Université de Lorraine

TP3 : Synthèse de Filtres Numériques

Nom : AMIRAT SAMY
Filière : M1 EEA MTI
Année universitaire : 2024 – 2025

1. Synthèse par série de Fourier

On veut calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ d'un filtre RIF passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 1\,\text{kHz}$, échantillonné à $f_e = 8\,\text{kHz}$, avec une longueur $N = 9$ échantillons.

1.1. Données de départ

- Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 8000\,\text{Hz}$
- Fréquence de coupure : $f_c = 1000\,\text{Hz}$
- Nombre d'échantillons : $N = 9$
- Période d'échantillonnage : $T_e = \frac{1}{f_e} = 125\,\mu\text{s}$
- Indices centrés : $n = -4, -3, \ldots, 0, \ldots, +4$

1.2. Formule de la réponse impulsionnelle idéale

Pour un filtre passe-bas idéal, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(n) = \frac{2f_c}{f_e} \cdot \text{sinc}\left(\frac{2f_c}{f_e} \cdot n\right)$$

où :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

1.3. Calculs des 9 coefficients (indices $n = -4$ à $+4$)

On pose $\alpha = \frac{2f_c}{f_e} = \frac{2\times1000}{8000} = 0.25$

- $h(0) = \alpha \cdot \text{sinc}(0) = 0.25 \cdot 1 = 0.25$
- $h(\pm1) = 0.25 \cdot \text{sinc}(0.25) = 0.25 \cdot \frac{\sin(\pi\cdot0.25)}{\pi\cdot0.25} \approx 0.25 \cdot \frac{0.7071}{0.7854} \approx 0.2252$
- $h(\pm2) = 0.25 \cdot \text{sinc}(0.5) = 0.25 \cdot \frac{\sin(\pi\cdot0.5)}{\pi\cdot0.5} \approx 0.25 \cdot \frac{1}{1.5708} \approx 0.1592$
- $h(\pm3) = 0.25 \cdot \text{sinc}(0.75) \approx 0.25 \cdot \frac{0.7071}{2.3562} \approx 0.0750$
- $h(\pm4) = 0.25 \cdot \text{sinc}(1) \approx 0.25 \cdot \frac{0}{\pi} = 0$

1.4. Résultat de la réponse impulsionnelle centrée

$$h(n) = [0, 0.0750, 0.1592, 0.2252, 0.25, 0.2252, 0.1592, 0.0750, 0]$$

1.5. Décalage pour causalité (rendre $h(n)$ causal)

On décale l'indice de n de $+4$:

$$h[0] = h(-4),\ \ h[1] = h(-3), \ldots,\ \ h[8] = h(4)$$

$$\Rightarrow h[n] = [0, 0.0750, 0.1592, 0.2252, 0.25, 0.2252, 0.1592, 0.0750, 0]$$

1.6. Conclusion

La réponse impulsionnelle obtenue est symétrique et représente une approximation d'un filtre passe-bas idéal tronqué à 9 coefficients. La symétrie garantit une phase linéaire.

1.7. Commentaire sur la réponse en fréquence

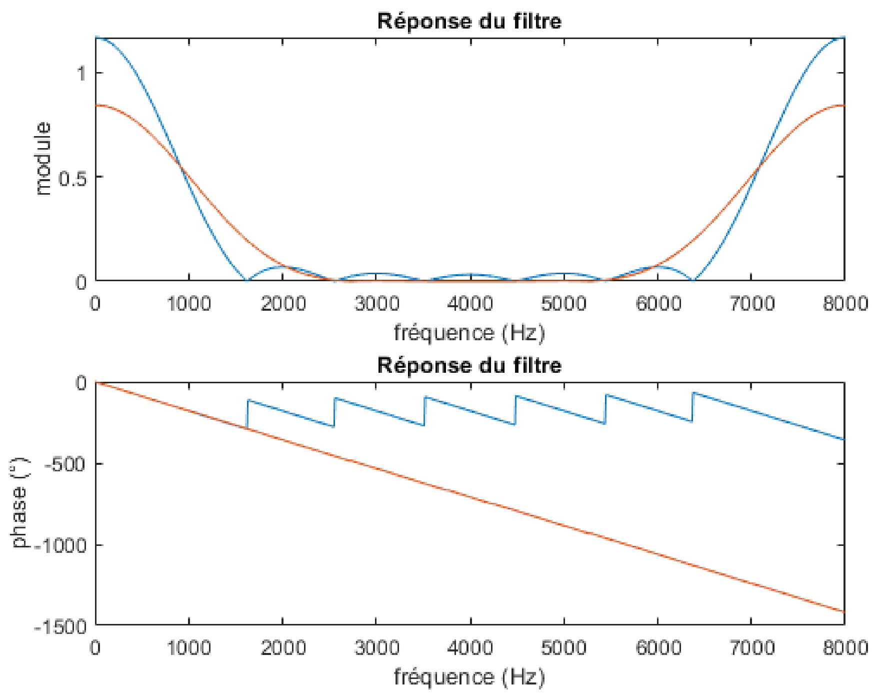


Figure 1: Réponses en fréquence avec fenêtre rectangulaire (bleu) et fenêtre de Hamming (orange).

Après avoir entré les paramètres $f_e = 8000\,\text{Hz}$, $f_c = 1000\,\text{Hz}$, et $N = 9$ dans l'application `riffour`, j'ai généré la réponse impulsionnelle puis la réponse en fréquence.

Cette fois, deux courbes apparaissent sur le graphe :

- La première courbe correspond à la fenêtre rectangulaire (appelée aussi fenêtre « box-car »).
- La deuxième correspond à la fenêtre de Hamming.

Voici ce que j'ai observé :

- La fenêtre rectangulaire donne une transition plus abrupte, mais avec beaucoup d'ondulations (ce qu'on appelle l'effet Gibbs). Cela peut perturber le filtre dans la bande coupée.
- La fenêtre de Hamming lisse la réponse en fréquence. Il y a moins d'ondulations, mais la coupure est un peu plus large (moins nette).

Conclusion : Il y a un compromis entre précision et stabilité. La fenêtre de Hamming donne une meilleure atténuation dans la bande coupée, avec une réponse plus propre, même si la coupure est moins « serrée ».

1.8. Évolution de la phase avec la fréquence

En observant la courbe de phase dans l'application `riffour`, je remarque que la phase évolue de manière **linéaire** avec la fréquence. Dans ce cas, le filtre est dit à **phase linéaire**.

Concrètement, cela veut dire que :

- Toutes les composantes du signal d'entrée sont **retardées du même temps**.
- Il n'y a pas de distorsion de forme du signal (ex : un signal sinusoïdal reste bien sinusoïdal).
- Le retard est constant et dépend uniquement du nombre d'échantillons N.

Ce comportement est souhaitable car il permet de filtrer un signal sans le déformer, juste avec un **décalage temporel**.

1.9. Influence du nombre de coefficients N sur la réponse en fréquence

J'ai refait les calculs avec l'application `riffour` en changeant la valeur de N, en prenant successivement $N = 17$ et $N = 33$.

Observation sur les deux figures :

- Quand on passe de $N = 9$ à $N = 17$, puis à $N = 33$, la transition entre la bande passante et la bande coupée devient **plus nette**.
- Le filtre devient **plus sélectif**, c'est-à-dire qu'il coupe mieux autour de la fréquence de coupure f_c.
- Les oscillations autour de la bande de transition (effet Gibbs) sont toujours présentes, mais elles se **répartissent sur une bande plus fine**.
- Plus N augmente, plus le filtre se rapproche d'un **passe-bas idéal**.

Pour la **phase** :

- La phase reste **linéaire** globalement, mais le **retard introduit par le filtre augmente** avec N.

Conclusion : Augmenter N permet d'améliorer la précision de la coupure, mais cela rend le filtre plus long à calculer et augmente son retard. C'est un compromis entre performance et complexité.

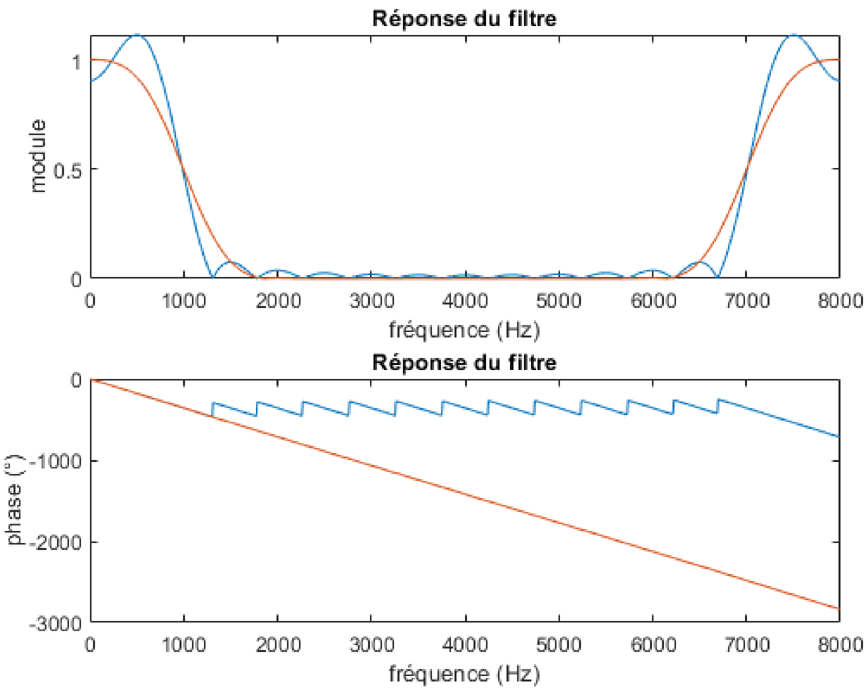


Figure 2: Réponse en fréquence pour $N = 17$

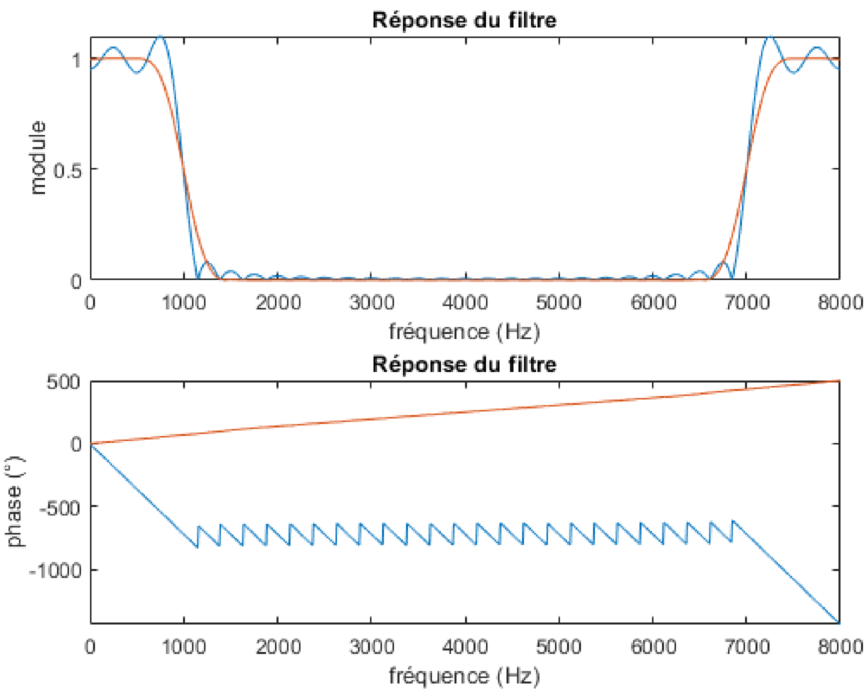


Figure 3: Réponse en fréquence pour $N = 33$

1.10. Réponse du filtre à une sinusoïde (N = 33)

J'ai utilisé l'option « Réponse à un sinus » dans l'application `riffour`, en gardant $N = 33$ et en testant trois fréquences : 100 Hz, 1000 Hz et 5000 Hz.

1. **Cas de 100 Hz (figure 4)** :

- Le sinus passe bien dans le filtre.
- Le signal en sortie est presque identique au signal d'entrée, avec un léger retard.
- C'est logique, car 100 Hz est bien en dessous de la fréquence de coupure $f_c = 1000$ Hz.

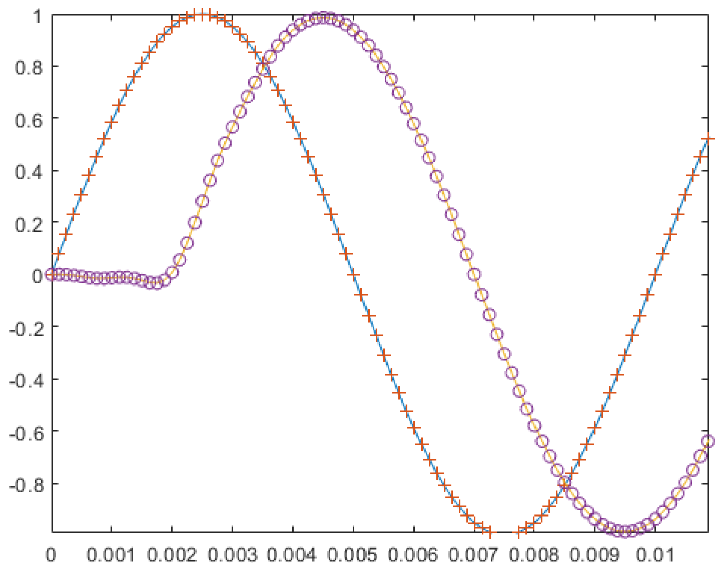


Figure 4: Réponse du filtre à un sinus de 100 Hz

2. **Cas de 1000 Hz (figure 5)** :

- Le signal passe encore, mais on remarque une légère atténuation et un retard plus visible.
- C'est normal, car 1000 Hz correspond à la fréquence de coupure du filtre.

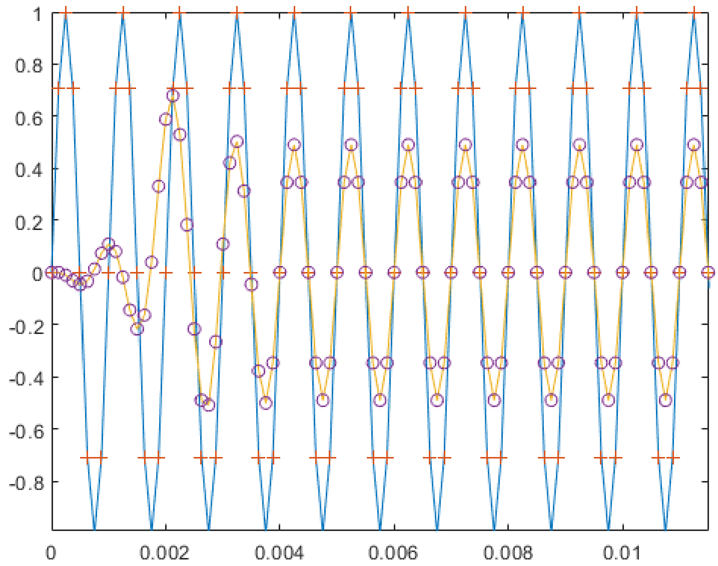


Figure 5: Réponse du filtre à un sinus de 1000 Hz

3. Cas de 5000 Hz (figure 6) :

- Le sinus est fortement atténué, presque annulé.
- Le filtre a bien joué son rôle en bloquant cette fréquence élevée.

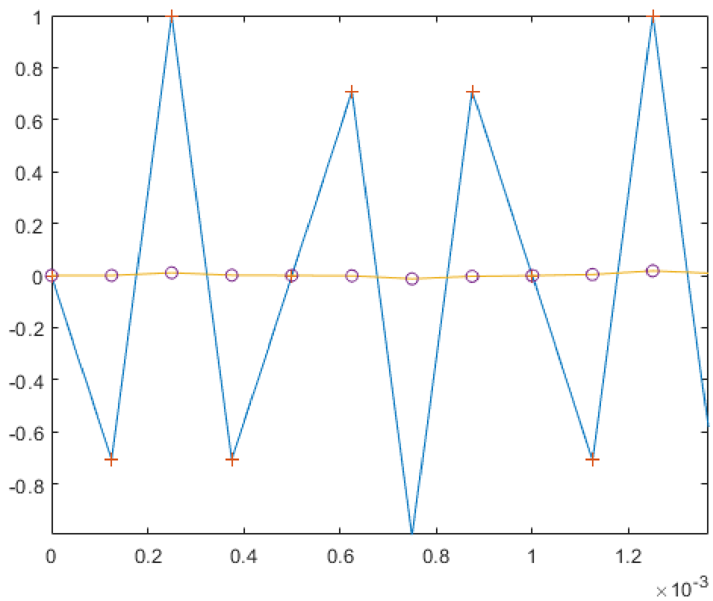


Figure 6: Réponse du filtre à un sinus de 5000 Hz

Remarques générales :

- On voit que les premières valeurs du signal en sortie sont proches de zéro. C'est dû au fait que le filtre n'a pas encore « reçu assez d'échantillons » pour donner une vraie réponse : c'est le **temps de réponse initial**.

- On peut aussi remarquer que plus la fréquence est basse, plus le signal de sortie ressemble à celui d'entrée.

1.11. Analyse temporelle de la sortie du filtre

1. Pourquoi les premières valeurs sont quasi nulles :

Quand j'observe la sortie du filtre, je vois que les premières valeurs sont très proches de zéro, peu importe la fréquence du sinus. Cela s'explique simplement :

Le filtre RIF a une réponse impulsionnelle de longueur $N = 33$ échantillons. Pour calculer la première vraie valeur de sortie, il faut que le filtre ait "reçu" suffisamment de points du signal d'entrée. Mais au tout début, il n'a que des valeurs partielles, donc la sortie reste faible. C'est le temps de montée.

2. Retard entre entrée et sortie :

Quand on compare les courbes entrée/sortie (surtout à 100 Hz), on voit que le signal de sortie est exactement le même sinus, mais **décalé dans le temps**.

Ce retard est constant et dépend uniquement de la longueur N du filtre. Il est donné par la formule suivante :

$$\tau = \frac{N-1}{2} \cdot T_e$$

Avec $N = 33$ et $T_e = \frac{1}{8000} = 125\,\mu s$, on obtient :

$$\tau = \frac{32}{2} \cdot 125 \times 10^{-6} = 16 \cdot 125\,\mu s = 2\,\mathrm{ms}$$

Le retard en temps reste le même : il ne dépend pas de la fréquence.

Conclusion : Le filtre ne déforme pas le signal, il le décale simplement dans le temps, ce qui est typique d'un filtre à phase linéaire.

2. Synthèse par échantillonnage en fréquence

On propose de réaliser un filtre RIF basé sur le gabarit suivant pour $H(f)$:

- $H(f) = 1$ pour $-f_1 < f < f_1$
- $H(f) = 0$ pour $f > f_2$ ou $f < -f_2$

Avec les paramètres suivants :

$$f_1 = 1\,\mathrm{kHz}, \quad f_2 = 1{,}5\,\mathrm{kHz}, \quad f_e = 8\,\mathrm{kHz}, \quad N = 9$$

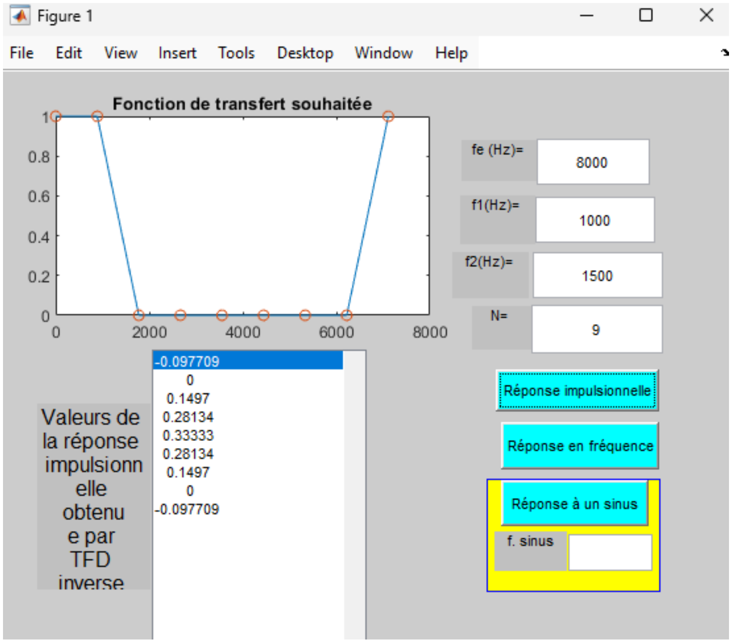


Figure 7: Gabarit fréquentiel $H(f)$

Code MATLAB utilisé

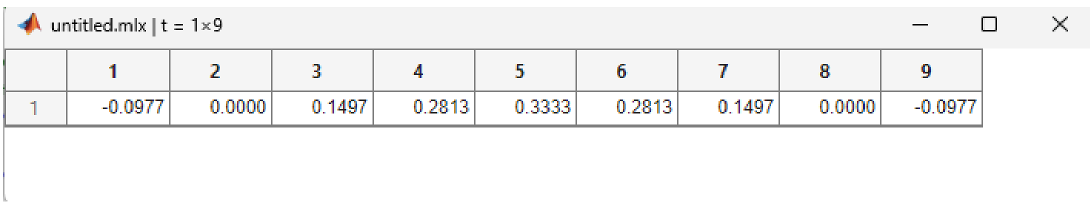
$$h(k) = \frac{1}{9}\left(1 + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{9}\right)\right)$$

```
t = ones(1,9);
for k = -4:4
    t(k+5) = (1/9) * (1 + 2*cos((2*pi*k)/9));
end
t
```

Réponse impulsionnelle obtenue

La réponse impulsionnelle obtenue est :

$$h = [-0{,}0977,\ 0,\ 0{,}1497,\ 0{,}2813,\ 0{,}3333,\ 0{,}2813,\ 0{,}1497,\ 0,\ -0{,}0977]$$


untitled.mlx | t = 1×9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-0.0977	0.0000	0.1497	0.2813	0.3333	0.2813	0.1497	0.0000	-0.0977

Figure 8: Résultat dans l'application MATLAB « rifech »

Commentaires

- La réponse impulsionnelle est symétrique autour du centre (filtre à phase linéaire).
- Les valeurs aux extrémités sont faibles voire nulles, ce qui traduit un effet de transition douce dans la bande interdite.
- Les lobes sont caractéristiques du phénomène de Gibbs, lié à la troncature de $H(f)$.

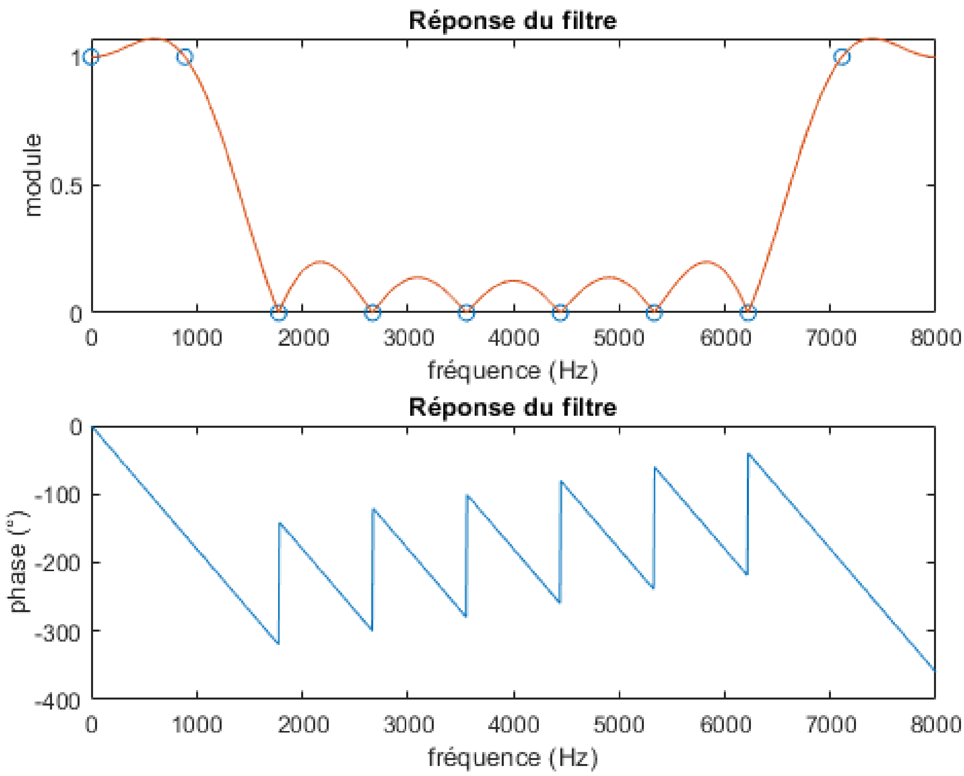


Figure 9: Réponse en fréquence

Analyse comparative

Effet du nombre de coefficients N

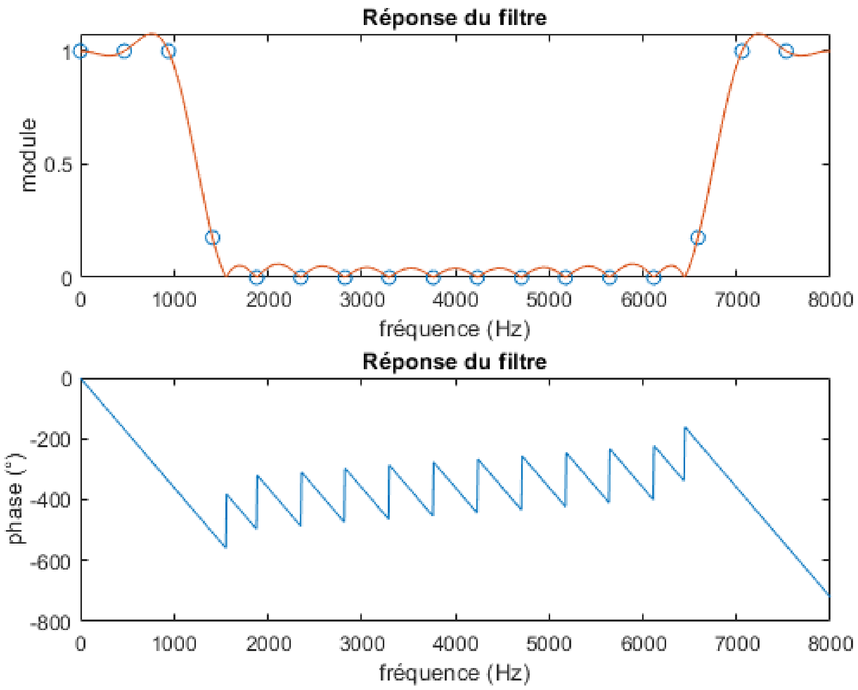


Figure 10: Réponse en fréquence avec $N = 17$

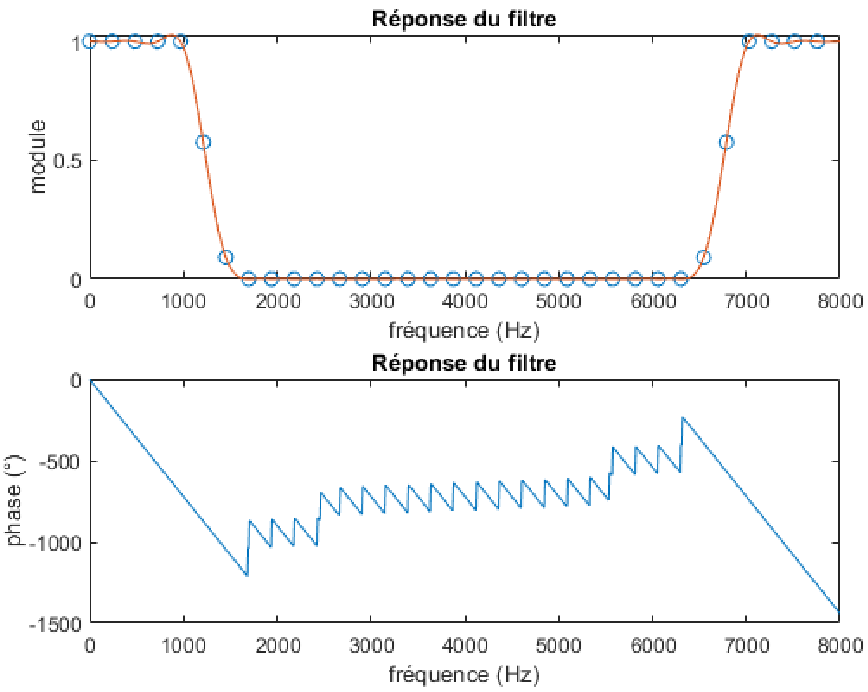


Figure 11: Réponse en fréquence avec $N = 33$

Observation :

- Plus N augmente, plus la transition entre bande passante et bande coupée devient **plus nette**.
- Le filtre devient plus sélectif, avec moins d'ondulations dans la bande passante.
- La phase devient plus pentue, traduisant un retard temporel plus important.

Effet du déplacement de la fréquence f_2

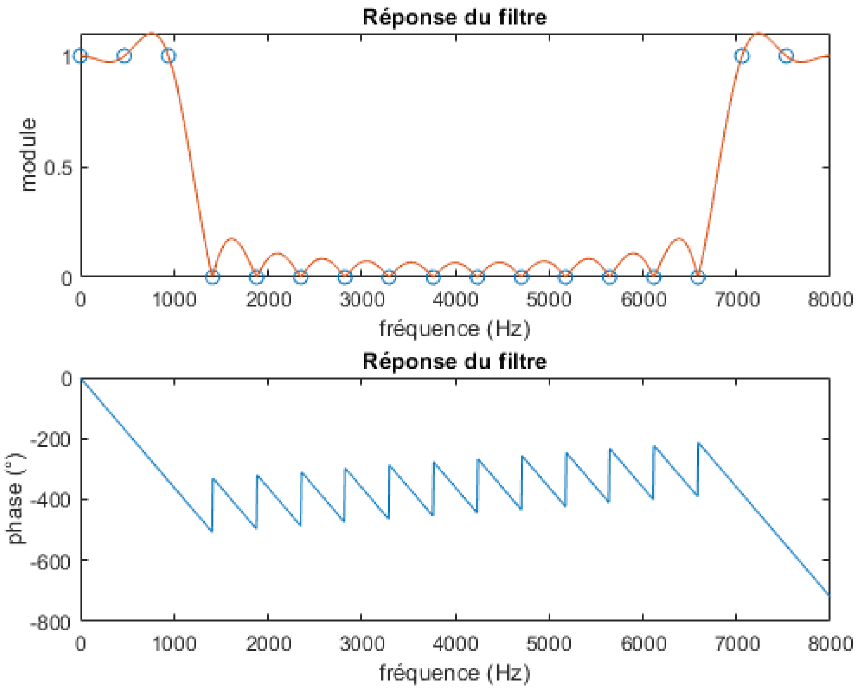


Figure 12: Réponse en fréquence avec $N = 17$ et $f_2 = 1{,}1\,\text{kHz}$

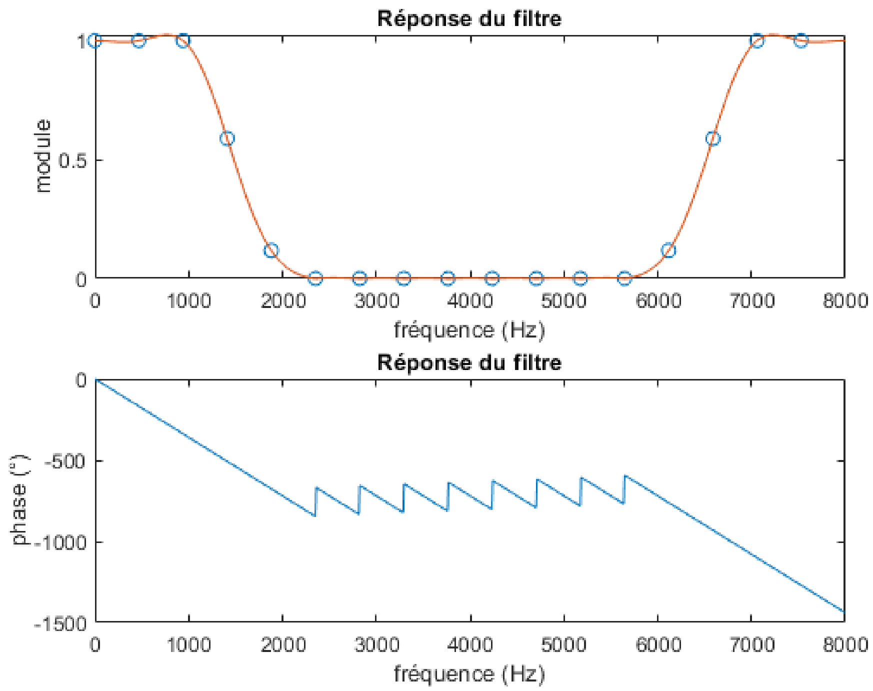


Figure 13: Réponse en fréquence avec $N = 17$ et $f_2 = 2\,\text{kHz}$

Observation :

- Lorsque f_2 est proche de f_1, la transition est plus abrupte, mais cela génère davantage d'oscillations (effet de Gibbs).
- En augmentant f_2, la transition est plus douce, et les oscillations diminuent : on obtient un filtre plus régulier mais moins sélectif.

Conclusion

L'échantillonnage en fréquence permet de générer des filtres flexibles, mais le choix du nombre d'échantillons N et de la bande de transition (f_1 à f_2) a un **impact direct sur la qualité du filtrage** :

- N élevé : meilleure précision mais plus de calculs.
- Transition large ($f_2 - f_1$ grand) : moins d'ondulations mais filtre moins "tranchant".

Commentaires sur les cercles représentant les échantillons de $H(f)$

Plus le nombre d'échantillons N augmente, plus la représentation fréquentielle devient fidèle au gabarit initial. En d'autres termes, on observe que le filtre suit mieux le profil souhaité de $H(f)$ et minimise les distorsions ou pertes.

Cependant, au-delà d'une certaine valeur de N, on constate que l'augmentation du nombre de points n'améliore plus significativement la précision : la courbe obtenue épouse déjà parfaitement les points échantillonnés. Le signal filtré est alors « suffisamment bien » reconstruit.

On peut faire un lien avec le théorème d'échantillonnage de Shannon : si la bande de fréquence utile est correctement couverte (bande passante bien échantillonnée), alors le signal est parfaitement reconstitué à partir de ses échantillons. Dans notre cas, cela signifie que lorsque N est suffisamment grand pour couvrir la transition entre f_1 et f_2 avec assez de précision, toute augmentation supplémentaire de N devient redondante.

Il existe donc un compromis optimal entre précision et complexité de calcul.

Étude du filtre passe-bas RC

Le filtre proposé est un filtre passe-bas analogique de type RC, représenté par le schéma suivant :

- Résistance $R = 330\,\Omega$
- Capacité $C = 470\,\text{nF} = 470 \times 10^{-9}\,\text{F}$

La fonction de transfert du filtre (tension de sortie aux bornes du condensateur) est donnée par la formule du diviseur de tension :

$$H(p) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}} = \frac{1}{1 + RCp}$$

On souhaite maintenant exprimer cette fonction sous la forme normalisée suivante :

$$H(p) = \frac{A}{1 + \dfrac{p}{2\pi f_c}}$$

En comparant les deux expressions :

$$\frac{1}{1 + RCp} \quad \text{et} \quad \frac{A}{1 + \dfrac{p}{2\pi f_c}}$$

on identifie directement :

$$RC = \frac{1}{2\pi f_c} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{et} \quad A = 1$$

Calcul de la fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{1}{2\pi \cdot 330 \cdot 470 \times 10^{-9}} = \frac{1}{2\pi \cdot 1{,}551 \times 10^{-4}} \approx 1027{,}5\,\text{Hz}$$

Conclusion : La fonction de transfert du filtre RC peut donc s'écrire :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{p}{2\pi \cdot 1027{,}5}}$$

où le gain statique est $A = 1$ et la fréquence de coupure est $f_c \approx 1027{,}5$ Hz.