Université de Lorraine

Master 1 Énergie Électrique, Électronique et Automatique

TP2 : Analyse Spectrale

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

AMIRAT SAMY

25 Avril 2025

2-1) Étude théorique — Transformée de Fourier et spectre en amplitude

Le signal à étudier est défini par :

$$t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad \text{avec } f_0 = 1 \text{ Hz}$$

Transformée de Fourier du signal

Nous savons que :

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2i}$$

En appliquant la transformée de Fourier linéairement sur chaque terme :

$$\mathcal{F}\{t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$$

Ceci correspond à deux impulsions de Dirac opposées centrées en $f_0 = 1$ Hz et $-f_0 = -1$ Hz, avec une amplitude complexe conjuguée.

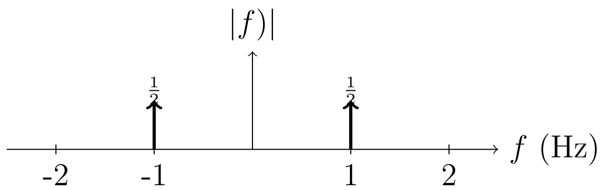
Spectre en amplitude

Le spectre en amplitude est donné par le module de la transformée de Fourier :

$$|f)| = \left|\frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]\right| = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Ainsi, le spectre en amplitude contient deux pics d'amplitude $\frac{1}{2}$ situés à $f = \pm 1$ Hz.

Tracé schématique du spectre $|f)|$



Échantillonnage du signal : calcul des 4 valeurs

Nous considérons une fréquence d'échantillonnage :

$$f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{1}{1/4} = 4 \text{ Hz}$$

et nous allons échantillonner le signal $t) = \sin(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 1$ Hz à 4 instants successifs, à partir de $t = 0$, selon :

$$t_m = m \cdot T_e \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, 3$$

Calcul des échantillons :

$$\begin{aligned}
0) &= \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 0) = \sin(0) = 0 \\
1) &= \sin\left(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
2) &= \sin\left(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{2}{4}\right) = \sin(\pi) = 0 \\
3) &= \sin\left(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{3}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1
\end{aligned}$$

Valeurs des 4 échantillons :

$$0) = 0, \quad 1) = 1, \quad 2) = 0, \quad 3) = -1$$

Calcul de la transformée de Fourier discrète $X[n]$

Nous utilisons la formule de la transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$X[n] = \sum_{m=0}^{N-1} m) \cdot e^{-j\frac{2\pi nm}{N}}, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3$$

Avec :

$$0) = 0, \quad 1) = 1, \quad 2) = 0, \quad 3) = -1, \quad N = 4$$

Calculs :

$$\begin{aligned}
X[0] &= 0) + 1) + 2) + 3) = 0 + 1 + 0 - 1 = 0 \\
X[1] &= 0) \cdot e^{-j0} + 1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 2) \cdot e^{-j\frac{4\pi}{4}} + 3) \cdot e^{-j\frac{6\pi}{4}} \\
&= 0 + 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0 - 1 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} = -j - (-j) = -2j \\
X[2] &= 0) \cdot e^{-j0} + 1) \cdot e^{-j\frac{4\pi}{4}} + 2) \cdot e^{-j\frac{8\pi}{4}} + 3) \cdot e^{-j\frac{12\pi}{4}} \\
&= 0 + 1 \cdot e^{-j\pi} + 0 - 1 \cdot e^{-j3\pi} = -1 - (-1) = 0 \\
X[3] &= 0) \cdot e^{-j0} + 1) \cdot e^{-j\frac{6\pi}{4}} + 2) \cdot e^{-j\frac{12\pi}{4}} + 3) \cdot e^{-j\frac{18\pi}{4}} \\
&= 0 + 1 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 0 - 1 \cdot e^{-j\frac{9\pi}{2}} = j - (-j) = 2j
\end{aligned}$$

Résultats :

$$X[0] = 0, \quad X[1] = -2j, \quad X[2] = 0, \quad X[3] = 2j$$

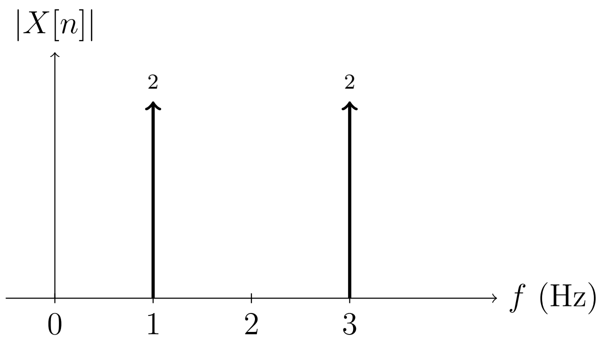
Spectre numérique schématique

On trace le module $|X[n]|$ en fonction de la fréquence :

$$|X[0]| = 0, \quad |X[1]| = 2, \quad |X[2]| = 0, \quad |X[3]| = 2$$

Résolution spectrale :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{4}{4} = 1 \text{ Hz}$$



Lien entre la transformée de Fourier continue f) et discrète $X[n]$

Il est possible d'établir une correspondance entre la transformée de Fourier f) du signal continu et la transformée de Fourier discrète $X[n]$, à condition de respecter certains critères.

La relation principale s'écrit :

$$X[n] \approx X\left(f = \frac{nf_e}{N}\right), \quad \text{pour } n \in [0, N-1]$$

avec :

— $f_e = \frac{1}{T_e}$: la fréquence d'échantillonnage
— N : le nombre d'échantillons
— $\Delta f = \frac{f_e}{N}$: la résolution spectrale

Conditions nécessaires pour valider cette correspondance :

1. **Critère de Shannon** : La fréquence d'échantillonnage f_e doit être strictement supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans le signal :

$$f_e > 2f_{\text{max}}$$

Cela permet d'éviter le repliement spectral (aliasing).

2. **Alignement fréquentiel** : Les fréquences présentes dans le signal t) doivent être des multiples entiers de Δf, la résolution spectrale de la TFD :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N}$$

Cela garantit que les pics du spectre numérique $X[n]$ tombent exactement sur les fréquences du signal.

En résumé, dans les bonnes conditions, la transformée de Fourier discrète $X[n]$ constitue une approximation échantillonnée du spectre $f)$ du signal analogique sur l'intervalle fréquentiel $[0, f_e]$, et est généralement affichée sur $[0, f_e/2]$ pour la représentation monolatérale.

Nouveau signal : $f_0 = 1{,}6$ Hz — Calcul des 4 échantillons

Nous modifions la fréquence du signal à $f_0 = 1{,}6$ Hz, soit :

$$t) = \sin(2\pi \cdot 1{,}6 \cdot t)$$

Les conditions d'échantillonnage restent les mêmes :

$$T_e = \frac{1}{4}\ \text{s} \Rightarrow f_e = 4\ \text{Hz}, \quad N = 4$$

Nous échantillonnons donc le signal aux instants :

$$t_m = m \cdot T_e, \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, 3$$

Calculs :

$$\begin{aligned}
0) &= \sin(2\pi \cdot 1{,}6 \cdot 0) = \sin(0) = 0 \\
1) &= \sin(2\pi \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}25) = \sin(0{,}8\pi) \approx \sin(144^\circ) \approx 0{,}5878 \\
2) &= \sin(2\pi \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}5) = \sin(1{,}6\pi) = \sin(288^\circ) \approx -0{,}9511 \\
3) &= \sin(2\pi \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}75) = \sin(2{,}4\pi) = \sin(432^\circ) \approx 0{,}9511
\end{aligned}$$

Valeurs numériques des échantillons (arrondies à 4 chiffres) :

$$0) = 0, \quad 1) \approx 0{,}5878, \quad 2) \approx -0{,}9511, \quad 3) \approx 0{,}9511$$

TFD pour $f_0 = 1{,}6$ Hz : Calcul de $X[n]$

Nous réutilisons la formule :

$$X[n] = \sum_{m=0}^{N-1} m) \cdot e^{-j\frac{2\pi nm}{N}}, \quad N = 4$$

Avec les échantillons :

$$0) = 0, \quad 1) \approx 0{,}5878, \quad 2) \approx -0{,}9511, \quad 3) \approx 0{,}9511$$

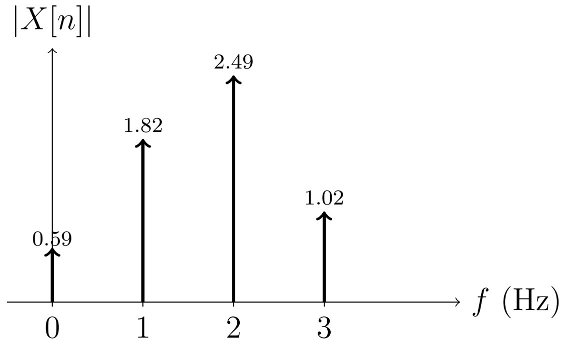
Calculs détaillés :

$$\begin{aligned}
X[0] &= 0) + 1) + 2) + 3) = 0 + 0{,}5878 - 0{,}9511 + 0{,}9511 \approx 0{,}5878 \\
X[1] &= 0) \cdot e^{-j0} + 1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 2) \cdot e^{-j\frac{4\pi}{4}} + 3) \cdot e^{-j\frac{6\pi}{4}} \\
&= 0 + 0{,}5878 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + (-0{,}9511) \cdot e^{-j\pi} + 0{,}9511 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} \\
&= 0 - 0{,}5878j + 0{,}9511 - 0{,}9511j = 0{,}9511 - 1{,}5389j \\
X[2] &= 0) \cdot e^{-j0} + 1) \cdot e^{-j\pi} + 2) \cdot e^{-j2\pi} + 3) \cdot e^{-j3\pi} \\
&= 0 - 0{,}5878 - 0{,}9511 + (-0{,}9511) \approx -2{,}4900 \\
X[3] &= 0) \cdot e^{-j0} + 1) \cdot e^{-j\frac{6\pi}{4}} + 2) \cdot e^{-j\frac{12\pi}{4}} + 3) \cdot e^{-j\frac{18\pi}{4}} \\
&= 0 + 0{,}5878j + (-0{,}9511) + (-0{,}9511j) = -0{,}9511 - 0{,}3633j
\end{aligned}$$

Modules :

$$
\begin{aligned}
|X[0]| &\approx 0{,}5878 \\
|X[1]| &\approx \sqrt{0{,}9511^2 + 1{,}5389^2} \approx 1{,}819 \\
|X[2]| &\approx 2{,}4900 \\
|X[3]| &\approx \sqrt{0{,}9511^2 + 0{,}3633^2} \approx 1{,}019
\end{aligned}
$$

Spectre numérique schématique



Commentaire sur la comparaison entre spectre numérique et spectre théorique pour $f_0 = 1{,}6$ Hz

Le spectre théorique $|f)|$ d'un signal $t) = \sin(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 1{,}6$ Hz est composé de deux impulsions de Dirac situées aux fréquences $\pm 1{,}6$ Hz, d'amplitude $\frac{1}{2}$.

Cependant, le spectre numérique obtenu par TFD à partir de seulement 4 échantillons avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 4$ Hz et une résolution spectrale :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{4}{4} = 1 \text{ Hz}$$

ne permet pas de placer précisément un pic à la fréquence 1,6 Hz, car celle-ci n'est pas un multiple entier de Δf.

- Le spectre numérique est réparti sur plusieurs fréquences, en particulier les composantes $X[1]$, $X[2]$, et $X[3]$ sont non nulles, contrairement au cas idéal.
- Le pic n'apparaît pas distinctement à 1,6 Hz, mais est dilué, ce qui rend difficile l'interprétation directe de la fréquence du signal.

Conclusion : le spectre numérique ne reflète pas fidèlement le spectre théorique lorsque la fréquence f_0 du signal n'est pas un multiple de Δf. Il devient alors difficile d'identifier précisément les composantes fréquentielles du signal d'origine.

Comment améliorer la résolution spectrale Δf pour le cas $f_0 = 1{,}6$ Hz

La résolution spectrale de la transformée de Fourier discrète est donnée par la relation :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N}$$

Pour que le spectre numérique reflète fidèlement le spectre théorique, il faut que la fréquence f_0 soit alignée avec un point de fréquence de la TFD, c'est-à-dire que :

$$f_0 = k \cdot \Delta f, \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

Dans notre cas :

$$f_0 = 1{,}6 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{f_e}{N} = 0{,}1 \text{ Hz} \quad \Rightarrow N = \frac{f_e}{0{,}1}$$

2.2) Simulation sous Matlab-Simulink de calculs de spectres numériques

Résultat de la simulation

Le résultat du tracé obtenu par le bloc `Array Plot` est présenté ci-dessous :

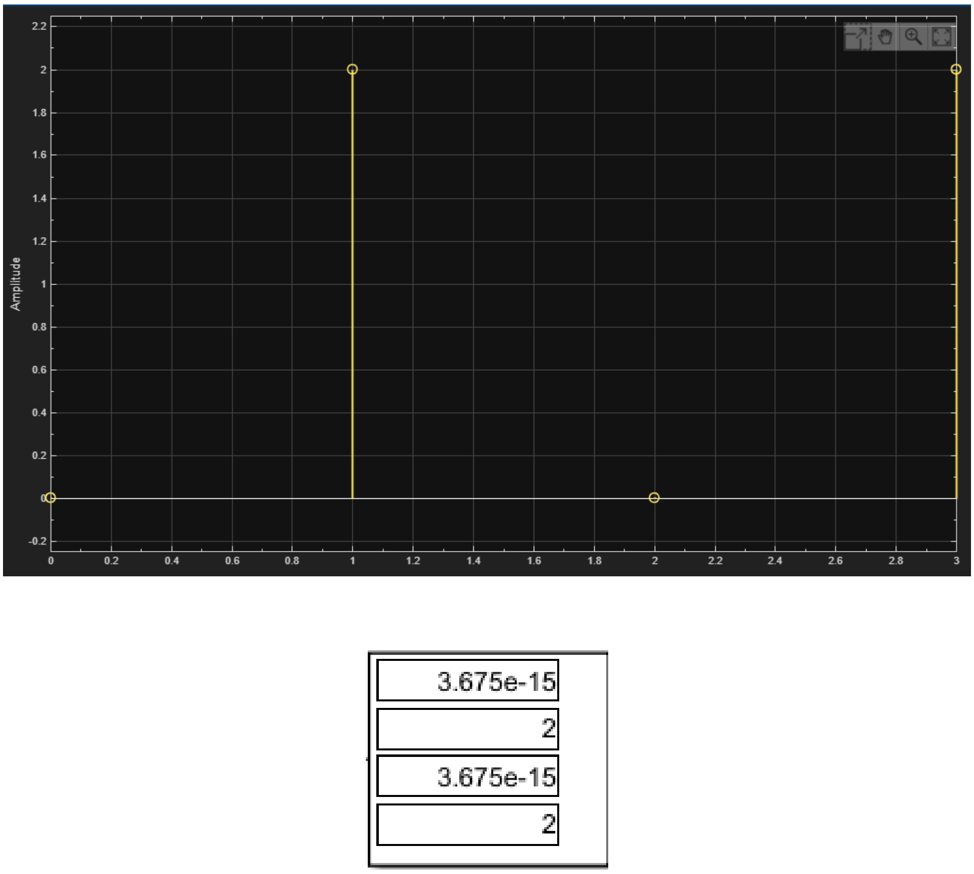


Figure 1 – Affichage des modules $|X[n]|$ des 4 composantes issues de la FFT : les pics principaux apparaissent en $X[1]$ et $X[3]$, chacun de valeur 2.

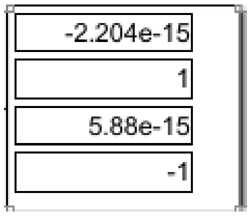


FIGURE 2 – Affichage des 4 échantillons m) prélevés sur le signal sinusoïdal t) $= \sin(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 1\,\text{Hz}$.

Les valeurs sont : 0) ≈ 0, 1) $= 1$, 2) ≈ 0, 3) $= -1$.
On observe :
— Un pic d'amplitude 2 à la fréquence $f = 1$ Hz
— Un second pic symétrique à $f = 3$ Hz
Ces résultats sont cohérents avec le spectre théorique obtenu pour une sinusoïde à 1 Hz.

Changement de fréquence à $f_0 = 1{,}6$ Hz — Analyse numérique

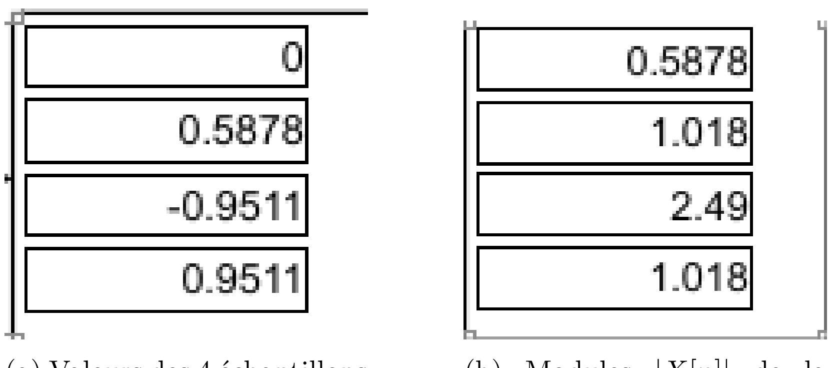
On modifie à présent la fréquence du signal sinusoïdal en la fixant à :

$$f_0 = 1{,}6 \text{ Hz}$$

Les autres paramètres sont conservés :
— $T_e = \frac{1}{4}$ s $\Rightarrow f_e = 4$ Hz
— $N = 4$
Les échantillons théoriques du signal t) $= \sin(2\pi \cdot 1{,}6 \cdot t)$ sont :

$$0) = 0, \quad 1) \approx 0{,}5878, \quad 2) \approx -0{,}9511, \quad 3) \approx 0{,}9511$$

En exécutant la simulation Simulink, on relève les **valeurs du module de la TFD** à partir du bloc 'Display' :



(a) Valeurs des 4 échantillons m) simulés pour $f_0 = 1{,}6$ Hz.

(b) Modules $|X[n]|$ de la FFT pour $f_0 = 1{,}6$ Hz.

FIGURE 3 – Résultats Simulink obtenus avec une sinusoïde de fréquence $f_0 = 1{,}6$ Hz, $f_e = 4$ Hz, $N = 4$.

Ces valeurs correspondent bien aux modules théoriques calculés précédemment :

$$|X[0]| \approx 0{,}5878, \quad |X[1]| \approx 1{,}018, \quad |X[2]| \approx 2{,}49, \quad |X[3]| \approx 1{,}018$$

Effet de l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage : $f_e = 8$ Hz

La fréquence du signal reste inchangée :

$$f_0 = 1{,}6 \text{ Hz}$$

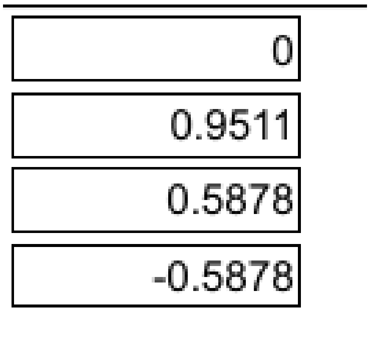
On modifie la période d'échantillonnage à :

$$T_e = \frac{1}{8} \text{ s} \Rightarrow f_e = 8 \text{ Hz}$$

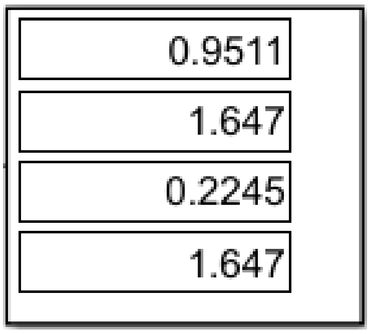
Le nombre d'échantillons reste constant : $N = 4$
La résolution spectrale devient :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{8}{4} = 2 \text{ Hz}$$

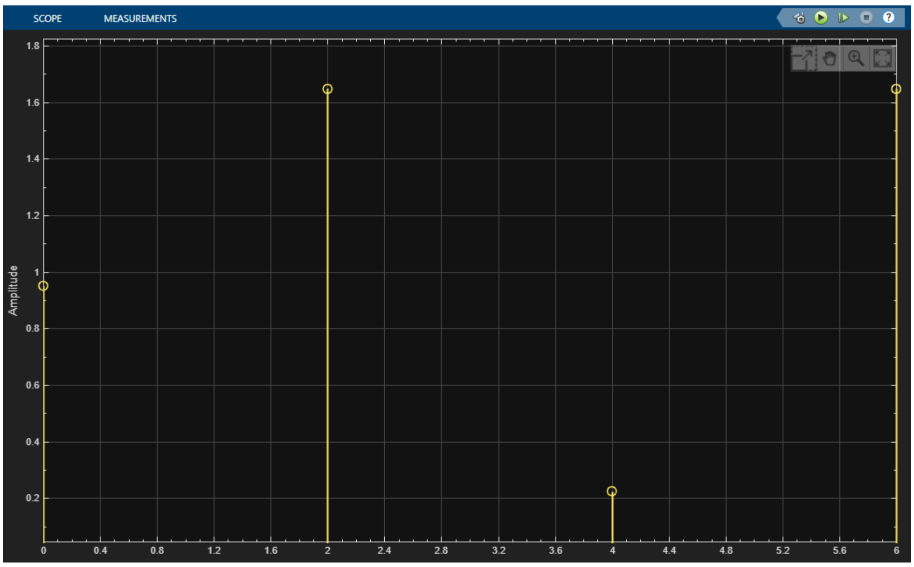
Résultats relevés dans Simulink :



(a) Échantillons m) pour $f_e = 8$ Hz.



(b) Valeurs de $|X[n]|$ simulées (bloc `Display`).



(c) Spectre numérique affiché par le bloc `Array Plot` pour $f_e = 8$ Hz.

FIGURE 4 – Résultats obtenus pour une fréquence d'échantillonnage $f_e = 8$ Hz, $N = 4$.

L'augmentation de la fréquence d'échantillonnage f_e augmente la résolution en temps mais réduit la résolution spectrale Δf si N est constant. Cela rend le spectre plus compact, mais moins précis en fréquence.

Effet de l'échantillonnage à haute fréquence : $f_e = 16$ Hz

On conserve le signal sinusoïdal à :

$$f_0 = 1{,}6 \text{ Hz}$$

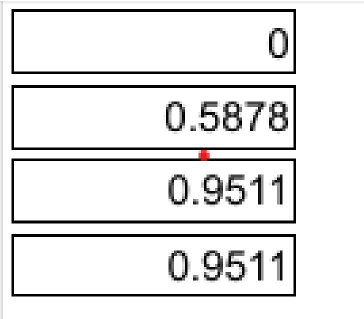
et on réduit la période d'échantillonnage à :

$$T_e = \frac{1}{16} \text{ s} \Rightarrow f_e = 16 \text{ Hz}$$

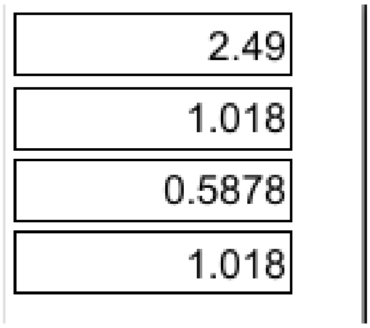
Le nombre d'échantillons reste fixé à $N = 4$
La résolution spectrale devient :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{16}{4} = 4 \text{ Hz}$$

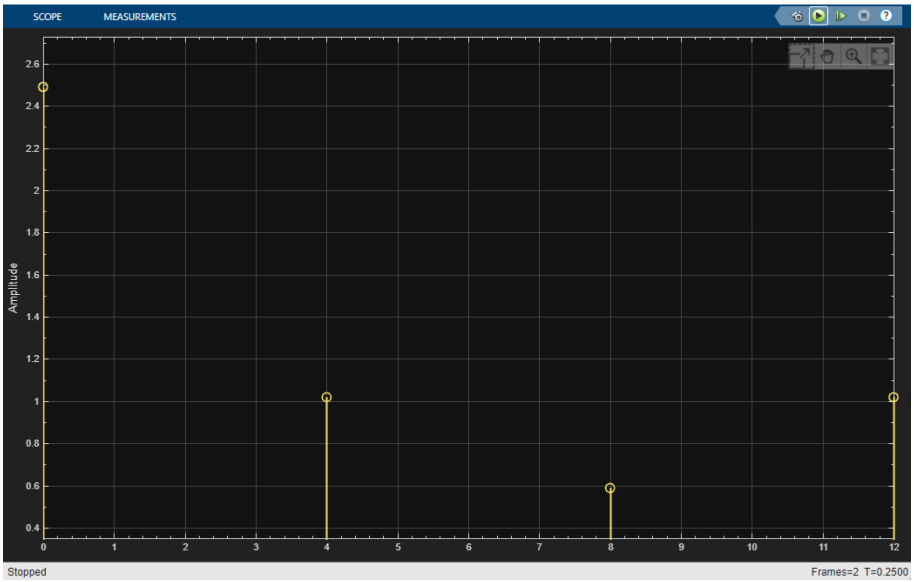
Résultats obtenus dans Simulink :



(a) Échantillons m) pour $f_e = 16$ Hz.



(b) Valeurs simulées de $|X[n]|$.



(c) Spectre affiché par le bloc `Array Plot` pour $f_e = 16$ Hz.

FIGURE 5 – Résultats de simulation pour une fréquence d'échantillonnage $f_e = 16$ Hz, $N = 4$.

Conclusion :

Lorsque le nombre d'échantillons N est maintenu constant, l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage f_e provoque une dégradation de la résolution spectrale $\Delta f = \frac{f_e}{N}$. Il devient alors difficile de discerner les vraies composantes fréquentielles du signal, en particulier si elles ne sont pas des multiples de Δf. Pour une analyse spectrale fine, il est préférable d'augmenter N, pas seulement f_e.

Effet de l'augmentation du nombre d'échantillons N avec $f_e = 4$ Hz constant

On réinitialise la période d'échantillonnage à :

$$T_e = \frac{1}{4}\text{ s} \Rightarrow f_e = 4 \text{ Hz}$$

et on fait varier le nombre d'échantillons successivement à :

$$N = 8 \quad \text{puis} \quad N = 16$$

La fréquence du signal reste inchangée :

$$f_0 = 1{,}6 \text{ Hz}$$

Cas $N = 8$

Résolution spectrale :

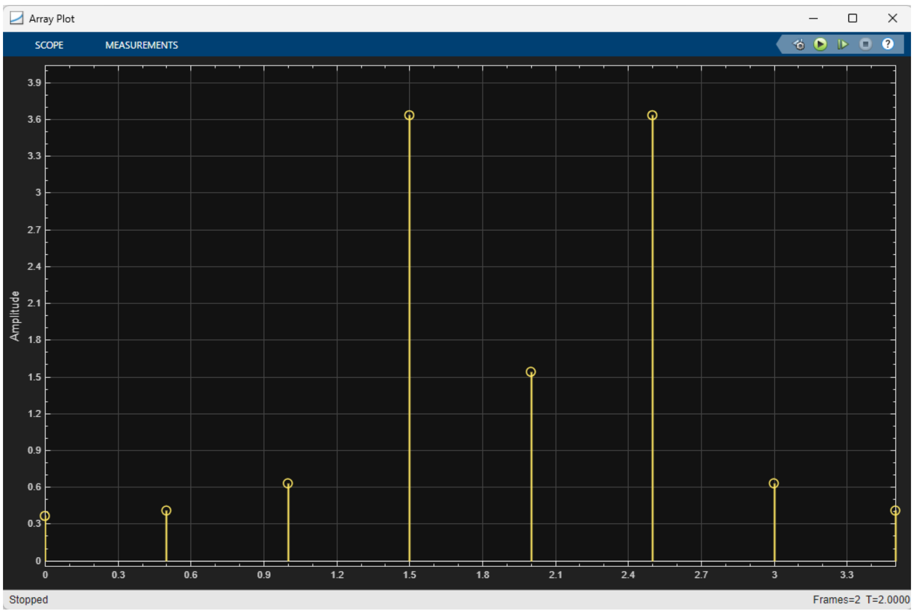
$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{4}{8} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

0
0.5878
-0.9511
0.9511
-0.5878
-4.899e-16
0.5878
-0.9511

(a) Échantillons m) pour $N = 8$.

0.3633
0.4073
0.6292
3.632
1.539
3.632
0.6292
0.4073

(b) Valeurs de $|X[n]|$ simulées.



(c) Spectre numérique obtenu pour $N = 8$.

FIGURE 6 – Résultats Simulink pour $f_e = 4$ Hz, $N = 8$.

Commentaires :

— La fréquence $f_0 = 1{,}6$ Hz ne tombe pas encore sur un multiple de $\Delta f = 0{,}5$ Hz

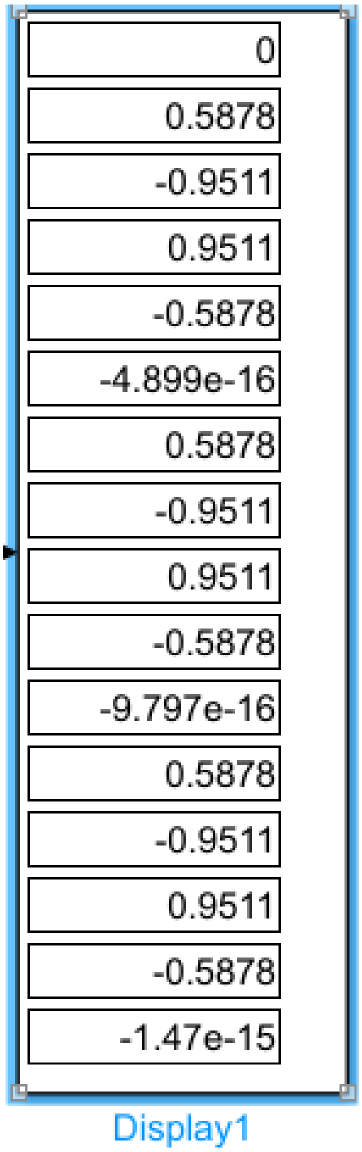
— Toutefois, la meilleure résolution permet de mieux isoler la composante dominante autour de 1,5 à 2 Hz

— Les lobes sont plus éloignés, la structure du spectre devient plus claire

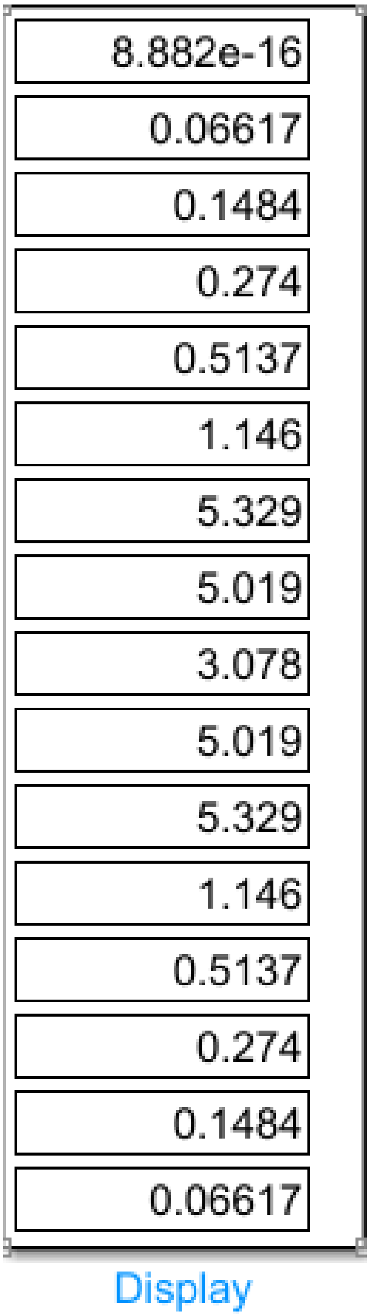
Cas $N = 16$

Résolution spectrale :

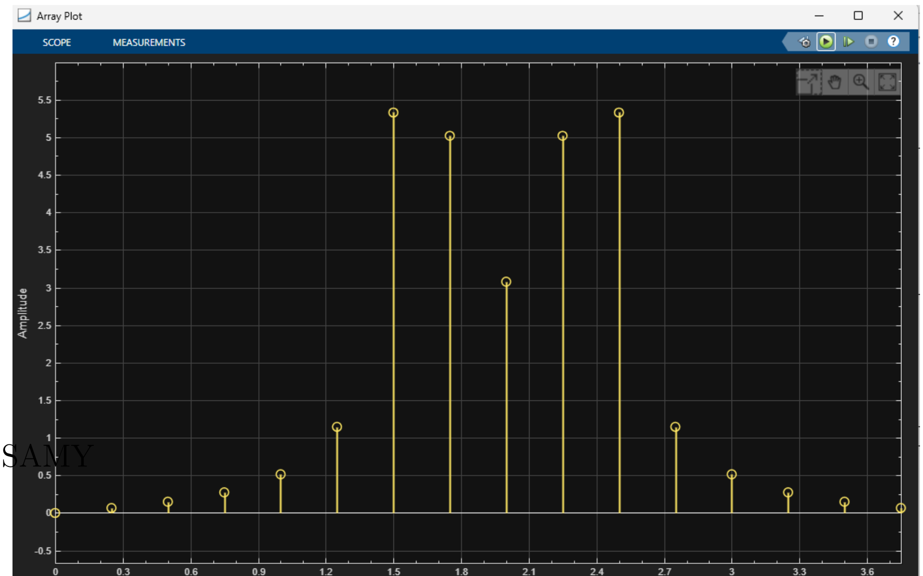
$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{4}{16} = 0{,}25\ \text{Hz}$$



(a) Échantillons m) obtenus dans Simulink pour $N = 16$.



(b) Valeurs des modules $|X[n]|$ calculés (bloc `Display`).



Commentaires :

— La fréquence $f_0 = 1{,}6$ Hz est désormais mieux résolue grâce à $\Delta f = 0{,}25$ Hz

— Le spectre est nettement plus précis et lisible, montrant une symétrie claire et des pics localisés

— Les composantes principales apparaissent à environ $f = 1{,}5$ à $f = 2{,}5$ Hz

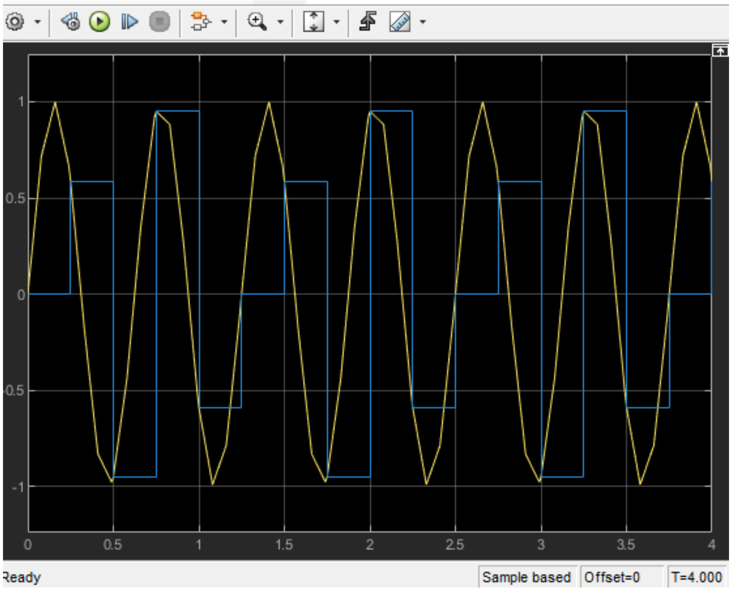


FIGURE 8 – Affichage temporel du signal sinusoïdal (jaune) et de sa version échantillonnée (bleu) par le bloc `Zero-Order Hold`. La sinusoïde est de fréquence $f_0 = 1{,}6$ Hz, et l'échantillonnage est réalisé avec $T_e = \frac{1}{4}$ s.

Conclusion :

Augmenter N à fréquence d'échantillonnage constante permet d'augmenter la précision fréquentielle sans modifier l'intervalle de Nyquist. Cela donne un spectre plus fin et proche de la transformée de Fourier continue. En revanche, augmenter f_e seul n'est pas suffisant pour améliorer la qualité du spectre, et peut même le dégrader si N reste trop petit. La Figure 8 nous permet de confirmer cela. On remarque qu'avec l'augmentation de N on a une reconstruction du signal plus "complète".

Choix optimal de T_e et N pour une détection précise du pic à $f_0 = 1{,}6$ Hz

Pour détecter parfaitement une composante fréquentielle à $f_0 = 1{,}6$ Hz, il faut choisir un couple (T_e, N) tel que la **résolution spectrale** vérifie :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{T_e \cdot N}$$

et que :

$$f_0 = k \cdot \Delta f \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

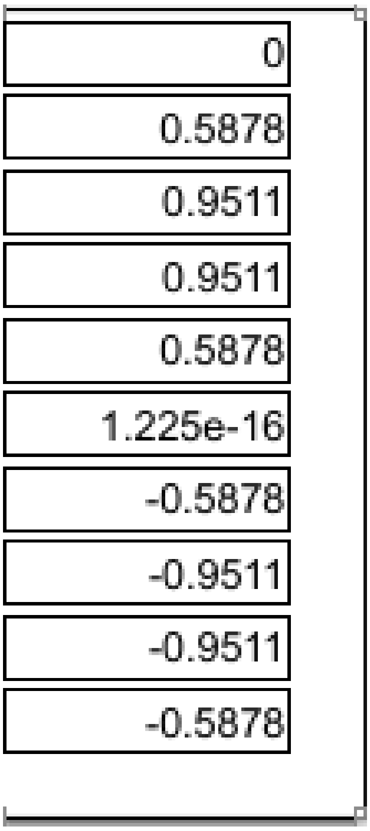
On choisit ici :

$$T_e = \frac{1}{16} \Rightarrow f_e = 16 \text{ Hz}, \quad N = 10$$

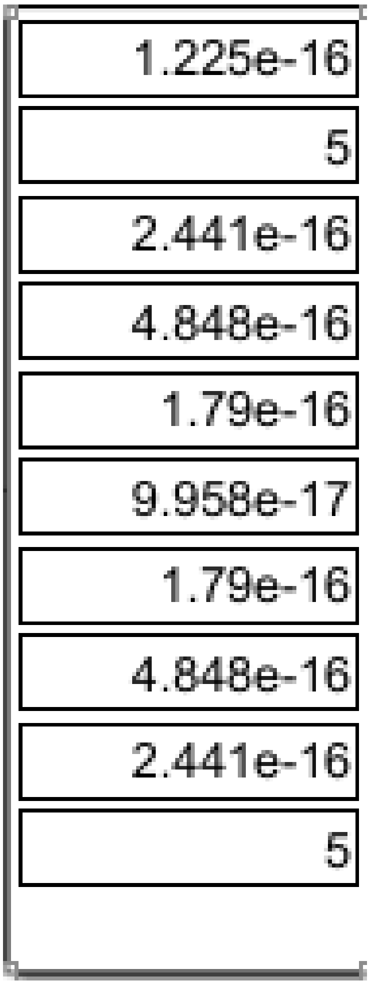
$$\Delta f = \frac{16}{10} = 1{,}6 \text{ Hz} \Rightarrow f_0 = 1{,}6 \text{ Hz} = 1 \cdot \Delta f$$

Le choix est donc **parfaitement adapté** à la détection de f_0.

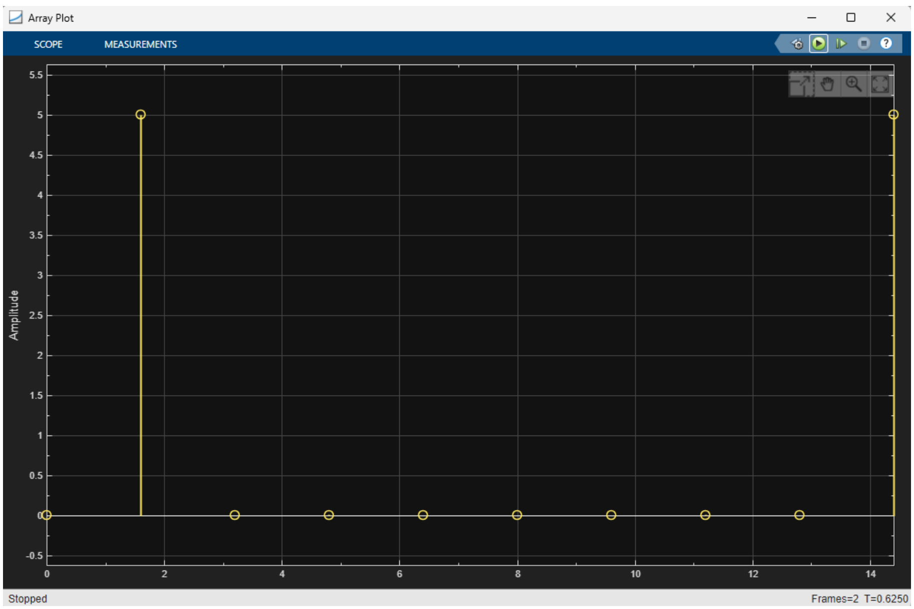
Résultats Simulink :



(a) Échantillons m) pour $T_e = \frac{1}{16}$, $N = 10$.



(b) Valeurs simulées $|X[n]|$ (bloc `Display`).



(c) Spectre numérique simulé pour $f_0 = 1{,}6$ Hz.

FIGURE 9 – Résultats pour un couple optimal ($T_e = \frac{1}{16}$, $N = 10$).

Observation :

- On observe un pic net à la position $n = 1$, ce qui correspond à $f = 1 \cdot \Delta f = 1{,}6$ Hz
- Tous les autres coefficients sont quasi-nuls (valeurs proches de zéro à 10^{-16}), validant la détection parfaite

Conclusion : Le couple ($T_e = \frac{1}{16},\ N = 10$) permet de positionner précisément $f_0 = 1{,}6$ Hz sur un coefficient de la TFD. Il constitue donc un **choix optimal** pour détecter cette fréquence.