

Министерство науки и высшего образования  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)”  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---



Факультет “Фундаментальные науки”  
Кафедра “Высшая математика”

## ОТЧЁТ по учебной практике за 1 семестр 2020—2021 гг.

Руководитель практики, ст. преп. кафедры ФН1	_____	Кравченко О.В.
	(подпись)	
студент группы ФН1–11	_____	Ф.И.О.
	(подпись)	

Москва,  
2020 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цели и задачи практики</b>	<b>3</b>
1.1	Цели . . . . .	3
1.2	Задачи . . . . .	3
1.3	Индивидуальное задание . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Отчёт</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Индивидуальное задание</b>	<b>5</b>
3.1	Элементарные функции и их графики. . . . .	5
3.2	Пределы и непрерывность. . . . .	11
3.3	Приложения дифференциального исчисления. . . . .	15
	<b>Список литературы</b>	<b>21</b>

# 1 Цели и задачи практики

## 1.1 Цели

— развитие компетенций, способствующих успешному освоению материала бакалавриата и необходимых в будущей профессиональной деятельности.

## 1.2 Задачи

1. Знакомство с программными средствами, необходимыми в будущей профессиональной деятельности.
2. Развитие умения поиска необходимой информации в специальной литературе и других источниках.
3. Развитие навыков составления отчётов и презентации результатов.

## 1.3 Индивидуальное задание

1. Изучить способы отображения математической информации в системе  $\text{\LaTeX}$ .
2. Изучить возможности системы контроля версий `Git`.
3. Научиться верстать математические тексты, содержащие формулы и графики в системе  $\text{\LaTeX}$ . Для этого, выполнить установку свободно распространяемого дистрибутива `TeXLive` и оболочки `TeXStudio`.
4. Оформить в системе  $\text{\LaTeX}$  типовые расчёты по курсу математического анализа согласно своему варианту.
5. Создать аккаунт на онлайн ресурсе `GitHub` и загрузить исходные `tex`-файлы и результат компиляции в формате `pdf`.

## 2 Отчёт

Актуальность темы продиктована необходимостью владеть системой вёрстки L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X и средой вёрстки TeXStudio для отображения текста, формул и графиков. Полученные в ходе практики навыки могут быть применены при написании курсовых проектов и дипломной работы, а также в дальнейшей профессиональной деятельности.

Система вёрстки L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X содержит большое количество инструментов (пакетов), упрощающих отображение информации в различных сферах инженерной и научной деятельности.

### 3 Индивидуальное задание

#### 3.1 Элементарные функции и их графики.

##### Задача № 1.

**Условие.** Найти область определения функции

$$y(x) = \lg\left(\frac{x+4}{1-2x}\right).$$

**Решение.**  $D_f : \frac{x+4}{1-2x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -1/2).$

##### Задача № 2.

**Условие.** Исследовать функцию на чётность и нечётность

$$y(x) = \operatorname{ctg}(\cos(\operatorname{tg}(x))).$$

**Решение.**

$$y(-x) = \operatorname{ctg}(\cos(\operatorname{tg}(-x))) = \operatorname{ctg}(\cos(-\operatorname{tg}(x))) = \operatorname{ctg}(\cos(\operatorname{tg}(x))) = y(x).$$

Отсюда,  $y(x)$  — чётная функция.

##### Задача № 3.

**Условие.** Используя элементарные преобразования, построить эскизы графиков функций (а)–(д).

$$3(\text{а}): y(x) = -1 - \sin(2x + \pi/4),$$

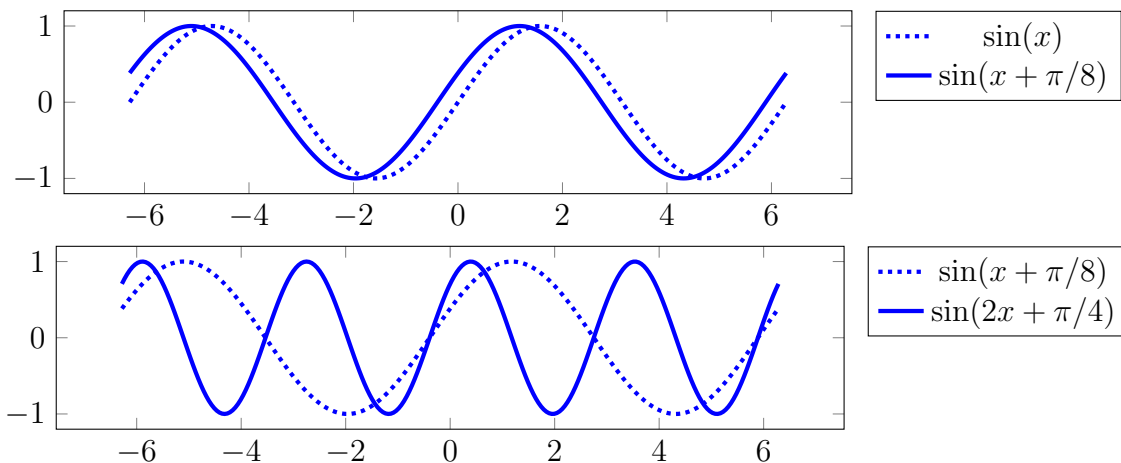
$$3(\text{б}): y(x) = |2\sqrt[3]{x+5} - 1|,$$

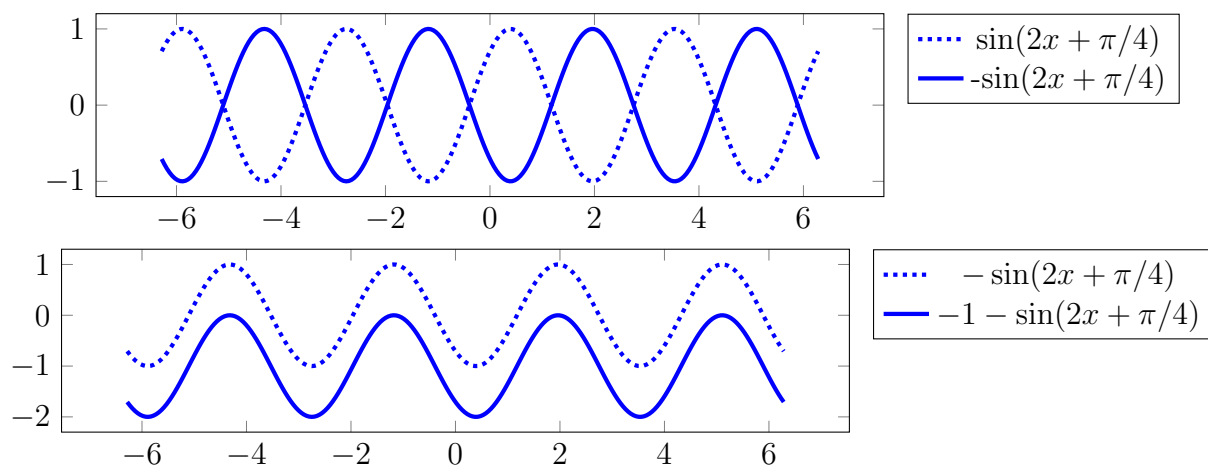
$$3(\text{в}): y(x) = 1 - \log_3 |x+1|,$$

$$3(\text{г}): y(x) = \frac{1}{3}2^{2x+1} - \frac{4}{3},$$

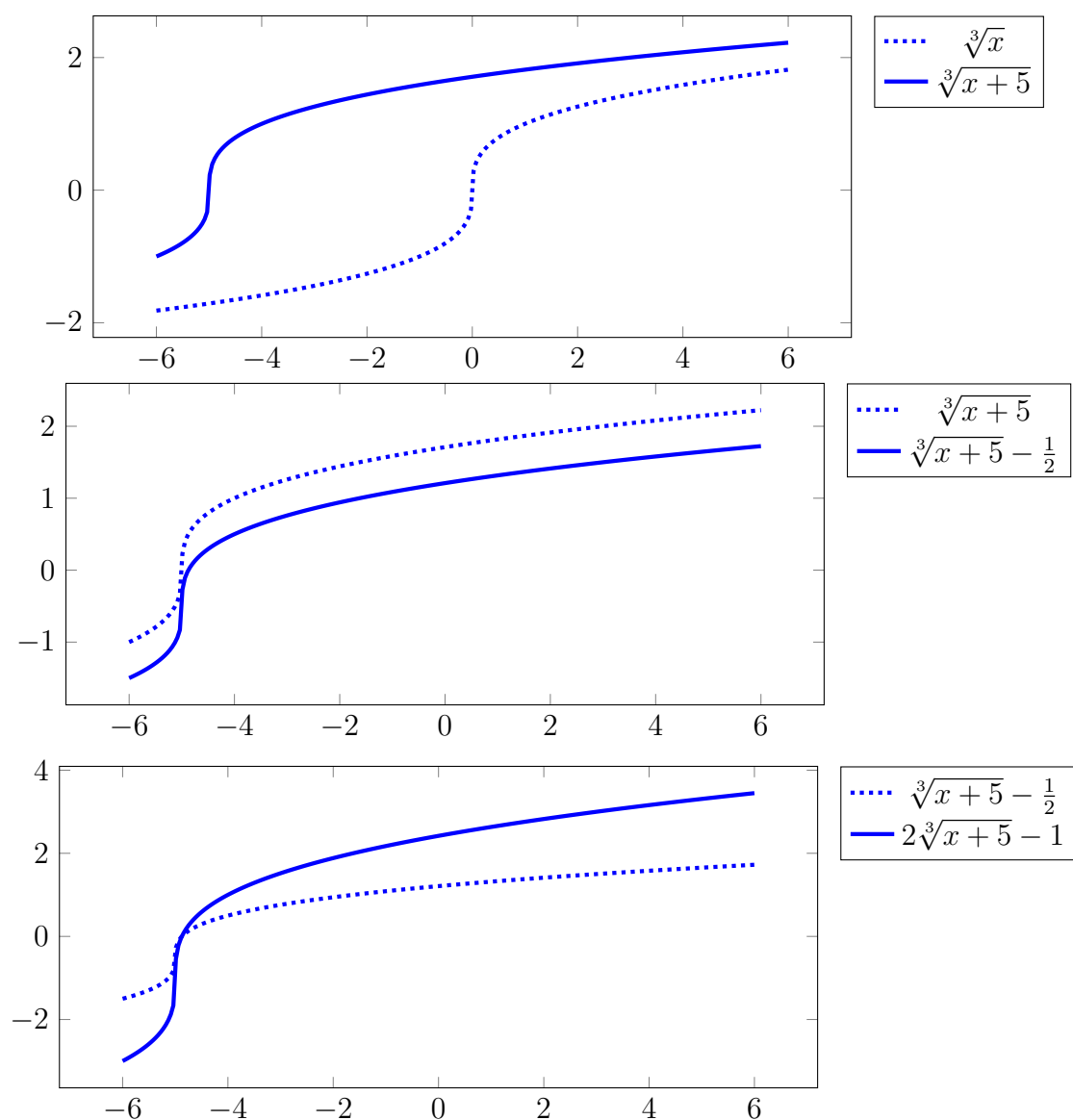
$$3(\text{д}): y(x) = \frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(2x-3).$$

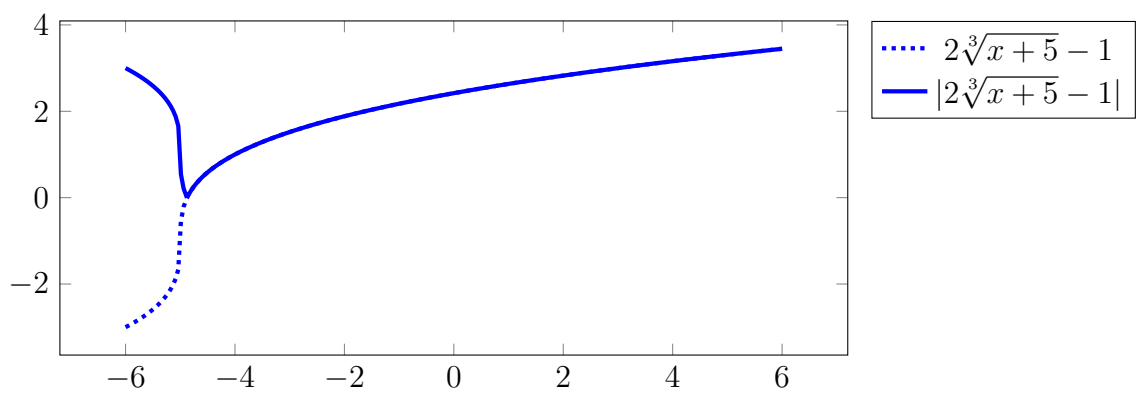
**Решение.** Последовательность элементарных преобразований графика функции 3(а).



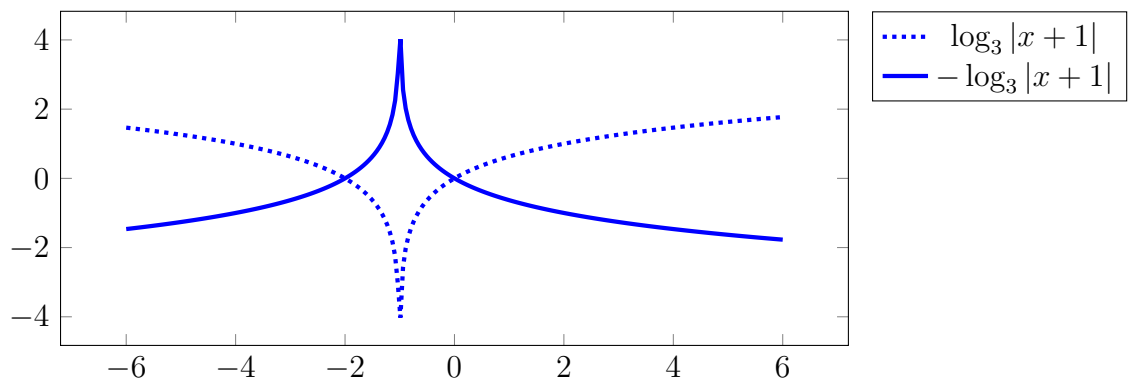
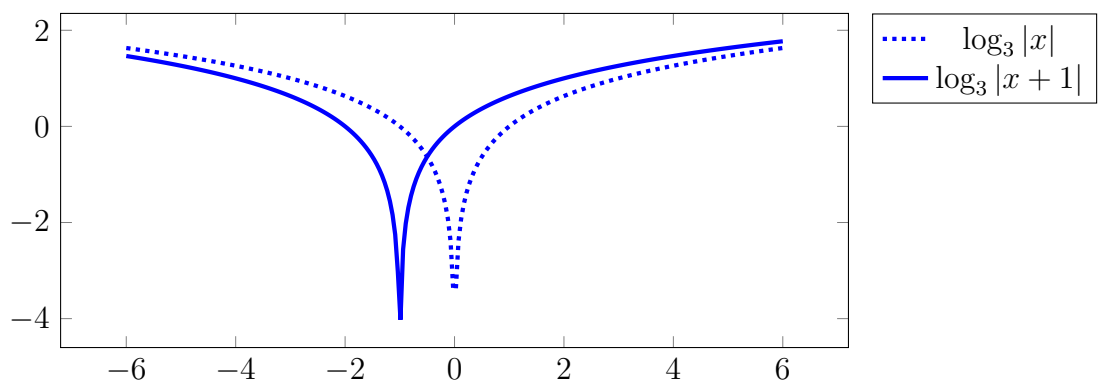
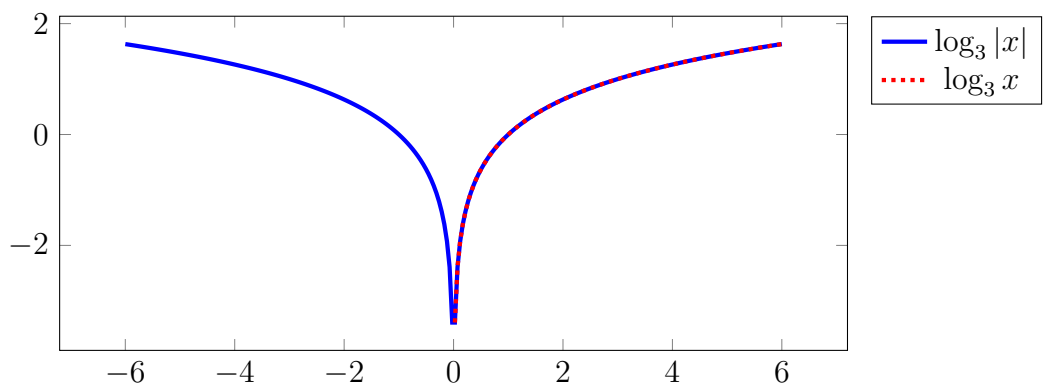


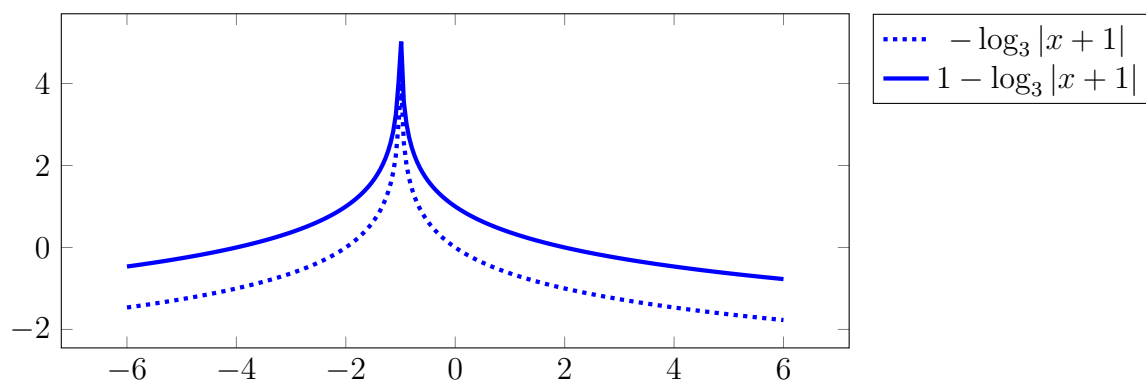
Последовательность элементарных преобразований графика функции  $\sqrt[3]{x}$ .



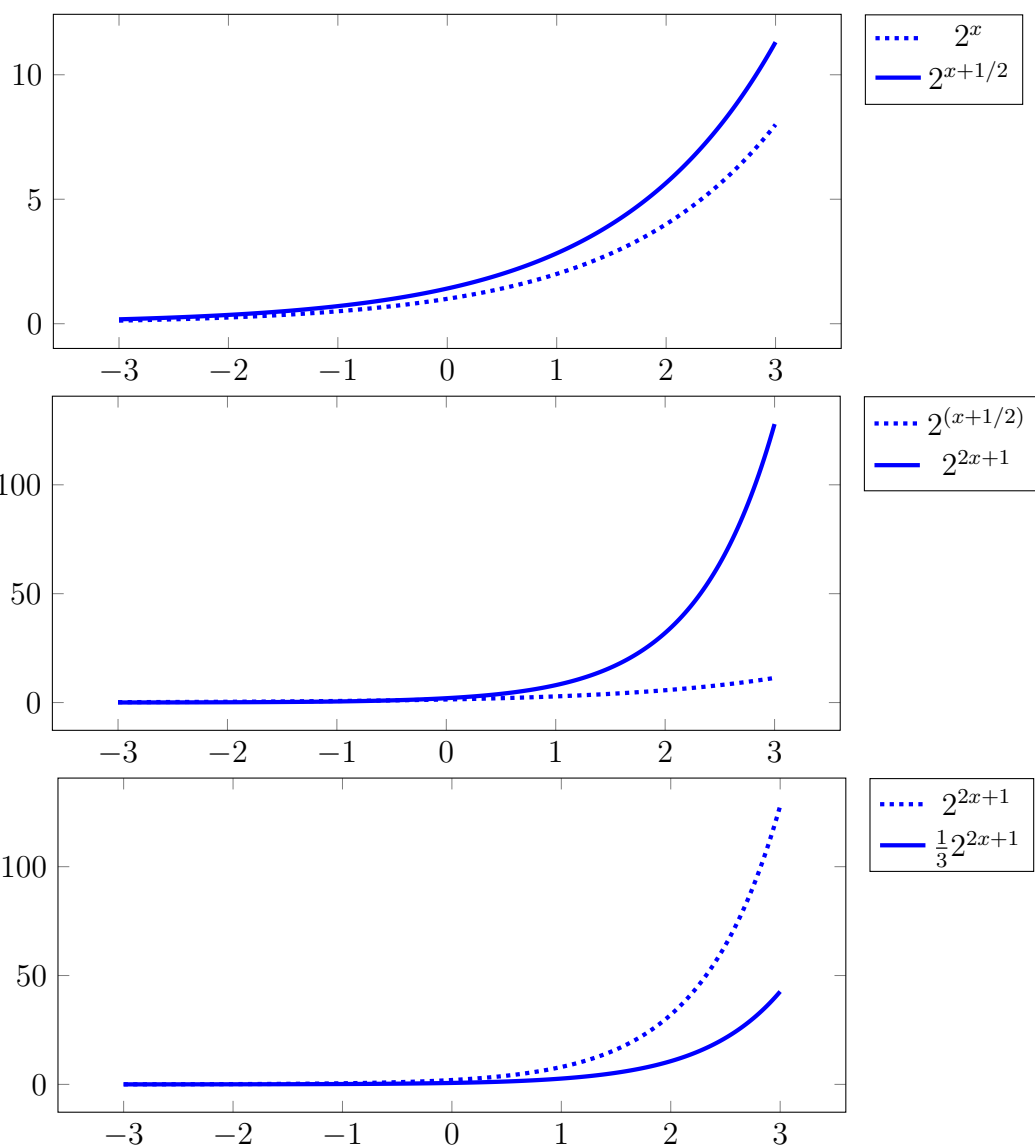


Последовательность элементарных преобразований графика функции  $3(v)$ .

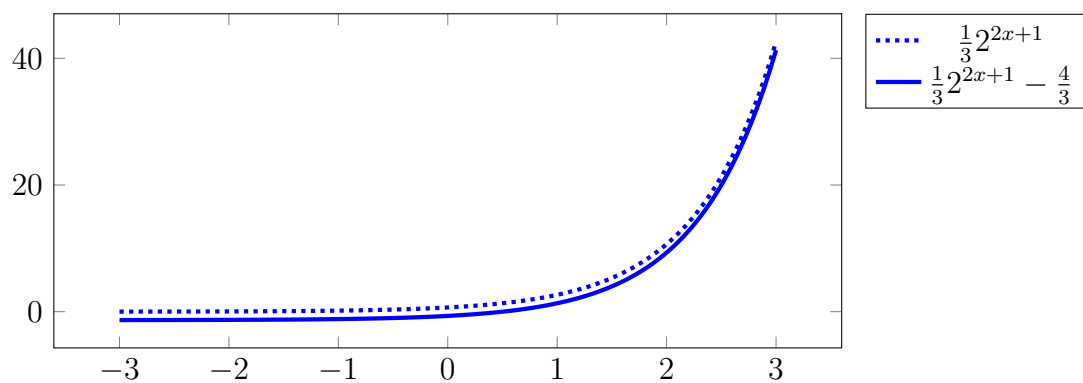




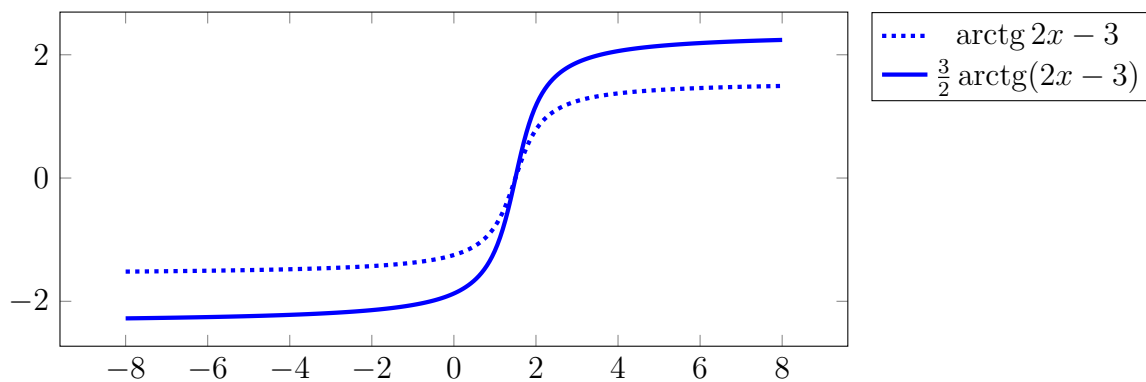
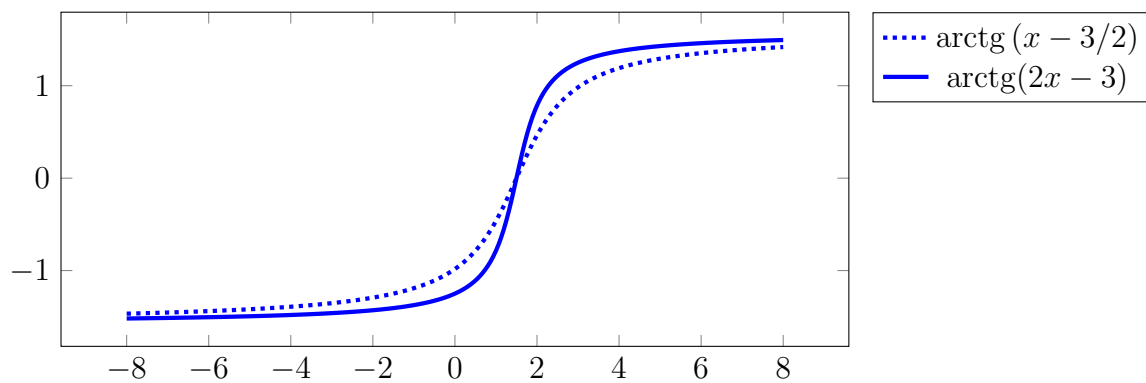
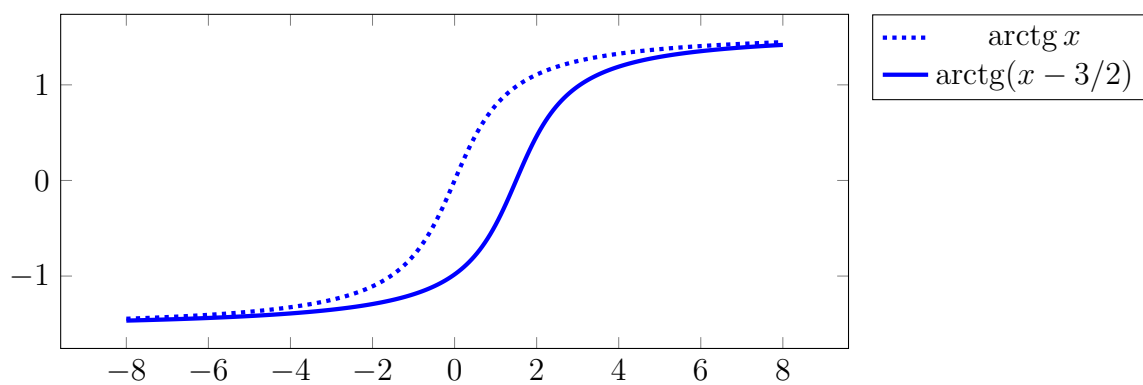
Последовательность элементарных преобразований графика функции  $3(\Gamma)$ .

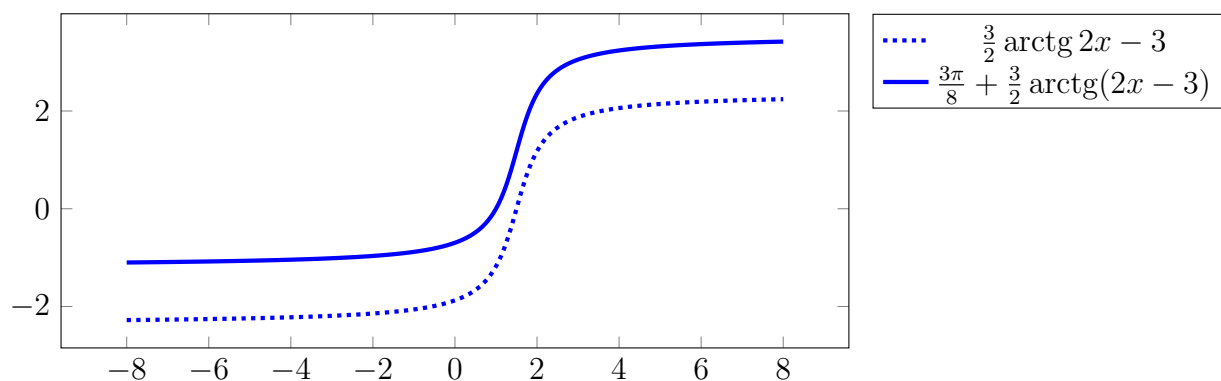






Последовательность элементарных преобразований графика функции  $3(\text{д})$ .





#### Задача № 4.

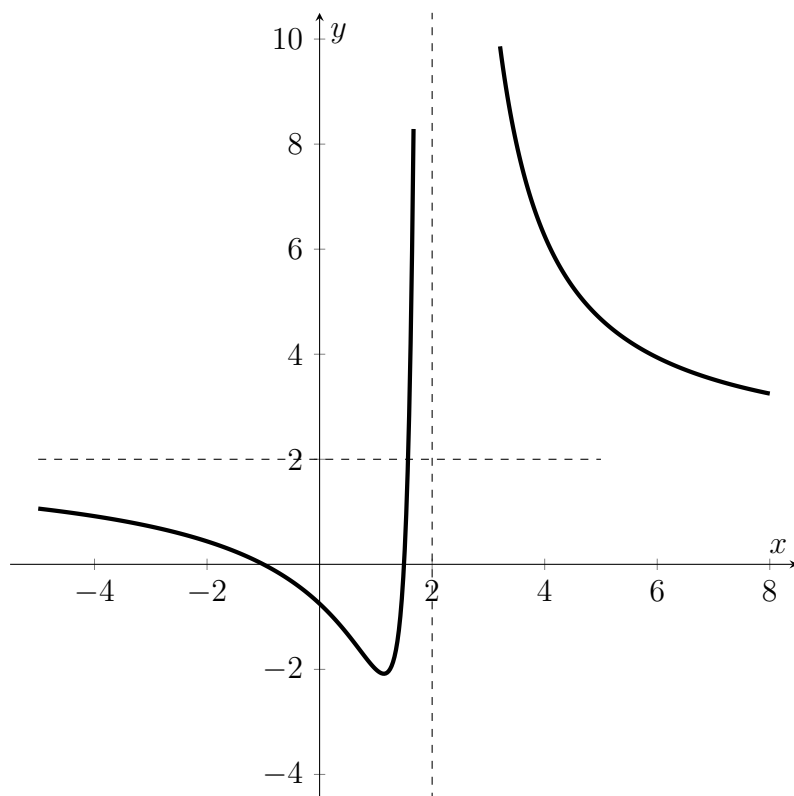
**Условие.** Построить эскиз графика рациональной функции, найдя ее асимптоты и исследуя расположение графика относительно оси абсцисс и асимптот (не используя пределы)

$$y(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 4x + 4}.$$

**Решение.** Выделим целую часть

$$y(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x^2 - 8x + 8 + 7x - 11}{(x - 2)^2} = \frac{2(x - 2)^2 + 7x - 11}{x^2 - 4x + 4} = 2 + \frac{7x - 11}{(x - 2)^2}.$$

Отсюда,  $y = 2$  — горизонтальная асимптота, а также,  $x = 2$  — вертикальная асимптота.

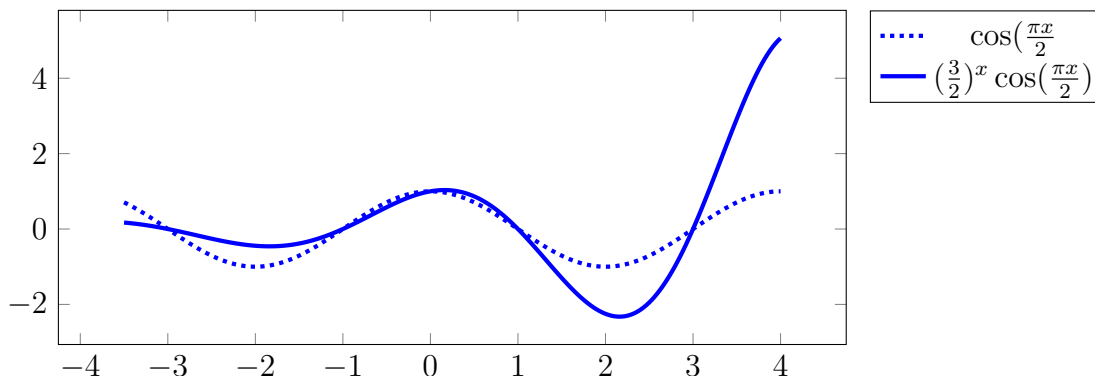


### Задача № 5.

**Условие.** Построить эскиз графика сложной функции, используя различные элементарные приёмы

$$y(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

**Решение.** График функции  $y(x) = \cos(\pi x/2)$  получается элементарными преобразованиями из графика функции  $y(x) = \cos(x)$ . В то же время, график функции  $y(x) = (3/2)^x \cos(\pi x/2)$  получается из графика функции  $y(x) = \cos(\pi x/2)$  пропорциональным изменением ординаты каждой точки графика в  $(3/2)^x$  раз для каждого значения абсциссы  $x$ .



## 3.2 Пределы и непрерывность.

### Задача № 1.

**Условие.** Дана последовательность  $\{a_n\} = \frac{3 - 3n^2}{4 + 5n^2}$  и число  $c = -\frac{3}{5}$ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c,$$

а именно, для каждого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  найти наименьшее натуральное число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что  $|a_n - c| < \varepsilon$  для всех номеров  $n > N(\varepsilon)$ . Заполнить таблицу

$\varepsilon$	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

**Решение.** Рассмотрим неравенство  $a_n - c < \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , учитывая выражение для  $a_n$  и значение  $c$  из условия варианта, получим

$$\left| \frac{3 - 3n^2}{4 + 5n^2} + \frac{3}{5} \right| < \varepsilon.$$

Неравенство запишем в виде двойного неравенства и приведём выражение под знаком модуля к общему знаменателю, получим

$$-\varepsilon < \frac{27}{5(4 + 5n^2)} < \varepsilon.$$

Заметим, что левое неравенство выполнено для любого номера  $n \in \mathbb{N}$  поэтому, будем рассматривать правое неравенство

$$\frac{27}{5(4 + 5n^2)} < \varepsilon.$$

Выполнив цепочку преобразований, перепишем неравенство относительно  $n^2$ , и учитывая, что  $n \in \mathbb{N}$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{27}{5(4+5n^2)} &< \varepsilon, \\ 4+5n^2 &> \frac{27}{5\varepsilon}, \\ n^2 &> \frac{1}{5} \left( \frac{27}{5\varepsilon} - 4 \right), \\ n &> \frac{1}{5} \sqrt{\frac{27-20\varepsilon}{\varepsilon}}, \\ N(\varepsilon) &= \left[ \frac{1}{5} \sqrt{\frac{27-20\varepsilon}{\varepsilon}} \right],\end{aligned}$$

где  $[ \ ]$  — целая часть числа. Заполним таблицу:

$\varepsilon$	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$	3	10	32

**Проверка:**

$$\begin{aligned}|a_4 - c| &= \frac{9}{140} < 0,1, \\ |a_{11} - c| &= \frac{9}{1015} < 0,01, \\ |a_{33} - c| &= \frac{27}{27245} < 0,001.\end{aligned}$$

## Задача № 2.

**Условие.** Вычислить пределы функций

$$\begin{aligned}(\text{а}): \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 5x + 4}, \\ (\text{б}): \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^4 \sqrt{x^3 + 2}}{x^5 - x^3 \sqrt[3]{x + 2}}, \\ (\text{в}): \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right), \\ (\text{г}): \quad & \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{\sin x}{\sin 4} \right)^{\frac{1}{x-4}}, \\ (\text{д}): \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{x^2 - \sqrt{3}}{x^3 - 1} \right) \right)^{\frac{x}{\sin(2x)}}, \\ (\text{е}): \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}{\sin(3x)}.\end{aligned}$$

**Решение.**

**(а):**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x-4} = \frac{4}{-2} = -2.$$

(б):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^4 \sqrt{x^3 + 2}}{x^5 - x^3 \sqrt[3]{x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^{\frac{11}{2}} \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}}}{x^5 - x^{\frac{10}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^{\frac{11}{2}} (\sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} - 2x^{-\frac{5}{2}})}{x^5 \left(1 - x^{-\frac{5}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}\right)} = -\infty.$$

(в):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3(1 + \sqrt{x})}{1 - x} - \frac{2(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}{1 - x} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3(1 + \sqrt{x}) - 2(1 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}{1 - x} \right) &= \left| \begin{array}{l} t = 1 - x \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{3(1 + (1 - t)^{\frac{1}{2}}) - 2(1 + (1 - t)^{\frac{1}{3}} + (1 - t)^{\frac{2}{3}})}{t} \right) &= \\ \left| \begin{array}{l} (1 - t)^{\frac{1}{2}} \sim -\frac{1}{2}t + 1 \\ (1 - t)^{\frac{1}{3}} \sim -\frac{1}{3}t + 1 \end{array} \right| &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{3(1 - \frac{1}{2}t + 1) - 2(1 - \frac{1}{3}t + 1 - \frac{2}{3}t + 1)}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{-\frac{3}{2}t + 2t}{t} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(г):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{\sin x}{\sin 4} \right)^{\frac{1}{x-4}} &= \left| \begin{array}{l} t = x - 4 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(t + 4)}{\sin 4} \right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t \cos 4 + \cos t \sin 4}{\sin 4} \right)^{\frac{1}{t}} = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\sin t}{\operatorname{tg} 4} \right)^{\frac{1}{t}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\sin t}{\operatorname{tg} 4} \right)^{\frac{\operatorname{tg} 4}{\sin t} \frac{\sin t}{t} \operatorname{ctg} 4} = e^{\operatorname{ctg} 4}. \end{aligned}$$

(д):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{x^2 - \sqrt{3}}{x^3 - 1} \right) \right)^{\frac{x}{\sin(2x)}} = \left( \frac{\pi}{3} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)}} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

(е):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}{\sin(3x)} &= \left| \begin{array}{l} t = x - \pi \\ \pi \rightarrow 0 \end{array} \right| \frac{\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t}{\sin(3(t + \pi)) = -\sin(3t)} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} t)}{\sin(3t)} = \\ = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} t \sim t \\ \sin(3t) \sim 3t \end{array} \right| &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{3t} = \left| \ln(1 + t) \sim t \right| = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{3t} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

### Задача № 3.

**Условие.**

(а): Показать, что данные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  являются бесконечно малыми или бесконечно большими при указанном стремлении аргумента.

(б): Для каждой функции  $f(x)$  и  $g(x)$  записать главную часть (эквивалентную ей функцию) вида  $C(x - x_0)^\alpha$  при  $x \rightarrow x_0$  или  $Cx^\alpha$  при  $x \rightarrow \infty$ , указать их порядки малости (роста).

(в): Сравнить функции  $f(x)$  и  $g(x)$  при указанном стремлении.

№ варианта	функции $f(x)$ и $g(x)$	стремление
30	$f(x) = \frac{x^3 + x \sin x}{x + \sqrt[3]{x}}, g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$	$x \rightarrow \infty$

**Решение.**

**(а):** Покажем, что  $f(x)$  и  $g(x)$  бесконечно большие функции,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x \sin x}{x + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 + \frac{\sin x}{x^2})}{x(1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.\end{aligned}$$

**(б):** Так как  $f(x)$  и  $g(x)$  бесконечно большие функции, то эквивалентными им будут функции вида  $Cx^\alpha$  при  $x \rightarrow \infty$ . Найдём эквивалентную для  $f(x)$  из условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = ,$$

где  $C$  — некоторая константа. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x \sin x}{(x + \sqrt[3]{x})x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x \sin x}{x^{\alpha+1} + x^{\alpha+\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 + \frac{x \sin x}{x^3})}{x^3(x^{\alpha-2} + x^{\alpha-\frac{2}{3}})}.$$

При  $\alpha = 2$  последний предел равен 1, отсюда  $C = 1$  и

$$f(x) \sim x^2 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Аналогично, рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{(x + 2)x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^{\alpha+1} + 2x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(x^{\alpha-1} + 2x^{\alpha-2})}.$$

При  $\alpha = 1$  последний предел равен 1, отсюда  $C = 1$  и

$$g(x) \sim x \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

**(в):** Для сравнения функций  $f(x)$  и  $g(x)$  рассмотрим предел их отношения при указанном стремлении

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Применим эквивалентности, определенные в пункте (б), получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

Отсюда,  $f(x)$  есть бесконечно большая функция более высокого порядка роста, чем  $g(x)$ .

#### Задача № 4.

**Условие.**

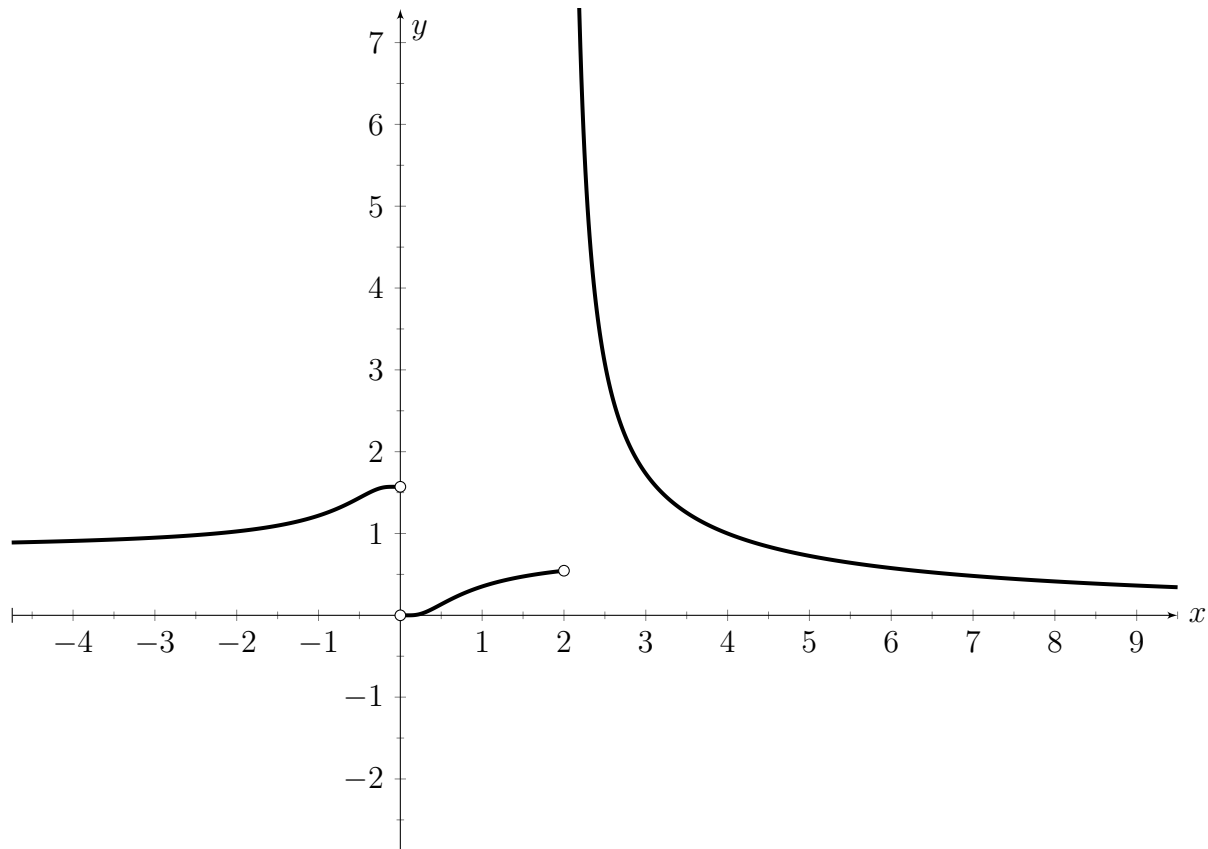
Найти точки разрыва функции

$$y = f(x) \equiv \begin{cases} \operatorname{arctg}(e^{1/x}), & x \leq 2, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right), & x > 2. \end{cases}$$

и определить их характер. Построить фрагменты графика функции в окрестности каждой точки разрыва.

**Решение.** Особыми точками являются точки  $x = 0, 2$ . Рассмотрим односторонние пределы в окрестности каждой из особых точек

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{arctg}(e^{1/x}) &= \frac{\pi}{2}, & \lim_{x \rightarrow 2-} \operatorname{arctg}(e^{1/x}) &= \operatorname{arctg}(\sqrt{e}), \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{arctg}(e^{1/x}) &= 0, & \lim_{x \rightarrow 2+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) &= +\infty. \end{aligned}$$



Отсюда, точка  $x = 0$  — точка устранимого разрыва 1-го рода, а точка  $x = 2$  — точка неустранимого разрыва 2-го рода.

### 3.3 Приложения дифференциального исчисления.

#### Задача № 1.

**Условие.** Разложить функцию  $f(x)$  по формуле Тейлора 3-го порядка в точке  $x_0 = 1$  с остаточным членом в форме Пеано, если

$$f(x) = x^x.$$

**Решение.** Представим функцию в виде  $f(x) = e^{x \ln x}$ . Разложим элементарные функции  $e^x$  и  $\ln x$  в точке. Выполним замену  $t = x - x_0$ , откуда  $x = t + 1$ . В новых переменных, получим задачу о разложении функции  $f(t) = e^{(t+1) \ln(t+1)}$  в точке  $t_0 = 0$ . Разложим

спетень экспоненты  $(t+1)\ln(t+1)$  применяя стандартное разложение

$$\begin{aligned}\ln(t+1) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4), \\ (t+1)\ln(t+1) &= (t+1)\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)\right) = \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^2 - \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{3} + O(t^4) = \\ &= t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + O(t^4).\end{aligned}$$

Далее, раскладывая экспоненту по Формуле Тейлора, и применяя разложение для степени, получим

$$\begin{aligned}e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4), \\ e^{(t+1)\ln(t+1)} &= 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + O(t^4)\right) + \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + O(t^4)\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + O(t^4)\right)^3 = 1 + t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} + \frac{t^3}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4) = \\ &= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + O(t^4).\end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной  $x$ , получим разложение

$$x^x = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + O((x-1)^4).$$

## Задача № 2.

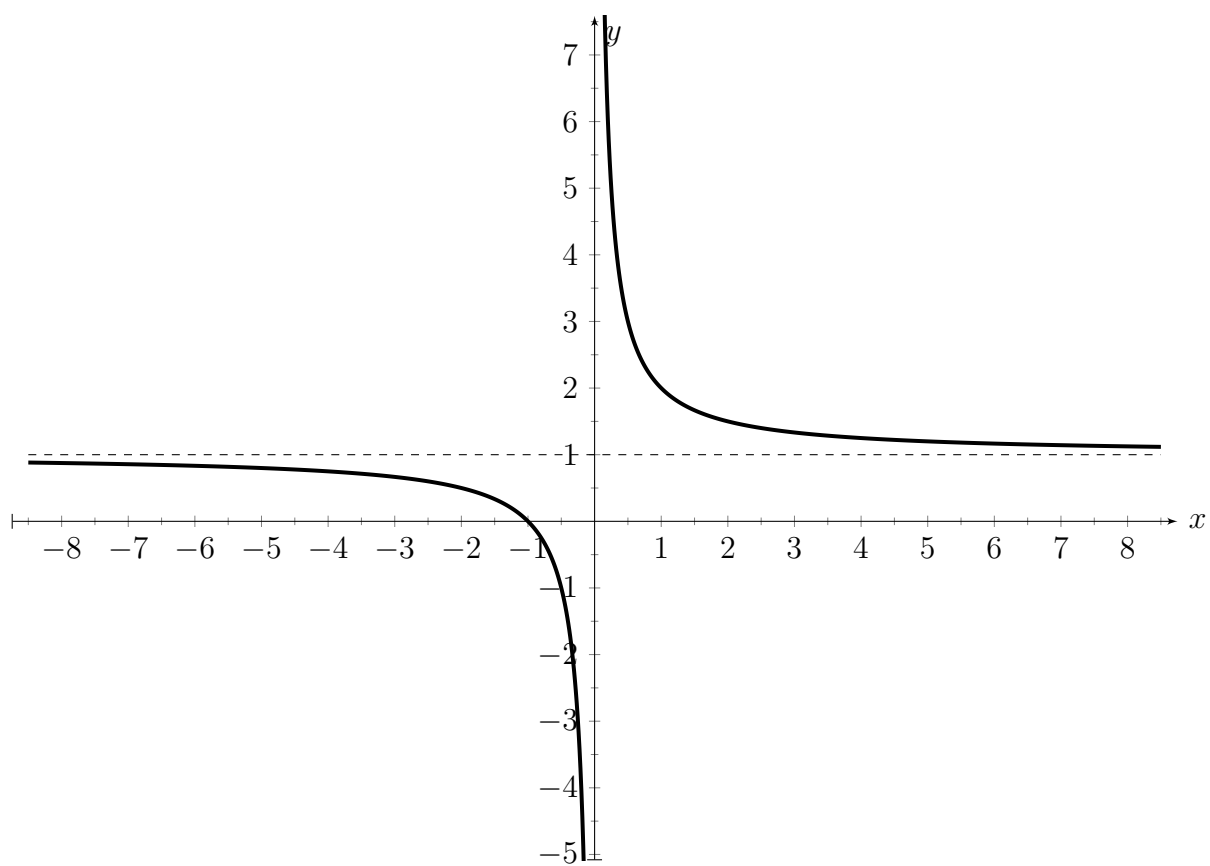
**Условие.** Исследовать данные функции и построить их графики

- (а):  $y = \frac{x}{x^2 + 1},$
- (б):  $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{12 - x},$
- (в):  $y = 2 \cos x + \frac{1}{2} \cos(2x),$
- (г):  $y = x + 4 \operatorname{arctg} x,$
- (д):  $y = (x^2 + 1)e^{-x^2/2}.$

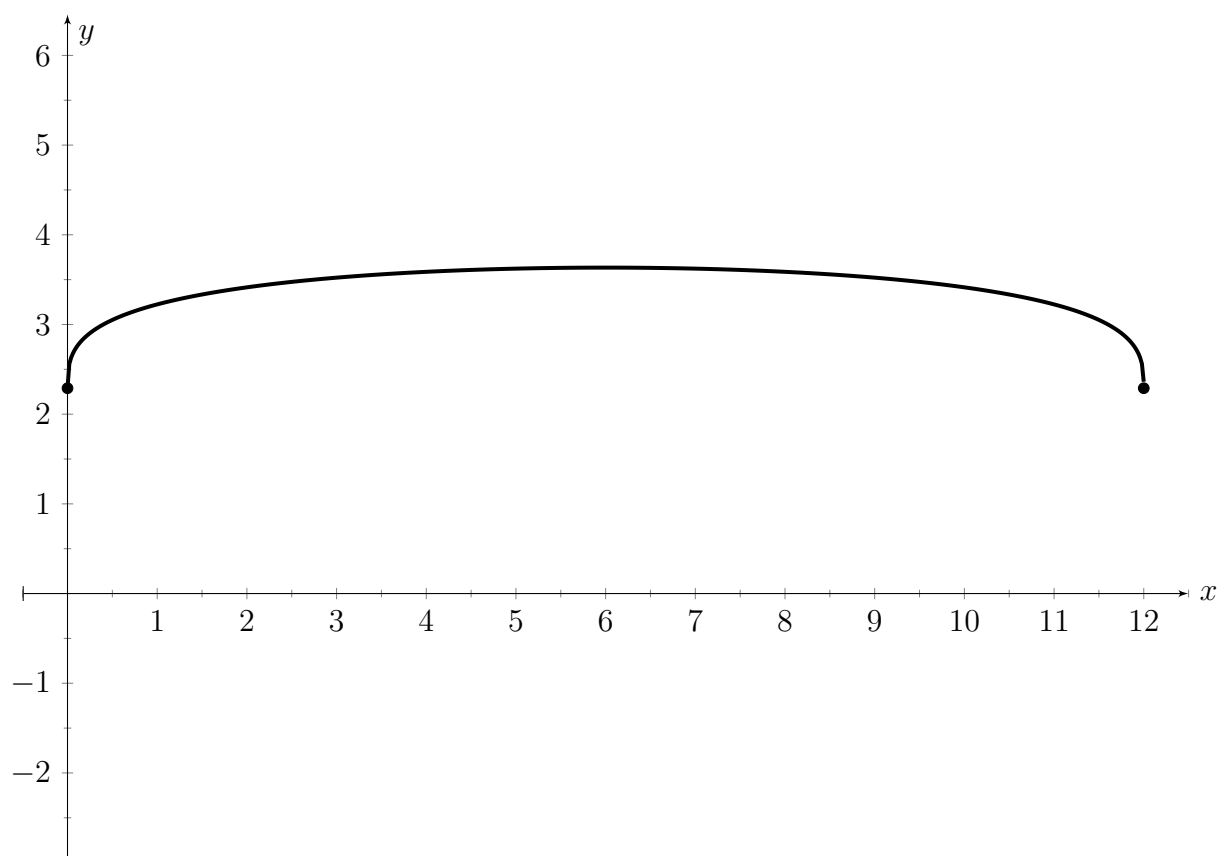
**Решение.**

(а):

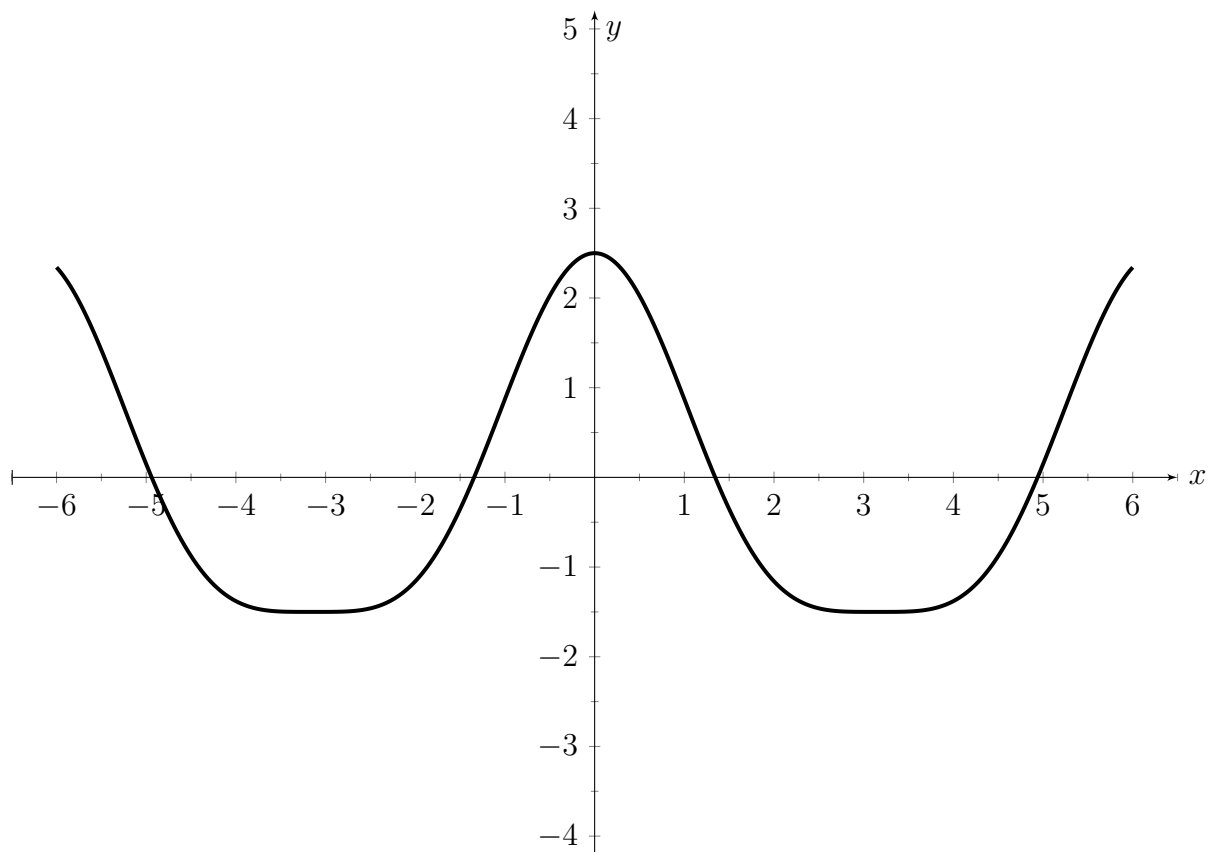




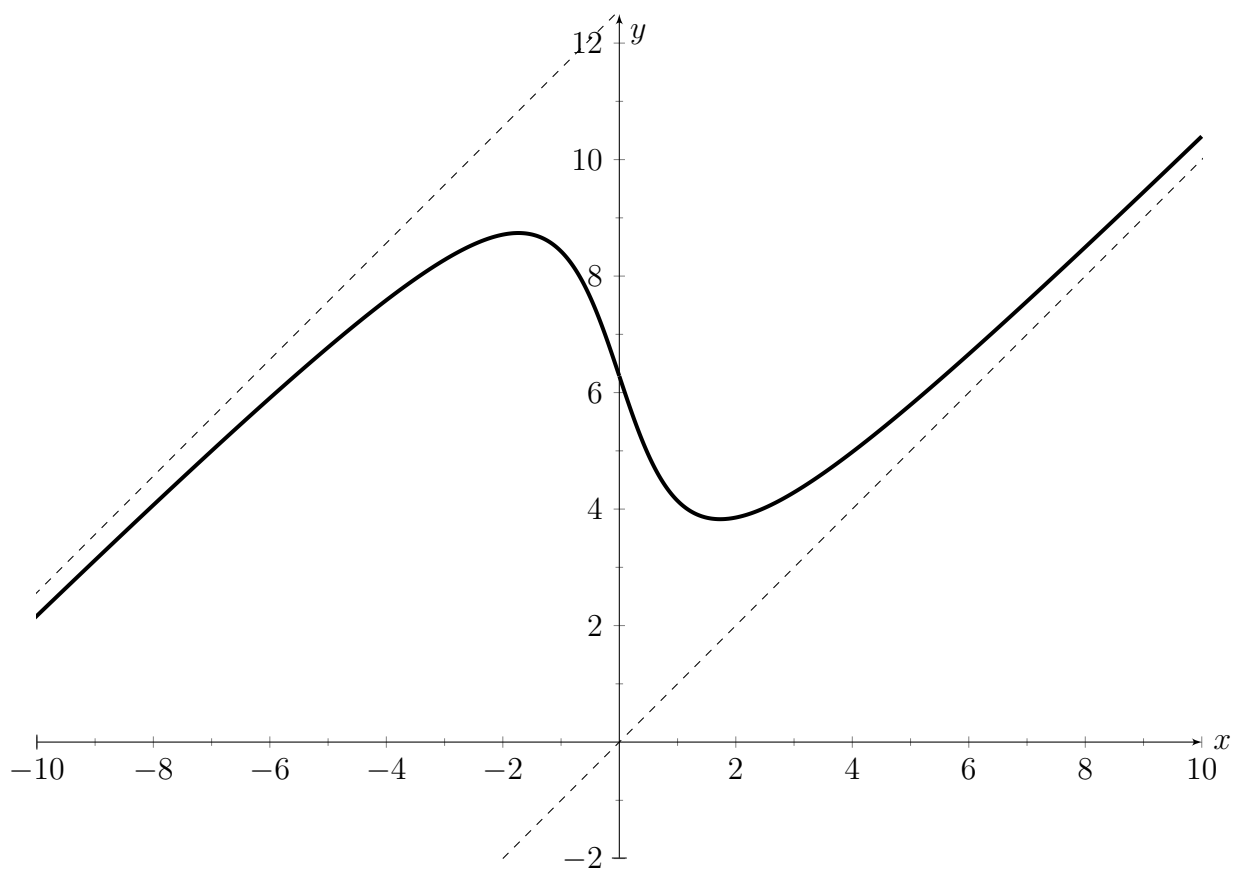
(6):



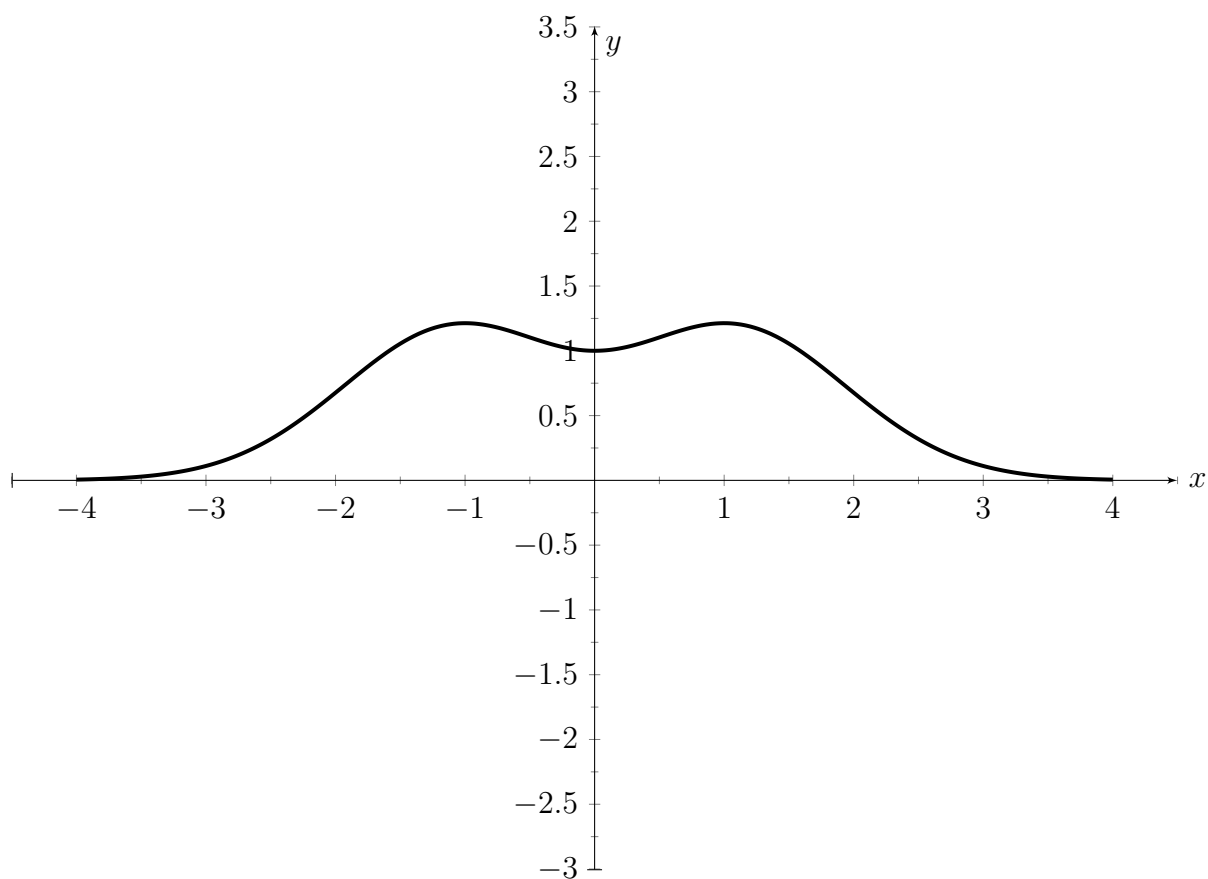
(B):



(г):



(д):



### Задача № 3.

#### Условие.

Найти наибольшее расстояние точки эллипса  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  от конца его малой полуоси ( $a > b > 0$ ).

#### Решение.

Рассмотрим точку на эллипсе  $A(x, y)$ , при  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Соединим точку эллипса  $A$  с концами малых полуосей  $M_1$ ,  $M_2$ . Чертёж к задаче представлен на рис. 1. В силу положительности координат точки  $A$ , большим из двух будет отрезок  $AM_2$ , а расстояние

$$\rho = \rho(A, M_2) = \sqrt{x^2 + (y + b)^2} \longrightarrow \max$$

по условию задачи должно быть наибольшим. Так как  $x = a \cos t$ , а  $y = b \sin t$ , то  $\rho = \rho(t)$  есть функция параметра  $t$  вида

$$\rho(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + (b \sin t + b)^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2(1 + \sin t)^2}.$$

Найдём экстремальные значения функции  $\rho(t)$  из решения уравнения

$$\rho'_t = 0.$$

Вычислим производную по переменной  $t$ , получим

$$\rho'_t = \frac{a^2 2 \cos t (-\sin t) + b^2 2(1 + \sin t) \cos t}{2\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2(1 + \sin t)^2}} = \frac{2 \cos t (-a^2 \sin t + b^2(1 + \sin t))}{2\rho}.$$

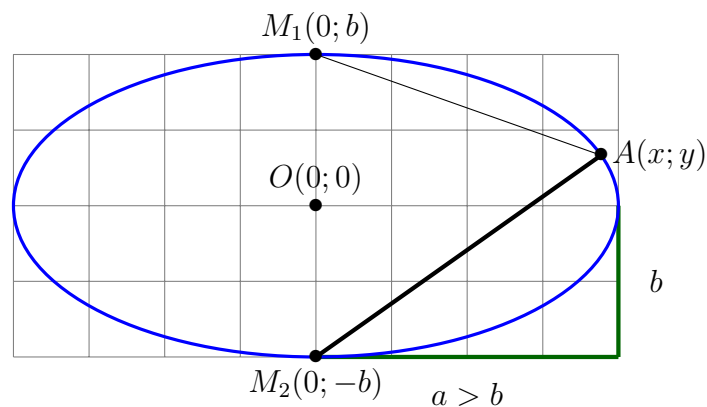


Рис. 1. Чертёж к задаче 3

Приравнявая производную к нулю, получим уравнение относительно переменной  $t$ , решая которое, находим

$$\begin{aligned} 2 \cos t(-a^2 \sin t + b^2(1 + \sin t)) &= 0, \\ -a^2 \sin t + b^2(1 + \sin t) &= 0, \\ (a^2 - b^2) \sin t &= b^2, \\ \sin t &= \frac{b^2}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

То есть, при  $t^* = \arcsin \frac{b^2}{a^2 - b^2}$  получаем экстремальные значения для расстояния  $\rho_{\max} = \rho(t^*) = \max \rho(A, M_2)$ . Из равенства для  $\sin t$  получим следствия

$$1 + \sin t = \frac{a^2}{a^2 - b^2}, \quad \cos^2 t = \frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{(a^2 - b^2)^2}.$$

Отсюда, найдём наибольшее расстояние

$$\begin{aligned} \rho_{\max} &= \rho(t^*) = \sqrt{a^2 \cos^2 t^* + b^2(1 + \sin t^*)^2} = \sqrt{a^2 \frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{(a^2 - b^2)^2} + b^2 \frac{a^4}{(a^2 - b^2)^2}} = \\ &= \frac{a^2}{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

## Список литературы

- [1] Львовский С.М. Набор и вёрстка в системе L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, 2003 с.
- [2] [Добавить сюда источник.](#)
- [3] [Добавить сюда источник.](#)