպատակը և առավելությունները թվային տերմիններով պատահույթների նույնականացման համար պետք է լինեն ակնհայտ, դա թույլ կտա հարմար վերլուծական նկարագրություն, ինչպես նաև պատահույթների գրաֆիկական ցուցադրումը և դրանց հավանականությունը:

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 10

§17. ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

$\eta(\omega)$ պատահական մեծության F բաշխման ֆունկցիան որոշված է բոլոր $x \in \mathbb{R}^1$ իրական թվերի համար և սահմանվում է հետևյալ բանաձևով

$$F(x) = P(\omega: \ \eta(\omega) < x): \tag{29}$$

Այլ կերպ ասած, $F(x)$-ը դա հավանականությունն է, որ $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը ընդունում է x-ից փոքր արժեք:

Գրենք բաշխման ֆունկցիայի որոշ հատկություններ.

Հատկություն 0. $0 \leq F(x) \leq 1$:

Հատկություն 1. F-ը չնվազող ֆունկցիա է , այսինքն եթե $x_1 \leq x_2$, ապա $F(x_1) \leq F(x_2)$:

Ապացույց. Մենք կներկայացնենք 2 ապացույց: $x_1 \leq x_2$ համար $\{\omega : \eta(\omega) < x_1\}$ պատահույթը պարունակվում է $\{\omega : \eta(\omega) < x_2\}$ պատահույթի մեջ և հետևաբար չի կարող ունենալ ավելի մեծ հավանականություն (տես հավանականության Հատկություն 5-ը), այսինքն

$$P(\omega: \eta(\omega) < x_1) \leq P(\omega: \eta(\omega) < x_2).$$

Հետևաբար, ըստ բաշխման ֆունկցիայի սահմանման ունենք $F(x_1) \leq F(x_2)$:

Հատկություն 1-ի երկրորդ ապացույցը հետևյալն է: Ապացուցենք հետևյալ բանաձևը

$$P(\omega: x_1 \leq \eta(\omega) < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad \text{բոլոր} \quad x_1 < x_2 \quad \text{համար}: \tag{30}$$

Սա կարելի է տեսնել գրելով $\{\omega : \eta(\omega) < x_2\}$ պատահույթը որպես երկու փոխադարձաբար անհամատեղելի պատահույթների միավորում՝ $\{\omega : \eta(\omega) < x_1\}$ և $\{\omega : x_1 \leq \eta(\omega) < x_2\}$:

Այսինքն

$$\{\omega : \eta(\omega) < x_2\} = \{\omega : \eta(\omega) < x_1\} \bigcup \{\omega : x_1 \le \eta(\omega) < x_2\} :$$

և հետևաբար

$$P(\omega : \eta(\omega) < x_2) = P(\omega : \eta(\omega) < x_1) + P(\omega : x_1 \le \eta(\omega) < x_2),$$

որը ներկայացված է (30) բանաձևում: Ըստ Աքսիոմ 1-ի (30)-ի ձախ մասը ոչբացասական է , և հետևաբար $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$: Ապացույցն ավարտված է:

Հատկություն 2. $F(x) \to 1$ երբ $x \to +\infty$:

Ապացույց. Այս հատկությունը ապացուցելու համար նշենք, որ x_n-ը աճելով ձգտում է $+\infty$, այդ դեպքում $A_n = \{\omega : \eta(\omega) < x_n\}$, $n \ge 1$, պատահույթները աճող պատահույթներ են, այսինքն $A_n \subset A_{n+1}$ կամայական n-ի համար և որոնց միավորումը հավաստի պատահույթ է, այսինքն

$$A_n \uparrow \Omega :$$

Հետևաբար, ըստ հավանականության 12 Հատկության

$$P(A_n) \uparrow 1 :$$

Քանի որ, ըստ F-ի սահմանման, $P(A_n) = F(x_n)$, ապացույցն ավարտված է:

Հատկություն 3. $F(x) \to 0$ երբ $x \to -\infty$:

Ապացույց. Այս հատկությունը ապացուցելու համար նշենք, որ x_n-ը նվազելով ձգտում է $-\infty$, հետևաբար $A_n = \{\omega : \eta(\omega) < x_n\}$, $n \ge 1$, պատահույթները նվազող պատահույթներ են, այսինքն $A_{n+1} \subset A_n$ կամայական n-ի համար և որոնց հատումը անհնար պատահույթ է, այսինքն $A_n \downarrow \emptyset$: Հետևաբար, ըստ հավանականության 11 Հատկության

$$P(A_n) \downarrow 0 :$$

Քանի որ, ըստ F-ի սահմանման, $P(A_n) = F(x_n)$, ապացույցն ավարտված է:

Հատկություն 4. $F(x)$-ը ձախից անընդհատ է: Այսինքն, կամայական x-ի համար և կամայական x_n աճող հաջորդականության համար, որը ձգտում է x-ի,

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) :$$

Հատկություն 4-ի ապացույցը. Այս հատկությունը ապացուցելու համար նշենք, որ եթե x_n-ը աճելով ձգտում է x-ի, ապա $A_n = \{\omega : \eta(\omega) < x_n\}$, $n \geq 1$ հանդիսանում են պատահույթների աճող հաջորդականություն, այսինքն $A_n \subset A_{n+1}$ կամայական n-ի համար և որոնց միավորումը հավասար է $A = \{\omega : \eta(\omega) < x\}$ պատահույթին: Հետևաբար, ըստ հավանականության 11 Հատկության ստանում ենք

$$P(A_n) \uparrow P(A) :$$

Քանի որ, ըստ F-ի սահմանման, $P(A_n) = F(x_n)$ և $P(A) = F(x)$, ապացույցն ավարտվեց:

Այսպիսով 1 – 4 Հատկությունները անհրաժեշտ պայմաններ են հանդիսանում $G(x)$ ֆունկցիայի բաշխման ֆունկցիա լինելու համար:

Սակայն, այդ հատկությունները նաև բավարար են: Այդ պնդումը հետևում է հետևյալ թեորեմից, որը կբերենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 4 (Բաշխման ֆունկցիայի վերաբերյալ). Դիցուք $G(x)$ ֆունկցիան, $x \in \mathbb{R}^1$ բավարարում է բաշխման ֆունկցիայի 1 — 4 Հատկություններին: Այդ դեպքում գոյություն ունի $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ հավանականային տարածություն և $\eta(\omega)$ պատահական մեծություն, որի բաշխման ֆունկցիան համընկնում է տրված $G(x)$ ֆունկցիայի հետ, այսինքն

$$P(\omega : \quad \eta(\omega) < x) = G(x) :$$

Հետևաբար, պատահական մեծությունների օրինակներ բերելիս մենք կարող ենք բերել մի ֆունկցիա, որը բավարարում է 1 — 4 Հատկություններին:

Հարկավոր է նշել, որ բաշխման ֆունկցիային վերաբերվող թեորեմում $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը սահմանվում է ոչ միակ ձևով:

Օրինակ 37. Դիցուք (Ω, P)-ն հավանականային փարածություն է և $P(A) = P(\overline{A}) = 0,5$: Սահմանենք հետևյալ երկու պատահական մեծությունները՝

$$\eta_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{եթե} \quad \omega \in A \\ \text{-1}, & \text{եթե} \quad \omega \notin A, \end{cases} \qquad \eta_2(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{եթե} \quad \omega \in \overline{A} \\ \text{-1}, & \text{եթե} \quad \omega \in A : \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ $\{\omega : \ \eta_1(\omega) \neq \eta_2(\omega)\} = \Omega$: Սակայն,

$$F_{\eta_1}(x) = F_{\eta_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leq -1 \\ 0{,}5, & \text{եթե} \quad \text{-1} < x \leq 1 \\ 1, & \text{եթե} \quad x > 1 : \end{cases}$$

Սահմանում 13. Կասենք, որ $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծությունները **միապեսակ են բաշխված**, եթե նրանց բաշխման ֆունկցիաները հավասար են, այսինքն

$$F_{\eta_1}(x) = F_{\eta_2}(x) \quad \text{բոլոր} \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad \text{համար :}$$

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 11

§18. ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Օրինակ 38. Կասենք, որ $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը ունի **Նորմալ բաշխում**, եթե նրա բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right) dy, \tag{31}$$

որտեղ a-ն և σ-ն հաստատուններ են այնպիսին, որ $a \in \mathbb{R}^1$ և $\sigma > 0$:

Որպեսզի ցույց տանք Օրինակ 38-ի կոռեկտությունը, մենք պետք է ցույց տանք, որ (31)-ի աջ մասում գրված ֆունկցիան բավարարում է բաշխման ֆունկցիայի 1 — 4 Հատկություններին: Օրինակ 38-ի կոռեկտությունը կարող եք գտնել Հավելված 4-ում:

Նորմալ բաշխումը կենտրոնական դեր է խաղում հավանականությունների տեսության և վիճակագրության մեջ: Այդ բաշխումը նաև անվանում են Գաուսի բաշխում ի պատիվ Կարլ Ֆրիդրիխ Գաուսի, որը առաջարկեց դա որպես սխալների չափումների մոդել:

Օրինակ 39. Կասենք, որ պատահական մեծությունը **Հավասարաչափ է բաշխված** (a, b) միջակայքում, եթե նրա բաշխման ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{եթե} \quad a \le x \le b \\ 1, & \text{եթե} \quad x \ge b. \end{cases} \tag{32}$$

Ակնհայտ է, որ (32) ֆունկցիան բավարարում է բաշխման ֆունկցիայի 1 — 4 Հատկություններին:

Օրինակ 40. Կասենք, որ պատահական մեծությունն ունի **Ցուցչային բաշխում** $\lambda > 0$ պարամետրով, եթե նրա բաշխման ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{եթե} \quad x \ge 0 \end{cases} \tag{33}$$

Ակնհայտ է, որ (33) ֆունկցիան բավարարում է բաշխման ֆունկցիայի 1 — 4 Հատկություններին:

Պուասոնի բաշխման նման, ցուցչային բաշխումը կախված է միայն մեկ պարամետրից:

Օրինակ 41. Եթե $\eta(\omega) \equiv c$ հաստատուն է, ապա համապատասխան բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leq c \\ 1, & \text{եթե} \quad x > c: \end{cases} \tag{34}$$

Դիտարկենք կանոնավոր մետաղադրամի մեկ անգամ նետման փորձը: Երկու հնարավոր ելքերն են “գերբ” (ω_1 ելք) և “գիր” (ω_2 ելք), այսինքն, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$: Ենթադրենք $\eta(\omega)$-ն սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ $\eta(\omega_1) = 1$ և $\eta(\omega_2) = -1$: Մենք կարող ենք դա դիտարկել որպես խաղացողի շահած գումար, որը շահում է կամ պարտվում է 1 դոլլար՝ կախված նրանից, թե իրականացած ելքը գերբ է, թե՝ գիր: Համապատասխան բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{2}, & \text{եթե} \quad -1 < x \leq 1 \\ 1, & \text{եթե} \quad x > 1: \end{cases}$$

ՀԱՎԵԼՎԱԾ-4.

Օրինակ 38-ի կոռեկտությունը. Իսկապես, (31)-ը վերին սահմանի ֆունկցիա է, ուստի անընդհատ է: Հետևաբար Հատկություններ 3 և 4-ը բավարարված են: Քանի որ ինտեգրալի տակ գրված արտահայտությունը դրական է, տեղի ունի նաև Հատկություն 1-ը: Այսպիսով մնաց ապացուցել, որ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\right)dy = 1:$$

Կատարենք փոփոխականի փոխարինում

$$x = \frac{y-a}{\sigma}, \quad \sigma\, dx = dy:$$

Հետևաբար

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = 1:$$

Որպեսզի ապացուցենք, որ $F(x)$-ը իսկապես բաշխման ֆունկցիա է, հարկավոր է ցույց տալ, որ

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \sqrt{2\pi}:$$

Հետևաբար

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dx\,dy:$$

Այժմ հաշվենք կրկնակի ինտեգրալը, կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ անցնելով բևեռային կոորդինատների: Դիցուք

$$x = r\cdot\cos\varphi, \quad y = r\cdot\sin\varphi:$$

Քանի որ մակերեսի փարրը բևեռային կոորդինափներում հավասար է $r \cdot dr\, d\varphi$, հեփևաբար

$$dx\, dy = r\, dr\, d\varphi \, :$$

Այսպիսով

$$A^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^\infty r\, \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= -2\pi \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^\infty = 2\pi \, :$$

Հեփևաբար $A = \sqrt{2\pi}$ և արդյունքն ապացուցվեց: Հեփևաբար, ըսփ բաշխման ֆունկցիայի թեորեմի գոյություն ունի պափահական մեծություն, որի բաշխման ֆունկցիան ունի (31) փեսքը:

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 12

Լեմմա 5. Դիցուք $F(x)$-ը $\eta(\omega)$ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիա է: Այդ դեպքում կամայական x իրական թվի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$P\{\omega : \eta(\omega) = x\} = F(x+0) - F(x), \tag{35}$$

որտեղ $F(x+0)$-ը x կետի սահմանն է աջից:

Ապացույց. Ապացուցենք հետևյալ հավասարումը

$$P(\omega : \eta(\omega) \leq x) = F(x+0), \tag{36}$$

այսինքն պետք է հաշվել հավանականությունը, որ $\eta(\omega)$-ն փոքր է կամ հավասար x-ի:

Դժվար չէ սթուգել, որ

$$\{\omega : \ \eta(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

որտեղ $A_n = \left\{\omega : \ \eta(\omega) < x + \dfrac{1}{n}\right\}$:

A_n-ը նվազող հաջորդականություն է և հետևաբար ձգտում է $\{\omega : \ \eta(\omega) \leq x\}$ պատահույթին: Այսպիսով,

$$A_n \downarrow \{\omega : \ \eta(\omega) \leq x\} :$$

Ըստ հավանականության Հատկություն 11-ի կստանանք

$$P(A_n) \downarrow P(\omega : \ \eta(\omega) \leq x) :$$

(36)-ն ապացուցվեց:

Քանի որ

$$P(\omega : \ \eta(\omega) = x) = P(\omega : \ \eta(\omega) \leq x) - P(\omega : \ \eta(\omega) < x) = F(x+0) - F(x),$$

Լեմմայի պնդումը հետևում է (36) հավասարումից: Ապացույցն ավարտվեց:

Հետևաբար, անընդհատ բաշխման ֆունկցիայի համար (տես Օրինակներ 38 — 40) ունենք

$$P(\omega:\ \eta(\omega)=x)=0 \qquad \text{կամայական} \quad x\in\mathbb{R}^1 \quad \text{համար :}$$

Օրինակ 42. $\eta(\omega)$ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան տրվում է

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x\le 0 \\ \frac{x}{2}, & \text{եթե} \quad 0<x\le 1 \\ \frac{2}{3}, & \text{եթե} \quad 1<x\le 2 \\ \frac{11}{12}, & \text{եթե} \quad 2<x\le 3 \\ 1, & \text{եթե} \quad x>3: \end{cases}$$

Հաշվել ա) $P(\omega:\eta(\omega)<3)$, բ) $P(\omega:\eta(\omega)=1)$, գ) $P(\omega:\eta(\omega)\ge\frac{1}{2})$,

դ) $P(\omega\ 2,5\le\eta(\omega)<4)$.

Լուծում.

ա) $P(\omega:\eta(\omega)<3)=F(3)=\dfrac{11}{12}$,

բ) $P(\omega:\ \eta(\omega)=1)=F(1+0)-F(1)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$,

գ) $P(\omega:\ \eta(\omega)\ge\frac{1}{2})=1-P(\omega:\quad \eta(\omega)<\frac{1}{2})=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$,

դ) $P(\omega:\ 2,5\le\eta(\omega)<4)=F(4)-F(2,5)=1-\dfrac{11}{12}=\dfrac{1}{12}$:

§19. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Կասենք, որ $\eta(\omega)$-ն **բացարձակ անընդհատ** պատահական մեծություն է, եթե գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիա, որոշված բոլոր իրական թվերի համար և նրա $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy. \tag{37}$$

f ֆունկցիան անվանում են $\eta(\omega)$ բացարձակ անընդհատ պատահական մեծության **խտության ֆունկցիա**:

Բացարձակ անընդհատ պատահական մեծությունների տիպական օրինակներ են՝

1. Մարդու հասակը;

2. Մարդու կյանքի տևողությունը;

3. Շաքարի պարունակությունը նարինջի մեջ:

Խտության ֆունկցիա լինելու համար $f(x)$-ը պետք է բավարարի որոշակի հատկությունների: Քանի որ $F(x) \to 1$ երբ $x \to +\infty$, կունենանք

Հատկություն 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 : \tag{38}$$

Հատկություն 2. $f(x)$-ը ոչբացասական ֆունկցիա է:

Ապացույց. Դիֆերենցելով (37)-ի երկու կողմերը, կստանանք

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) : \tag{39}$$

Այսինքն, խտությունը հանդիսանում է բաշխման ֆունկցիայի ածանցյալը: Հայտնի է, որ չնվազող ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալը միշտ ոչբացասական է: Հետևաբար ապացույցն ավարտվեց, քանի որ $F(x)$-ը չնվազող ֆունկցիա է:

Նշենք, որ այս երկու հատկությունները նաև բավարար են, որ $g(x)$-ը լինի խտության ֆունկցիա:

Թեորեմ 5 (Խտության ֆունկցիայի վերաբերյալ). Դիցուք $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ **ֆունկցիան**

բավարարում է (38) պայմանին և լրացուցիչ բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$g(x) \geq 0 \quad \textbf{բոլոր} \;\; x \in \mathbb{R}^1 \quad \textbf{համար} \;:$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի հավանականային պարածություն $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ և բացարձակ անընդհատ $\eta(\omega)$ պատահական մեծություն, որի խտության ֆունկցիան համընկնում է տրված $g(x)$ ֆունկցայի հետ:

Ապացույց: Սահմանենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y)\, dy \;:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $G(x)$ ֆունկցիան բավարարում է բաշխման ֆունկցիայի 1 — 4 հատկություններին: Հետևաբար Թեորեմ 4-ի համաձայն, գոյություն ունի $\eta(\omega)$ պատահական մեծություն, որի բաշխման ֆունկցիան համընկնում է $G(x)$-ի հետ: Ըստ խտության ֆունկցիայի սահմանման, $g(x)$-ը հանդիսանում է $\eta(\omega)$ պատահական մեծության խտության ֆունկցիա: Ապացույցն ավարտված է:

Հետևաբար, որպեսզի բերենք բացարձակ անընդհատ պատահական մեծության օրինակ, մենք պետք է նշենք **ոչբացասական** ֆունկցիա, որը բավարարում է (38)-ին:

Նորմալ բաշխված պատահական մեծությունը (տես Օրինակ 38) բացարձակ անընդհատ է և նրա խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\; \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{40}$$

որտեղ a-ն և σ-ն հաստատուններ են այնպիսին, որ $a \in \mathbb{R}^1$ և $\sigma > 0$:

(a, b) միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծությունը բացարձակ անընդ–

հատ է (տես Օրինակ 39) և նրա խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{եթե} \quad x \notin (a, b) \\ \dfrac{1}{b-a}, \quad \text{եթե} \quad a \leq x \leq b: \end{cases} \tag{41}$$

Ակնհայտ է, որ (41) ֆունկցիան բավարարում է (38)-ին:

$\lambda > 0$ պարամետրով ցուցչային բաշխում ունեցող պատահական մեծությունը բացարձակ անընդհատ է (տես Օրինակ 40) և նրա խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{եթե} \quad x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{եթե} \quad x > 0: \end{cases} \tag{42}$$

Ակնհայտ է, որ (42) ֆունկցիան բավարարում է (38)-ին:

(35)-ից ստանում ենք

$$P(\omega : \ a \leq \eta(\omega) \leq b) = P(\omega : \ a \leq \eta(\omega) < b) =$$

$$= P(\omega : \ a < \eta(\omega) \leq b) = P(\omega : \ a < \eta(\omega) < b) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{43}$$

Քանի որ բացարձակ անընդհատ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է բոլոր կետերում, ապա $P(\omega \ \ \eta(\omega) = x) = 0$ կամայական ֆիքսված x-ի համար:

Հետևաբար այս հավասարումը պնդում է, որ հավանականությունը, որ բացարձակ անընդհատ պատահական մեծությունը կընդունի կամայական ֆիքսված արժեքը, հավասար է 0-ի:

Խտության ֆունկցիայի մեկ այլ ինտուիտիվ պատկերացում կարելի է ստանալ (43)-ից: Եթե $\eta(\omega)$-ն բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է, որն ունի $f(x)$ խտության ֆունկցիա, ապա փոքր dx-ի համար

$$P(\omega : \ x \leq \eta(\omega) \leq x + dx) = f(x)\, dx + o(dx) :$$

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 14

§20. ԴԻՍԿՐԵՏ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§19-ում մենք դիտարկել էինք բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություններ, այսինքն պատահական մեծություններ, որոնց հնարավոր արժեքների բազմությունը անհաշվելի է: Սակայն գոյություն ունեն պատահական մեծություններ, որոնց հնարավոր արժեքների բազմությունը կամ վերջավոր է, կամ հաշվելի: Դիցուք $\eta(\omega)$-ն այդպիսի պատահական մեծություն է: Պատահական մեծությունը, որը կարող է ընդունել առավելագույնը հաշվելի թվով հնարավոր արժեքներ, կոչվում է **դիսկրետ**:

Դիսկրետ պատահական մեծությունների տիպական օրինակներ են.

1. Գործարանային արտադրությունից պատահականորեն ընտրված 10 մեխերի մեջ խոտան մեխերի թիվը;

2. Պետական արգելոցում պահպանվող սպանված եղջերուների քանակը;

3. Գյուղական համայնքներում էլեկտրաֆիկացված տների թիվը:

Դիսկրետ $\eta(\omega)$ պատահական մեծության համար սահմանենք $p(x)$ հավանականային օրենքի ֆունկցիան

$$p(x) = P(\omega : \quad \eta(\omega) = x) : \tag{44}$$

$p(x)$ հավանականային օրենքի ֆունկցիան դրական է առավելագույնը հաշվելի թվով x արժեքների համար: Այսինքն, եթե $\eta(\omega)$-ն ընդունում է x_1, x_2, ..., արժեքներից մեկը, ապա

$$p(x_i) > 0, \quad i = 1, 2, ... \qquad p(x) = 0 \quad x - \text{ի բոլոր մնացած արժեքների համար} :$$

Քանի որ $\eta(\omega)$ -ն պետք է ընդունի x_i արժեքներից որևէ մեկը, կունենաք

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = \sum_{\substack{\text{բոլոր } x \text{ կետերով} \\ \text{այնպես, որ } p(x) > 0}} p(x) = 1 : \tag{45}$$

$F(x)$ բաշխման ֆունկցիայից կարելի է ստանալ $p(x)$ հավանականային օրենքի ֆունկցիան հետևյալ բանաձևով (տես Լեմմա 5)

$$p(x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i)$$

և հակառակը, $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան կարող է ներկայացվել հավանականային օրենքի ֆունկցիայի միջոցով հետևյալ բանաձևով

$$F(x) = \sum_{\substack{\text{բոլոր } x_i < x \text{ կետերով} \\ \text{այնպես, որ } p(x_i) > 0}} p(x_i) : \tag{46}$$

Հետևաբար, դիսկրետ $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը կարող է տրվել իր **բաշխման օրենքով**, այսինքն

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & ... & x_n & ... \\ p(x_1) & p(x_2) & ... & p(x_n) & ... \end{array}$$

որտեղ x_1, x_2 ...-ը $\eta(\omega)$ դիսկրետ պատահական մեծության հնարավոր արժեքներն են, իսկ $p(x_1)$, $p(x_2)$, ...- երը բավարարում են (45) պայմանին:

Այսպիսով, դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան աստիճանաձև ֆունկցիա է: Այսինքն, $F(x)$-ի արժեքները հաստատուն են $[x_{i-1}, x_i)$ միջակայքերում և x_i կետում կատարում է $p(x_i)$ մեծության թռիչք:

Օրինակ 43. Դիցուք $\eta(\omega)$-ն պատահական մեծություն է հետևյալ բաշխման օրենքով՝

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \end{array}$$

Հետևաբար, նրա բաշխման ֆունկցիան տրվում է

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leq 1 \\ 1/4, & \text{եթե} \quad 1 < x \leq 2 \\ 3/4, & \text{եթե} \quad 2 < x \leq 3 \\ 7/8, & \text{եթե} \quad 3 < x \leq 4 \\ 1, & \text{եթե} \quad x > 4: \end{cases}$$

բանաձևով: Դժվար չէ նկատել, որ քայլի մեծությունը $1, 2, 3, 4$ արժեքներից ցանկացածում հավասար է հավանականությանը, որ $\eta(\omega)$-ն ընդունում է այդ մասնակի արժեքը:

Նշենք նաև, որ քանի որ հավանականությունը ասոցացվում է կետերի հետ դիսկրետ դեպքում, միջակայքի ծայրակետերի ներառումը կամ բացառումը կարևոր է:

Օրինակ 44. η պատահական մեծությունը ունի **Բինոմական բաշխում** n և p պարամետրերով, եթե դա դիսկրետ պատահական մեծություն է

$$\begin{matrix} 0 & 1 & ... & n \\ p(0) & p(1) & ... & p(n) \end{matrix}$$

որի $p(x)$ հավանականային բաշխումները տրվում են

$$p(x) = C_n^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, ..., n$$

բանաձևով: Այսպիսով, $\eta(\omega)$ պատահական մեծության համար, որը ունի բինոմական բաշխում $n = 6$ և $p = 1/3$ պարամետրերով, կունենաք

$$P(\omega : 1 < \eta(\omega) < 2) = 0,$$

$$P(\omega : 1 < \eta(\omega) \leq 2) = P(\omega : \eta(\omega) = 2) = C_6^2 (1/3)^2 (2/3)^4 = 0,3292,$$

$$P(\omega : 1 \leq \eta(\omega) \leq 2) = P(\omega : \eta(\omega) = 1) + P(\omega : \eta(\omega) = 2) =$$

$$= C_6^1(1/3)(2/3)^5 + C_6^2(1/3)^2(2/3)^4 = 0,5926 :$$

Օրինակ 45. η պատահական մեծությունը ունի **Պուասոնի բաշխում** $\lambda > 0$ պարամետրով, եթե նա դիսկրետ պատահական մեծություն է

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & ... & n & ... \\ p(0) & p(1) & ... & p(n) & ... \end{array}$$

որի $p(n)$ հավանականային բաշխումները տրվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$p(n) = P(\eta = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ... :$$

Օրինակ 46. Ենթադրենք 15 գնդիկներ համարակալվել են այնպես, որ մեկ գնդիկ ունի 1 թիվը, երկու գնդիկներ ունեն 2 թիվը, և այլն:Փորձը կայանում է նրանում, որ 15 գնդիկները խառնում են և պատահականորեն հանում են նրանցից մեկը: Դիցուք $\eta(\omega)$-ով նշանակենք մեկ պատահական հանման ժամանակ դուրս եկած թիվը: Հավանականային ֆունկցիան, որը նկարագրում է հնարավոր ելքերը և դրանց հավանականությունները կարող են տրվել հետևյալ աղյուսակով՝

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{3}{15} & \frac{4}{15} & \frac{5}{15} \end{array} :$$

Նշենք, որ $p_k = \dfrac{k}{15}$ ֆունկցիան տալիս է ցանկացած ելքի իրականանալու հավանականությունը: Մոդելը օգտագործվեց ցանկացած յուրահատուկ ելքի կամ պատահույթի հավանականությունը գտնելու համար: 4-ից պակաս թիվ ստանալու հավանականությունը հավասար է

$$P(\omega : 1 \le \eta(\omega) \le 3) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} :$$

4 կամ 5 թիվ ստանալու հավանականությունը հավասար է

$$P(\omega : 4 \leq \eta(\omega) \leq 5) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} :$$

§21. ՀԱՄԱՏԵՂ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Կասենք, որ $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծությունները համատեղ են բաշխված, եթե նրանք սահմանված են որպես ֆունկցիաներ միևնույն հավանականային տարածությունում: Այդ դեպքում հնարավոր է կառուցել համատեղ հավանականային պնդումներ $\eta_1(\omega)$ -ի և $\eta_2(\omega)$ -ի մասին (այսինքն, հավանականային պնդումներ երկու պատահական մեծությունների միաժամանակ պահվածքի վերաբերյալ): Նման տիպի հավանականությունների հետ գործ ունենալու համար սահմանենք կամայական $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծությունների համար **համատեղ բաշխման ֆունկցիա** հետևյալ բանաձևով՝

$$F(x_1, x_2) = P\left(\omega : \ \eta_1(\omega) < x_1 \bigcap \eta_2(\omega) < x_2\right), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1. \tag{47}$$

ՀԱՄԱՏԵՂ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Հատկություն 1. $F(x_1, x_2)$-ը չնվազող ֆունկցիա է ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի:

Հատկություն 2. $F(x_1, x_2) \to 1$ երբ $x_1 \to +\infty$ և $x_2 \to +\infty$.

Հատկություն 3. $F(x_1, x_2) \to 0$ եթե x_1 կամ x_2-ից որևէ մեկը ձգտում է $-\infty$:

Հատկություն 4. $F(x_1, x_2)$-ը ձախից անընդհատ է ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի:

Այս հատկությունների ապացույցները թողնում ենք որպես վարժություն, քանի որ դրանք կարող են ապացուցվել ինչպես պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի համապա– տասխան հատկությունները:

Հետևաբար, Հատկություններ 1 — 4 հանդիսանում են անհրաժեշտ պայմաններ $G(x_1, x_2)$ ֆունկցիայի համատեղ բաշխման ֆունկցիա լինելու համար:

Թեորեմ 6. Դիցուք $F(x_1, x_2)$**-ը** $(\eta_1(\omega), \eta_2(\omega))$ **պատահական վեկտորի համատեղ բաշխման**

ֆունկցիան է: Այդ դեպքում

$$P\left\{\omega:\ a_1 \le \eta_1(\omega) < b_1 \bigcap a_2 \le \eta_2(\omega) < b_2\right\} =$$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2), \tag{48}$$

երբ $a_1 < b_1$ և $a_2 < b_2$, այսինքն հավանականությունը, որ $(\eta_1(\omega), \eta_2(\omega))$ պատահական կետը կպատկանի $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ ուղղանկյանը հավասար է ուղղանկյան գագաթներում համատեղ բաշխման ֆունկցիաների հանրահաշվական գումարին ($F(b_1, b_2)$ և $F(a_1, a_2)$ դրական, իսկ $F(b_1, a_2)$ և $F(a_1, b_2)$ բացասական):

Այն դեպքում, երբ $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$-ն դիսկրետ պատահական մեծություններ են, հարմար է սահմանել նրանց **համատեղ հավանականային օրենքի ֆունկցիան** հետևյալ կերպ՝

$$p(x, y) = P\left\{\omega:\ \eta_1(\omega) = x \bigcap \eta_2(\omega) = y\right\}:$$

$\eta_1(\omega)$-ի հավանականային օրենքի ֆունկցիան կարող է ստացվել $p(x, y)$-ից հետևյալ կերպ՝

$$p_{\eta_1(\omega)}(x) = P(\omega:\ \eta_1(\omega) = x) = \sum_{y: p(x,y)>0} p(x, y):$$

Նմանապես

$$p_{\eta_2(\omega)}(y) = P(\omega:\ \eta_2(\omega) = y) = \sum_{x: p(x,y)>0} p(x, y):$$

Կասենք, որ $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ **համատեղ անընդհատ են**, եթե գոյություն ունի $f(x_1, x_2)$ ֆունկցիա որոշված բոլոր իրական x_1 և x_2 թվերի համար և որը օժտված է հետևյալ հատկությամբ

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(x, y)\, dx\, dy: \tag{49}$$

$f(x_1, x_2)$ ֆունկցիան կոչվում է $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծությունների **համատեղ խտության ֆունկցիա**:

Վերը նշված սահմանումից բխում է, որ

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2), \tag{50}$$

երբ մասնակի ածանցյալները որոշված են:

Եթե $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$-ը համատեղ անընդհատ են, ապա նրանք առանձին ևս անընդհատ են, և նրանց խտության ֆունկցիաները կարելի է ստանալ հետևյալ կերպ՝

$$P\{\omega: \ \eta_1(\omega) < x_1\} = P\left\{\omega: \ \eta_1(\omega) < x_1 \bigcap -\infty < \eta_2(\omega) < +\infty\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{x_1} f_{\eta_1}(x)\, dx,$$

որտեղ

$$f_{\eta_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$

$\eta_1(\omega)$-ի խտության ֆունկցիան է: Նմանապես, $\eta_2(\omega)$-ի խտության ֆունկցիան տրվում է

$$f_{\eta_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx : \tag{51}$$

Ձևակերպենք հետևյալ թեորեմը առանց ապացույցի:

Թեորեմ 7 (Համատեղ Բաշխման Ֆունկցիայի վերաբերյալ). Դիցուք $G(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$ ֆունկցիան բավարարում է Հատկություններ 1 — 4-ին, և լրացուցիչ հետևյալ պայմանին

$$G(b_1, b_2) - G(a_1, b_2) - G(b_1, a_2) + G(a_1, a_2) \geq 0, \tag{52}$$

կամայական $a_1 < b_1$ և $a_2 < b_2$ համար: Այդ դեպքում գոյություն ունի $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ հավանա– կանային տարածություն և $(\eta_1(\omega), \eta_2(\omega))$ պատահական վեկտոր, որոնց համար համա– տեղ բաշխման ֆունկցիան համընկնում է տրված $G(x_1, x_2)$ ֆունկցիայի հետ, այսինքն

$$P(\omega: \quad \eta_1(\omega) < x_1 \bigcap \eta_2(\omega) < x_2) = G(x_1, x_2) :$$

§22. ՈՐՈՇ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՀԱՄԱՏԵՂ ԽՏՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Դիտողություն 5. Նշենք, որ համատեղ խտության ֆունկցիան օժտված է երկու հատկությամբ՝

$$1) \quad f(x_1, x_2) \geq 0; \tag{54}$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1 : \tag{55}$$

Այս հատկությունները կարելի է ապացուցել նույն ձևով, որը արվել է $n = 1$ դեպքում (համեմատիր §19-ի Հատկություններ 1, 2-ի հետ):

Դիտողություն 6. Պետք է նշել, որ եթե $g(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$ ֆունկցիան բավարարում է

$$g(x_1, x_2) \geq 0 \quad \text{և} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$$

հատկություններին, ապա գոյություն ունի $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ հավանականային տարածություն և $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծություններ այնպես, որ նրանց համատեղ $f(x_1, x_2)$ խտության ֆունկցիան համընկնում է $g(x_1, x_2)$-ի հետ, այսինքն

$$P\left\{\omega : \ \eta_1(\omega) < x_1 \bigcap \eta_2(\omega) < x_2\right\} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} g(x, y)\, dx\, dy : \tag{56}$$

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 15

Դիտողություն 7. Եթե $f(x_1, x_2)$-ը $(\eta_1(\omega), \eta_2(\omega))$ պատահական վեկտորի համատեղ խտության ֆունկցիան է, ապա

$$P\left\{\omega:\ a_1 \leq \eta_1(\omega) < b_1 \bigcap a_2 \leq \eta_2(\omega) < b_2\right\} =$$

$$= P\left\{\omega:\ a_1 \leq \eta_1(\omega) \leq b_1 \bigcap a_2 \leq \eta_2(\omega) \leq b_2\right\} = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy: \qquad (57)$$

(57)-ը բխում է Թեորեմ 6-ից և (49)-ից:

Օրինակ 46. Դիցուք երկու պատահական մեծությունների համատեղ խտության ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 6\exp(-2x_1 - 3x_2), & \text{եթե} \quad x_1 > 0\ x_2 > 0 \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Գտնել

ա) հավանականությունը, որ առաջին պատահական մեծությունը կընդունի արժեքներ 1-ի և 2-ի միջև, իսկ երկրորդ պատահական մեծությունը կընդունի արժեքներ 2-ի և 3-ի միջև;

բ) հավանականությունը, որ առաջին պատահական մեծությունը կընդունի 2-ից փոքր կամ հավասար արժեք, իսկ երկրորդ պատահական մեծությունը կընդունի 2-ից մեծ կամ հավասար արժեք;

գ) երկու պատահական մեծությունների համատեղ բաշխման ֆունկցիան;

դ) հավանականությունը, որ երկու պատահական մեծությունները կընդունեն 1-ից փոքր կամ հավասար արժեքներ;

ե) առաջին պատահական մեծության միաչափ խտության ֆունկցիան;

զ) միաչափ բաշխման ֆունկցիաները:

Լուծում. Օգտվելով (49) բանաձևից և կատարելով անհրաժեշտ ինտեգրումը, կստանանք

$$\int_1^2 \int_2^3 6 \exp\left(-2x_1 - 3x_2\right) dx_1\, dx_2 = \left(e^{-2} - e^{-4}\right)\left(e^{-6} - e^{-9}\right) \approx 0,0003$$

ա) դեպքի համար, և

$$\int_0^2 \int_2^\infty 6 \exp\left(-2x_1 - 3x_2\right) dx_1\, dx_2 = \left(1 - e^{-4}\right) e^{-6}$$

բ) դեպքի համար:

գ) Ըստ սահմանման (տես (49))

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} 6 \exp\left(-2y_1 - 3y_2\right) dy_1\, dy_2, & \text{եթե} \quad x_1 > 0 \;\; x_2 > 0 \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

այնպես, որ

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(1 - e^{-2x_1}\right)\left(1 - e^{-3x_2}\right) & \text{եթե} \quad x_1 > 0 \; x_2 > 0 \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

և հետևաբար, դ) դեպքում կստանանք

$$F(1,1) = \left(1 - e^{-2}\right)\left(1 - e^{-3}\right) \approx 0,8216.$$

ե) Օգտվելով (51)-ից, կստանանք

$$f_{\eta_1}(x_1) = \begin{cases} \int_0^\infty 6 \exp\left(-2x_1 - 3x_2\right) dx_2, & \text{եթե} \quad x_1 > 0 \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում,} \end{cases}$$

կամ

$$f_{\eta_1}(x_1) = \begin{cases} 2\exp(-2x_1), & \text{եթե} \quad x_1 > 0 \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում :} \end{cases}$$

զ) Այժմ քանի որ $F_{\eta_1}(x_1) = F(x_1, +\infty)$ և $F_{\eta_2}(x_2) = F(+\infty, x_2)$, այսպեղից հեպևում է, որ

$$F_{\eta_1}(x_1) = \begin{cases} 1 - e^{-2x_1}, & \text{եթե} \quad x_1 > 0 \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

և

$$F_{\eta_2}(x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-3x_2}, & \text{եթե} \quad x_2 > 0 \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Հեպևաբար, մեր օրինակում $F(x_1, x_2) = F_{\eta_1}(x_1)\, F_{\eta_2}(x_2)$:

§23. ԱՆԿԱԽ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

12 և 13 պարագրաֆներում մենք սահմանեցինք անկախ փորձերի հաջորդականության գաղափարը: Այս պարագրաֆում մենք կսահմանենք անկախ պապահական մեծությունների գաղափարը: Այս գաղափարը նույն դերն է կապարաում համապեղ բաշխված պապահական մեծությունների պեսության մեջ, որը որ անկախ պապահույթները ունեն փարրական ելքերի բազմության մեջ: Դիպարկենք համապեղ բաշխված պապահական մեծությունների դեպքը:

Դիցուք $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ համապեղ բաշխված պապահական մեծություններ են համապա–պասխանաբար $F_{\eta_1}(x)$ և $F_{\eta_2}(x)$ միաչափ բաշխման ֆունկցիաներով, և $F(x_1, x_2)$ համապեղ բաշխման ֆունկցիայով:

Սահմանում 14. Համապեղ բաշխված $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պապահական մեծությունները անկախ են, եթե նրանց համապեղ $F(x_1, x_2)$ բաշխման ֆունկցիան ներկայացվում է նրանց միաչափ $F_{\eta_1}(x)$ և $F_{\eta_2}(x)$ բաշխման ֆունկցիաների արպադրյալի պեսքով այնպես, որ կամայական իրական x_1 և x_2 թվերի համար

$$F(x_1, x_2) = F_{\eta_1}(x_1) \cdot F_{\eta_2}(x_2) : \tag{58}$$

Նմանապես, երկու համատեղ անընդհատ $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծությունները անկախ են, եթե նրանց համատեղ $f(x_1, x_2)$ խտության ֆունկցիան կարող է ներկայացվել միաչափ $f_{\eta_1}(x_1)$ և $f_{\eta_2}(x_2)$ խտության ֆունկցիաների արտադրյալի միջոցով այնպես, որ կամայական իրական x_1 և x_2 թվերի համար

$$f(x_1, x_2) = f_{\eta_1}(x_1) \cdot f_{\eta_2}(x_2). \tag{59}$$

(59) բանաձևը բխում է (58)-ից, ածանցելով (58)-ի երկու կողմերը սկզբում ըստ x_1-ի, իսկ հետո ըստ x_2-ի: (58) բանաձևը բխում է (59)-ից ինտեգրելով (59)-ի երկու կողմերը:

Նմանապես, դիսկրետ $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծությունները անկախ են, եթե նրանց $p(x, y)$ համատեղ հավանականային ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել $p_{\eta_1}(x)$ և $p_{\eta_2}(y)$ միաչափ հավանականային ֆունկցիաների արտադրյալի միջոցով այնպես, որ կամայական x և y-ի համար

$$p(x, y) = p_{\eta_1}(x) \cdot p_{\eta_2}(y) : \tag{60}$$

Համարժեքությունը հետևում է, քանի որ եթե (58)-ը բավարարված է, ապա ստանում ենք (60)-ը: Սակայն, եթե տեղի ունի (60)-ը, ապա կամայական իրական x_1 և x_2 թվերի համար կստանանք

$$F(x_1, x_2) = \sum_{x:\, x \le x_1} \sum_{y:\, y \le x_2} p(x, y) = \sum_{x: x \le x_1} \sum_{y:\, y \le x_2} p_{\eta_1}(x) \cdot p_{\eta_2}(y) =$$

$$= \sum_{x:\, x \le x_1} p_{\eta_1}(x) \cdot \sum_{y:\, y \le x_2} p_{\eta_2}(y) = F_{\eta_1}(x_1) \cdot F_{\eta_2}(x_2)$$

և հետևաբար $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ անկախ են:

Այսպիսով, $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ անկախ են, եթե նրանցից մեկի արժեքի իմանալը չի փոխում մյուսի բաշխումը: Այն պատահական մեծությունները որոնք անկախ չեն, կոչվում են կախյալ:

Լեմմա 6. Կամայական $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ անկախ պատահական մեծությունների համար նրանց համատեղ բաշխման ֆունկցիան միշտ բավարարում է (52) լրացուցիչ պայմանին:

Ապացույց. Քանի որ $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ անկախ են, ապա կարող ենք (48) բանաձևը ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = F_{\eta_1}(b_1)\, F_{\eta_2}(b_2) - F_{\eta_1}(a_1)\, F_{\eta_2}(b_2) -$$

$$-F_{\eta_1}(b_1)\, F_{\eta_2}(a_2) + F_{\eta_1}(a_1)\, F_{\eta_2}(a_2) = \left[F_{\eta_1}(b_1) - F_{\eta_1}(a_1)\right] \cdot \left[F_{\eta_2}(b_2) - F_{\eta_2}(a_2)\right] : \qquad (61)$$

Քանի որ $F_{\eta_1}(\cdot)$ և $F_{\eta_2}(\cdot)$ չնվազող ֆունկցիաներ են, այստեղից բխում է, որ (61)-ի աջ մասը ոչբացասական է: Ապացույցն ավարտված է:

Անկախ պատահական մեծությունները օժտված են հետևյալ կարևոր հատկությամբ, որի ապացույցը կթողնենք որպես վարժություն:

Թեորեմ 8. Դիցուք $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ անկախ պատահական մեծություններ են, իսկ $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիաներ են $\mathbb{R}^1$-ից $\mathbb{R}^1$: Այդ դեպքում $\zeta_1(\omega) = \varphi_1(\eta_1(\omega))$ և $\zeta_2 = \varphi_2(\eta_2(\omega))$ պատահական մեծությունները նույնպես անկախ են:

Այսինքն $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծությունների անկախությունից բխում է $\zeta_1(\omega)$ և $\zeta_2(\omega)$ պատահական մեծությունների անկախությունը:

§24. ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՍՊԱՍՈՒՄԸ

Այս պարագրաֆում մենք կսահմանենք պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման գաղափարը և կնկարագրենք նրա կարևոր դերը հավանականությունների տե–սության մեջ:

Տրված $\eta(\omega)$ պատահական մեծության համար սահմանենք **մաթ. սպասում**, որը նշա–

նակում են $E\eta$-ով, որպես η-ի հավանականային օրենքի միջին: Ըստ սահմանման,

$$E\eta = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x:\, p(x)>0} x\, p(x), & \text{եթե } \eta \text{ -ն դիսկրետ պատահական մեծություն է,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\eta(x)\, dx, & \text{եթե } \eta\text{-ն բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է} \end{cases} \tag{62}$$

կախված նրանից, թե η-ն տրվում է իր խտության ֆունկցիայի միջոցով՝ $f_\eta(x)$, կամ իր հավանականային կշռի ֆունկցիայի միջոցով՝ $p(x)$. Այլ կերպ ասած, η դիսկրետ պատահական մեծության մաթ. սպասումը դա η-ի բոլոր հնարավոր արժեքների կշռավորված միջինն է, յուրաքանչյուր արժեք վերցվում է կշռված հավանականությամբ: Օրինակ, եթե η-ի հավանականային բաշխումը տրվում է

$$p(0) = p(1) = 0{,}5,$$

ապա

$$E\eta = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$$

սա սովորական միջինն է երկու հնարավոր արժեքների՝ 0 և 1, որը ընդունում է η-ն:

Մյուս կողմից, եթե

$$p(0) = 1/3, \quad p(1) = 2/3$$

ապա

$$E\eta = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

կշռավորված միջինն է երկու հնարավոր արժեքների՝ 0 և 1, որտեղ 1 արժեքը 2 անգամ ավելի մեծ կշիռ ունի, քան 0 արժեքը, քանի որ $p(1) = 2p(0)$:

Դիտողություն 8. Մաթ. սպասում գաղափարը համարժեք է կշիռների բաշխման **ծանրության կենտրոն** ֆիզիկական գաղափարին: Դիտարկենք η դիսկրետ պատահական մեծությունը, որը ունի $p(x_i)$, $i \geq 1$ հավանականություններ: Եթե այժմ մենք պատկերցնենք անկշիռ մի ձող, որում տեղադրված են $p(x_i)$, $i \geq 1$ հավանականաությունները x_i, $i \geq 1$ կետերում, ապա այն կետը, որում ձողը պետք է պահի իր հավասարակշռությունը, հայտնի է որպես ծանրության կենտրոն: Այդ կետը հենց $E\eta$-ն է:

Օրինակ 48. Գտնել $E\eta$-ն, որտեղ η-ն կանոնավոր խաղոսկրի նետման ելքն է:

Լուծում. Քանի որ

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6},$$

ապա կստանանք

$$E\eta = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}:$$

Նշենք, որ այս օրինակում η-ի մաթ. սպասումը հավասար չէ η-ի հնարավոր արժեքներից մեկին: Այսինքն, խաղոսկրը նետելիս, հնարավոր չէ ստանալ $\frac{7}{2}$ ելքը: Այսպիսով, մենք $E\eta$-ն անվանում ենք η-ի մաթ. սպասում, սա չի բացատրվում որպես արժեք, որը մենք սպասում ենք η պատահական մեծությունից, սակայն կարող ենք հասկանալ η-ի միջին արժեք փորձերի շատ թվով կրկնությունների դեպքում: Այսինքն, եթե մենք շարունակաբար նետենք խաղոսկրը, ապա մեծ թվով նետումներից հետո բոլոր ելքերի միջինը կլինի մոտավորապես հավասար $\frac{7}{2}$:

Պատահական մեծությունների մաթ. սպասման հատկությունները

Հատկություն 1. Եթե $\eta(\omega) = I_A(\omega)$-ն A պատահույթի ինդիկատոր ֆունկցիան է, ապա

$$EI_A(\omega) = P(A):$$

Ապացույց. Քանի որ $p(1) = P(A)$, $p(0) = 1 - P(A)$, ունենք

$$EI_A(\omega) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = P(A):$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Այսինքն, A պատահույթի ինդիկատոր ֆունկցիայի մաթ. սպասումը հավասար է A պատա–

հույթի տեղի ունենալու հավանականությանը:

Հատկություն 2. Եթե $\eta(\omega)$-ն դիսկրետ պատահական մեծություն է, որը ընդունում է x_i արժեքներից մեկը, $i \geq 1$, համապատասխան $p(x_i)$ հավանականություններով, ապա կամայական $g(x)$ իրական արժեքանի ֆունկցիայի համար տեղի ունի

$$E\left(g(\eta(\omega))\right) = \sum_i g(x_i) \cdot p(x_i) : \tag{63}$$

Ապացույց. Եթե $\eta(\omega) = x_i$, ապա $g(\eta(\omega)) = g(x_i)$ և

$$P\left(\omega \;\; g(\eta(\omega)) = g(x_i)\right) = P(\omega \;\; \eta = x_i) = p(x_i) :$$

Հետևաբար, $g(\eta(\omega))$ պատահական մեծությունը ունի հետևյալ բաշխման օրենքը`

$$\begin{array}{ccccc} g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) & \dots \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_n) & \dots \end{array}$$

Այսպիսով, ըստ սահմանման, կստանանք (63)-ը:

Հատկություն 3. Եթե $\eta(\omega)$-ն բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է $f(x)$ խտության ֆունկցիայով, ապա կամայական իրական արժեքանի անընդհատ $g(x)$ ֆունկ–ցիայի համար տեղի ունի

$$E\left[g(\eta(\omega)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx : \tag{64}$$

Ապացույցը բաց ենք թողնում:

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 16

Հատկություն 4. Եթե a և b-ն հաստատուններ են, ապա

$$E[a\,\eta(\omega)+b] = a\cdot E\eta + b \tag{65}$$

կամայական $\eta(\omega)$ պատահական մեծության համար:

Այլ կերպ ասած, (65)-ում ասվում է. "Պատահական մեծությունից գծային ֆունկցիայի մաթ. սպասումը հավասար է գծային ֆունկցիայի, որը ստացվում է փոխարինելով պատահական մեծությունը իր մաթ. սպասման հետ":

Ապացույց. (ա) Եթե $\eta(\omega)$-ն դիսկրետ պատահական մեծություն է, ապա ըստ Հատկություն 2-ի կստանանք

$$E[a\,\eta(\omega)+b] = \sum_i (ax_i+b)\cdot p(x_i) = a\sum_i x_i\cdot p(x_i) + b\sum_i p(x_i) = a\cdot E\eta + b :$$

Վերևում մենք օգտվեցինք (45) բանաձևից և դիսկրետ պատահական մեծության մաթ. սպասման սահմանումից:

(բ) Եթե $\eta(\omega)$-ն բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է, ապա ըստ Հատկություն 3-ի կստանանք

$$E(a\,\eta(\omega)+b) = \int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)\,f(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx + b = a\cdot E\eta + b :$$

Հետևանք 1. (ա) $E[a\eta] = a\cdot E\eta$ կամայական a հաստատունի համար,

(բ) Եթե $\eta(\omega) = b$, ապա $Eb = b$ կամայական b հաստատունի համար, այսինքն հաստա–տունի մաթ. սպասումը հաստատուն է:

Ապացույց. Հետևանք 1-ը բխում է (65) [(ա)-ից $b=0$ դեպքում և (բ) $a=0$ դեպքում]:

Դիտողություն 9. $\eta(\omega)$ պատահական մեծության մաթ. սպասումը՝ $E[\eta(\omega)]$-ն նույնպես սահմանվում է որպես միջին կամ $\eta(\omega)$-ի առաջին կարգի մոմենտ:

Պարզ ֆունկցիայի օրինակ, որի մաթ. սպասումը կարող է լինել հետաքրքիր, դա նրա աստիճանային ֆունկցիան է՝ $g(\eta) = \eta^k$, $k = 1, 2, 3, ...$:

Սահմանում 15. $E\eta^n$, $n \geq 1$ մեծությունը կոչվում է $\eta(\omega)$ պատահական մեծության n-րդ կարգի մոմենտ: Հատկություններ 2 և 3-ից նշենք, որ

$$E\eta^n = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^n \, p(x_i), & \text{եթե } \eta \text{ -ն դիսկրետ պատահական մեծություն է,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, f_\eta(x) \, dx, & \text{եթե } \eta\text{-ն բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է:} \end{cases} \tag{66}$$

Հատկություն 5. Եթե $\eta(\omega) \geq 0$, ապա $E\eta \geq 0$:

Ապացույցն ակնհայտ է:

Հատկություններ 2-ի և 3-ի երկու չափանի անալոգի համար, որը պալիս է հաշվողական բանաձևեր պատահական մեծությունից կախված ֆունկցիայի մաթ. սպասման համար, ենթադրենք $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծություններ են և $g(x, y)$-ը երկու փոփոխականի իրական արժեքանի անընդհատ ֆունկցիա է: Այդ դեպքում մենք կունենանք հետևյալ արդ– յունքը (ապացույցը բաց ենք թողնում):

Թեորեմ 9. Եթե $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ ունեն համատեղ հավանականային կշիռի ֆունկցիա $p(x, y)$ կամ համատեղ խտության ֆունկցիա $f(x, y)$, ապա

$$E\left[g(\eta_1(\omega), \eta_2(\omega)\right] = \begin{cases} \sum\limits_x \sum\limits_y g(x, y) \, p(x, y), & \textbf{եթե } (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega)) \textbf{ -ն} \\ \qquad \textbf{դիսկրետ պատահական վեկտոր է,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \, f(x, y) \, dx \, dy, & \textbf{եթե } (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega))\textbf{-ն} \\ \qquad \textbf{բացարձակ անընդհատ պատահական վեկտոր է:} \end{cases} \tag{67}$$

Դիտողություն 10. Հատկություններ 2 և 3 հետևում են Թեորեմ 9-ից, եթե վերցնենք

$g(x,y) = g(x)$: Իսկապես, կարող ենք օգտագործել $\sum_y p(x,y) = p_{\eta_1}(x)$ և (51) հատկությունները:

Հատկություն 6. Եթե $E\eta_1(\omega)$ և $E\eta_2(\omega)$ վերջավոր են, ապա

$$E\left(\eta_1(\omega)+\eta_2(\omega)\right) = E\eta_1(\omega)+E\eta_2(\omega) : \tag{68}$$

Ապացույց. Օգտվելով Թեորեմ 9-ից $g(x,y) = x+y$ համար կստանանք

(ա) բացարձակ անընդհատ դեպքում

$$E(\eta_1(\omega)+\eta_2(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_{\eta_1}(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_{\eta_2}(y)\,dy = E\eta_1(\omega)+E\eta_2(\omega);$$

և (բ) դիսկրետ դեպքում

$$E(\eta_1(\omega)+\eta_2(\omega)) = \sum_{x_i}\sum_{y_j}(x_i+y_j)\,p(x_i,y_j) = \sum_{x_i} x_i \sum_{y_j} p(x_i,y_j) +$$

$$+\sum_{y_j} y_j \sum_{x_i} p(x_i,y_j) = \sum_{x_i} x_i\,p_{\eta_1}(x_i) + \sum_{y_j} y_j\,p_{\eta_2}(y_j) = E\eta_1(\omega)+E\eta_2(\omega).$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Օգտվելով Հատկություն 6-ից ստանում ենք, որ եթե $E\eta_i(\omega)$-ն վերջավոր է բոլոր $i = 1,...,n$ համար, ապա

$$E\left(\eta_1(\omega)+...+\eta_n(\omega)\right) = E\eta_1(\omega)+...+E\eta_n(\omega) : \tag{69}$$

Հետևանք 2. Կամայական $\eta(\omega)$ պատահական մեծության համար տեղի ունի

$$E\left(\eta(\omega) - E\eta\right) = 0 :$$

Ապացույցը հետևում է մաթ. սպասման ադիտիվությունից և Հետևանք 1-ից, (բ):

Հատկություն 7. Եթե $\eta_1(\omega) \geq \eta_2(\omega)$ (այսինքն փորձի յուրաքանչյուր ելքի համար $\eta_1(\omega)$ պատահական մեծության արժեքը մեծ է կամ հավասար $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծության արժեքից), ապա

$$E\eta_1 \geq E\eta_2 :$$

Ապացույց. $\eta_1(\omega) \geq \eta_2(\omega)$ բխում է $\eta_1(\omega) - \eta_2(\omega) \geq 0$ և հետևաբար ըստ Հատկություն 5-ի՝ $E(\eta_1 - \eta_2) \geq 0$: Մաթ. սպասման գումարականության շնորհիվ

$$E(\eta_1 - \eta_2) = E\eta_1 - E\eta_2 \geq 0 :$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Երբ գործ ունենք անվերջ թվով $\eta_i(\omega)$, $i \geq 1$ պատահական մեծությունների համակարգի հետ, որոնցից յուրաքանչյուրը ունի վերջավոր մաթ. սպասում, միշտ չէ որ ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(\omega)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} E\eta_i. \tag{70}$$

Որոշելու համար թե երբ (70)-ը տեղի ունի, նշենք, որ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\omega)$$

և հետևաբար

$$E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(\omega)\right] = E\left[\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\omega)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i(\omega)\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E\eta_i = \sum_{i=1}^{\infty} E\eta_i : \tag{71}$$

Այսպիսով, (70) հավասարությունը տեղի ունի երբ մենք իրականում կարողանանք փոխել մաթ. սպասման և սահմանի օպերատորները (71)-ում: Ընդհանրապես, այս փոփոխումը ճիշտ չէ, սակայն կարելի է ցույց տալ, որ տեղի ունի երկու կարևոր մասնավոր դեպքերում.

1. $\eta_i(\omega)$-երը ոչ բացասական պատահական մեծություններ են (այսինքն

$P(\omega : \eta_i(\omega) \geq 0) = 1$ բոլոր i-երի համար):

2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} E|\eta_i| < \infty$:

Հատկություն 8. Եթե η_1 և η_2 անկախ են, ապա

$$E\left[\eta_1 \cdot \eta_2\right] = E\eta_1 \cdot E\eta_2 : \tag{72}$$

Հատկություն 8-ի ապացույցը. Օգտվելով Թեորեմ 9-ից $g(x, y) = x \cdot y$ ֆունկցիայի համար կստանանք՝

(ա) բացարձակ անընդհատ դեպքում

$$E(\eta_1(\omega) \cdot \eta_2(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y\, f(x, y)\, dx\, dy = (\text{քանի որ } \ \eta_1 \, \text{և}\, \eta_2 \text{ անկախ են}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y\, f_{\eta_1}(x(\, f_{\eta_2}(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\eta_1}(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{\eta_2}(y)\, dy = E(\eta_1) \cdot E(\eta_2);$$

իսկ (բ) դիսկրետ դեպքում

$$E(\eta_1(\omega) \cdot \eta_2(\omega)) = \sum_{x_i} \sum_{y_j} x_i \cdot y_j\, p(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_{x_i} x_i\, p_{\eta_1}(x_i) \cdot \sum_{y_j} y_j\, p_{\eta_2}(y_j) = E\eta_1(\omega) \cdot E\eta_2(\omega).$$

Ապացույցն ավարտված է:

Օրինակ 49. Բերենք մի օրինակ, որը պնդում է, որ (72)-ից չի հետևում, որ η_1 և η_2-ը անկախ են, այսինքն կառուցենք մի օրինակ երկու կախյալ պատահական մեծությունների, որոնց համար $E\left[\eta_1 \cdot \eta_2\right] = E\eta_1 \cdot E\eta_2$:

Դիցուք $\eta_1(\omega)$ և $\zeta(\omega)$-ն անկախ պատահական մեծություններ են և $E\eta_1 = E\zeta = 0$: Նշանակենք η_2-ով հետևյալ պատահական մեծությունը՝

$$\eta_2(\omega) = \eta_1(\omega) \cdot \zeta(\omega) :$$

Ակնհայտ է, որ η_1 և η_2-ը կախյալ են (եթե ω_0 ելքում $\eta_1 = 0$ հետևում է, որ $\eta_2(\omega_0) = 0$) և

$E[\eta_1 \cdot \eta_2] = E\left[\eta_1^2 \cdot \zeta\right] =$ (ըստ Թեորեմ 8-ի և Հատկություն 8-ի) $= E\eta_1^2 \cdot E\zeta = E\eta_1^2 \cdot 0 = 0 :$

Հետևանք 3. Եթե η_1 և η_2-ը անկախ են, ապա կամայական անընդհատ $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ ֆունկցիաների համար

$$E[\varphi_1(\eta_1) \cdot \varphi_2(\eta_2)] = E\varphi_1(\eta_1) \cdot E\varphi_2(\eta_2). \tag{73}$$

Ապացույց. Ապացույցը հետևում է Հատկություն 8-ից և Թեորեմ 9-ից:

§16. ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Կոմբինատորիկան դիսկրետ մաթեմատիկայի կարևոր բաժին է հանդիսանում: Այն ուսումնասիրում է օբյեկտների դասավորությունը: Կոմբինատորիկայի ծնունդը համարվում է $XVII$ դարը և կապված է մոլեխաղերի խնդիրների հետ: Դժվար է մոլեխաղերը համարել լուրջ զբաղմունք, բայց դրանցից բխող խնդիրները չեն լուծվել այդ պահին գոյություն ունեցող մաթեմատիկական մոդելների շրջանակներում: Համարակալումը, օբյեկտների հաշվարկը որոշակի հատկություններով, կարևոր բաժին են հանդիսանում կոմբինատորիկայում: Մենք պետք է հաշվենք տարրերի քանակը տարբեր տիպի խնդիրներ լուծելու համար: Օրինակ, հաշվարկը օգտագործվում է ալգորիթմների բարդությունը որոշելու համար: Հաշվարկման մաթեմատիկական տեսությունը ֆորմալ հայտնի է որպես **Կոմբինատոր Անալիզ**: Կարճ տանք Կոմբինատոր Անալիզի գլխավոր եղանակները:

§16.1. ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

Դիցուք դիտարկում ենք երկու փորձ: Եթե առաջին փորձին համապատասխանում է m հնարավոր ելքեր, և առաջին փորձի ամեն մի ելքին համապատասխանում են երկրորդ փորձի n հնարավոր ելքեր, ապա այդ երկու փորձերին կհամապատասխանեն $m \cdot n$ հնարավոր ելքեր:

Ապացույց. Այս սկզբունքը կարելի է ապացուցել երկու փորձերի հնարավոր ելքերի համարակալումով հետևյալ կերպ.

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & ... & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & ... & (2,n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (m,1) & (m,2) & ... & (m,n) \end{pmatrix}$$

որտեղ կասենք, որ ունենք (i,j) ելք, եթե առաջին փորձի իրագործումից ստացվել է i-րդ ելքը, իսկ երկրորդ փորձի իրագործումից՝ j-րդ ելքը: Հետևաբար հնարավոր ելքերի բազմությունը բաղկացած է m տողերից, յուրաքանչյուր տող պարունակում է n տարրեր, որը և ապացուցում է սկզբունքը:

§16.2. Հաշվարկման Ընդհանրացված Հիմնական Սկզբունքը.

Եթե կատարում են k փորձեր, ընդ որում առաջին փորձը ունի n_1 հնարավոր ելքեր, այդ n_1 հնարավոր ելքերից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունեն երկրորդ փորձի n_2 հնարավոր ելքեր, առաջին երկու փորձերի յուրաքանչյուր հնարավոր ելքի համար գոյություն ունեն երրորդ փորձի n_3 հնարավոր ելքեր, և այսպես շարունակ մինչև k-րդ փորձը, ապա գոյություն ունեն ընդհանուր առմամբ k փորձերի $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ հնարավոր ելքեր:

Ֆունկցիաների քանակը. Քանի՞ ֆունկցիաներ գոյություն ունեն m տարրանոց բազմությունից n տարրանոց բազմության վրա: Ֆունկցիան համապատասխանում է n տարրերից մեկի ընտրությանը արժեքների բազմության տիրույթից յուրաքանչյուր m փարրերի համար: Հեփևաբար, հաշվարկման հիմնական սկզբունքի համաձայն գոյություն ունեն $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^m$ ֆունկցիաներ m փարրանոց բազմությունից n փարրանոց բազմության վրա:

§16.3. Կարգավորված Հաջորդականություններ կամ Տեղափոխություններ. Տեղափոխությունը դա օբյեկփների կարգավորված դասավորություն է: Ընդհանրապես, եթե k օբյեկփներ ընփրվում են n փարբեր օբյեկփների բազմությունից, ապա այդ օբյեկփների ցանկացած մասնավոր դասավորվածություն կամ կարգ կոչվում է **փեղափոխություն**.

Գոյություն ունեն

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

k օբյեկփների փարբեր դասավորություններ վերցված n փարբեր օբյեկփներից:

Այս փասփը կարելի է ապացուցել օգփագործելով հաշվարկման հիմնական սկզբունքը, քանի որ փեղափոխության առաջին օբյեկփը ընփրվում է կամայական n օբյեկփներից, փեղափոխությունում երկրորդ օբյեկփը ընփրվում է մնացած $(n-1)$ օբյեկփներից, երրորդ օբյեկփը ընփրվում է մնացած $(n-2)$ օբյեկփներից և այլն, և փեղափոխությունում վերջին օբյեկփը ընփրվում է մնացած $(n-k+1)$ օբյեկփներից: Այսպիսով գոյություն ունեն k օբյեկփների $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ հնարավոր փեղափոխություններ վերցված n օբյեկփներից:
$(n)_k$ կարդացվում է որպես փեղափոխություն n-ից k-ական: Մասնավորապես,

$$(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

n-ից n-ական բոլոր փեղափոխությունների թիվն է: Հարմար է ներմուծել ֆակփորիալ նշանակումը, որփեղ

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \quad (\text{կարդալ, } n \text{ ֆակփորիալ}) :$$

Մասնավորապես, կիրառություններում հարմար է ընդունել $0! = 1$:
$(n)_k$-ի համար գրված բանաձևը ֆակփորիալների միջոցով ներկայացնելու համար բազմապափկենք և բաժանենք $(n-k)!$-ով, կսփանանք

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

և

$$(n)_n = n! :$$

Օրինակ, $A = \{1, 2, 3\}$ թվերի բոլոր հնարավոր փեղափոխությունները (կամ փեղափոխություն 3-ից 3-ական) կլինեն

123 132 213 231 312 321.

Ենթադրենք $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ բազմությունից ընտրում ենք k տարրեր և դասավորում ենք ըստ կարգի: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր դա կատարել: Պատասխանը կախված է, թե արդյոք թույլ ենք տալիս տարրերի կրկնությունը տեղափոխության մեջ: Եթե ոչ, ապա ստանում ենք առանց վերադարձումների նմուշ, իսկ եթե թույլ ենք տալիս տարրերի կրկնություն, ապա ստանում ենք վերադարձումներով նմուշ: Խնդիրը կարելի է պատկերացնել որպես սափորից համարակալված գնդակների ընտրություն: Մենք ունենք ընտրելու երկու եղանակ: Առաջին դեպքում նմուշի հանված գնդակը ետ չի վերադարձվում, իսկ երկրորդ դեպքում՝ վերադարձվում է: Ընտրությունը ավարտելուց հետո երկու դեպքերում էլ ստանում ենք k գնդակներից բաղկացած ցուցակ, ըստ սափորից հանման կարգավորվածության:
Կիրառելով հաշվարկման ընդհանրացված հիմնական սկզբունքը հաշվենք n տարրանոց բազմության k-նմուշների քանակը: Սկզբում ենթադրենք, որ նմուշը կազմվում է վերադարձումով: Առաջին գնդակը կարող է հանվել n եղանակով, երկրորդը՝ նույնպես n եղանակով, և այլն: Այսպիսով, գոյություն ունեն $n \times n \times ... \times n = n^k$ նմուշներ: Այժմ ենթադրենք, որ նմուշը կազմվում է առանց վերադարձումների: Առաջին գնդակը կարող ենք ընտրել n եղանակներով, երկրորդը՝ $(n-1)$ եղանակներով, երրորդը՝ $(n-2)$ եղանակներով, և այլն, k-րդը՝ $(n-k+1)$ եղանակներով: Այսպիսով, ապացուցվեց հետևյալ պնդումը:
Լեմմա 1. Գոյություն ունի n^k տարբեր հնարավորություն վերադարձումով k չափանի կարգավորված նմուշի ընտրության համար և $(n)_k$ հնարավորություն k չափանի անվերադարձ կարգավորված նմուշի ընտրության համար:
Օրինակ 1. Քանի՞ եղանակով կարող են 5 երեխա կանգնել շարք:
Լուծում. Խնդիրը համապատասխանում է ընտրությանը առանց վերադարձի: Անվերադարձ տեղափոխության բանաձևի համաձայն՝

$$(5)_5 = 5! = 120.$$

Օրինակ 2. Ենթադրենք, որ տաս երեխաներից պատահականորեն ընտրվում են հինգը և կանգնեցվում են շարք: Քանի՞ տարբեր շարքեր կարելի է կազմել:
Լուծում: Ըստ Լեմմա 1-ի, գոյություն ունեն

$$(10)_5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240 \qquad \text{տարբեր շարքեր :}$$

§16.4. Զուգորդություններ.

Դիցուք ունենք n տարրանոց բազմություն: Որքա՞ն k $(k \leq n)$ տարրանոց ենթաբազմություններ կարելի է ձևավորել: n տարրանոց բազմության բոլոր k տարրանոց ենթաբազմությունների թիվը հավասար է

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\ k!} \qquad \text{(կարդացվում է զուգորդություն } n\text{-ից } k\text{-ական)} \qquad (1)$$

Հետևաբար, C_n^k-ն ներկայացնում է n փարրերից k անգամ վերցված բոլոր հնարավոր ընտրությունների քանակը, կամ k չափանի իրարից փարբեր խմբերի քանակը, որը կարելի է ընտրել n փարրերից, երբ ընտրության կարգը կարևոր չէ:

Դիտողություն 1. Այժմ դնենք հետևյալ հարցը. քանի տարբեր ոչ կարգավորված նմուշներ են հնարավոր, եթե n օբյեկտների բազմությունից առանց վերադարձման ընտրվում են k օբյեկտներ՞:

Ըստ հաշվարկման ընդհանրացված հիմնական սկզբունքի, կարգավորված նմուշների թիվը հավասար է ոչ կարգավորված նմուշների թվին՝ բազմապատկած յուրաքանչյուր նմուշը կարգավորված դարձնելու թվով: Քանի որ կարգավորված նմուշների թիվը հավասար է $(n)_k$-ի, իսկ k ծավալ ունեցող նմուշը կարող ենք կարգավորել $k!$ եղանակներով, ոչ կարգավորված նմուշների թիվը կլինի $\frac{(n)_k}{k!}$ և հետևաբար, համընկնում է C_n^k-ի հետ:

§17. ՈՉ ԿԱՐԳԱՎՈՐՎԱԾ ՆՄՈՒՇՆԵՐ ՎԵՐԱԴԱՐՁՈՒՄՈՎ.

Ենթադրենք k ծավալ ունեցող նմուշը ընտրվում է n փարրերից բաղկացած բազմությունից: Անվերադարձ նմուշահանման ժամանակ ոչ մի փարր չի կարող ընտրվել մեկից ավելի անգամ, այնպես, որ բոլոր k նիշերը նմուշում կլինեն փարբեր: Վերադարձումով նմուշում փարրը կարող է ընտրվել մեկից ավելի անգամ այնպես, որ ոչ բոլոր k նիշերը նմուշում կլինեն փարբեր: Իհարկե հնարավոր է, որ նույն փարրը կարող է ընտրվել ամեն անգամ, որի դեպքում նմուշը կպարունակի k հափ միևնույն փարրեր:

Լեմմա 2. Վերադարձումով մոդելում փարբեր օբյեկտներից բաղկացած n փարրանոց բազմությունից բոլոր ոչ կարգավորված k փարրանոց ենթաբազմությունների թիվը հավասար է

$$C_{n+k-1}^k$$

Ապացույց. Յուրաքանչյուր այդպիսի k–փարրանոց բազմություն կարելի է ներկայացնել $(n-1)$ գծիկների և k աստղանիշերի հաջորդականության տեսքով: $(n-1)$ գծիկները առաջացնում են n փարբեր բջիջներ, ընդ որում i-րդ բջիջը պարունակում է այնքան աստղանիշ, որքան անգամ բազմության i-րդ փարրը կընտրվի սափորից: Օրինակ, 6–փարրանոց բազմությունը՝ ընտրված չորս փարրանոց բազմությունից, ներկայացվում է երեք գծիկներով և վեց աստղանիշներով: Այսպես

$$* * | * || * **$$

իրենից ներկայացնում է բազմություն, որը պարունակում է ճշգրիտ երկու առաջին փարր, մեկ երկրորդ փարր, ոչ մի հափ երրորդ փարր, և երեք հափ չորրորդ փարր:

n փարբեր օբյեկտներից կազմված բազմությունից վերադարձման եղանակով ստացված բոլոր փարբեր ոչ կարգավորված k փարրանոց ենթաբազմությունների թիվը հավասար է C^k_{n+k-1}, քանի որ այդ թիվը համընկնում է $(n+k-1)$ փարրերից k փարրերի ընտրության թվի հետ:

Լեմմա 2-ը կարելի է օգտագործել նաև որոշակի գծային հավասարումների լուծումների թիվը գտնելու համար, որտեղ փոփոխականները ամբողջ թվեր են:

Օրինակ 3. Քանի՞ լուծում ունի

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

հավասարումը, որտեղ x_1, x_2 և x_3 ոչ բացասական ամբողջ թվեր են:

Լուծում. Լուծումների թիվը հաշվելու համար նշենք, որ լուծումը համապատասխանում է երեք փիպի նիշերից 11 նիշեր ընտրելու եղանակին, այնպես, որ ընտրվեն x_1 նիշ առաջին փիպի, x_2 նիշ՝ երկրորդ փիպի, և x_3 նիշ՝ երրորդ փիպի: Հետևաբար, լուծումների թիվը հավասար է երեք փարրանոց բազմությունից վերադարձումով 11 փարրերի ընտրության թվին: Օգտվելով Լեմմա 2-ից, կստանանք

$$C^{11}_{3+11-1} = C^{11}_{13} = C^2_{13} = 78 :$$

Դրական լուծումների քանակը գտնելու համար նշենք, որ

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$$

հավասարման դրական լուծումների թիվը համընկնում է

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = k - n$$

հավասարման ոչ բացասական լուծումների թվի հետ (նշանակելով $y_i = x_i - 1$). Հետևաբար, Լեմմա 2-ից բխում է հետևյալ պնդումը.

Գոյություն ունեն

$$C^{n-1}_{k-1}$$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ **փարբեր դրական ամբողջարժեքանի վեկտորներ, որոնք բավարարում են** $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ **հավասարմանը,** $x_i > 0$**,** $i = 1, ..., n$**, եթե** $k \geq n$**:**

Ընդհանրապես,

$$x_1 \geq l_1 \quad x_2 \geq l_2 \quad ... \quad x_n \geq l_n,$$

որտեղ $l_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, լրացուցիչ պայմանին բավարարող

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$$

հավասարման բոլոր լուծումների թիվը համընկնում է

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = k - \sum_{i=1}^{n} l_i$$

հավասարման ոչ բացասական լուծումների թվի հետ (նշանակելով $y_i = x_i - l_i$). Հետևաբար Լեմմա 2-ից բխում է հետևյալ պնդումը.
Գոյություն ունեն

$$C^{n-1}_{n+k-\sum\limits_{i=1}^{n} l_i - 1}$$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ **փարբեր ամբողջարժեքանի վեկտորներ, որոնք բավարարում են** $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ **հավասարմանը,** $x_i \geq l_i$**,** $i = 1, ..., n$**, եթե** $k \geq \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$**:**
Հաջորդիվ, ներմուծենք դիսկրետ մաթեմատիկայի երկու կարևոր ֆունկցիաներ: Դիցուք x-ը իրական թիվ է: $\lfloor x \rfloor$ ֆունկցիան կլորացնում է x-ը ներքևից ամենամոտ գտնվող x-ից փոքր կամ հավասար թվի հետ, իսկ $\lceil x \rceil$ ֆունկցիան կլորացնում է x-ը վերևից ամենամոտ x-ից մեծ կամ հավասար թվի հետ: Այս ֆունկցիաները հաճախ օգտագործվում են, երբ օբյեկտները համարակալված են:
Սահմանում 1. $\lfloor x \rfloor$ **ֆունկցիա** նշանակում է x իրական թվի ամենամեծ ամբողջ թիվը, որը փոքր է կամ հավասար x-ին: $\lceil x \rceil$ **ֆունկցիան** նշանակում է x իրական թվին ամենափոքր ամբողջ թիվը, որը մեծ է կամ հավասար x-ին:
Ստորև բերված են այս ֆունկցիաների որոշ արժեքներ.

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0, \quad \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1, \quad \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -1, \quad \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0,$$

$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3, \quad \lceil 3.1 \rceil = 4, \quad \lfloor 7 \rfloor = 7, \quad \lceil 7 \rceil = 7.$$

Օրինակ 1. Դիցուք x-ը իրական թիվ է և n-ը ամբողջ թիվ է: Ապացուցել հետևյալ հատկությունները $\lfloor x \rfloor$ և $\lceil x \rceil$ ֆունկցիաների համար.
ա) $\lfloor x \rfloor = n$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $n \leq x < n+1$,
բ) $\lceil x \rceil = n$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $n-1 < x \leq n$,
գ) $\lfloor x \rfloor = n$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $x-1 < n \leq x$,
դ) $\lceil x \rceil = n$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $x \leq n < x+1$,
ե) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$,
զ) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$, $\quad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$,
է) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, $\quad \lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.
Լեմմա 3. Դիցուք n**-ը և** d**-ն բնական թվեր են:** n**-ը չգերազանցող** $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ **բնական թվեր են բաժանվում** d**-ի վրա:**
Ապացույց. d-ի վրա բաժանվող բնական թվերը $d \cdot k$ տեսքի բոլոր ամբողջ թվերն են, որտեղ k-ն բնական թիվ է: Հետևաբար, d-ի վրա բաժանվող բնական

թվերի քանակը, որոնք չեն գերազանցում n-ը, հավասար է k ամբողջ թվերի քանակին, որոնք բավարարում են $0 < dk \leq n$ կամ $0 < k \leq n/d$: Հետևաբար, գոյություն ունեն n-ը չգերազանցող և d-ի վրա բաժանվող $\lfloor n/d \rfloor$ բնական թվեր:

Օրինակ . Սենյակում գտնվում է n մարդ: Ինչպիսին է հավանականությունը, որ նրանցից առնվազն երկուսը կունենան միևնույն ծննդյան օրը՞:

Լուծում. Ենթադրենք, որ պատահական վերցված մարդու համար հավասարահնարավոր է ծնվել տարվա ցանկացած օրը, արհամարհելով նահանջ տարիները: Նշանակենք A-ով այն պատահույթը, որ գոյություն ունեն առնվազն երկու մարդ միևնույն ծննդյան օրով: Որոշ դեպքերում $P(A)$-ի փոխարեն ավելի հեշտ է գտնել $P(\overline{A})$-ը, որովհետև A-ն կարող է տեղի ունենալ ավելի շատ ձևերով, քան $\overline{A}$-ը: Գոյություն ունեն 365^n հնարավոր ելքեր, որոնցից նպաստավորները $\overline{A}$-ի համար կլինեն $365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1)$: Այսպիսով,

$$P(\overline{A}) = \frac{365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

և

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Հետևյալ աղյուսակը տալիս է վերը նշված հավանականությունների արժեքները տարբեր n-երի համար:

Աղյուսակ

	4	16	23	32	56
$P(A)$	0.016	0.284	0.507	0.753	0.988

§18. ԿՑՄԱՆ ԵՎ ԱՐՏԱՔՍՄԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ.

Երբ միաժամանակ երկու խնդիր պետք է կատարել, մենք չենք կարող օգտագործել ադիտիվության կանոնը՝ հաշվի առնելով երկու խնդիրներից մեկը կատարելու եղանակների թիվը: Յուրաքանչյուր առաջադրանքը կատարելու եղանակների թիվը ավելացնելը հանգեցնում է ավելցուկի, քանի որ երկուսն էլ կատարելու եղանակները կրկնվում են: Ճիշտ է հաշվի առնել երկու խնդիրներից յուրաքանչյուրը կատարելու եղանակների թիվը և այնուհետև նվազեցնել երկու խնդիրները լուծելու եղանակների թիվը: Այս տեխնիկան կոչվում է **կցման-արտաքսման սկզբունք**:

Հիշեցնենք, որ վերջավոր չափանի բազմության հզորությունը սահմանվում է որպես այդ բազմության տարրերի քանակ: Այսինքն, վերջավոր բազմության հզորությունը հուշում է մեզ երբ երկու բազմություններ նույն չափսի են, կամ նրանցից մեկը մեծ է մյուսից:

A բազմության փարրերի քանակը կնշանակենք $Card\, A$: Հնարավոր է լայնացնել հզորության գաղափարը բոլոր բազմությունների համար՝ վերջավոր և անվերջ, հետևյալ սահմանման միջոցով:

Սահմանում 2. Կասենք որ A և B բազմությունները ունեն միևնույն հզորությունը այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատաս–խանություն A-ից B:

Այժմ մենք պետք է բաժանենք անվերջ բազմությունները երկու խմբի՝ որոնք ունեն միևնույն հզորությունը, ինչպես բնական թվերի բազմությունը, և որոնք ունեն տարբեր հզորություններ:

Սահմանում 3. Բազմությունը, որը կամ վերջավոր է, կամ ունի բնական թվերի բազմության հզորություն կոչվում է **հաշվելի**: Բազմությունը, որը հաշվելի չէ, կոչվում է **ոչ հաշվելի**:

Օրինակ 4. Ցույց տալ, որ բնական կենտ թվերի բազմությունը հաշվելի է:

Լուծում. Կենտ բնական թվերի բազմության հաշվելիությունը ցույց տալու համար պետք է կառուցել փոխմիարժեք համապատասխանություն այդ բազ–մության և բնական թվերի բազմության միջև: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան

$$f(n) = 2n - 1$$

N բնական թվերի բազմությունից կենտ բնական թվերի բազմության վրա: Ցույց տանք, որ f-ը փոխմիարժեք համապատասխանություն է: Նրա փոխ–միարժեքությունը տեսնելու համար ենթադրենք, որ $f(n) = f(m)$: Այդ դեպքում $2n - 1 = 2m - 1$, այսինքն $n = m$: Այս ֆունկցիայի "վրա" տեսնելու համար ենթադրենք, որ t-ն կենտ բնական թիվ է: Այդ դեպքում t-ն մեկով փոքր է քան $2k$ զույգ ամբողջ թիվը, որտեղ k-ն բնական թիվ է: Հետևաբար $t = 2k - 1 = f(k)$:

Անվերջ բազմությունը հաշվելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե հնարավոր է դասավորել նրա տարրերը հաջորդականության տեսքով (համարակալելով բնական թվերով): Դրա նպատակն այն է, որ փոխմիարժեք համապատասխա–նությունը բնական թվերի բազմությունից $S \subset \mathbf{R}$ բազմության վրա կարողանալ արտահայտել $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ հաջորդականության անդամների f ֆունկցիայի միջոցով, որտեղ $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$,..., $a_n = f(n)$,... : Օրինակ, կենտ ամբողջ թվերի բազմությունը կարելի է դասավորել $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ հաջորդականության տեսքով, որտեղ $a_n = 2n - 1$:

Վարժություն 2. Ցույց տալ, որ իրական թվերի բազմությունը հաշվելի չէ:

Մենք հաճախ հետաքրքրված ենք իմանալ բազմությունների միավորման տար–րերի քանակը: A և B վերջավոր բազմությունների միավորման տարրերի քանակը գտնելու համար նշենք, որ $Card\, A + Card\, B$ հաշվում է յուրաքանչյուր տարր, որը գտնվում է A-ում, բայց չի գտնվում B-ում, կամ գտնվում է B-ում, բայց չի գտնվում A-ում միայն մեկ անգամ, և յուրաքանչյուր տարրը, որը գտնվում է և A-ում և B-ում՝ ճշգրիտ երկու անգամ: Այսպիսով, եթե $Card\, A +$ $Card\, B$-ից հանենք և A-ում, և B-ում գտնվող տարրերի քանակը, ապա $A \cup B$ տարրերը կհաշվվեն միայն մեկ անգամ: Հետևաբար,

$$Card\,(A \cup B) = Card\, A + Card\, B - Card\,(A \cap B).$$

A և B բազմությունների միավորման մեջ գտնվող տարրերի քանակը հավասար է այդ բազմությունների տարրերի քանակի գումարից հանած նրանց հատման տարրերի քանակը: Այսինքն,

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B).$$

Այս արդյունքի ընդհանրացումը կամայական վերջավոր թվով բազմությունների միավորման համար կոչվում է կցման–արտաքսման սկզբունք:
Օրինակ 5. Դիսկրետ մաթեմատիկայի դասարանը բաղկացած է 25 ուսանող–ներից, ովքեր մասնագիտանում են համակարգչային գիտության, 13 ուսա–նողներ՝ մաթեմատիկայի, իսկ 8-ը՝ և՛ համակարգչային գիտության, և մա–թեմատիկայի մեջ: Քանի ուսանող կա այդ դասարանում, եթե յուրաքանչյուր ուսանող մասնագիտանում է մաթեմատիկայում, համակարգչային գիտության մեջ կամ երկուսը միասին:
Լուծում. Դիցուք A-ն համակարգչային գիտություն ուսուցանող ուսանողների բազմությունն է, իսկ B-ն՝ մաթեմատիկա ուսուցանող ուսանողների բազ–մությունը: Այդ դեպքում $A \cap B$ այն ուսանողների բազմությունն է, ովքեր ուսուցանում են երկու առարկաները: Քանի որ յուրաքանչյուր ուսանող կամ ուսումնասիրում է մաթեմատիկա, կամ համակարգչային գիտություն (կամ եր–կուսը միասին), ապա այստեղից հետևում է, որ դասարանում ուսանողների քանակը հավասար է $Card(A \cup B)$: Հետևաբար,

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 25 + 13 - 8 = 30 :$$

Օրինակ 6. 1000-ը չգերազանցող քանի՞ բնական թիվ կա, որոնք բաժանվում են 7-ի կամ 11-ի:
Լուծում. Դիցուք A-ն 1000-ը չգերազանցող և 7-ի վրա բաժանվող դրական ամբողջ թվերի բազմություն է, և B-ն 1000-ը չգերազանցող և 11-ի վրա բաժանվող դրական ամբողջ թվերի բազմություն է: Այդ դեպքում $A \cup B$ -ը 1000-ը չգերազանցող և 7-ի կամ 11-ի վրա բաժանվող դրական ամբողջ թվերի բազմություն է, իսկ $A \cap B$-ն 1000-ը չգերազանցող և 7-ի և 11-ի վրա բաժանվող դրական ամբողջ թվերի բազմություն է: Մենք գիտենք, որ 1000-ը չգերազանցող դրական ամբողջ թվերի շարքում գոյություն ունեն $\lfloor 1000/7 \rfloor$ ամբողջ թվեր, որոնք բաժանվում են 7-ի և $\lfloor 1000/11 \rfloor$ ամբողջ թվեր, որոնք բաժանվում են 11-ի: Քանի որ 7 և 11-ը փոխադարձաբար պարզ են, 7-ի և 11-ի բաժանվող

ամբողջ թվերը նրանք են, որոնք բաժանվում են $7 \cdot 11$-ի: Հետևաբար, գոյություն ունեն 1000-ը չգերազանցող $\lfloor 1000/(11 \cdot 7) \rfloor$ դրական ամբողջ թվեր, որոնք բաժանվում են և 7-ի, և 11-ի: Այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունեն

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) =$$

$$= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 142 + 90 - 12 = 220$$

բնական թվեր, որոնք չեն գերազանցում 1000-ը և բաժանվում են կամ 7-ի, կամ 11-ի:

Օրինակ 7. Ենթադրենք դպրոցում կա 1807 առաջին կուրսեցի: Նրանցից 453-ը մասնակցում են համակարգչային գիտության դասընթացին, 567-ը՝ մաթեմատիկայի, իսկ 299-ը՝ երկու դասընթացներին: Նրանցից քանիսը՞ չեն մասնակցում ոչ համակարգչային գիտության, ոչ մաթեմատիկայի դասընթացին:

Լուծում. Առաջին կուրսեցիների թիվը, որոնք չեն մասնակցում մաթեմատիկայի կամ համակարգչային գիտության դասընթացներին, գտնելու համար հանենք առաջին կուրսեցիների ընդհանուր թվից, որոնք ուսուցանում են այդ դասընթացներից գոնե մեկը: Դիցուք A-ն համակարգչային գիտություն ուսուցանող ուսանողների բազմությունն է, իսկ B-ն մաթեմատիկա ուսուցանող ուսանողների բազմությունն է: Այստեղից հետևում է, որ $Card(A) = 453$, $Card(B) = 567$, և $Card(A \cap B) = 299$: Կամ համակարգչային գիտություն կամ մաթեմատիկա ուսուցանող ուսանողների թիվը հավասար է

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 453 + 567 - 299 = 721 :$$

Հետևաբար, գոյություն ունեն $1807 - 721 = 1086$ ուսանողներ, որոնք չեն ուսուցանում ոչ մաթեմատիկա, ոչ համակարգչային գիտություն:

Նախքան n բազմությունների միավորման դիտարկումը, որտեղ n-ը կամայական դրական ամբողջ թիվ է, դուրս բերենք A, B և C բազմությունների միավորման տարրերի քանակի բանաձևը: Այդ բանաձևը ստանալու համար նշենք, որ $Card(A) + Card(B) + Card(C)$ հաշվում է յուրաքանչյուր տարրը միայն մեկ անգամ երեք բազմություններից յուրաքանչյուրում, երկու բազմություններում գտնվող տարրերը ճիշտ երկու անգամ, իսկ երեք բազմություններում գտնվող տարրերը ճշգրիտ երեք անգամ: Այսպիսով,

$$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - \tag{2}$$

$$-Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C) :$$

Օրինակ 8. Ընդհանուր 1232 ուսանող մասնակցում է իսպաներենի դասընթացին, 879 ուսանող մասնակցում է ֆրանսերենի դասընթացի, իսկ 114 ուսանող մասնակցում է ռուսերենի դասընթացի: Բացի այդ, 103 ուսանող մասնակցում է

ֆրանսերենի և իսպաներենի դասընթացներին, 23 ուսանող մասնակցում է իսպաներենի և ռուսերենի դասընթացներին, իսկ 14 ուսանող՝ ֆրանսերենի և ռուսերենի: Եթե 2092 ուսանողներ մասնակցում են առնվազն մեկ դասընթացի՝ իսպաներեն, ֆրանսերեն և ռուսերեն, ապա քանի՞ ուսանող կմասնակցի բոլոր երեք դասընթացներին:
Լուծում. Դիցուք S-ը բոլոր ուսանողների բազմությունն է, որոնք մասնակցում են իսպաներենի դասընթացին, F-ը՝ ֆրանսերենի, իսկ R-ը՝ ռուսերենի: Հետևաբար

$$Card(S) = 1232, \quad Card(F) = 879, \quad Card(R) = 114,$$

$$Card(S \cap F) = 103, \quad Card(S \cap R) = 23, \quad Card(F \cap R) = 14,$$

և $Card(S \cup F \cup R) = 2092$: Տեղադրելով այս մեծությունները (2)-ի մեջ, կստանանք

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + Card(S \cap F \cap R) :$$

Հետևաբար $Card(S \cap F \cap R) = 7$:
Օրինակ 9. 8 երկարությամբ 0-երից և 1-երից բաղկացած քանի՞ շարաններ կան, որոնք կամ սկսվում են 1-ով, կամ ավարտվում են 00-ով:
Լուծում. Առաջինը, 1-ով սկսվող 8 երկարությամբ շարանների քանակը հավասար է $2^7 = 128$: Սա հետևում է բազմապատկման կանոնից, քանի որ առաջին փարրը կարելի է ընտրել միայն մեկ ձևով, իսկ մնացած յոթ փարրերը կարող ենք ընտրել երկու ձևով:
Երկրորդը, կառուցել 8 երկարությամբ շարան, որը ավարտվում է 00-ով, կարելի է կատարել $2^6 = 64$ եղանակներով: Սա հետևում է բազմապատկման կանոնից, քանի որ առաջին 6 փարրերից յուրաքանչյուրը կարող են ընտրվել 2 ձևով, իսկ վերջին երկու փարրերը՝ միայն մեկ ձևով:
Երկու խնդիրները միասին, կառուցել 8 երկարությամբ շարան, որը սկսվում է 1-ով և ավարտվում է 00-ով, կարելի է կատարել $2^5 = 32$ եղանակներով: Սա հետևում է բազմապատկման կանոնից, քանի որ առաջին փարրը կարող է ընտրվել միայն մեկ ձևով, երկրորդից մինչև վեցերորդ փարրերից յուրաքանչյուրը կարող են ընտրվել 2 ձևով, և վերջին երկու փարրերը կարող են ընտրվել միայն մեկ ձևով: Հետևաբար, 8 երկարությամբ շարանների քանակը, որոնք սկսվում են 1-ով կամ ավարտվում են 00-ով հավասար է

$$128 + 64 - 32 = 160 :$$

Թեորեմ 1. Կցման-արտաքսման սկզբունքը. Դիցուք A_1, A_2,..., A_n-ը վերջավոր բազմություններ են: Այդ դեպքում

$$Card(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} Card(A_i \cap A_j) + ...+$$

$$+(-1)^{n+1}Card(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n).$$

Ապացույց. Մենք պետք է ցույց տանք, որ հավասարման աջ մասում գտնվող արտահայտության մեջ միավորման յուրաքանչյուր տարրը հաշված է միայն մեկ անգամ : Ենթադրենք, որ a-ն A_1, A_2,..., A_n բազմություններից ճշգրիտ r բազմությունների անդամ է, որտեղ $1 \leq r \leq n$: Այս տարրը հաշվվում է C_r^1 անգամ $\sum_{i=1}^{n} Card(A_i)$ գումարի մեջ: Նա հաշված է C_r^2 անգամ $\sum Card(A_i \cap A_j)$ գումարի մեջ: Ընդհանրապես, նա հաշված է C_r^m անգամ գումարի մեջ, որն ընդգրկում է ճշգրիտ m բազմություն $A_1, ..., A_n$-ից: Այսպիսով, այս տարրը հաշվում է ճշգրիտ m հատի միավորման մեջ

$$C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - ... + (-1)^{r+1} C_r^r$$

անգամ այս հավասարման աջ կողմում գրված արտահայտության մեջ: Մեր նպատակն է գնահատել այս մեծությունը: Մենք ունենք երկանդամային թեորեմ, որը պնդում է, որ

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k \, a^k b^{r-k}$$

կամայական իրական a և b-ի համար:

Վերցնելով $a = b = 1$, կարելի է գտնել, որ բոլոր երկանդամային գործակիցների գումարը հավասար է 2^r.

$$\sum_{k=0}^{r} C_r^k = 2^r :$$

Վերցնելով $b = 1$ և $a = -1$, կստանանք

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \, C_r^k = 0,$$

այսինքն

$$C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - ... + (-1)^r \, C_r^r = 0 :$$

Հետևաբար,

$$1 = C_r^0 = C_r^1 - C_r^2 + ... + (-1)^{r+1} \, C_r^r.$$

Հետևաբար, հավասարման աջ մասում գրված արտահայտության միավորման յուրաքանչյուր տարր հաշված է ճշգրիտ մեկ անգամ: Սա ապացուցում է կցման-արտաքսման սկզբունքը:

Դրական լուծումների քանակը գտնելու համար նշենք, որ

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$$

հավասարման դրական լուծումների թիվը համընկնում է

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = k - n$$

հավասարման ոչ բացասական լուծումների թվի հետ (նշանակելով $y_i = x_i - 1$). Հետևաբար, Լեմմա 2-ից բխում է հետևյալ պնդումը.
Գոյություն ունեն

$$C_{k-1}^{n-1}$$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ **փարբեր դրական ամբողջարժեքանի վեկտորներ, որոնք բավարարում են** $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ **հավասարմանը,** $x_i > 0$**,** $i = 1, ..., n$**, եթե** $k \geq n$**:**
Ընդհանրապես,

$$x_1 \geq l_1 \quad x_2 \geq l_2 \quad ... \quad x_n \geq l_n,$$

որտեղ $l_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, լրացուցիչ պայմանին բավարարող

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$$

հավասարման բոլոր լուծումների թիվը համընկնում է

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = k - \sum_{i=1}^{n} l_i$$

հավասարման ոչ բացասական լուծումների թվի հետ (նշանակելով $y_i = x_i - l_i$). Հետևաբար Լեմմա 2-ից բխում է հետևյալ պնդումը.
Գոյություն ունեն

$$C^{n-1}_{n+k-\sum\limits_{i=1}^{n} l_i - 1}$$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ **փարբեր ամբողջարժեքանի վեկտորներ, որոնք բավարարում են** $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ **հավասարմանը,** $x_i \geq l_i$**,** $i = 1, ..., n$**, եթե** $k \geq \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$**:**
Հաջորդիվ, ներմուծենք դիսկրետ մաթեմատիկայի երկու կարևոր ֆունկցիաներ: Դիցուք x-ը իրական թիվ է: $\lfloor x \rfloor$ ֆունկցիան կլորացնում է x-ը ներքևից ամենամոտ գտնվող x-ից փոքր կամ հավասար թվի հետ, իսկ $\lceil x \rceil$ ֆունկցիան կլորացնում է x-ը վերևից ամենամոտ x-ից մեծ կամ հավասար թվի հետ: Այս ֆունկցիաները հաճախ օգտագործվում են, երբ օբյեկտները համարակալված են:
Սահմանում 1. $\lfloor x \rfloor$ **ֆունկցիա** նշանակում է x իրական թվի ամենամեծ ամբողջ թիվը, որը փոքր է կամ հավասար x-ին: $\lceil x \rceil$ **ֆունկցիան** նշանակում է x իրական թվին ամենափոքր ամբողջ թիվը, որը մեծ է կամ հավասար x-ին:
Ստորև բերված են այս ֆունկցիաների որոշ արժեքներ.

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0, \quad \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1, \quad \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -1, \quad \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0,$$

$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3, \quad \lceil 3.1 \rceil = 4, \quad \lfloor 7 \rfloor = 7, \quad \lceil 7 \rceil = 7.$$

Օրինակ 1. Դիցուք x-ը իրական թիվ է և n-ը ամբողջ թիվ է: Ապացուցել հետևյալ հատկությունները $\lfloor x \rfloor$ և $\lceil x \rceil$ ֆունկցիաների համար.

ա) $\lfloor x \rfloor = n$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $n \leq x < n+1$,

բ) $\lceil x \rceil = n$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $n-1 < x \leq n$,

գ) $\lfloor x \rfloor = n$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $x-1 < n \leq x$,

դ) $\lceil x \rceil = n$ այն և միայն այն դեպքում, եթե $x \leq n < x+1$,

ե) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$,

զ) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$, $\quad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$,

է) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, $\quad \lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

Լեմմա 3. Դիցուք n-ը և d-ն բնական թվեր են: n-ը չգերազանցող $\lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor$ բնական թվեր են բաժանվում d-ի վրա:

Ապացույց. d-ի վրա բաժանվող բնական թվերը $d \cdot k$ տեսքի բոլոր ամբողջ թվերն են, որտեղ k-ն բնական թիվ է: Հետևաբար, d-ի վրա բաժանվող բնական թվերի քանակը, որոնք չեն գերազանցում n-ը, հավասար է k ամբողջ թվերի քանակին, որոնք բավարարում են $0 < dk \leq n$ կամ $0 < k \leq n/d$: Հետևաբար, գոյություն ունեն n-ը չգերազանցող և d-ի վրա բաժանվող $\lfloor n/d \rfloor$ բնական թվեր:

Օրինակ . Սենյակում գտնվում է n մարդ: Ինչպիսին է հավանականությունը, որ նրանցից առնվազն երկուսը կունենան միևնույն ծննդյան օրը՞:

Լուծում. Ենթադրենք, որ պատահական վերցված մարդու համար հավասարահնարավոր է ծնվել տարվա ցանկացած օրը, արհամարհելով նահանջ տարիները: Նշանակենք A-ով այն պատահույթը, որ գոյություն ունեն առնվազն երկու մարդ միևնույն ծննդյան օրով: Որոշ դեպքերում $P(A)$-ի փոխարեն ավելի հեշտ է գտնել $P(\overline{A})$-ը, որովհետև A-ն կարող է տեղի ունենալ ավելի շատ ձևերով, քան $\overline{A}$-ը: Գոյություն ունեն 365^n հնարավոր ելքեր, որոնցից նպաստավորները $\overline{A}$-ի համար կլինեն $365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1)$: Այսպիսով,

$$P(\overline{A}) = \frac{365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

և

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \times 364 \times ... \times (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Հետևյալ աղյուսակը տալիս է վերը նշված հավանականությունների արժեքները տարբեր n-երի համար:

Աղյուսակ

	4	16	23	32	56
$P(A)$	0.016	0.284	0.507	0.753	0.988

Թեորեմ 12. Եթե $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, ապա $\eta_n \xrightarrow{D} \eta$:

Ապացույց. Կամայական $\varepsilon > 0$ համար ունենք

$$P\{\omega \ |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0, \quad \text{երբ} \quad n \to \infty :$$

Մենք պետք է ցույց տանք, որ $F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(x)$, որտեղ x-ը $F(x)$ ֆունկցիայի անընդհա– տության կետն է:

Քանի որ կամայական A և B պատահույթների համար

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$

ունենք

$$\{\omega : \eta_n(\omega) < x\} =$$

$$= (\{\omega : |\eta_n - \eta| < \varepsilon\} \cap \{\omega : \eta_n < x\}) \bigcup (\{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} \cap \{\eta_n < x\}) :$$

Հաջորդիվ,

$$\{\eta_n < x\} \subset (\{\omega : \eta_n - \varepsilon < \eta < \eta_n + \varepsilon\}) \cap (\{\eta_n < x\}) \bigcup (\{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\}),$$

քանի որ

$$\{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} \cap \{\omega : \eta_n < x\} \subset \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\}.$$

Դժվար չէ տեսնել, որ եթե $\omega \in \{\omega : \eta_n - \varepsilon < \eta < \eta_n + \varepsilon\}$, ապա $\eta < \eta_n + \varepsilon$ կամ

$$\eta < \eta_n + \varepsilon < x + \varepsilon :$$

Հետևաբար, $\{\omega : |\eta_n - \eta| < \varepsilon\} \cap \{\omega : \eta_n < x\} \subset \{\omega : \eta < x + \varepsilon\}$: Հետևաբար ստանում ենք

$$\{\eta_n < x\} \subset \{\omega : \eta < x + \varepsilon\} \cup \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\},$$

այսինքն

$$P\{\eta_n < x\} \leq P\{\eta < x+\varepsilon\} + P\{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} :$$

Մենք կարող ենք սա արտահայտել բաշխման ֆունկցիաների տերմիններով: Կստանանք

$$F_n(x) \leq F(x+\varepsilon) + P\{|\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\}$$

կամայական $\varepsilon > 0$ համար:

Վերջին անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \leq F(x+\varepsilon) : \tag{92}$$

Մյուս կողմից, համանման ձևով ստանում ենք

$$\{\omega : \eta < x-\varepsilon\} \subset (\{\omega : \eta < x-\varepsilon\} \cap |\eta_n - \eta| < \varepsilon\}) \bigcup \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\}$$

$$\{\omega : \eta < x-\varepsilon\} \subset \{\omega : \eta_n < x\} \cup \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\}$$

(քանի որ եթե $\eta < x - \varepsilon$ և $\eta_n < \eta + \varepsilon \Rightarrow \eta_n < x$)

$$P\{\eta < x-\varepsilon\} \leq P\{\eta_n < x\} + P\{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} :$$

Մենք կարող ենք սա արտահայտել բաշխման ֆունկցիաների տերմիններով: Կստանանք

$$F(x-\varepsilon) \leq F_n(x) + P\{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} :$$

Անցնելով սահմանի, կստանանք

$$F(x-\varepsilon) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) : \tag{93}$$

(92)-ից և (93)-ից բխում է

$$F(x-\varepsilon) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x+\varepsilon) :$$

Ձգտեցնելով $\varepsilon \to 0$ և օգտվելով այն փաստից, որ x-ը $F(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության կետն է, կստանանք

$$F(x) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x),$$

այսինքն

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) :$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Թեորեմ 13. $\eta_n(\omega)$ **պատահական մեծությունների հաջորդականության զուգամիտությունը հաստատունին ըստ բաշխման նույնն է ինչպես զուգամիտությունը նույն հաստատունին ըստ հավանականության, այսինքն** $\eta_n \xrightarrow{D} c$ **այն և միայն այն դեպքում, եթե** $\eta_n \xrightarrow{P} c$**:**

Ապացույց. Օգտվելով Թեորեմ 12-ից մենք պետք է ապացուցենք միայն հետևյալ պնդումը՝ եթե

$$\eta_n \xrightarrow{D} c \quad \text{ապա} \quad \eta_n \xrightarrow{P} c.$$

$\eta = c$ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{եթե} \quad x > c \\ 0, & \text{եթե} \quad x \leq c: \end{cases}$$

Քանի որ $\eta_n \xrightarrow{D} c$, ապա $F_n(x) = P(\eta_n < x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$, $F(x)$ ֆունկցիայի ցանկացած $x \in R^1$ անընդհատության կետում, այսինքն երբ $n \to +\infty$ ունենք

$$F_n(x) \to \begin{cases} 1, & \text{եթե} \quad x > c \\ 0, & \text{եթե} \quad x < c: \end{cases}$$

Մենք պետք է ցույց տանք, որ $\eta_n \xrightarrow{P} c$: Դա նշանակում է, որ կամայական $\varepsilon > 0$ համար $P\{\omega : |\eta_n - c| \geq \varepsilon\} \to 0$:

$$P\{\omega : |\eta_n - c| \geq \varepsilon\} = P\{\omega : \eta_n - c \geq \varepsilon \bigcup \eta_n - c \leq -\varepsilon\} =$$

$$= P\{\eta_n \geq c + \varepsilon\} + P\{\eta_n \leq c - \varepsilon\} = 1 - F_n(c+\varepsilon) + F_n(c - \varepsilon + 0) :$$

Անցնենք սահմանի

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |\eta_n - c| \geq \varepsilon) = 1 - \lim_{n\to\infty} F_n(c+\varepsilon) + \lim_{n\to\infty} F_n(c - \varepsilon + 0) :$$

Քանի որ

$$F_n(c+\varepsilon) \to 1 \quad \text{և} \quad F_n(c-\varepsilon+0) \to 0, \quad \text{երբ} \quad n \to \infty,$$

կամայական $\varepsilon > 0$ համար կստանանք

$$P\{\omega : |\eta_n - c| \geq \varepsilon\} \to 0 :$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Օրինակ 51.

$$\eta_n \xrightarrow{D} \eta, \quad \text{սակայն} \quad \eta_n \overset{P}{\not\to} \eta :$$

Լուծում. Դիտարկենք $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ հավանականային տարածությունը և $A \in \mathcal{F}$ պատահույթը $P(A) = P(\bar{A}) = 1/2$ հավանականությամբ: Ներմուծենք հետևյալ պատահական մեծություն–ները.

$$\eta_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{եթե} \quad \omega \in A \\ -1, & \text{եթե} \quad \omega \in \bar{A}: \end{cases}$$

կամայական n-ի համար և $\eta(\omega) = -\eta_n(\omega)$: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \le -1 \\ 1/2, & \text{եթե} \quad x \in (-1, 1] \\ 1, & \text{եթե} \quad x > 1: \end{cases}$$

Հետևաբար,

$$|\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| = 2 :$$

§32. ՄԵԾ ԹՎԵՐԻ ԹՈՒՅԼ ՕՐԵՆՔԸ

Հավանականությունների տեսության ամենակարևոր տեսական արդյունքներից են սահ– մանային թեորեմները: Դրանցից ամենակարևորներն են "մեծ թվերի օրենք" անվանմամբ և "կենտրոնական սահմանային թեորեմներ" անվանմամբ թեորեմները:

Թեորեմ 14 (Մարկովի թեորեմ). Դիցուք $\eta_1(\omega)$, ..., $\eta_n(\omega)$ պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի վերջավոր մաթ. սպասում ($E\eta_k = a_k$) և դիսպերսիա: Եթե

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k(\omega)\right) \to 0, \qquad \textbf{երբ} \quad n \to \infty, \tag{94}$$

ապա կամայական $\varepsilon > 0$ համար

$$P\left\{\omega : \ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\eta_k - a_k)\right| \ge \epsilon\right\} \to 0, \quad \textbf{երբ} \quad n \to \infty : \tag{95}$$

Թեորեմ 14-ի արդյունքը կարող ենք գրել հետևյալ կերպ՝

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\eta_k - a_k) \xrightarrow{P} 0 : \tag{96}$$

(94) պայմանը կանվանենք Մարկովի պայման:

Ապացույց. Նշանակենք

$$\zeta_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k(\omega) :$$

Հետևաբար, ըստ մաթ. սպասման ադիտիվության ստանում ենք

$$E\left(\zeta_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k :$$

Ըստ Չեբիշևի անհավասարության ունենք

$$P\left\{\omega \ \ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_k - a_k\right)\right| \geq \varepsilon\right\} = P\left\{\omega \ \ |\zeta_n(\omega) - E\left(\zeta_n\right)| \geq \varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq \frac{D(\zeta_n)}{\varepsilon^2} = \frac{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k(\omega)\right)}{n^2\,\varepsilon^2} :$$

(94)-ից կստանանք (95)-ը: Ապացույցն ավարտվեց:

Հետևանք 10. Դիցուք $\eta_1(\omega)$, ..., $\eta_n(\omega)$ անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, որոնցից յուրաքանչյուրը ունի վերջավոր մաթ. սպասում ($E\eta_k = a_k$) և դիսպերսիա ($D\eta_k = \sigma_k^2$): Եթե գոյություն ունի C հաստատուն այնպիսին, որ կամայական k-ի համար $\sigma_k^2 \leq C$ (այսինքն դիսպերսիաների հաջորդականությունը սահմանափակ է), ապա կամայական $\varepsilon > 0$ համար

$$P\left\{\omega : \ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_k - a_k\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0, \qquad \text{երբ} \quad n \to \infty,$$

այսինքն (96)-ը:

Ապացույց. Մենք պետք է ապացուցենք, որ Մարկովի թեորեմի բոլոր պայմանները բավարարված են: Հետևաբար մենք պետք է ստուգենք (94) պայմանը: Իսկապես,

$$\frac{1}{n^2}\cdot D\left(\sum_{k=1}^{n}\eta_k(\omega)\right) =$$

(անկախ պատահական մեծությունների դիսպերսիայի ադիտիվության համաձայն) $=$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\left(\eta_k\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} C \leq \frac{C\cdot n}{n^2} = \frac{C}{n} \to 0, \qquad \text{երբ} \quad n\to\infty :$$

Ապացույցն ավարտվեց:

Հետևանք 11. Դիցուք $\eta_1(\omega)$, ..., $\eta_n(\omega)$ անկախ, միատեսակ բաշխված պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, որոնցից յուրաքանչյուրը ունի վերջավոր մաթ. սպասում ($E\eta_k = a$) և դիսպերսիա: Այդ դեպքում, կամայական $\varepsilon > 0$ համար

$$P\left\{\omega \quad \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0, \qquad \text{երբ} \quad n\to\infty,$$

այսինքն

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k \xrightarrow{P} a :$$

Ապացույց. Ապացույցն ակնհայտ է և հետևում է հետևանք 10-ից:

Հետևանք 12 (Բեռնուլի). Այժմ ենթադրենք, որ կատարում ենք n անկախ փորձ, որոնցից յուրաքանչյուրում "հաջողության" հավանականությունը p է, իսկ "անհաջողությանը" $1-p$: Դիցուք $\eta(\omega)$-ն n անկախ փորձերում հաջողությունների թիվն է: Այդ դեպքում, կամայական $\varepsilon > 0$ համար տեղի ունի

$$P\left\{\omega \quad \left|\frac{\eta(\omega)}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0, \qquad \text{երբ} \quad n\to\infty,$$

այսինքն

$$\frac{\eta(\omega)}{n} \xrightarrow{P} p :$$

Ապացույց. Նշանակենք $\eta_i(\omega)$-ով i-րդ փորձում Հաջողությունների թիվը: Հետևաբար, η_i-ն կամայական i-ի համար դիսկրետ Պատահական մեծություն է և ընդունում է միայն երկու արժեք՝ 0 և 1: $\eta_i = 1$, երբ ելքը հաջող է և $\eta_i = 0$, երբ ելքը անհաջող է: Ավելին, η_1, ..., η_n

անկախ, միապեսակ բաշխված պատահական մեծություններ են և

$$\eta(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\omega), \quad E\eta_i = p, \quad D\eta_i = p \cdot (1-p) \quad \text{կամայական} \quad i = 1, 2, ..., n \quad \text{համար :}$$

Այժմ կարող ենք օգտվել Հետևանք 11-ից η_i պատահական մեծությունների համար: Ապացույցն ակնհայտ է:

Մեծ թվերի թույլ օրենքից հետևում է, որ ցանկացած դրական ε թվի համար, կարևոր չէ որքան փոքր, հավանականությունը , որ n անկախ փորձերում հաջողության հաճախությունը կտարբերվի p-ից ավելի քան ε-ը, ձգտում է 0-ի, երբ n-ը աճում է:

Թեորեմ 15. Եթե $\eta_n \xrightarrow{h.h.} \eta$, ապա $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$:

Ապացույց. Եթե $\eta_n \xrightarrow{h.h.} \eta$, ապա $P\{\omega : \quad \eta_n \not\to \eta\} = 0$: Ունենք

$$\{\omega : \quad \eta_n \not\to \eta\} = \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \frac{1}{m}\} =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \frac{1}{m}\} :$$

Քանի որ $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \ P(B_n) = 0$ բոլոր $n = 1, 2, ...$ համար, կստանանք

$$P\{\eta_n \not\to \eta\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad P\left\{ \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} \right\} = 0$$

Դժվար չէ տեսնել, որ

$$B_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\}$$

նվազող հաջորդականություն է և հետևաբար

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad P\left\{ \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} \right\} = \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} \right) = 0 :$$

Քանի որ

$$\{\omega : |\eta_N - \eta| \geq \varepsilon\} \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\},$$

ապա

$$0 \leq P\{\omega : |\eta_N - \eta| \geq \varepsilon\} \leq P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |\eta_n - \eta| \geq \varepsilon\} \right) :$$

Հետևաբար $\eta_n \xrightarrow{h.h.} \eta \quad \Rightarrow \eta_n \xrightarrow{P} \eta$: Ապացույցն ավարտվեց:

Օրինակ 52.

$$\eta_n \xrightarrow{P} \eta, \quad \text{բայց} \quad \eta_n \overset{(r)}{\not\to} \eta, \quad \text{կամայական} \quad r \in (0, \infty) \quad \text{համար}$$

և

$$\eta_n \xrightarrow{h.h.} \eta, \quad \text{բայց} \quad \eta_n \overset{(r)}{\not\to} \eta, \quad \text{կամայական} \quad r \in (0, \infty) \quad \text{համար}:$$

Լուծում. Ֆիքսենք հետևյալ հավանականային պարածությունը՝ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$-ը բորելյան ենթաբազմությունների σ-հանրահաշիվ է և $P = L_1$ Լեբեգի չափն է: Դիտարկենք պատահական մեծությունների հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$\eta_n(\omega) = \begin{cases} e^n, & \text{եթե} \quad 0 \le \omega \le \dfrac{1}{n} \\ 0, & \text{եթե} \quad \dfrac{1}{n} < \omega \le 1 \end{cases}$$

և $\eta(\omega) \equiv 0$:

Ցույց տանք, որ $\eta_n \xrightarrow{h.h.} 0$:

Ցանկացած $\omega \in [0, 1]$ համար գոյություն ունի $N(\omega)$ այնպիսին, որ $n \geq N(\omega)$ համար $\eta_n(\omega) \equiv 0$, քանի որ $\omega > \dfrac{1}{n}$ $n \geq N(\omega)$ համար:

Կամայական $\varepsilon > 0$ ունենք

$$P(\omega : \eta_n \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \to 0$$

եթե $n \to \infty$: Հետևաբար, $\eta_n \xrightarrow{P} 0$:

Սակայն $\eta_n \overset{(r)}{\not\to} 0$ կամայական $r \in (0, \infty)$ համար: Իսկապես,

$$E|\eta_n - \eta|^r = E\eta_n^r = e^{r \cdot n} \cdot \frac{1}{n} \to +\infty, \quad \text{կամայական} \quad r \in (0, \infty):$$

Դիտողություն 13. Եթե η_n-ն զուգամիտում է η-ին և ξ_n-ը զուգամիտում է ξ-ին, ապա $\eta_n + \xi_n$ զուգամիտում է $\eta + \xi$ ըստ կամայական տիպի զուգամիտության, բացառությամբ զուգամիտության ըստ բաշխման: Սակայն, եթե $\xi = 0$ կամ η_n և ξ_n անկախ են, ապա արդյունքը կլինի ճիշտ նաև ըստ բաշխման զուգամիտության համար:

Վարժություն 6. Ճմարի՞տ է արդյոք հետևյալ պնդումը՝

$$\eta_n \xrightarrow{D} \eta \quad \text{հետևում է} \quad \eta_n - \eta \xrightarrow{D} 0 :$$

Օրինակ 53. Կառուցենք պատահական մեծությունների հաջորդականություն այնպես, որ

$$\eta_n \xrightarrow{(r)} 0 \ \forall r > 0, \quad \text{բայց} \quad \eta_n \overset{h.h.}{\not\to} 0, \quad n \to \infty,$$

և

$$\eta_n \xrightarrow{P} 0, \quad \text{բայց} \quad \eta_n \overset{h.h.}{\not\to} 0, \quad n \to \infty :$$

Լուծում. Դիցուք $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$-ն հավանականային փարածություն է, որտեղ Ω-ն միավոր երկարության շրջան է, $\mathcal{F}$-ը Ω-ի բորելյան ենթաբազմությունների σ-հանրահաշիվ է, P-ն Լեբեգի չափն է: Դիտարկենք հետևյալ տեսքի $A_1, A_2, ...$ աղեղների հաջորդականությունը. A_1-ն ունի 1/2 երկարություն և սկսվում է շրջանի կամայական կետում ժամացույցի հակառակ ուղղությամբ, A_2 աղեղը ունի 1/3 երկարություն և A_1 աղեղի վերջը համընկնում է A_2 աղեղի սկզբնակետի հետ և միևնույն ուղղությամբ, և այլն, A_n աղեղն ունի $1/(n+1)$ երկարություն և սկիզբ է առնում A_{n-1} աղեղի վերջնակետից նույն ուղղությամբ, ինչ որ բոլոր աղեղները: Դիտարկենք պատահական մեծությունների հաջորդականություն՝

$$\eta_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{եթե} \quad \omega \in A_n \\ 0, & \text{եթե} \quad \omega \notin A_n, \end{cases}$$

$n = 1, 2, ...$, $\eta(\omega) \equiv 0$: Ցույց տանք, որ $\eta_n \xrightarrow{P} 0$:

$$0 \le P\{\omega : |\eta_n - \eta| \ge \varepsilon\} = P\{\omega : \eta_n \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{երբ} \quad n \to \infty :$$

Սակայն $\forall \omega \in \Omega$, $\forall N$ գոյություն ունի $n \ge N$ $\eta_n(\omega) = 1$, այսինքն $\eta_n \not\to \eta$ Ω-ի շրջանի ցանկացած կետում, այսինքն $P\{\omega : \eta_n(\omega) \to \eta(\omega)\} = 0$: Ունենք $\eta_n \xrightarrow{(r)} 0$, երբ $n \to \infty$: Այսպիսով

$$E|\eta_n|^r = E\eta_n^r = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{երբ} \quad n \to \infty :$$

§33. ՄԵԾ ԹՎԵՐԻ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ՕՐԵՆՔԸ

Մեծ թվերի ուժեղացված օրենքը նման է թույլ զուգամիտությանը այն նույնպես վերաբեր– վում է հաջորդականության միջին թվաբանականի զուգամիտությանը

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k(\omega)$$

տեսական a միջինին: Սակայն դա տարբեր է, քանի որ այն վերաբերվում է այլ տիպի զուգամիտությանը:

Թեորեմ 16. (Բորելի թեորեմ). Դիցուք $\eta_1(\omega)$, ..., $\eta_n(\omega)$ անկախ և միատեսակ բաշխված պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի 4-րդ կարգի մոմենտ ($E\eta_k^4 = \gamma$): Այդ դեպքում հաջորդականության միջին թվաբա– նականը՝ S_n զուգամիտում է a-ին 1 հավանականությամբ, որտեղ $a = E\eta_k$ հետևյալ իմաստով՝

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k(\omega) = a\right\} = 1$$

այսինքն

$$S_n \overset{h.h.}{\to} a :$$

Ապացույց. Թեորեմ 15-ի ապացույցից հետևում է, որ $P(\eta_n(\omega) \not\to \eta(\omega)) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, եթե կամայական $\varepsilon > 0$ համար

$$P\{\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq N}\{\omega : |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\}\} = P\{\limsup A_n(\varepsilon)\} = 0,$$

որտեղ $A_n(\varepsilon) = \{\omega : |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\}$:

Այժմ մենք կարող ենք օգտվել Բորել-Կանտելիի լեմմայից. Եթե հավանականությունների $\sum_n P(A_n(\varepsilon))$ շարքը զուգամետ է, ապա

$$P\{\limsup A_n(\varepsilon)\} = 0 :$$

Ըստ Չեբիշևի անհավասարության ունենք

$$P(A_n(\varepsilon)) \le \frac{E\left[\left|\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - a)\right|^4\right]}{n^4\varepsilon^4} :$$

Քանի որ η_i-երը անկախ են և $E(\eta_k - a) = 0$, կստանանք

$$P(A_n(\varepsilon)) \le \frac{\gamma\, n + 3\, n(n-1)\, \sigma^4}{n^4\varepsilon^4} \le C\,\frac{1}{n^2},$$

որտեղ $\sigma^2 = D(\eta_i)$:

Հետևաբար, $\sum\limits_{n} P(A_n(\varepsilon))$-ն զուգամետ շարք է, քանի որ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} :$$

Թեորեմ 16-ը ապացուցվեց:

Այժմ ձևակերպենք Ա. Ն. Կոլմոգորովի արդյունքը առանց ապացույցի:

Թեորեմ 17. (Ա. Ն. Կոլմոգորով). Դիցուք $\eta_1(\omega)$, ..., $\eta_n(\omega)$ անկախ և միապեսակ բաշխված պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի վերջավոր մաթ. սպասում ($E\eta_k = a$): Այդ դեպքում հաջորդականության միջինը

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(\omega)$$

Զուգամիտում է a-ին 1 հավանականությամբ այն իմաստով, որ

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(\omega) = a\right\} = 1 :$$

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ 25

Լեմմա 9. Եթե η_1 և η_2 Պուասոնի բաշխում ունեցող անկախ պատահական մեծություններ են λ_1 և λ_2 պարամետրերով, ապա $\eta_1 + \eta_2$-ը ևս ունի Պուասոնի բաշխում $\lambda_1 + \lambda_2$ պարամետրով:

Պնդում 2 (Դ. Ա. Ռայկով). Եթե η_1 և η_2 անկախ պատահական մեծությունների $\eta_1 + \eta_2$ գումարը ունի Պուասոնի բաշխում, ապա η_1 և η_2 պատահույթներից յուրաքանչյուրը նույնպես ունի Պուասոնի բաշխում:

Լեմմա 10. Եթե η_1 և η_2 անկախ և նորմալ բաշխված պատահական մեծություններ են $N(a_1, \sigma_1^2)$ և $N(a_2, \sigma_2^2)$ պարամետրերով, ապա $\eta_1 + \eta_2$-ը նույնպես նորմալ է $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ պարամետրերով:

Պնդում 3 (Կրամեր). Եթե η_1 և η_2 անկախ պատահական մեծությունների $\eta_1 + \eta_2$ գումարը նորմալ է, ապա η_1 և η_2 պատահույթներից յուրաքանչյուրը նույնպես նորմալ է:

Հետագայում մեզ պետք կգա հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 11. Չնվազող $F_n(x)$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը թույլ զուգամիտում է չնվազող $F(x)$ ֆունկցիային, եթե գոյություն ունի խիտ D բազմություն այնպես, որ $F_n(x) \to F(x)$ կամայական $x \in D$ համար:

Հետագայում մեզ հարկավոր կլինի հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 12. Չնվազող $F_n(x)$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը թույլ զուգամիտում է չնվազող $F(x)$ ֆունկցիային, եթե գոյություն ունի խիտ D բազմություն այնպիսին, որ $F_n(x) \to F(x)$ կամայական $x \in D$-ի համար:

Ապացույց. Դիցուք x-ը կամայական կետ է, իսկ x' և x'' կետեր են D բազմությունից այնպես, որ $x' \le x \le x''$: Քանի որ $F_n(x)$-երը չնվազող ֆունկցիաներ են, ապա

$$F_n(x') \le F_n(x) \le F_n(x'') :$$

Հետևաբար

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x') \le \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \le \lim_{n\to\infty} F_n(x'') :$$

Քանի որ

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x') = F(x') \quad \text{և} \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x'') = F(x''),$$

կստանանք

$$F(x') \le \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \le F(x'') :$$

Այս անհավասարությունների միջին անդամները կախված չեն x' և x''-ից, այդ դեպքում

$$F(x-0) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \le F(x+0) :$$

Եթե ֆունկցիան x կետում անընդհատ է, ապա

$$F(x-0) = F(x) = F(x+0) :$$

Հետևաբար, $F(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության կետերում ստանում ենք

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) :$$

Լեմմա 12-ը ապացուցվեց:

Թեորեմ 23 (Հելլիի առաջին թեորեմը). Տրված հավասարաչափ սահմանափակ $F_n(x)$ չնվազող ֆունկցիաների հաջորդականության համար գոյություն ունի $F_{n_k}(x)$ ենթահա– ջորդականություն, որը թույլ զուգամիտում է չնվազող, ձախից անընդհատ $F(x)$ ֆունկ– ցիային:

Ապացույց. Դիցուք $D = \{x'_1, x'_2, ..., x'_n, ...\}$ հաշվելի կետերի ամենուրեք խիտ բազմություն է: Վերցնենք հաջորդականության ֆունկցիաների արժեքները x'_1 կետում.

$$F_1(x'_1), F_2(x'_1), ..., F_n(x'_1), ...$$

Ըստ թեորեմի ենթադրության, այդ արժեքների բազմությունը սահմանափակ է, հետևաբար այն պարունակում է առնվազն մեկ հաջորդականություն

$$F_{11}(x_1'), F_{12}(x_1'), ..., F_{1n}(x_1'), ... \tag{104}$$

որը զուգամիտում է որոշակի սահմանային արժեքի, որը նշանակում ենք $G(x_1')$: Այժմ դիտարկենք հետևյալ թվերի բազմությունը՝

$$F_{11}(x_2'), F_{12}(x_2'), ..., F_{1n}(x_2'), ...$$

Քանի որ այս բազմությունը ևս սահմանափակ է, գոյություն ունի հաջորդականություն, զուգամիտող որոշակի սահմանային $G(x_2')$ արժեքի: Այսպիսով, (104) հաջորդականությունից կարող ենք սպանալ հետևյալ ենթահաջորդականությունը՝

$$F_{21}(x), F_{22}(x), ..., F_{2n}(x), ...$$

որի համար միաժամանակ

$$\lim_{n\to\infty} F_{2n}(x_1') = G(x_1') \quad \text{և} \quad \lim_{n\to\infty} F_{2n}(x_2') = G(x_2') :$$

Շարունակենք այս ենթահաջորդականությունների ընտրությունը

$$F_{k1}(x), F_{k2}(x), ..., F_{kn}(x), ... \tag{105}$$

որի համար $\lim_{n\to\infty} F_{kn}(x_r') = G(x_r')$ տեղի ունի բոլոր $r \leq k$ համար: Այժմ ձևավորենք անկյունագծային հաջորդականություն

$$F_{11}(x), F_{22}(x), ..., F_{nn}(x), ... \tag{106}$$

Անկյունագծային հաջորդականության բոլոր անդամները ընտրվում են $F_n(x)$ հաջորդակա–

նությունից, հետևաբար կստանանք $\lim_{n\to\infty} F_{nn}(x'_1) = G(x'_1)$: Հաջորդիվ, քանի որ ողջ ան–կյունագծային հաջորդականությունը, բացառությամբ առաջին անդամից, ընտրվում է (104) հաջորդականությունից, ապա $\lim_{n\to\infty} F_{nn}(x'_2) = G(x'_2)$: Ընդհանրապես, ողջ անկյունագծային հաջորդականությունը, բացառությամբ իր առաջին $k-1$ անդամներից, առանձնացվում է (105) հաջորդականությունից, հետևաբար ունենք նաև $\lim_{n\to\infty} F_{nn}(x'_k) = G(x'_k)$ յուրաքանչյուր k-ի համար:

Ստացված արդյունքը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. $F_n(x)$ հաջորդականությունը պարունակում է առնվազն մեկ ենթահաջորդականություն, որը զուգամիտում է D բազմության բոլոր x'_k կետերում որոշակի $G(x)$ ֆունկցիայի համար, որը որոշված է D բազմության վրա: Բացի այդ, քանի որ $F_{nn}(x)$ ֆունկցիաները չնվազող և հավասարաչափ սահմանափակ են, ապա ակնհայտորեն $G(x)$ ֆունկցիան չնվազող է և սահմանափակ:

Այժմ ակնհայտ է, որ D բազմության վրա որոշված ֆունկցիան կարելի է անընդհատ շարունակել այնպես, որ նա կլինի որոշված ամբողջ $-\infty < x < \infty$ առանցքի վրա և նա կլինի չնվազող և սահմանափակ:

(106) հաջորդականությունը զուգամիտում է այդ ֆունկցիային ամենուրեք խիտ D բազ–մության վրա, հետևաբար նա զուգամիտում է թույլ, ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել: Նշենք, որ Ֆունկցիան, որը ստացվում է G ֆունկցիայից, կարող է ձախից անընդհատ չլինել: Սակայն մենք կարող ենք փոխել նրա արժեքները ոչ անընդհատության կետերում այնպես, որ կստանանք այդ հատկությունը: F_{nn} ենթահաջորդականությունը թույլ կզուգամիտի "ուղ–ղված" ֆունկցիային: Թեորեմ 23-ը ապացուցվեց:

Թեորեմ 24 (Հելլիի երկրորդ թեորեմը). Տրված չնվազող $F_n(x)$ ֆունկցիաների հաջորդա–կանության համար, որոնք թույլ զուգամիտում են չնվազող $F(x)$ ֆունկցիային $[a,b]$-ում և a և b կետերը $F(x)$-ի անընդհատության կետերն են, $[a,b]$-ում որոշված կամայական անընդհատ $\gamma(x)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \gamma(x)\,dF_n(x) = \int_a^b \gamma(x)\,dF(x) :$$

Ապացույց. $\gamma(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից հետևում է, որ ինչքան էլ փոքր լինի դրական ϵ հաստատունը, մենք կարող ենք գտնել $[a,b]$ միջակայքի տրոհում $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_N = b$ կետերով ենթամիջակայքերում այնպես, որ յուրաքանչյուր $x \in (x_k, x_{k+1})$ միջակայքի համար տեղի ունի $|\gamma(x) - \gamma(x_k)| < \epsilon$ անհավասարությունը: Օգտվելով այդ փաստից կարող ենք ներմուծել $\gamma_\epsilon(x)$ ֆունկցիա, որը ընդունում է միայն վերջավոր թվով արժեքներ: Սահմանենք $\gamma_\epsilon(x)$ ֆունկցիան հետևյալ անհավասարություններով՝

$$\gamma_\epsilon(x) = \gamma(x_k), \quad x_k \leq x < x_{k+1} \quad \text{համար :}$$

Ակնհայտ է, որ բոլոր x-երի համար $[a,b]$ միջակայքից տեղի ունի հետևյալ անհավասա– րությունը՝

$$|\gamma(x) - \gamma_\epsilon(x)| < \epsilon :$$

Կարող ենք ընտրել տրոհման $x_1, x_2, ..., x_{N-1}$ կետերը այնպես, որ նրանք լինեն $F(x)$ ֆունկ– ցիայի անընդհատության կետեր: $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... ֆունկցիաների զուգամիտությունից $F(x)$ ֆունկցիային բավականաչափ մեծ n-երի համար տրոհման բոլոր կետերում հետևում է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|F(x_k) - F_n(x_k)| < \frac{\epsilon}{MN} \tag{107}$$

որտեղ M-ը $\gamma(x)$-ի մոդուլի առավելագույն արժեքն է $[a,b]$ միջակայքում:

Ակնհայտ է, որ

$$\left| \int_a^b \gamma(x)\, dF(x) - \int_a^b \gamma(x)\, dF_n(x) \right| \leq \left| \int_a^b \gamma(x)\, dF(x) - \int_a^b \gamma_\epsilon(x)\, dF(x) \right| +$$

$$\left| \int_a^b \gamma_\epsilon(x)\, dF(x) - \int_a^b \gamma_\epsilon(x)\, dF_n(x) \right| + \left| \int_a^b \gamma_\epsilon(x)\, dF_n(x) - \int_a^b \gamma(x)\, dF_n(x) \right| :$$

Դժվար չէ հաշվել, որ աջ կողմում գրված առաջին անդամը չի գերազանցում $\epsilon\,[F(b) - F(a)]$, բայց երրորդ անդամը չի գերազանցում $\epsilon[F_n(b) - F_n(a)]$: Երկրորդ անդամը հավասար է

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1} \gamma(x_k)\left[F(x_{k+1}) - F(x_k)\right] - \sum_{k=0}^{N-1} \gamma(x_k)\left[F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k)\right]\right| =$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1} \gamma(x_k)\left[F(x_{k+1}) - F_n(x_{k+1})\right] - \sum_{k=0}^{N-1} \gamma(x_k)\left[F(x_k) - F_n(x_k)\right]\right|$$

և հետևաբար բավականաչափ մեծ n-երի համար չի գերազանցում 2ϵ, որը հետևում է (107) անհավասարությունից: $F_n(x)$ ֆունկցիաների սահմանափակությունից հետևում է

$$\epsilon[F(b) - F(a)] + \epsilon[F_n(b) - F_n(a)] + 2\epsilon$$

Կարելի է վերցնել բավականաչափ փոքր ϵ-ի հետ միասին: Թեորեմ 24-ը ապացուցված է:

Թեորեմ 25. (Հելլիի ընդհանրացված երկրորդ թեորեմը). Եթե $\gamma(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է և սահմանափակ ամբողջ $-\infty < x < \infty$ ուղղի վրա, սահմանափակ և չնվազող

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$$

ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամիտում է $F(x)$ ֆունկցիային և

$$\lim_{n\to\infty} F_n(-\infty) = F(-\infty), \quad \lim_{n\to\infty} F_n(+\infty) = F(+\infty),$$

ապա

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)\, dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)\, dF(x) :$$

Ապացույց. Դիցուք $A < 0$ և $B > 0$, նշանակենք

$$J_1 = \left| \int_{-\infty}^{A} \gamma(x)\, dF(x) - \int_{-\infty}^{A} \gamma(x)\, dF_n(x) \right|,$$

$$J_2 = \left| \int_{A}^{B} \gamma(x)\, dF(x) - \int_{A}^{B} \gamma(x)\, dF_n(x) \right|,$$

$$J_3 = \left| \int_{B}^{\infty} \gamma(x)\, dF(x) - \int_{B}^{\infty} \gamma(x)\, dF_n(x) \right| :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)\, dF(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)\, dF_n(x) \right| \le J_1 + J_2 + J_3 :$$

J_1 և J_3 մեծությունները կարող ենք դարձնել փոքր, եթե ընտրենք A և B-ն բավականաչափ մեծ բացարձակ արժեքով և այպես, որ A և B կետերը $F(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության կետերն են , իսկ n-ը կարելի է ընտրել բավականաչափ մեծ: Իսկապես, դիցուք M-ը $|\gamma(x)|$-ի վերին սահմանն է $-\infty < x < \infty$ համար: Այդ դեպքում

$$J_1 \le M[F(A) + F_n(A)],$$

$$J_3 \leq M[F(+\infty) - F(B)] + M[F_n(+\infty) - F_n(B)] :$$

Սակայն

$$\lim_{A \to -\infty} F(A) = 0, \quad \lim_{B \to \infty} F(B) = F(+\infty) :$$

Ըստ ենթադրության

$$\lim_{n \to \infty} F_n(A) = F(A), \quad \lim_{n \to \infty} F_n(B) = F(B) :$$

Այդ դեպքում մեր ենթադրությունը J_1 և J_3-ի վերաբերյալ ապացուցվեց: J_2 մեծությունը բավականաչափ մեծ n-երի համար կարող ենք դարձնել բավականաչափ փոքր ըստ Հելլիի երկրորդ թեորեմի (տես Թեորեմ 24) վերջավոր միջակայքի համար: Թեորեմ 25-ը ապացուցվեց:

§36. ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Թեորեմ 26 (ՈՒՂԻՂ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄ). Եթե

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$$

բաշխման ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամիտում է $F(x)$ բաշխման ֆունկ– ցիային, ապա

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$$

բնութագրիչ ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամիտում է $\varphi(t)$ բնութագրիչ ֆունկ– ցիային: Այս զուգամիտությունը հավասարաչափ է ըստ t-ի յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում:

Ապացույց. Քանի որ

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x), \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

և e^{itx} ֆունկցիան անընդհատ է և սահմանափակ ամբողջ $-\infty < t < \infty$ ուղղի վրա, ապա ըստ Թեորեմ 25-ի $n \to \infty$ դեպքում տեղի ունի

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t) :$$

Ենթադրությունը, որ այս զուգամիտությունը ըստ t-ի հավասարաչափ է յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում, ստուգվում է նույն ձևով, ինչպես Թեորեմ 24-ի ապացույցում (Հելլի երկրորդ թեորեմ): Թեորեմ 25-ը ապացուցվեց:

Թեորեմ 27 (ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄԸ). Եթե

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots \tag{108}$$

բնութագրիչ ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամիտում է $\varphi(t)$ ֆունկցիային որը անընդհատ է $t = 0$ կետում, ապա

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots \tag{109}$$

բաշխման ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամիտում է որոշակի $F(x)$ բաշխման ֆունկցիայի և ըստ Թեորեմ 29-ի տեղի ունի $\varphi(t) = \int e^{itx} dF(x)$:

Ապացույց. Ըստ Թեորեմ 26-ի (Հելլիի առաջին թեորեմ) եզրակացնում ենք, որ (112) հաջոր– դականությունը պարունակում է

$$F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), \ldots, F_{n_k}(x), \ldots$$

ենթահաջորդականություն, զուգամիտող որոշակի չնվազող $F(x)$ ֆունկցիային: Ակնհայտ է, որ $F(x)$ ֆունկցիան ձախից անընդհատ է

$$\lim_{x' \to x-0} F(x') = F(x) :$$

Ընդհանրապես, $F(x)$-ը չի կարող լինել բաշխման ֆունկցիա, քանի որ դրա համար պետք է բավարարվեն $F(-\infty) = 0$ և $F(+\infty) = 1$ պայմանները: Իսկապես,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե} \quad x \leq -n \\ \dfrac{x+n}{2n}, & \text{եթե} \quad -n < x \leq n \\ 1, & \text{եթե} \quad x > n \end{cases}$$

ֆունկցիաների հաջորդականության համար սահմանային ֆունկցիան՝ $F(x) \equiv 1/2$ և հետևաբար $F(-\infty)$ և $F(+\infty)$ նույնպես հավասար են $1/2$: Սակայն մեր թեորեմի պայմաններում պետք է ցույց տալ, որ $F(-\infty) = 0$ և $F(+\infty) = 1$:

Իսկապես, եթե դա ճիշտ չէ, ապա $F(x)$ սահմանային ֆունկցիայի համար պետք է տեղի ունենա $F(-\infty) \geq 0$ և $F(+\infty) \leq 1$, և մենք պետք է ունենանք

$$\delta = F(+\infty) - F(-\infty) < 1 :$$

Այժմ վերցնենք կամայական դրական ε փոքր քան $1-\delta$: Քանի որ ըստ թեորեմի պայմանի բնութագրիչ ֆունկցիաների (108) հաջորդականությունը զուգամիտում է $\varphi(t)$ ֆունկցիային, ապա $\varphi(0) = 1$: Եվ քանի որ $\varphi(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է $t = 0$ կետում, ապա կարող ենք ընտրել բավականաչափ փոքր դրական τ թիվ այնպես, որ հետևյալ անհավասարությունը տեղի ունի

$$\frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t)\, dt \right| > 1 - \varepsilon/2 > \delta + \varepsilon/2 : \tag{110}$$

Այդ ժամանակ կարող ենք ընտրել $X > \dfrac{4}{\tau\varepsilon}$ և այնպիսի մեծ K, որ $k > K$ համար տեղի ունի

$$\delta_k = F_{n_k}(X) - F_{n_k}(-X) < \delta + \varepsilon/4 :$$

Քանի որ $\varphi_{n_k}(t)$ բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա

$$\int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\, dt \right] dF_{n_k}(x) :$$

Այս հավասարման աջ կողմում գրված ինտեգրալը կարելի է գնահատել հետևյալ կերպ.

Քանի որ $|e^{itx}| = 1$, ապա
$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\, dt \right| \leq 2\tau :$$
Մյուս կողմից
$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\, dt = \frac{2}{x} \sin \tau x,$$
և քանի որ $|\sin \tau x| \leq 1$, ապա $|x| > X$ համար
$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\, dt \right| < \frac{2}{X} :$$
Հետևաբար, օգտվելով $|x| \leq X$-ի համար առաջին գնահատականից և $|x| > X$-ի համար երկրորդ գնահատականից, կստանանք
$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t)\, dt \right| \leq \left| \int_{|x| \leq X} \left(\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\, dt \right) dF_{n_k}(x) \right| +$$
$$\left| \int_{|x| > X} \left(\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\, dt \right) dF_{n_k}(x) \right| < 2\tau\delta_k + \frac{2}{X}$$
և հետևաբար
$$\frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t)\, dt \right| < \delta + \varepsilon/2 :$$
Այս անհավասարությունը ճիշտ է նաև
$$\frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t)\, dt \right| \leq \delta + \varepsilon/2 :$$
սահմանի համար, որը հակասում է (110) անհավասարությանը:

Այսպիսով, $F(x)$ ֆունկցիան, որին զուգամիտում է $F_{n_k}(x)$ հաջորդականությունը բաշխման ֆունկցիա է, ըստ սահմանային թեորեմի նրա բնութագրիչ ֆունկցիան հավասար է $\varphi(t)$: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար անհրաժեշտ է ապացուցել, որ ողջ (109) հաջոր– դականությունը զուգամիտում է $F(x)$ ֆունկցիային: Ենթադրենք, որ դա ճիշտ չէ: Այդ դեպքում մենք կարող ենք գտնել

$$F_{n'_1}(x), F_{n'_2}(x), \ldots, F_{n'_k}(x), \ldots$$

ֆունկցիաների ենթահաջորդականությունը զուգամիտում է $F(x)$-ից տարբեր $F^*(x)$ ֆունկցիայի առնվազն մեկ անընդհատության կետերում: Ըստ որի պետք է ապացուցել, որ $F^*(x)$ ֆունկցիան պետք է լինի բաշխման ֆունկցիա $\varphi(t)$ բնութագրիչ ֆունկցիայով: Ըստ միակության թեորեմի պետք է

$$F^*(x) = F(x):$$

Սա հակասում է ենթադրությանը: