n

1 Մատրիցի անկյունագծայնացում և մատրիցի աստիճան

Մինչ նյութը ընթերցելը խորհուրդ ենք տալիս դիտել հետևյալ տեսադասերը՝ թեմայի շուրջ տեսողական ինտուիցիա ձևավորելու նպատակով: (դեռ պատրաստ չեն տեսանյութերը)

Այս նյութում ենթադրություն է արվում որ Դուք ծանոթ եք հետևյալ գաղափարներին՝

- Մատրիցի հակադարձ
- Սեփական արժեք
- Սեփական վեկտոր
- Նման մատրիցներ

Մատրիցի անկյունագծայնացում

Վերհիշենք 3 սահմանում որոնք մեզ հետագայում պետք են գալու:

Սեփական արժեք և սեփական վեկտոր

$x \in \mathbb{R}^n$ ոչ զրոյական վեկտորն անվանում են A մատրիցի **սեփական վեկտոր**, եթե գոյություն ունի λ իրական թիվ այնպիսին, որ $Ax = \lambda x$:

λ թիվն անվանում են A մատրիցի v սեփական վեկտորին համապատասխանող **սեփական արժեք**:

Նման մատրիցներ

Կասենք, որ A քառակուսի մատրիցը **նման** է B մատրիցին և կգրենք $A \sim B$, եթե գոյություն ունի C հակադարձելի մատրից, որ $A = C^{-1}BC$:

Անկյունագծային մատրից

Կասենք, որ A մատրիցը **անկյունագծային** է, եթե դրա գլխավոր անկյունագծից դուրս բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի:

Մենք կնայենք 2×2 մատրիցի դեպքը:
Դիցուք ունենք A մատրիցը:

Դիցուք λ_1-ը և λ_2-ը A մատրիցի սեփական արժեքներն են, իսկ $v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}$ և $v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$-ը նրանց համապատասխանող սեփական վեկտորները:

Ըստ սեփական արժեքների և սեփական վեկտորների սահմանման՝

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_1 v_2$$

Գրենք վեկտորական տեսքով

$$A \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ 1 \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} \\ \lambda_1 v_{21} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
A\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{12} \\ \lambda_1 v_{21} & \lambda_2 v_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Առանձնացնենք սեփական վեկտորներ
և սեփական արժեքները

$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$-ը իրենից ներկայացնում է կանոնական հենքից սեփական վեկտորներից կազմված հենքին անցման մատրից և նշանակվում P (ֆրանսերեն passage՝ «անցում» բառից): Այս նյութում այդ գաղափարին չենք անդրադառնա՝ միայն նշանակումից կօգտվենք:

Նկատենք որ $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$-ը անկյունագծային է, նշանակենք այն Λ-ով (մեծատառ λ) և ցույց տանք որ այն նման է A-ին:

Ստացանք որ՝ $AP = P\Lambda$, P մատրիցը սեփական վեկտորներից բաղկացած մատրիցն է, հիշելով որ սեփական վեկտորների համակարգը գծորեն անկախ է եզրակացնում ենք որ P մատրիցը չվերասեռված է (ունի ոչ զրոյական որոշիչ), հետևաբար P-ի հակադարձը՝ P^{-1}-ը գոյություն ունի:

$$
\begin{aligned}
AP &= P\Lambda \\
APP^{-1} &= P\Lambda P^{-1}
\end{aligned}
$$

աջից բազմապատկենք P^{-1}-ով

Կամ որ նույնն է՝

$$
A = P\Lambda P^{-1} \tag{1}
$$

Այսպիսով ցույց տվեցինք որ A-ն և Λ-ն նման են, և անկյունագծայնացրեցինք A-ն

Մատրիցի աստիճան

Այժմ ուսումնասիրենք հետևյալ խնդիրը. Դիցուք տրված է որևէ A մատրից, և n բնական թիվ, հաշվել A^n-ը:

Վերևում շարադրված եղանակով բերենք A-ն (1) տեսքի և բարձրացնենք n

աստիճան:

$$
\begin{aligned}
A &= P\Lambda P^{-1} \\
A^n &= (P\Lambda P^{-1})^n && \text{Գրենք բացված տեսքով} \\
A^n &= P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\ldots P\Lambda P^{-1} && \text{Նկատենք որ } P^{-1}P = I \\
A^n &= P\Lambda\underbrace{P^{-1}P}_{I}\Lambda\underbrace{P^{-1}P}_{I}\Lambda P^{-1}\ldots\underbrace{P^{-1}P}_{I}\Lambda P^{-1} \\
A^n &= P\underbrace{\Lambda\Lambda\ldots\Lambda}\mathrm{n}P^{-1} = P\Lambda^n P^{-1}
\end{aligned}
$$

Λ-ն մեր մոտ անկյունագծային մատրից էր: Նկատենք որ եթե $\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ապա $\Lambda^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$
(ընթերցողին առաջարկում ենք փորձել ինքնուրույն համոզվել որ վերևում գրված ճիշտ է)

$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ տեսքի բերելուց հետո հաշվարկները զգալիորեն հեշտանում են: Այժմ այս ամենը ավելի շոշափելի դարձնելու համար գրենք մի օրինակ.

Օրինակ

Գտնել մատրիցի n-րդ աստիճանը

Տրված է A մատրիցը, ինչպես նաև նրա սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները:
Ներկայացնել անկյունագծայնացված մատրիցը և գտնել մատրիցի n-րդ աստիճանը:

ա) $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$,

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$,

$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

բ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Մենք կլուծենք ա), իսկ բ)-ում խորհուրդ ենք տալիս ինքներդ գտնեք սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորները, և լուծեք խնդիրը:
Անկյունագծային մատրիցը կլինի՝

$$
\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}
$$

Կանոնական հենքից սեփական վեկտորներից կազմված հենքին անցման մատրիցը կլինի՝

$$P = \begin{bmatrix} v_1 \ \mathrm{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Պետք է հաշվենք $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$-ը: Դրա համար նախապես հաշվենք P^{-1}-ը: Հետևյալ նյութում(դեռ պատրաստ չի նյութը) սովորածից օգտվելով կստանանք՝

$$P^{-1} = \frac{1}{(-2)\cdot 1 - 2\cdot 1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Արդեն պատրաստ ենք հաշվել A-ի n-րդ աստիճանը՝

$$\begin{aligned} A^n = P\Lambda^n P^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} && \textit{անկ. մատրիցի } n\textit{-րդ աստիճանի} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} && \textit{Կատարենք հաշվարկները} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2\cdot 9^n & -6-4\cdot 9^n \\ -1+9^n & 1+2\cdot 9^n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$