01 RGB color mixing with vectors

Context

2^0 2^8-1 0-255 8-bit

In computer graphics and image processing, colors can be represented as RGB vectors where each component (Red, Green, Blue) ranges from 0 to 255. Vector operations on these RGB values correspond to color mixing and transformations.

HSV

Consider these RGB color vectors:

- Red: $\vec{r} = (255, 0, 0)$
- Cyan: $\vec{c} = (0, 255, 255)$

1. Calculate what color you get by adding red and cyan: $\vec{r} + \vec{c}$.
2. Find the “average” color between red and cyan: $\frac{1}{2}(\vec{r} + \vec{c})$.
3. Use a color picker to verify your answers from parts (1) and (2). What colors do you actually see?

255, 0 0

R

G

B

02 Dot product

A translation office translated $a = [24, 17, 9, 13]$ documents from English, French, German and Russian, respectively. For each of those languages, it takes about $b = [5, 10, 11, 7]$ minutes to translate one page. How much time did they spend translating in total? How much did each of the translators spend on average if there are 4 translators in the office? Write an expression for this amount in terms of the vectors a and b.

Eng

dot

$\frac{a \cdot b}{4}$

03 Feature vector normalization

Context

In machine learning, we often work with data that has very different scales - like comparing a person's age (around 20-80) with their salary (around 20,000-100,000). Without normalization (bringing all the values to a similar scale (e.g. having length of 1)), algorithms might think salary is much more important just because the numbers are bigger. Normalizing vectors to unit length helps ensure all features are treated equally.

A customer is represented by the vector $\vec{v} = (25, 50000, 3)$ where components represent [age, income in $, number of purchases].

1. Calculate the Euclidean norm (magnitude) $||\vec{v}||_2$
2. Find the unit vector $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||_2}$
3. Verify that $||\hat{v}||_2 = 1$

Note: No need to carry out the calculations explicitly.

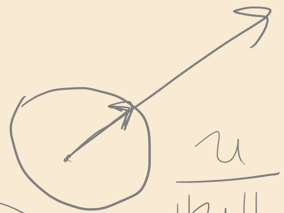
04 Triangle inequality

For vectors $\vec{u} = (3, 4)$ and $\vec{v} = (5, -12)$:

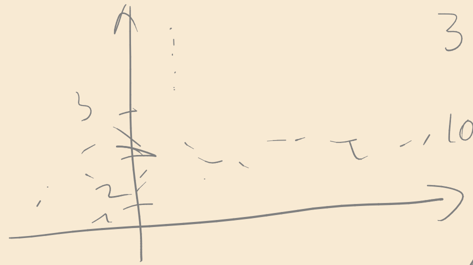
1. Calculate $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$, and $||\vec{u} + \vec{v}||$
2. Verify the triangle inequality: $||\vec{u} + \vec{v}|| \le ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$
3. When does equality hold in the triangle inequality?

1-10

1-1000



$\frac{u}{\|u\|_2}$



30.000

1.000

0.6 → 1
0.8

$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\|u\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$

L2 → euc

$\|u\|_1 = |3| + |4| = 7$

You're comparing two models that predict house prices:

- Model A: Complex formula with weights (coefficients) $\vec{w_A} = (10, -8, 4)$ (this can correspond to equation ($10x^2 - 8x + 4$ (quadratic))) and prediction error = 100
- Model B: Simpler formula with weights $\vec{w_B} = (0.1, -3, 1)$ $(0.1x^2 - 3x + 1)$ (almost just a linear function) and prediction error = 120

Model B makes slightly worse predictions, but which model is better when considering both error and simplicity?

a. **L1 Regularization (λ = 0.5):** Calculate the total error for each model
   - Model A: $\text{Error} + \lambda \cdot ||\vec{w_A}||_1 = ?$
   - Model B: $\text{Error} + \lambda \cdot ||\vec{w_B}||_1 = ?$

b. **L2 Regularization (λ = 0.5):** Calculate the total error for each model
   - Model A: $\text{Error} + \lambda \cdot ||\vec{w_A}||_2^2 = ?$
   - Model B: $\text{Error} + \lambda \cdot ||\vec{w_B}||_2^2 = ?$

c. **Model Selection:** Which model would you choose under each regularization method? How does the choice of λ affect your decision?

d. **Practical Insight:** In production systems, why might we prefer a model with slightly worse accuracy but much simpler weights?

Կցված կգտնեք csv ֆայլ երեք սյունով՝ feature_1, feature_2, label: Կարող եք պատկերացնել որ feature_1-ը իրանից ներկայացնում ա ծաղկի բարձրությունը, feature_2-ը՝ լայնությունը ու label (պիտակը) ներկայացնում ա թե 4 ծաղկի տեսակներից (0,1,2,3) որ մեկն ա:

Պետք ա ստեղծել մոդել (ալգորիթմ) որը ստանալով feature_1, feature_2 արժեքները կգուշակի ծաղկի տեսակը:

Հետևյալ կերպով՝ նոր ծաղկի համար գտնել K հատ ամենամոտիկ ծաղիկները մեր ունեցած տվյալներից ու նայել թե էդ k հարևաններից որ տեսակի ծաղիկն ա գերակշռում՝ ու դա օգտագործել որպես գուշակություն,

Հեռավորություն որպես օգտագործեք մի դեպքում L1-ը (Manhattan), մի դեպքում L2-ը (Euclidean): K-ի համար էլ տարբեր արժեքներ բզբացեք՝ 2,3, 5, 10 .

Թեթև հավելյալ նշումներ 1. Ալգորիմթի անունն ա K Nearest Neighbors ու զուտ “ասա ինձ ովքեր են քո ընկերները, ես կասեմ ով ես դու” սկզբունքով ա աշխատում, պրակտիկայում համարյա երբեք չի օգտագործվում բայց տնայինի համար կարա հավես լինի 2. Պատճառներից մեկը թե ինչի չի օգտագործվում դա “Չափողականության անեծքն” ա (Curse of dimenionality), շատ հավես էֆեկտ ա ըստ որի երբ գործ ենք ունենում բարձր չափանի տարածությունների հետ, տվյալները հիմնականում իրարից համարյա հավասարահեռ են դառնում ու անկյուններում են կուտակվում (այլ կերպ ասած՝ եթե բարձրաչափ նարինջը կլպենք՝ տակը բան չի մնա): Աղբյուր (https://slds-lmu.github.io/i2ml/chapters/14_cod/)

$10x^3 + 8x^2 + 4x + 6$

$0.01\boxed{x^3} + 4x^2 + 0.1x + 6$

$w \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \to 28$ $\begin{bmatrix} 0.01 \\ 4 \\ 0.1 \\ 6 \end{bmatrix}$ 10.11

1.000

L2, L1

1000

$\text{Risk} + 0.5||w||_2$

$100 + 1000000$

07 Finding perpendicular vectors

Given the vector $\vec{v} = (2, 3)$:

1. Find a non-zero vector $\vec{w} = (x, y)$ such that $\vec{v}$ and $\vec{w}$ are perpendicular.
2. Verify that your chosen vector $\vec{w}$ satisfies $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
3. Find a unit vector in the direction of $\vec{w}$ by computing $\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}$.
4. Explain why there are infinitely many vectors perpendicular to $\vec{v}$ and describe the general form of all such vectors.

09: Identifying vector spaces and non-vector spaces

For each of the following sets, determine whether it is a vector space or not. If it is a vector space, prove it by verifying all the required axioms. If it is not a vector space, identify which axiom(s) fail and provide counterexamples.

a. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ (vectors with second component zero)

b. $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ (vectors where second component is negative of first)

c. $C = \mathbb{N}$ (the set of natural numbers)

d. $D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ (vectors with second component always 1)

Note: By default, if we don't mention the operation, we mean the standard vector addition and scalar multiplication (e.g. our good old + and * we learning at school).

Hint: For the non-vector spaces, show that there are some "bad" elements such that if we add them or multiply with some number (not necessarily positive), the result would not belong to the set.

$\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x^2 + 2x + 7$

$\mathbb{R}^3, +, \cdot$ $\quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}, +, \cdot$ $\quad \mathbb{R}^4, +, \cdot$

Definition Let V be a set on which two operations, called *addition* and *scalar multiplication*, have been defined. If $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are in V, the *sum* of $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ is denoted by $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, and if c is a scalar, the *scalar multiple* of $\mathbf{u}$ by c is denoted by $c\mathbf{u}$. If the following axioms hold for all $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, and $\mathbf{w}$ in V and for all scalars c and d, then V is called a ***vector space*** and its elements are called ***vectors***.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is in V. — Closure under addition
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — Commutativity
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ — Associativity
4. There exists an element $\mathbf{0}$ in V, called a ***zero vector***, such that $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. For each $\mathbf{u}$ in V, there is an element $-\mathbf{u}$ in V such that $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{u}$ is in V. — Closure under scalar multiplication
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ — Distributivity
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ — Distributivity
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

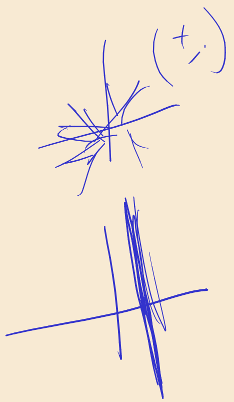
$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ $\quad \exists 1 \ \forall u \ 1 \cdot u = u$

$u \in V$

$1, 2, \ldots \quad 2.5 \quad 3+$

$\forall c \in \mathbb{R} \quad \forall v \in \mathbb{N} \quad cv \in \mathbb{N}$

$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mathbb{R}^2$ $\quad -2 \cdot 4 \notin 8 \quad \mathbb{Z}$



$(X, +, \cdot)$ $\quad \left(\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, +, \cdot\right)$ $\quad \forall c$

$\begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{✓}$ $\quad \begin{bmatrix} c \cdot a_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ✓

Check if the following set is a vector space:

a. $A = \mathbb{Z}$, with the usual operations $+$ and $\cdot$.

b. $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$ with the usual operations $+$ and $\cdot$.

c. $C = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, with the usual operation $\cdot$ and the addition defined as $$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{bmatrix}$$

. $$

d. The set of all polynomials of degree ≤ 2, with the usual operations $+$ and $\cdot$. Bonus question - is this maybe “equivalent” to some other vector space we already know?

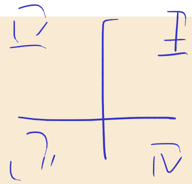
215. *Հարթության կոորդինատական համակարգի սկզբնա– կետից ելնող վեկտորների հետևյալ բազմություններից յուրաքանչյուրի համար պարզել, արդյոք այն գծային ենթատարածություն է.*

ա) բոլոր վեկտորները, որոնց վերջնակետերը ընկած են փռված ուղղի վրա,

բ) բոլոր վեկտորները, որոնց վերջնակետերը ընկած չեն փռված ուղղի վրա,

գ) բոլոր վեկտորները, որոնց վերջնակետերը ընկած են կոորդինատական համակարգի առաջին քառորդում,

դ) բոլոր վեկտորները, որոնց վերջնակետերը ընկած են կոորդինատական համակարգի առաջին կամ երրորդ քառորդում,



Definition Let V be a set on which two operations, called *addition* and *scalar multiplication*, have been defined. If **u** and **v** are in V, the *sum* of **u** and **v** is denoted by **u** + **v**, and if c is a scalar, the *scalar multiple* of **u** by c is denoted by c**u**. If the following axioms hold for all **u**, **v**, and **w** in V and for all scalars c and d, then V is called a ***vector space*** and its elements are called ***vectors***.

1. **u** + **v** is in V. Closure under addition
2. **u** + **v** = **v** + **u** Commutativity
3. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**) Associativity
4. There exists an element **0** in V, called a ***zero vector,*** such that **u** + **0** = **u**.
5. For each **u** in V, there is an element −**u** in V such that **u** + (−**u**) = **0**.
6. c**u** is in V. Closure under scalar multiplication
7. c(**u** + **v**) = c**u** + c**v** Distributivity
8. $(c + d)$**u** = c**u** + d**u** Distributivity
9. $c(d$**u**$) = (cd)$**u**
10. 1**u** = **u**

$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} a, b \in \mathbb{R}, \oplus, \cdot \right)$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$v_1 + v_2 \notin \mathbb{R}^2$

$\forall c \in \mathbb{R}$ $cv \in \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y+1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$y - 1 + 1 = y$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}^2, \oplus, \cdot)$

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$

$(3, 0)$

$c(a, b)$

$c\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) = c\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(a_1 + a_2) \\ c(b_1 + b_2) + c \end{bmatrix} \neq c\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(a_1 + a_2) \\ c(b_1 + b_2) + 1 \end{bmatrix}$

Derive the formula for the cosine of the angle between two vectors: $\cos(\theta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||}$

Hint

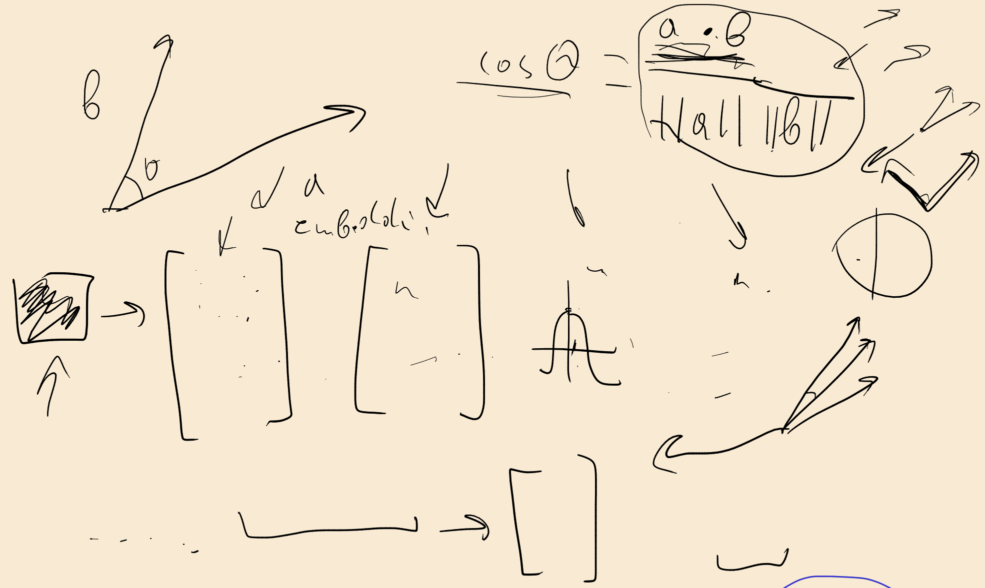
1. Write down the law of cosines for the triangle with sides $||\vec{a}||$, $||\vec{b}||$, and $||\vec{a}-\vec{b}||$
2. Express $||\vec{a}-\vec{b}||^2$ in terms of dot products by expanding $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
3. Substitute your result from part (2) into the law of cosines and solve for $\cos(\theta)$
4. Verify your derived formula using vectors $\vec{u} = (3,4)$ and $\vec{v} = (1,0)$

🎁 🧀 13 High-dimensional vector geometry

In high-dimensional spaces (common in ML), our intuition about geometry can be misleading.

Consider the unit sphere in $\mathbb{R}^n$ (all vectors with norm 1):

a. In 2D, what fraction of a unit square $[-1,1]\times[-1,1]$ is occupied by the unit circle?
b. Estimate this fraction for a unit cube in 3D (you can google the formula)
c. Try to guess and then google What happens to this fraction as the dimension n increases? This is known as the “curse of dimensionality.”



$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{\|a\|\,\|b\|}$

$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|a\|\,\|b\|}$

$\cos\theta = \frac{r}{a}$

$\bar{r} = \bar{b}\cdot k$

$\bar{r}\cdot\bar{c} = 0$

$(\bar{b}k)(a - \bar{b}k) = 0$

$k\bar{b}\bar{a} - k^2\bar{b}\bar{b} = 0$

$\bar{a}\bar{b} = k\bar{b}\bar{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}\vec{b}}$

$b\cdot k \quad \frac{a\cdot b}{bb}$

$\frac{\|b\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\vec{b}}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}\vec{b}}\|b\|}{\|a\|} =$

$\|b\| = \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}$

$= \frac{\vec{a}\vec{b}}{\|b\|\,\|a\|}$

$\sqrt{3^2+4^2}$

R^2

$\frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} = 0.8$

$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{4\pi}{3\cdot 8} = \frac{\pi}{6}$