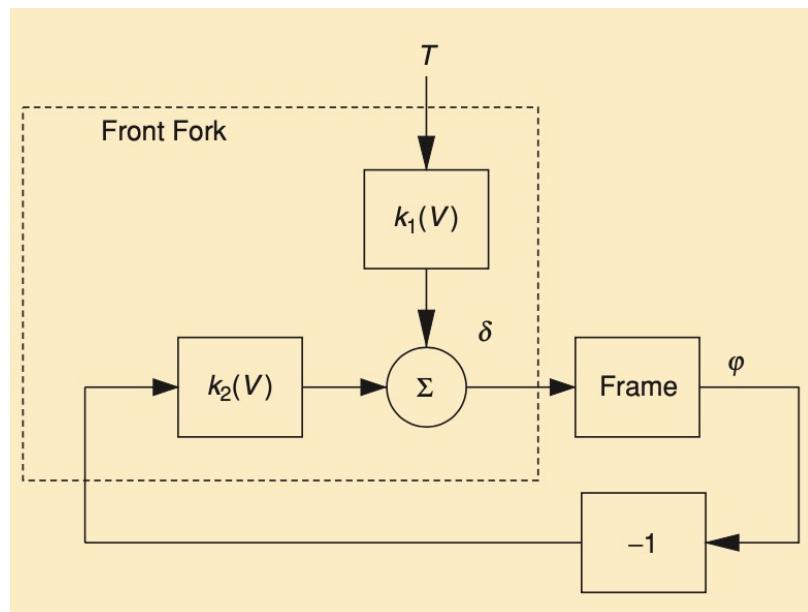


قسمت اول :

$$\begin{aligned} G_{\varphi\delta}(s) &= \frac{V(Ds + mVh)}{b(Js^2 - mgh)} \\ &= \frac{VD}{bJ} \frac{s + \frac{mVh}{D}}{\frac{s^2}{J} - \frac{mgh}{J}} \approx \frac{aV}{bh} \frac{s + \frac{V}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}. \end{aligned}$$

در ابتدا مدل ساده مرتبه دوم را داریم که با تابع تبدیل روبه‌رو مدل می‌شود که ناپایدار است و نمیتواند دوچرخه سواری بدون دست را توصیف کند و با کنترل کننده اکتیو و به ازای سرعت‌های از حدی بیشتر پایدار می‌شود.



مدل با در نظر گرفتن بخش جلویی با تغییراتی کوچک در زوایا همراه است و میتواند تحت شرایطی خودش پایدار شود که به ازای سرعت زیر به پایداری میرسد و در بلاک دیاگرام روبه‌رو مدل فیدبکی دیده می‌شود.

$$V_{sa} = \sqrt{bg \cot \lambda}$$

همچنین اثر کنترل دستی به صورت یک کشتاور خطی به فرم $\tau = -K\Phi$ می‌باشد که میتواند با در نظر گرفتن تاخیر انسان پیچیده‌تر هم بشود و اثرات ژیروسکپی که با یک جمله سومی با مشتق زاویه فی در رابطه گشتاور و سرعت وارد می‌شود.

$$\delta = -(kk_1(V) + k_2(V))\varphi.$$

$$\delta = k_1(V)T - k_2(V)\varphi - k_3(V)\frac{d\varphi}{dt}$$

هدایت با چرخ های عقب نیز مدلی است که در مقاله ادعا میشد که امنیت بیشتری دارند اما بر اساس ازمایش انجام شده توسط NHSA به این نتیجه رسید که سیستم در عمل حتی توسط دوچرخه سواران حرفه‌ای نیز غیر قابل استفاده و کنترل است و سیستم همانطور که در ادامه گزارش میبینیم ناپایدار است.

بررسی نحوه مانور در حالات مختلف : بررسی هدایت و کج شوندگی و گشتاور را انجام میدهد که با بدست اوردن تابع تبدیل گشتاور T به انحراف η مشخص میشود که رابطه زیر را دارد.

$$G_{\eta T}(s) = \frac{k_1(V)V^2}{b} \frac{s^2 - \frac{mgh}{J}}{s^2 \left(s^2 + \frac{k_2(V)VD}{bJ}s + \frac{mgh}{J} \left(\frac{V^2}{V_c^2} - 1 \right) \right)}$$

در نهایت بررسی اثر خم شدن دوچرخه سوار را داریم که منجر به سیستم با دو ورودی با معادله زیر میشود و در ادامه شبیه سازی شده است.

$$\begin{aligned} J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{DVk_2(V)}{b} \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{mV^2hk_2(V)}{b} - mgh \right) \varphi \\ = \frac{DVk_1(V)}{b} \frac{dT}{dt} + \frac{mV^2k_1(V)}{b} T - J_r \frac{d^2\phi}{dt^2} + m_r g h_r \phi. \end{aligned}$$

همچنین با مدل سازی دینامیکی دوچرخه به مدل مرتبه چهار میرسیم که معادله زیر آن را توصیف میکند و نزدیک تر به واقعیت است.

$$M \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + CV \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + (K_0 + K_2 V^2) \begin{pmatrix} \varphi \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$$

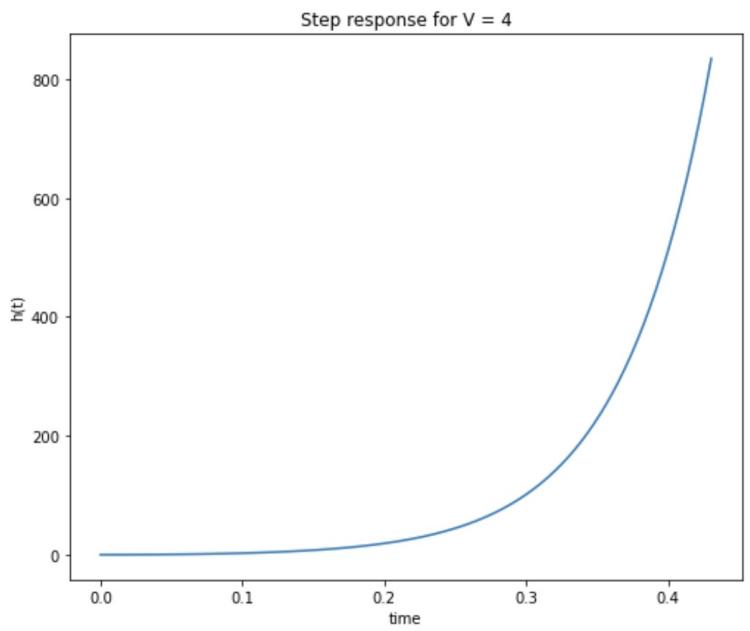
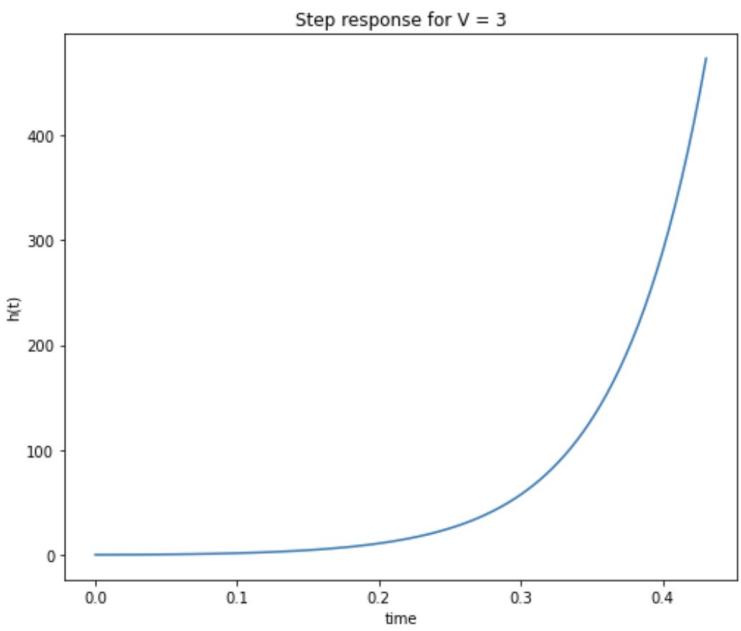
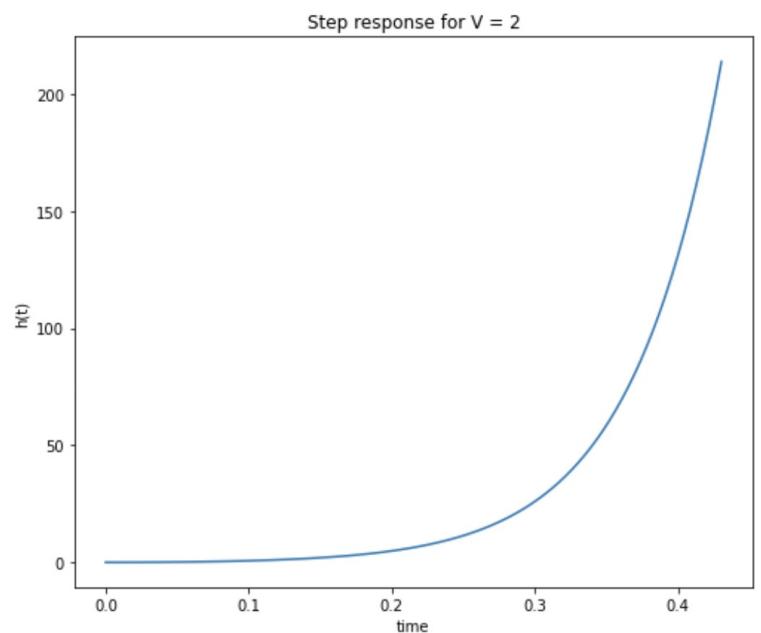
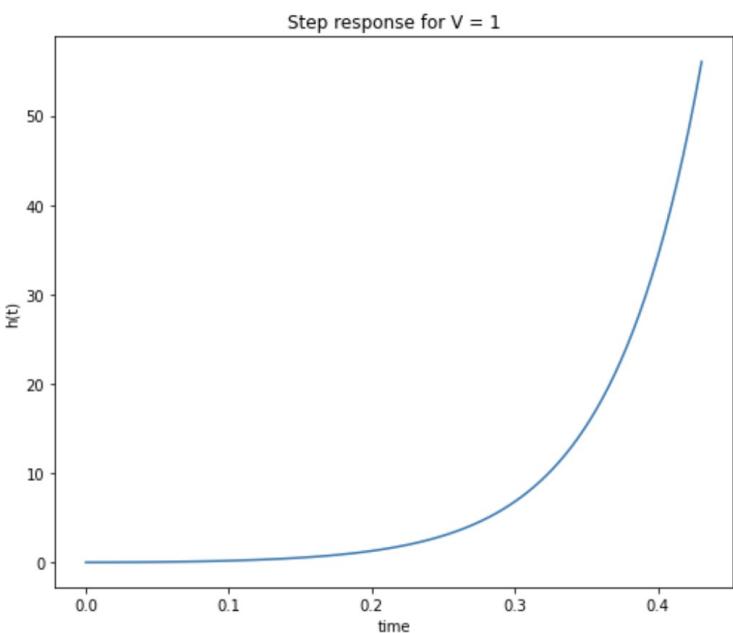
و البته در ادامه اثرات غیر خطی بررسی شده که از محتوای این درس و پروژه خارج است.

قسمت دوم - مدل سازی چهار مدل که در قسمت اول کد پایتون اورده شده و پاسخ پله ان ها به ازای چهار سرعت مختلف نمایش داده شده است.

$$G_{\varphi\delta}(s) = \frac{V(Ds + mVh)}{b(Js^2 - mgh)}$$

$$= \frac{VD}{bJ} \frac{s + \frac{mVh}{D}}{\frac{s^2 - \frac{mgh}{J}}{h}} \approx \frac{aV}{bh} \frac{s + \frac{V}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}.$$

```
G1 = tf([v*D, m*h*v**2], [b*J, 0, -b*m*g*h]);
```

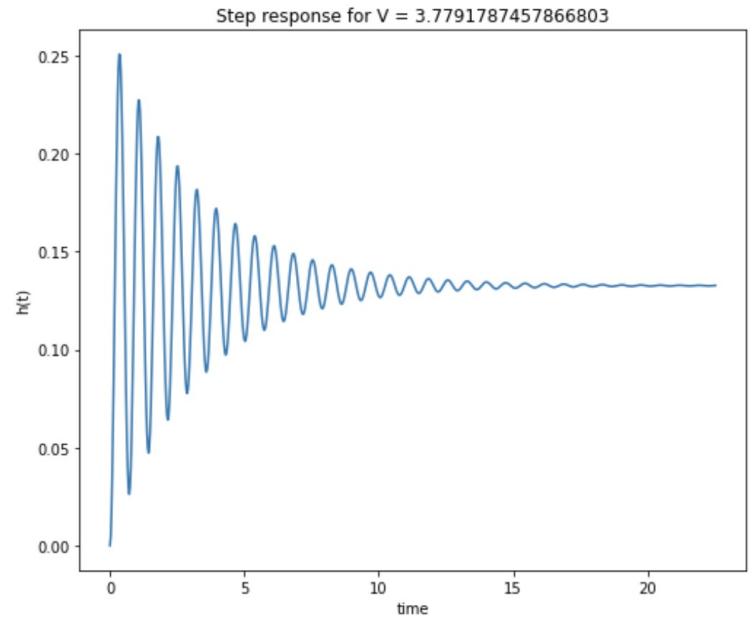
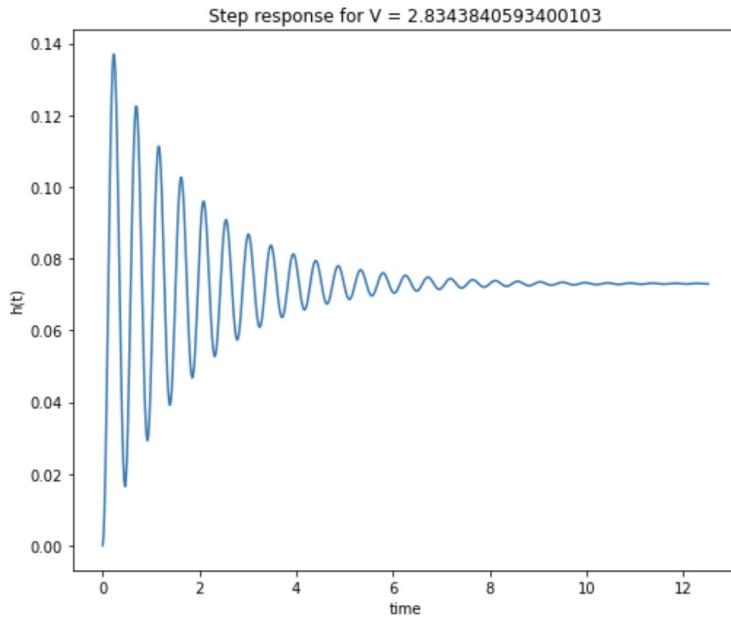
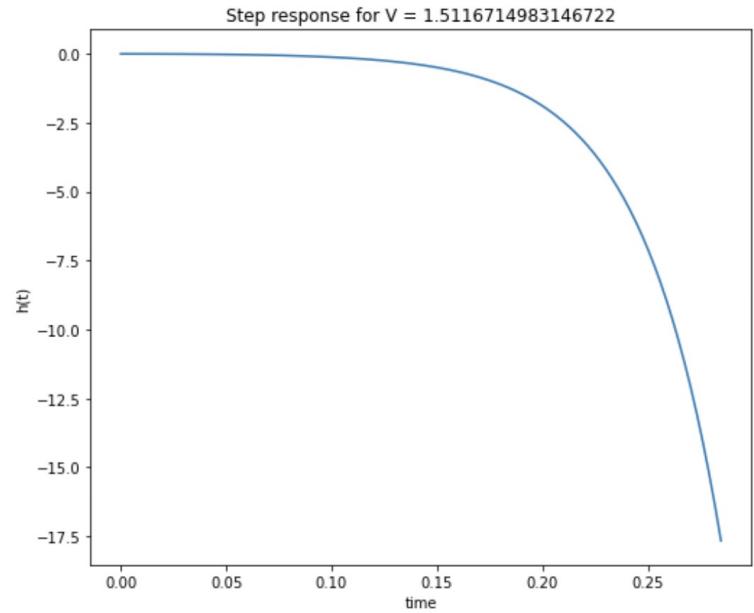
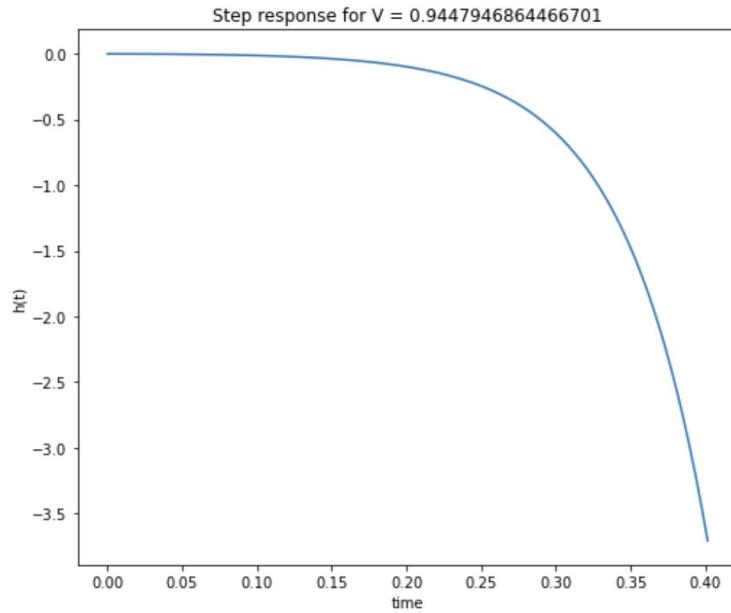


$$\begin{aligned}
J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{DVg}{V^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{mg^2(bh \cos \lambda - ac \sin \lambda)}{V^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda} \varphi \\
= \frac{DVb}{acm(V^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} \frac{dT}{dt} + \frac{b(V^2 h - acg)}{ac(V^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} T.
\end{aligned} \tag{15}$$

```

numer = [D*v*b/(a*c*m)/(v**2*np.sin(lamb)-b*g*np.cos(lamb)), b*(h*v**2-a*c*g)/(a*c)/(v**2*np.sin(lamb)-b*g*np.cos(lamb))
denum = [J, D*v*g/(v**2*np.sin(lamb)-b*g*np.cos(lamb)), m*g**2*(b*h*np.cos(lamb)-a*c*np.sin(lamb))/(v**2*np.sin(lamb))
G2 = tf(numer,denum);

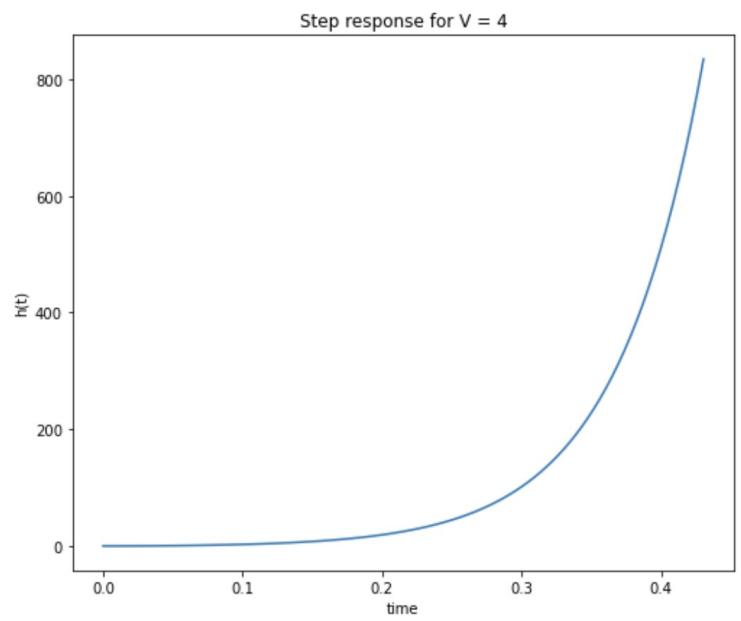
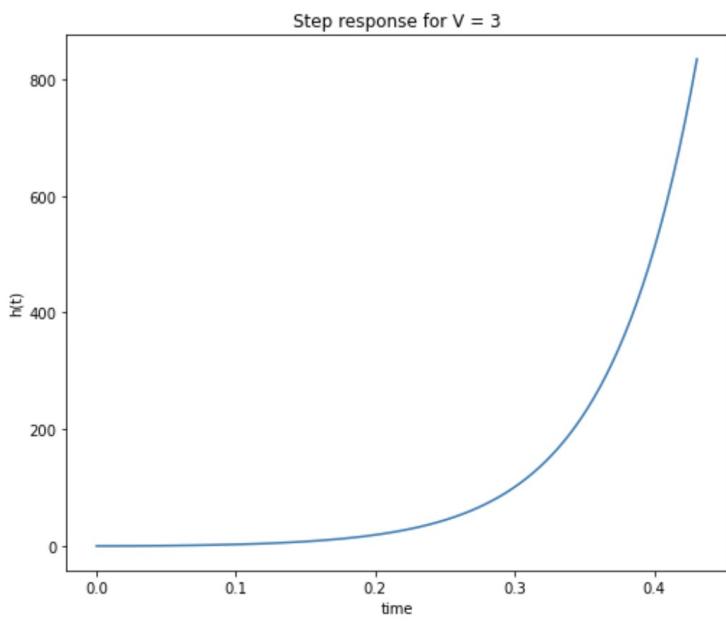
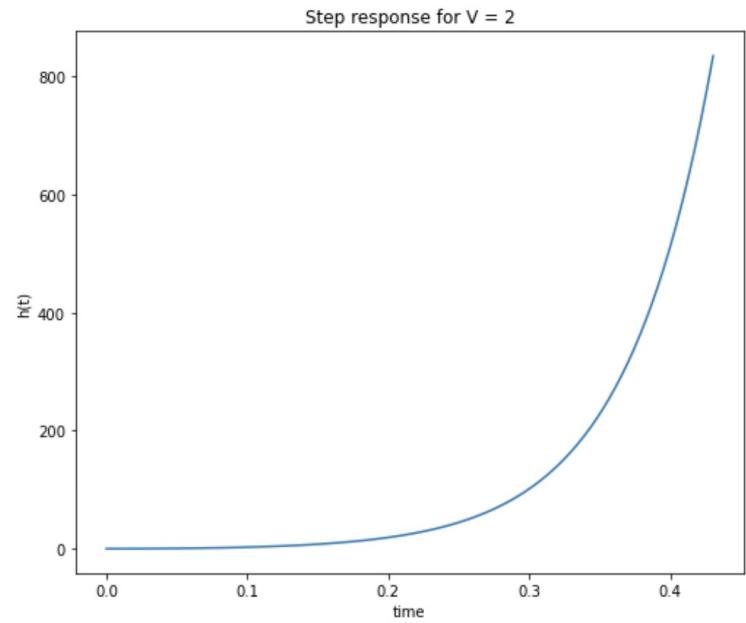
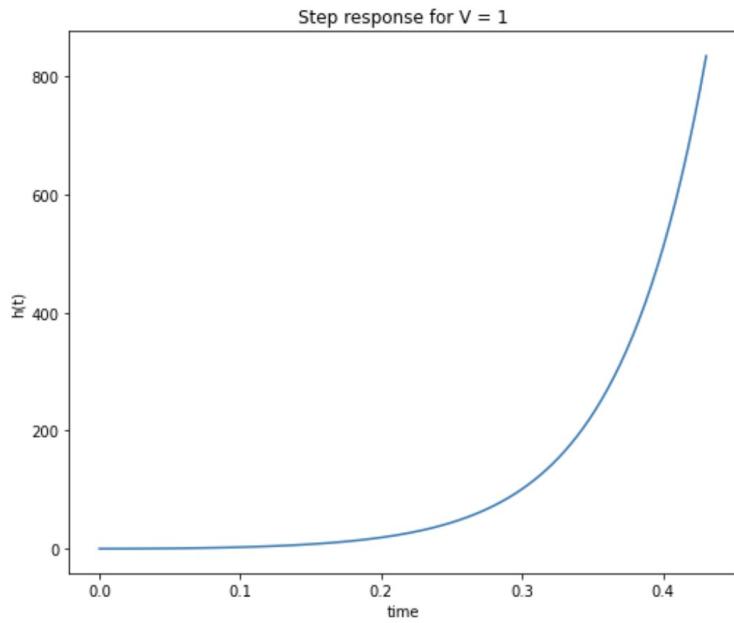
```



Bicycle with rear-wheel steering

$$\begin{aligned}
 G_{\varphi\delta}(s) &= \frac{-V D s + m V^2 h}{b(J s^2 - m g h)} \\
 &= \frac{V D}{b J} \frac{-s + \frac{m V h}{D}}{s^2 - \frac{m g h}{J}} \approx \frac{a V}{b h} \cdot \frac{-s + V/a}{s^2 - g/h},
 \end{aligned}$$

```
G3 = tf([-v*D, m*h*v**2], [b*J, 0, -b*m*g*h]);
```

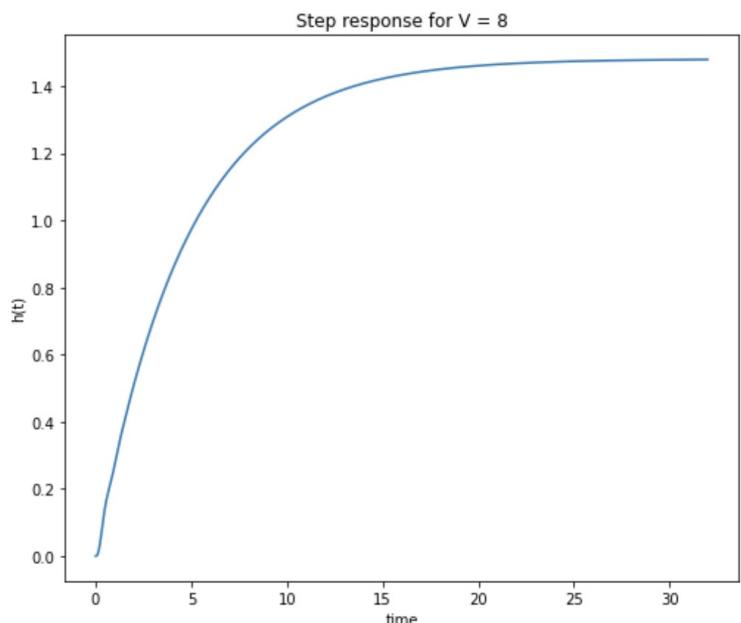
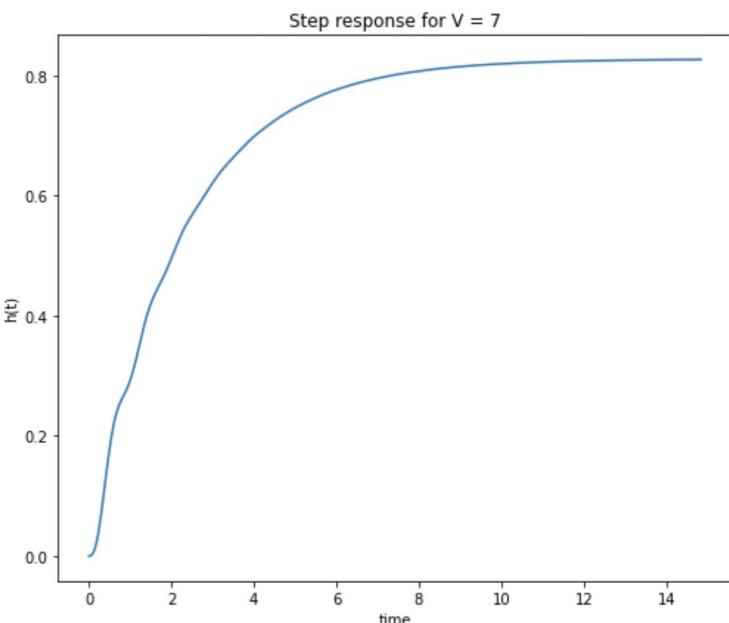
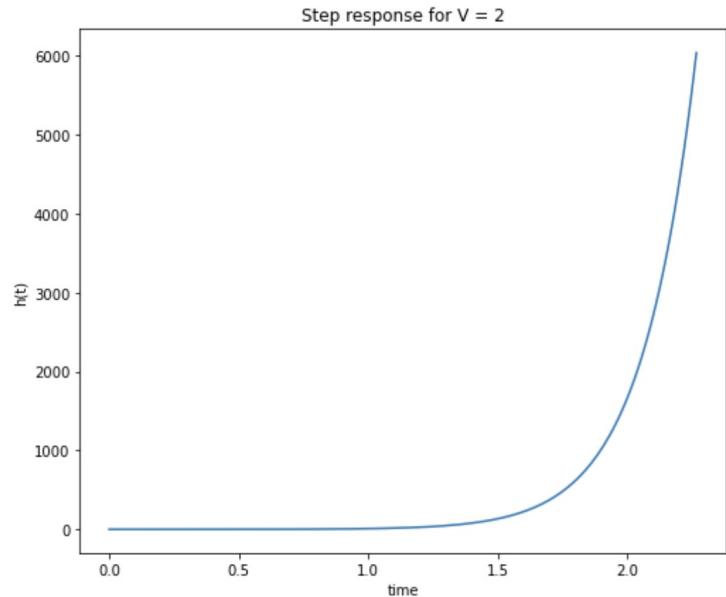
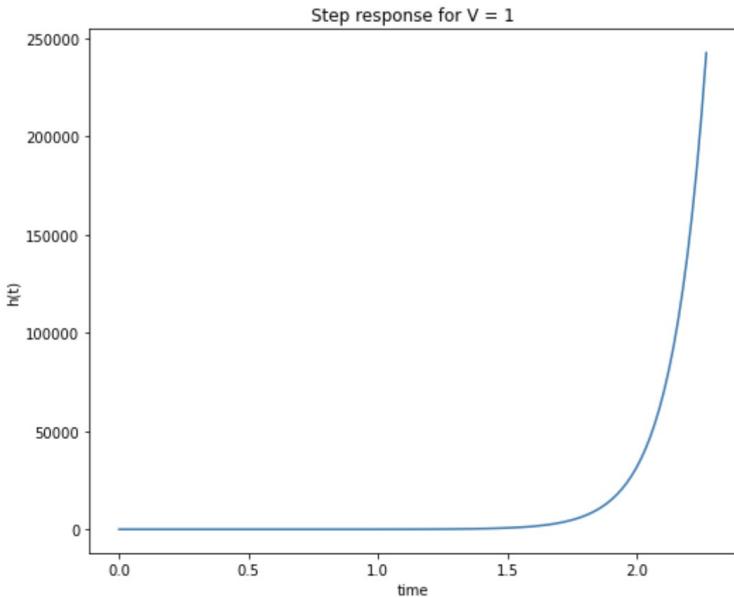


Linear fourth-order model

$$M \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + CV \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + (K_0 + K_2 V^2) \begin{pmatrix} \varphi \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$$

```
M = np.array([[96.8, -3.57], [-3.57, .258]]);  
C = np.array([[0, -50.8], [.436, 2.2]]);  
K0 = np.array([[-901, 35.17], [35.17, -12.03]]);  
K2 = np.array([[0, -87.06], [0, 3.5]]);
```

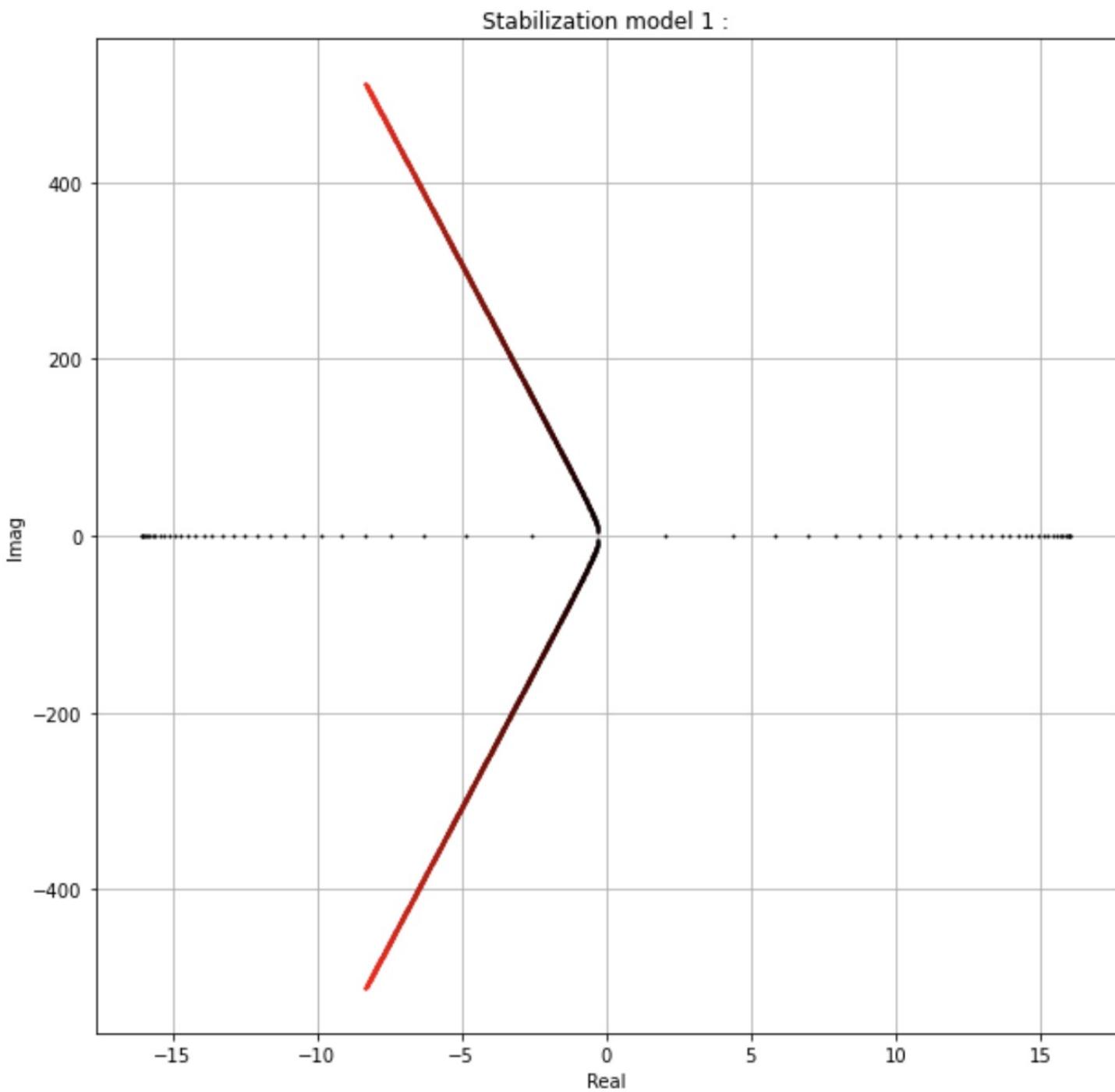
```
T11 = tf([M[0,0], C[0,0]*v, K0[0,0]+K2[0,0]*v**2],[1]);  
T12 = tf([M[0,1], C[0,1]*v, K0[0,1]+K2[0,1]*v**2],[1]);  
T21 = tf([M[1,0], C[1,0]*v, K0[1,0]+K2[1,0]*v**2],[1]);  
T22 = tf([M[1,1], C[1,1]*v, K0[1,1]+K2[1,1]*v**2],[1]);  
G4 = 1/(T21 - T11*T22/T12);
```



قسمت سوم - نمودار قطب های کلوز لوپ به ازای سرعت های مختلف رسم شده که هرچه به سمت قرمز میرود سرعت بیشتر میشود.

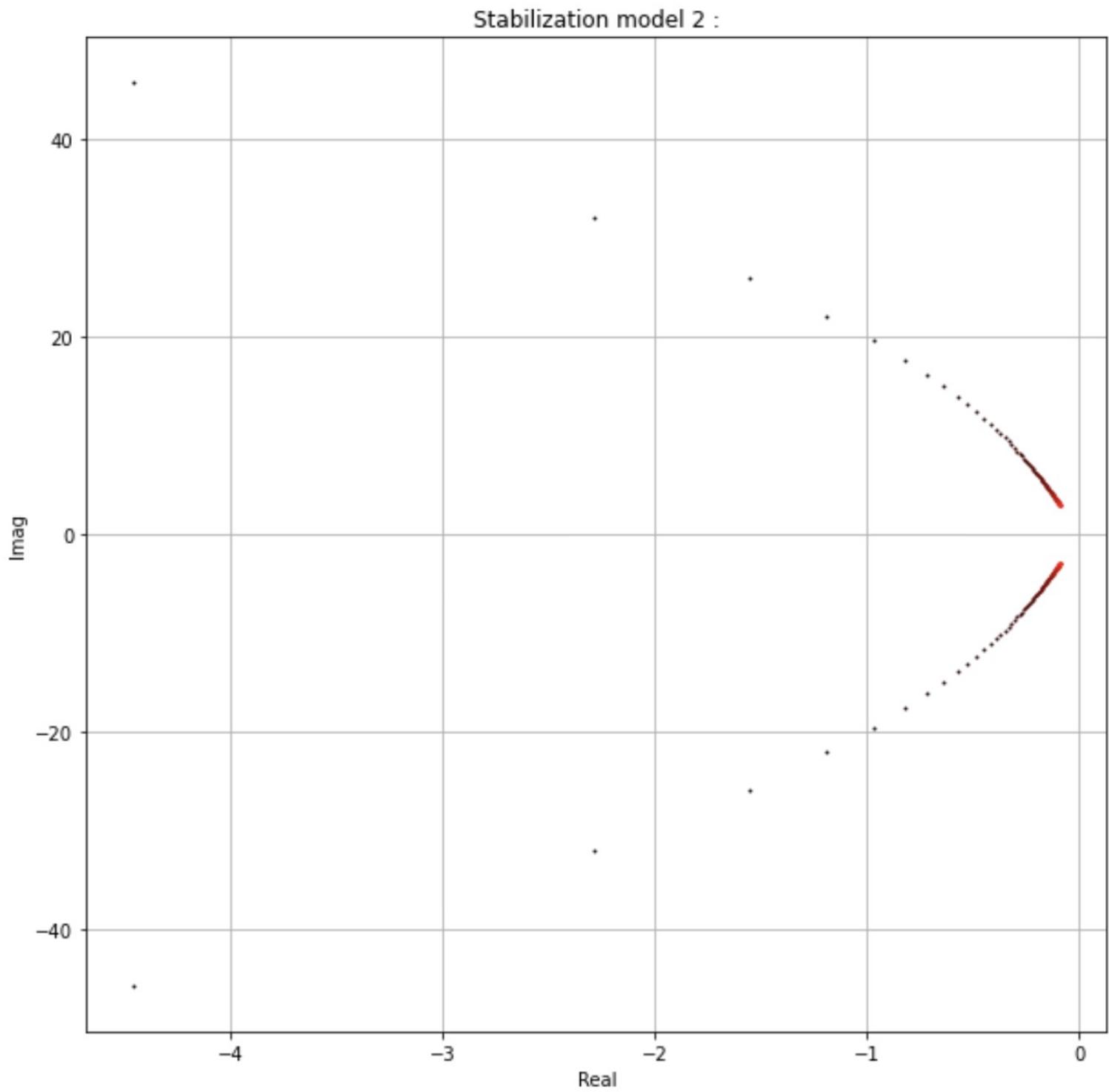
Simple second order model without a front fork

همانطور که در شکل میبینیم به ازای سرعت های کم سیستم ناپایدار است اما به ازای سرعت های از حدی بیشتر پایدار میشود.



Simple second order model with a front fork

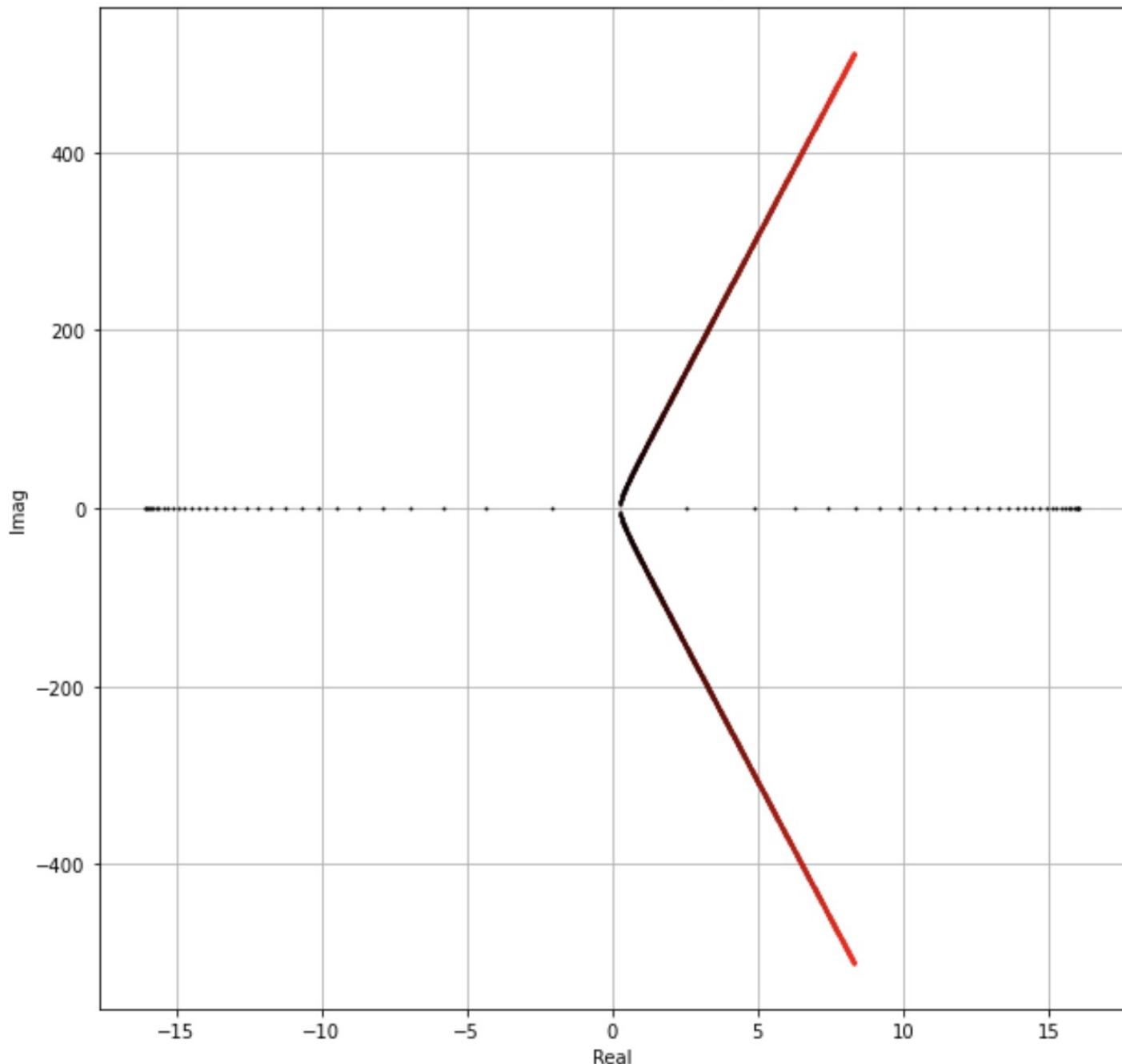
به ازای سرعت های بیشتر از سرعت حد $V_c = \sqrt{bg\cot(\lambda)}$ سیستم پایدار است.



Bicycle with rear-wheel steering

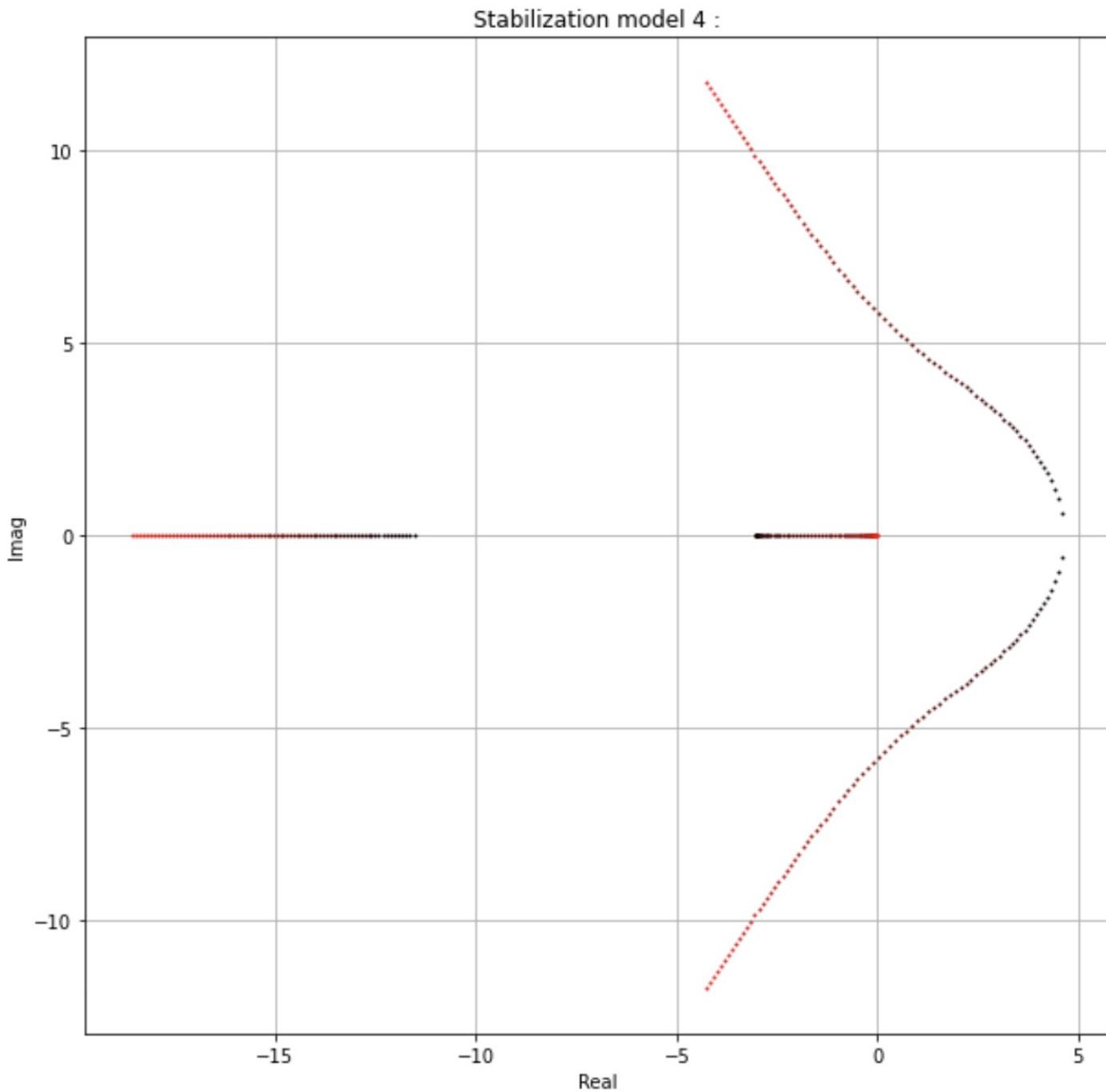
با توجه به مقاله و شبیه سازی زیر نه به ازای سرعت های کم و نه با افزایش سرعت به پایداری نمیرسیم و سیستم به ازای هر سرعتی ناپایدار است.

Stabilization model 3 :

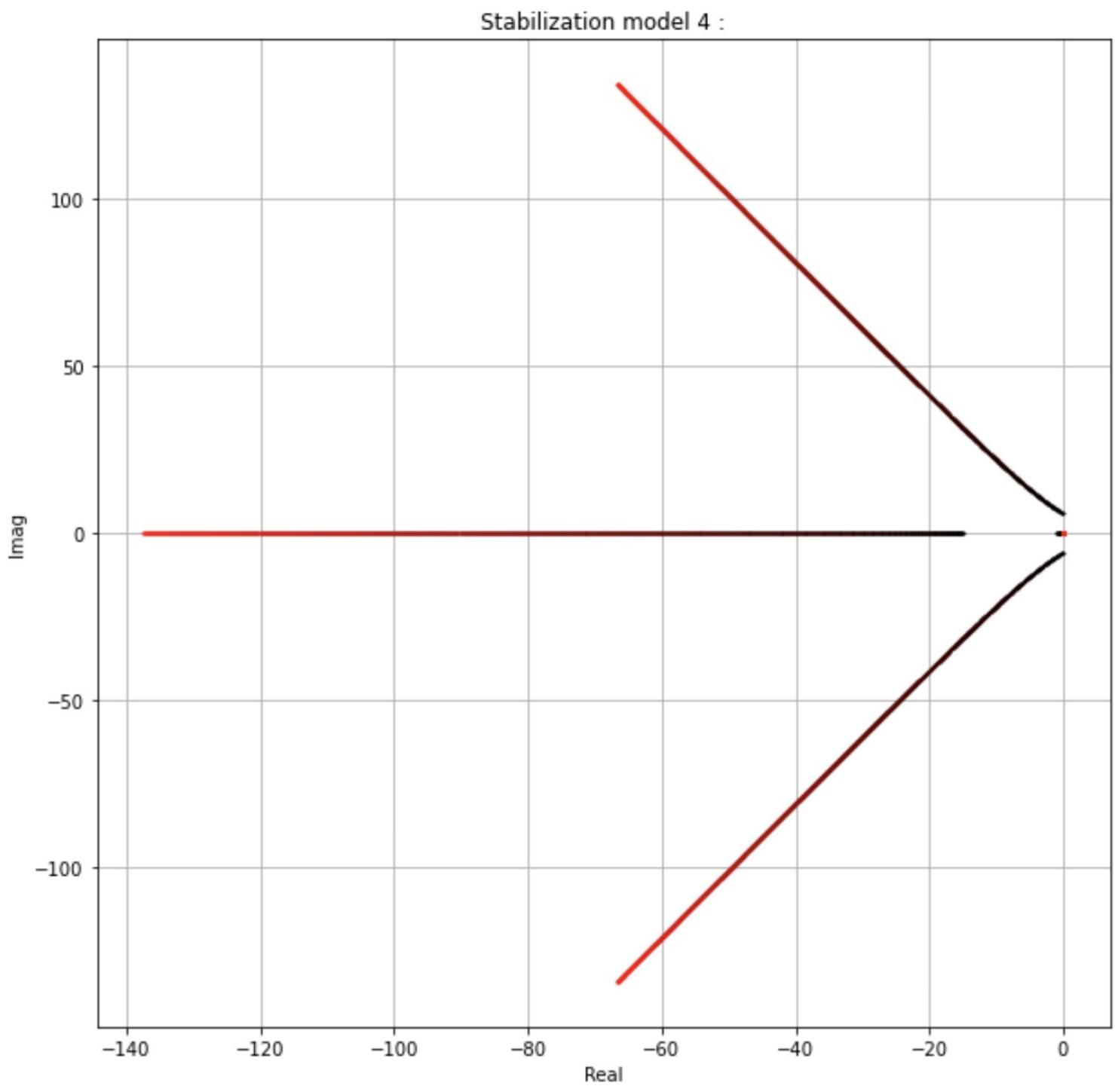


Linear fourth-order model

با توجه به شکل سیستم به ازای سرعت های کم ناپایدار و به ازای سرعت های بیشتر از مقداری پایدار است که در صفحه بعد آورده شده است.



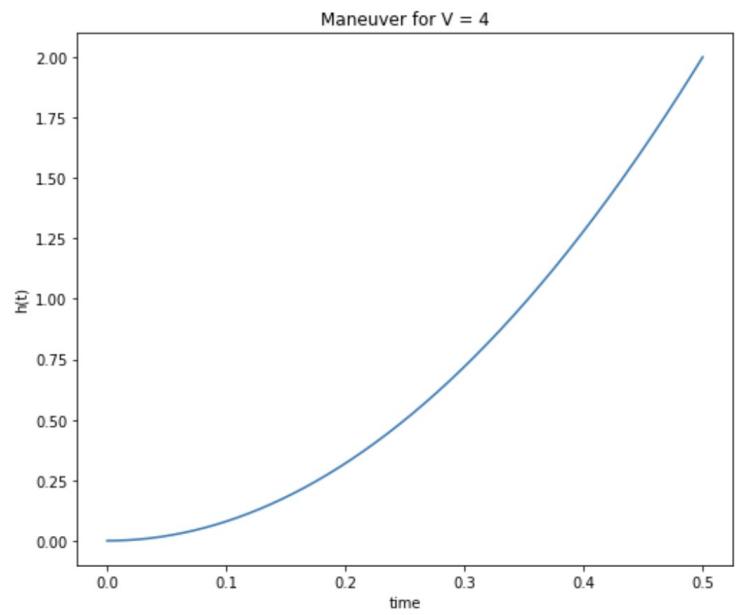
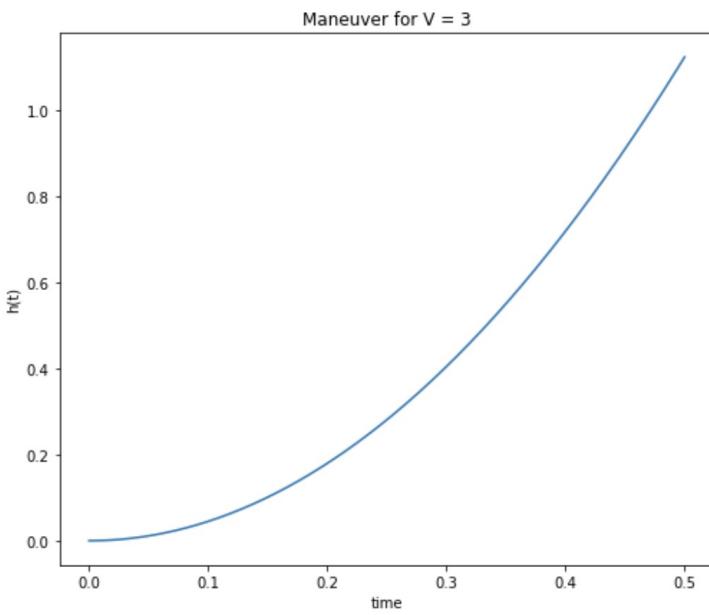
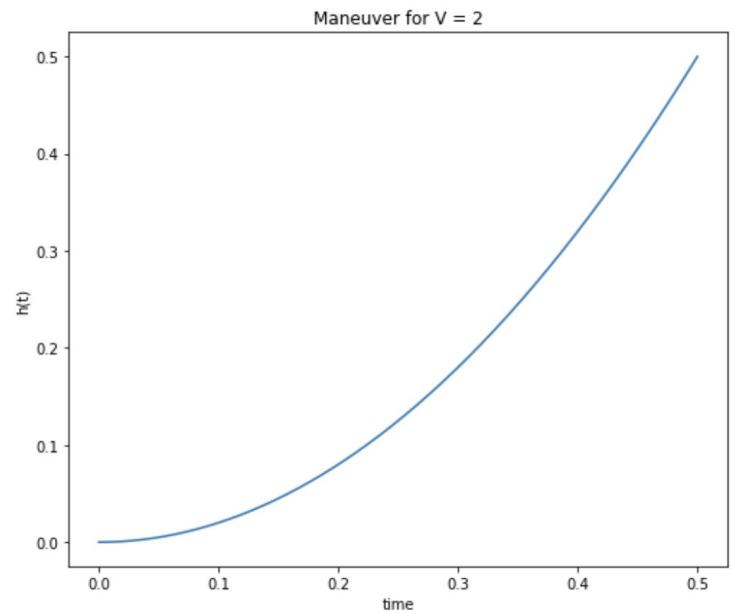
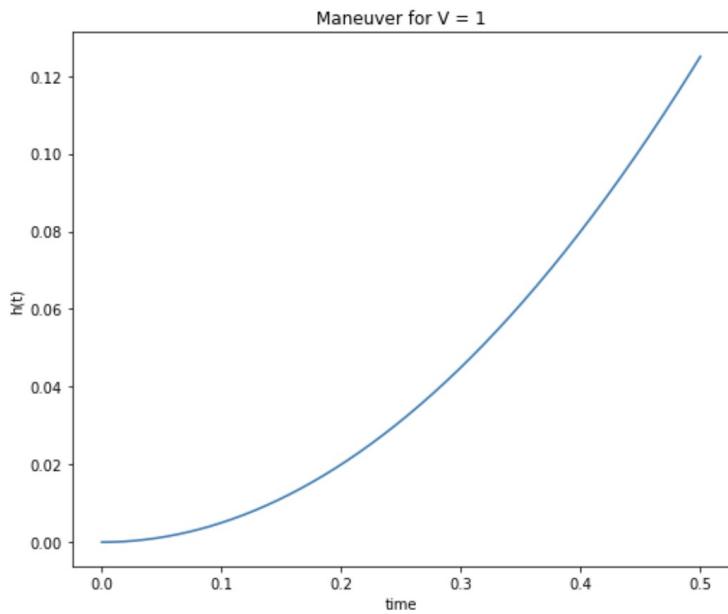
سیستم مرتبه چهار به ازای سرعت های بیشتر از ۶ پایدار است که در پاسخ پله قسمت اول دیدیم.



Simple second order model without a front fork

$$G_{\eta\delta}(s) = \frac{V^2}{bs^2}.$$

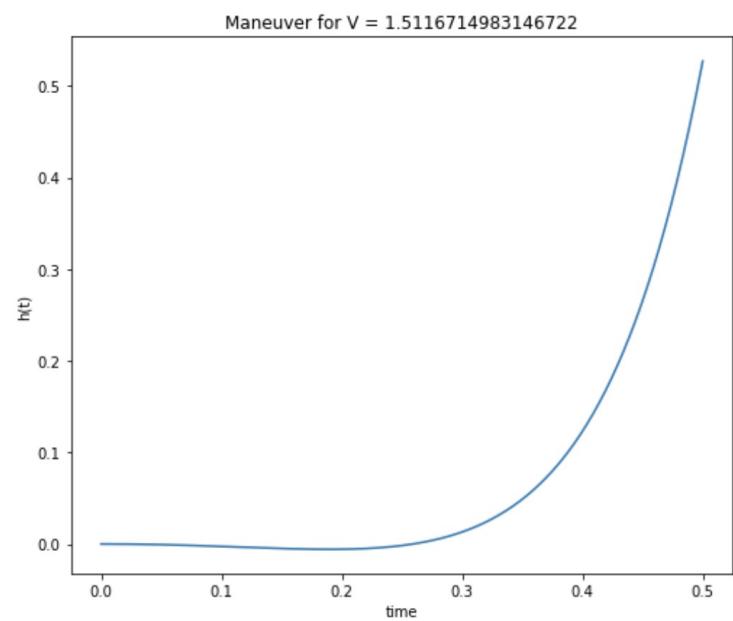
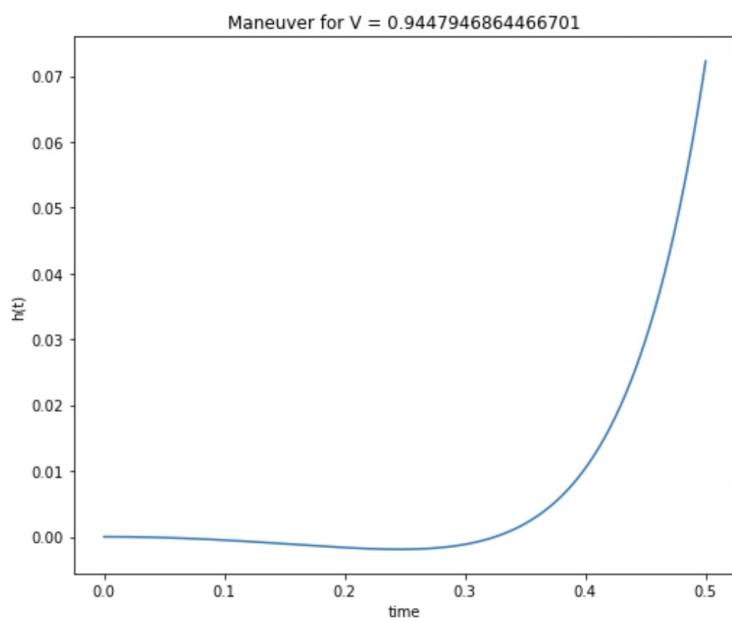
```
M1 = tf([v**2], [b, 0, 0]);
```



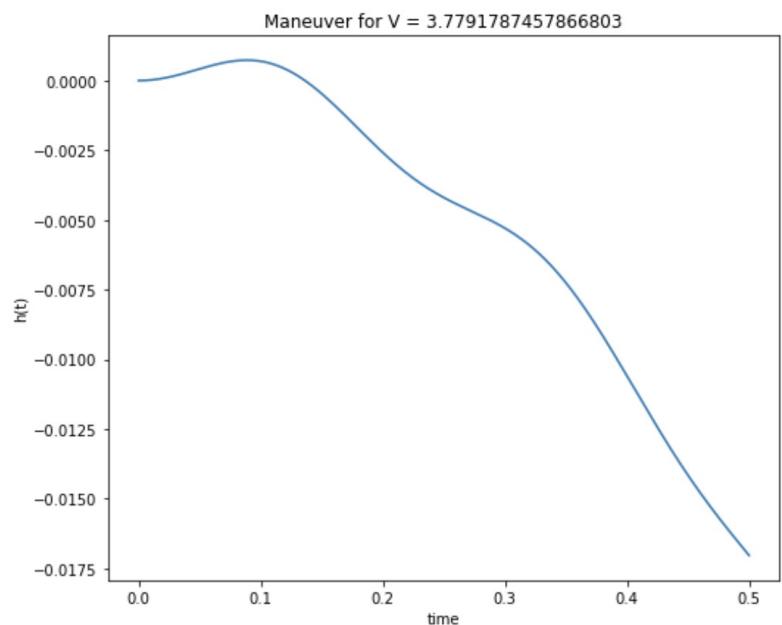
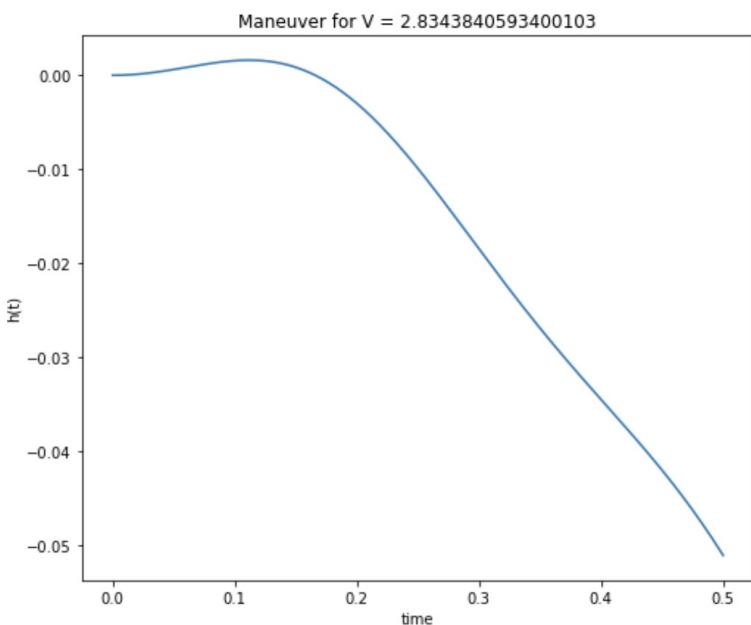
Simple second order model with a front fork

$$G_{\eta T}(s) = \frac{k_1(V)V^2}{b} \frac{s^2 - \frac{mgh}{J}}{s^2 + \frac{k_2(V)VD}{bJ}s + \frac{mgh}{J} \left(\frac{V^2}{V_c^2} - 1 \right)}$$

```
k1 = b**2/(v**2*np.sin(lamb)-b*g*np.cos(lamb))/m/a/c/np.sin(lamb);
k2 = b*g/(v**2*np.sin(lamb)-b*g*np.cos(lamb));
M2 = tf([k1*v**2/b, 0, -k1*v**2/b*m*g*h/J], [1, k2*v*D/b/J, m*g*h/J*(v**2/Vc**2-1), 0, 0]);
V = [0.5*Vc, 0.8*Vc, 1.5*Vc, 2*Vc];
```



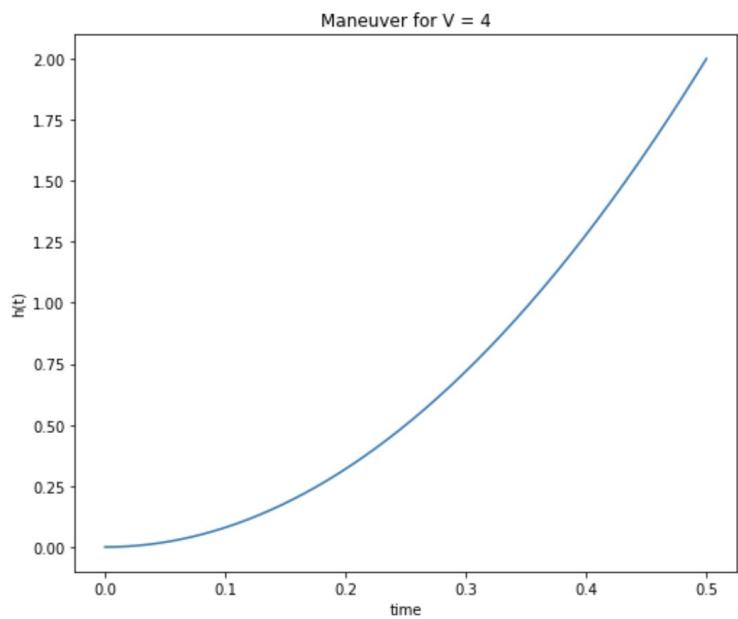
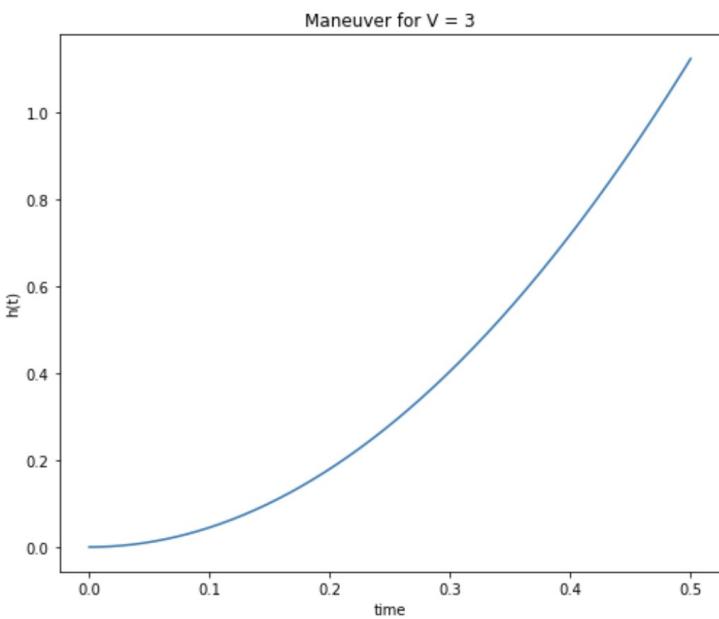
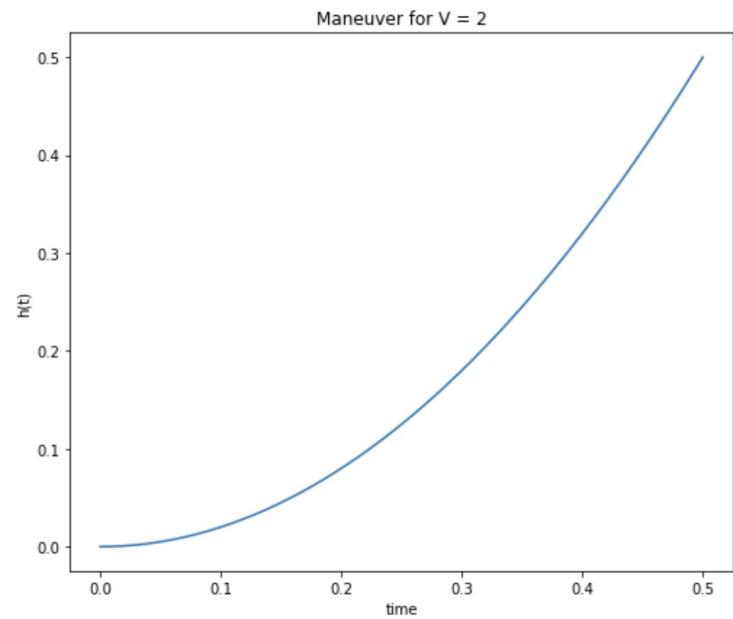
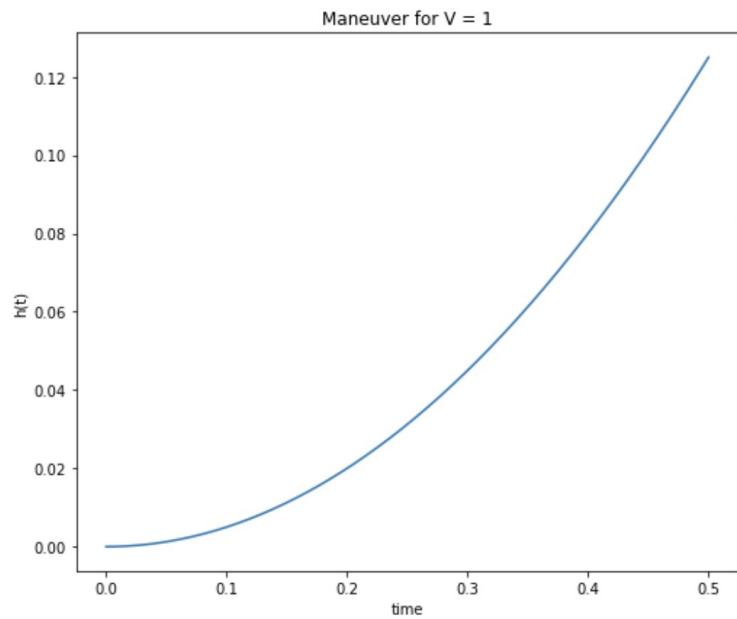
که در حالت پایدار ابتدا هم علامت با گشتاور اعمالی و سپس در جهت مخالف انحراف پیدا میکند.



Bicycle with rear-wheel steering

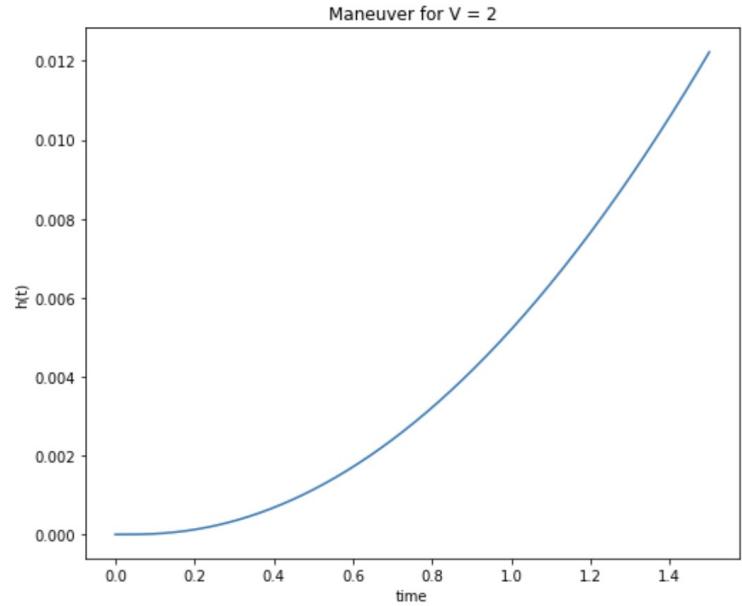
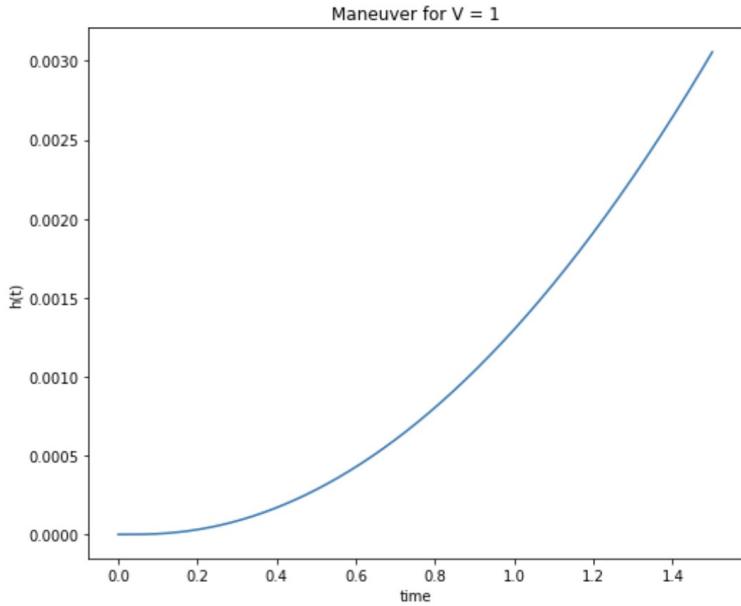
```
M3 = tf([v**2], [b, 0, 0]);
```

که در این حالت کاملا ناپایداریم.

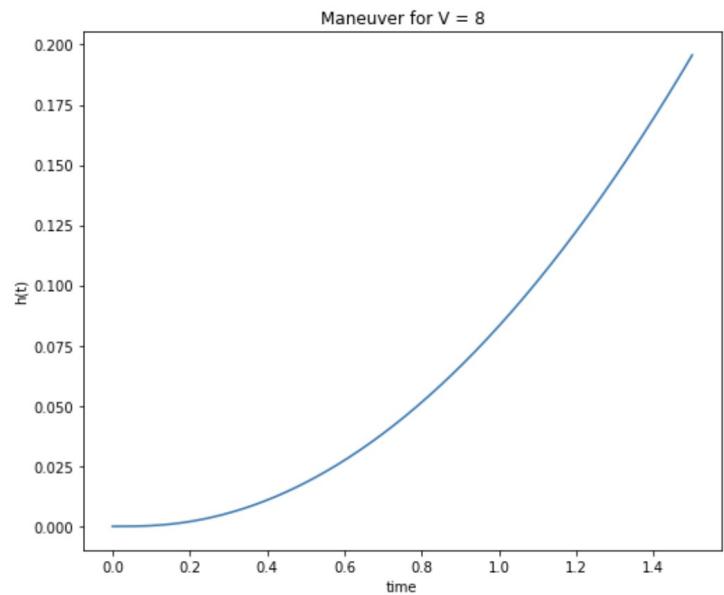
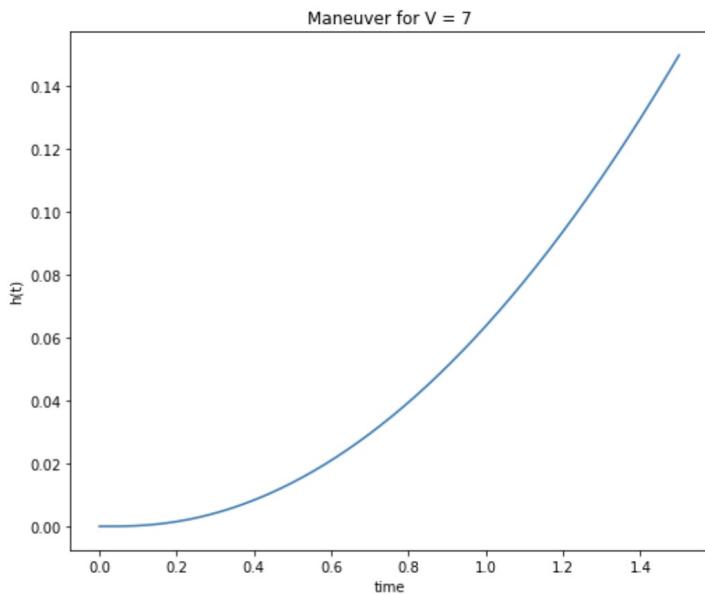


Linear fourth-order model

```
M4 = tf([v**2], [b, 0, 0])/T22;
```

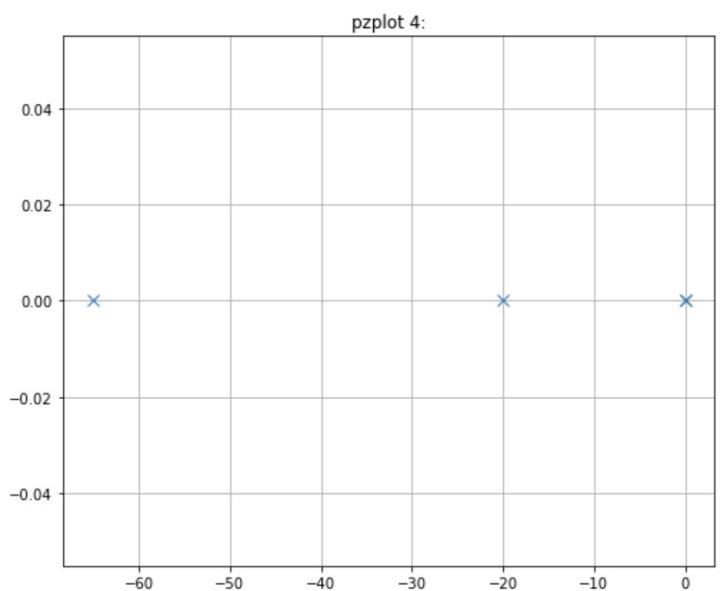
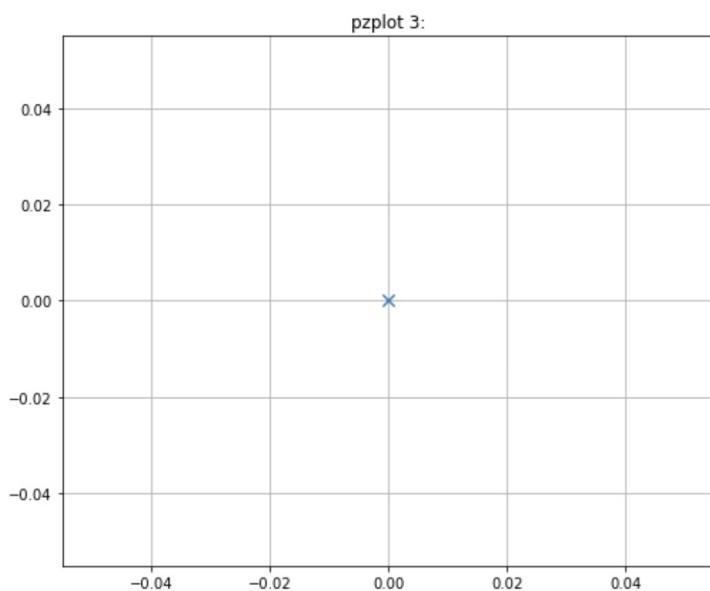
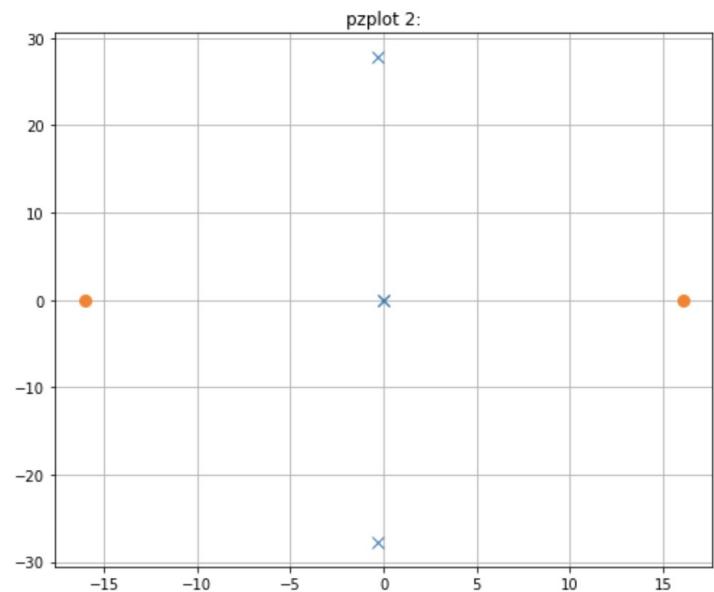
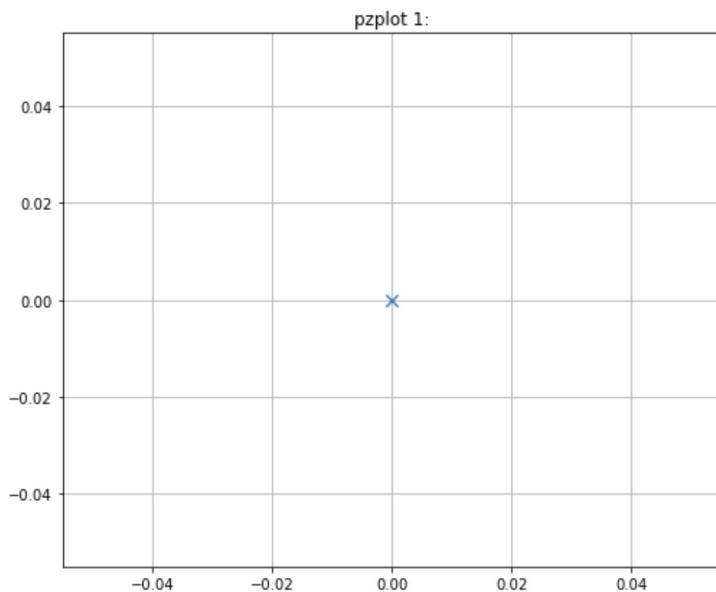


و همچنین برای سرعت های پایدار :



قسمت پنجم - توضیح بخش قبل با نمودار صفر و قطب ها

در حالت دوم صفر در سمت راست داریم که دلیل تغییر جهت پاسخ مانور است و در سه حالت دیگر به دلیل وجود قطب در صفر ناپایداری خواهیم داشت.

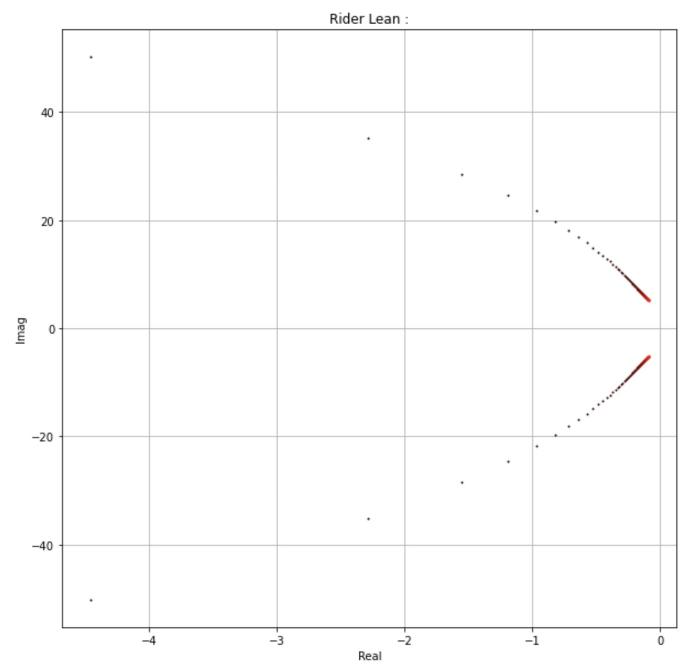
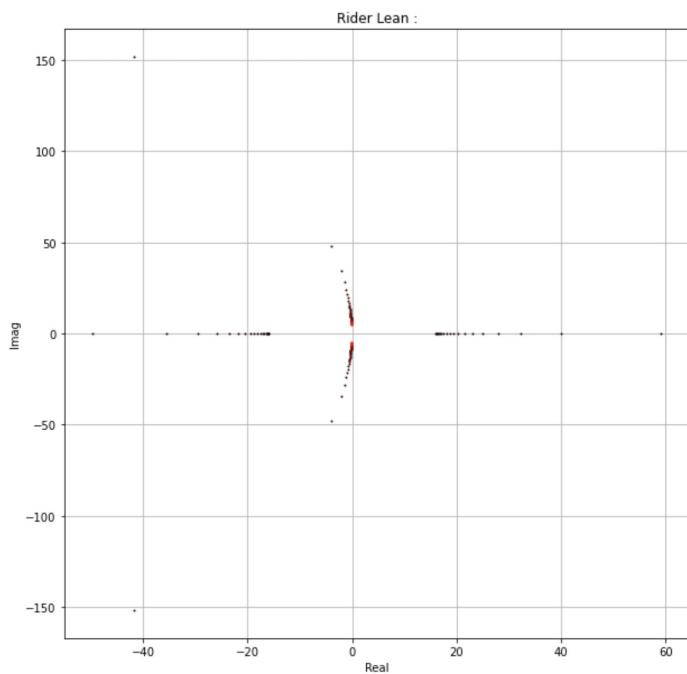


قسمت ششم - بررسی خم شدگی دوچرخه سوار

همانطور که در قسمت اول اورده شد معادله به شکل زیر است که گشتاور را صفر میگیریم تا تنها اثر خم شدن را در نظر بگیریم.

$$J \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{DVk_2(V)}{b} \frac{d\phi}{dt} + \left(\frac{mV^2hk_2(V)}{b} - mgh \right) \phi = \frac{DVk_1(V)}{b} \frac{dT}{dt} + \frac{mV^2k_1(V)}{b} T - J_r \frac{d^2\phi}{dt^2} + m_r g h_r \phi$$

نمودار روت-لوکاس که به ازای سرعت های از حدی بیشتر پایدار است.

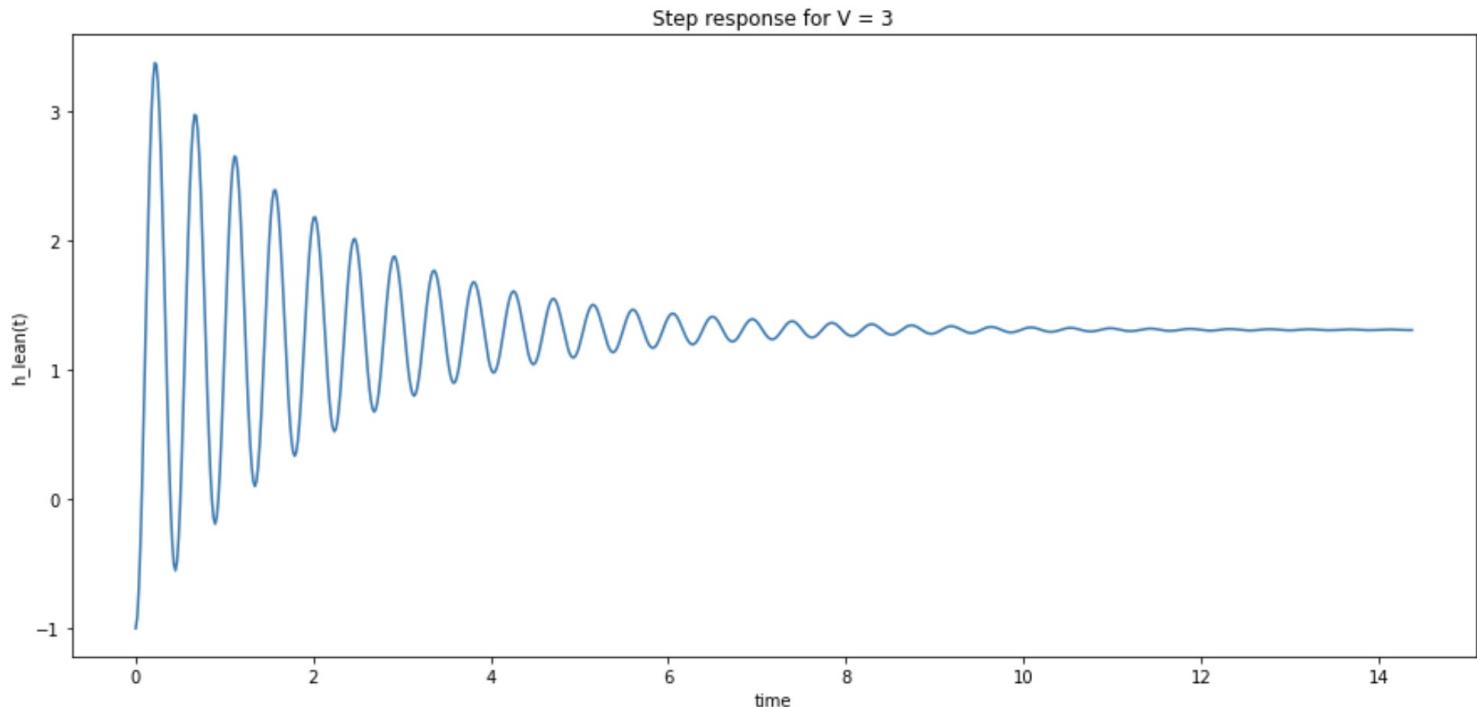


```

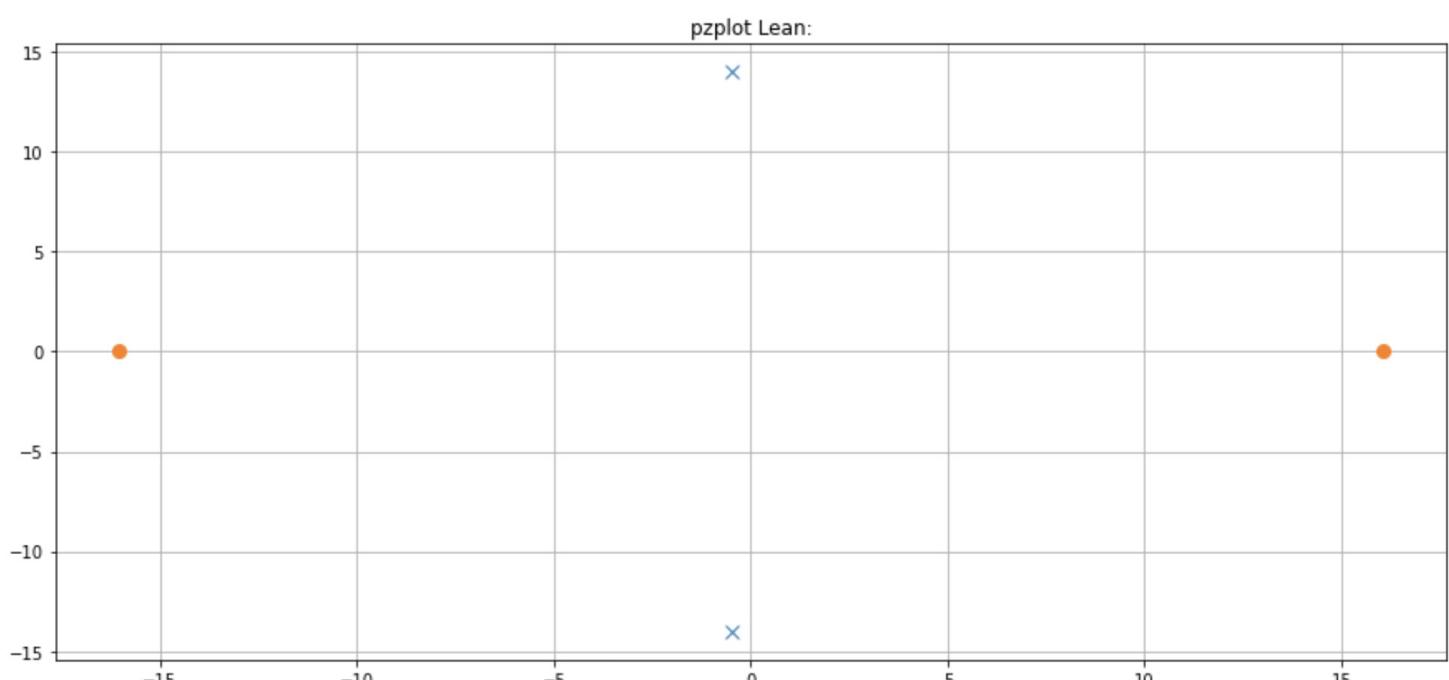
v = 3;# more than Vc to be stable
k1 = b**2/(v**2*np.sin(lamb)-b*g*np.cos(lamb))/m/a/c/np.sin(lamb);
k2 = b*g/(v**2*np.sin(lamb)-b*g*np.cos(lamb));
G_lean = tf([-J, 0, m*g*h],[J, D*v*k2/b, m*v**2*h*k2/b-m*g*h]);# T = 0
[t, h_lean] = control.step_response(G_lean)

```

پاسخ ضربه به ازای سرعت ۳ که پایدار است، که با مقداری نوسان در نهایت به مقداری ثابت میل میکند.

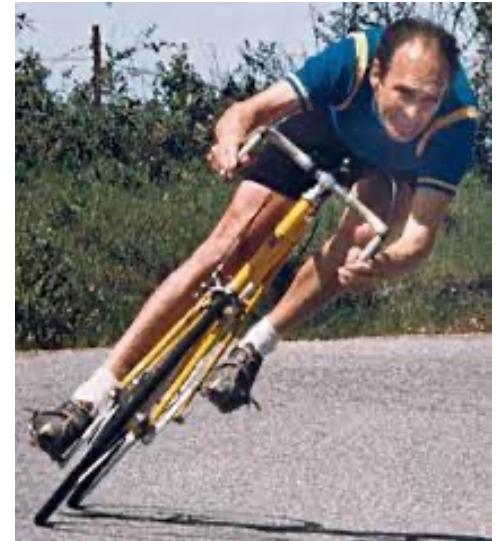
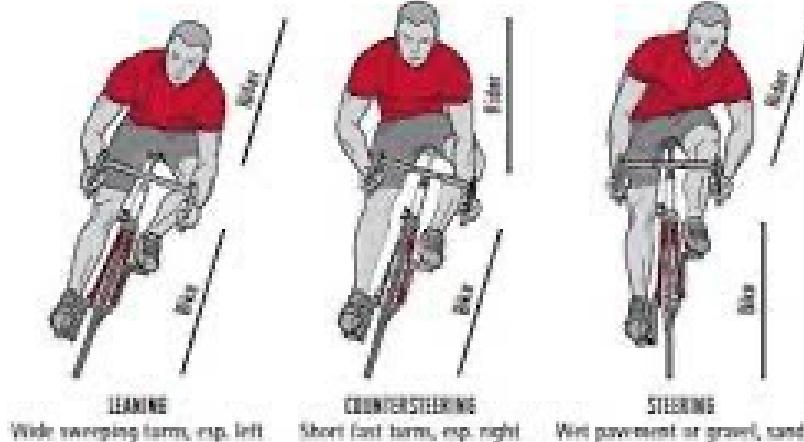


همچنین نمودار صفر و قطب ها که یک صفر در سمت راست دارد.



سیستم های مینیمم فاز تمامی صفر و قطب هایشان در سمت چپ محور موهومی میباشد و در بخش مانور دیدیم که اگر صفری در سمت راست داشته باشیم انگاه سیستم ابتدا هم جهت با گشتاور و سپس در جهت مخالف منحرف میشود که قابل استفاده در پیچ های تند و یا عامل زمین خوردن با اعمال گشتاور به دوچرخه است.

Bicycle Cornering Techniques



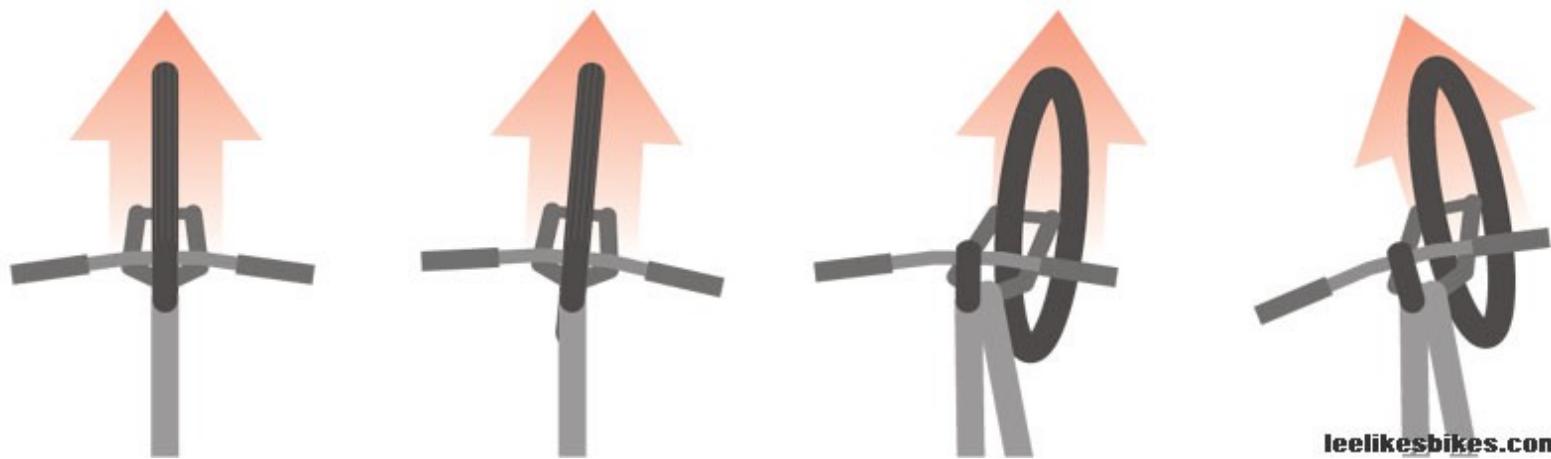
Countersteering into a left turn

You need speed.

1. Turn bars slightly to the right.

2. Bike will lean to the left.

3. Relax. The bars will turn to the left. You're carving!



همچنین از این سیستم غیر مینیمم فاز در موتور سواری نیز مانند تصویر استفاده میشود.(که جهت چرخش با جهت فرمان مخالف هستند).

