

پروژهی درس سیستمهای مخابراتی

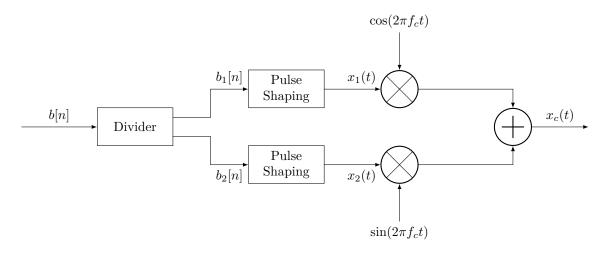
شبیه سازی یک سیستم مخابرات دیجیتال

دكتر پاكروان

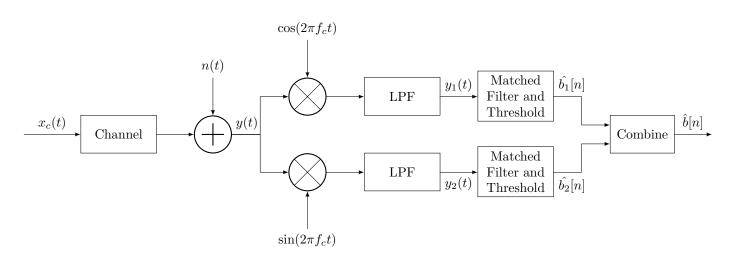
آخرین مهلت تحویل: ۱۵ بهمن ۱۴۰۰

۱ مقدّمه

در این پروژه قصد داریم یک سیستم مخابرات دیجیتال را به طور کامل شبیه سازی کنیم و تأثیر پارامترهای مختلف را بر عملکرد این سیستم مشاهده کنیم. دیاگرام بلوکی فرستنده و گیرنده در شکلهای ۱ و ۲ نمایش داده شده اند. برای راحتی، در این پروژه فقط حالت باینری را در نظر می گیریم.



شكل ١: دياگرام بلوكى فرستنده



شکل ۲: دیاگرام بلوکی گیرنده

۲ پیادهسازی بلوکها به صورت مجزاً

- ۱. تابعی با عنوان Divide بنویسید، که در ورودی دنبالهای به طول زوج از اعداد صفر و یک بگیرد، و در خروجی دو دنباله به طول نصف دنبالهی ورودی را تقسیم کند که شبیهسازی ما به طول نصف دنبالهی ورودی را تقسیم کند که شبیهسازی ما به یک سیستم Combine نزدیکتر شود؟) وارون این سیستم را در تابعی به نام Combine پیادهسازی کنید.
- ۲. تابعی با عنوان PulseShaping بنویسید که در ورودی، دنبالهای از صفر و یک، شکل پالس متناظر با صفر (به صورت رشته ی از اعداد حقیقی!)، و شکل پالس متناظر با یک (به صورت رشته ی دیگری از اعداد حقیقی!) را دریافت کند، و در خروجی، شکل موج متناظر با دنباله را تحویل دهد. توجّه کنید که طول پالسهای متناظر با صفر و یک باید برابر باشند.
- ۳. تابعی با عنوان AnalogMod بنویسید که در ورودی، دو شکل موج، فرکانس نمونهبرداری و فرکانس حامل را دریافت کرده و در خروجی سیگنال $x_c(t)$ را بدهد.
- ۴. برای سادگی، کانال را ایده آل در نظر میگیریم و فقط پهنای باند سیگنال عبوری از آن را محدود میکنیم. برای حلّ این بخش، تابعی با عنوان Channel بنویسید که در ورودی سیگنال ارسالی، فرکانس نمونهبرداری، فرکانس مرکزی و پهنای باند کانال را بگیرد و درخروجی، سیگنال دریافتی در گیرنده را تحویل دهد. (تنها باید یک فیلتر میانگذر بنویسید!)
- نابعی با عنوان AnalogDemod بنویسید که در ورودی سیگنال $x_c(t)$ ، فرکانس نمونهبرداری، پهنای باند سیگنال و فرکانس حامل را بگیرد و در خروجی دو شکل موج demodulate شده (یعنی $y_{\rm t}(t)$ و $y_{\rm t}(t)$ در شکل ۲) را تحویل دهد. (ترکیب ضربکننده و فیلتر پایینگذر)
- برای آخرین قسمت نیز، تابعی با عنوان MatchedFilt بنویسید که در ورودی شکل موج demodulate شده، شکل
 پالس متناظر با صفر، و شکل پالس متناظر با یک را دریافت کند و در خروجی دو دنباله به این صورت بدهد:
- (آ) مقدار خروجی Matched Filter هم برای شکل پالس متناظر با یک و هم برای شکل پالس متناظر با صفر (در Matched Filter هم برای شکل پالس دلخواه، Matched Filter اسلایدهای درس با Matched Filter آشنا شده اید و می دانید که برای یک شکل پالس دلخواه، Matched Filter به چه صورت درمی آید!)
 - (ب) مقدار تخمینزدهشده برای بیت متناظر

۳ انتقال دنبالهی تصادفی صفر و یک

برای این قسمت، مشخصات بلوکها را به این صورت در نظر بگیرید:

مقدار	متغيّر			
١MHz	فرکانس نمونهبرداری			
۱۰ ms	طول هر پالس			
۱۰ KHz	فركانس حامل			
۱۰ KHz	فركانس مركزي كانال			
١KHz	پهنای باند کانال			

جدول ١: مشخّصات بلوكها

۱۰ در این قسمت می خواهیم با استفاده از مدولاسیون PAM سیگنالها را ارسال کنیم، شکل پالس را مربّعی ساده در نظر بگیرید که دامنهاش برای ارسال بیت یک، برابر با ۱ + و برای بیت صفر، برابر با ۱ – است. (هر پارامتر دیگری که قرار است انتخاب کنید را به شکلی معقول انتخاب کنید، و دلایلتان را برای آن انتخاب شرح دهید.)

- (آ) دنبالهای به طول «به اندازه ی کافی بلند» از صفر و یک تولید کنید. با فرض وجود نداشتن نویز، فرآیند ارسال این دنباله را شبیه سازی کنید. شکل موج را برای خروجی هر بلوک رسم کنید. (بازه ی زمانی رسم کردن را به شکل معقولی در نظر بگیرید که شکلهای شما «قشنگ» باشند!)
- (ب) در درس کمی با فرآیندهای تصادفی آشنا شده اید. یکی از مهم ترین فرآیندهای تصادفی، نویز است. ما در اغلب اوقات فرض می کنیم که نویز با سیگنال جمع می شود و به تعبیر دیگر، افزاینده (Additive) است. همچنین لحظات مختلف نویز را از یک دیگر مستقل فرض می کنیم، با به تعبیر دیگر، نویز را سفید (White) فرض می کنیم، به عنوان فرض آخر، توزیع نویز در همه ی لحظات را گوسی با میانگین صفر فرض می کنیم، چنین نویزی را Gaussian Noise
- حال با فرض اینکه نویز AWGN، بعد از عبور سیگنال از کانال با آن جمع می شود، احتمال خطا را برحسب واریانس نویز رسم کنید. بازه ی محور افقی را به اندازه ی کافی بزرگ بگیرید. رفتار احتمال خطا را توجیه کنید.
- (ج) با توجّه به بخش قبل، ۶ مقدار مختلف برای واریانس نویز انتخاب کنید، (به صورتی که تا حدّ خوبی بازههای معنادار Matched Filter دوبعدی خروجی دو scatter plot نمودار را پوشش دهد.) برای هرکدام از این واریانسها، $b_{\Lambda}[i]$ دوبه دوبعدی خروجی دو Matched و بازی هر زوج $(b_{\Lambda}[i],b_{\Lambda}[i])$ به علّت وجود نویز، خروجی دو Matched را رسم کنید. این به آن معناست که به ازای هر زوج $(b_{\Lambda}[i],b_{\Lambda}[i])$ به علّت وجود نویز، خروجی دو Filter به صورت دو عدو $(b_{\Lambda}[i],b_{\Lambda}[i])$ درمی آیند که احتمالاً $(b_{\Lambda}[i],b_{\Lambda}[i])$ به علّت وجود نویز کم باشد، می توان از روی $(b_{\Lambda}[i],b_{\Lambda}[i])$ ($(b_{\Lambda}[i],b_{\Lambda}[i])$) را به درستی تخمین زد. خواستهی مسأله آنست که روی یک نمودار رسم کنید. این کار را برای ۶ مقدار واریانس نویزی که انتخاب کردهاید، تکرار کنید. برای آشنایی بهتر با خواستهی مسأله، می توانید عبارت «منظومه ی سیگنال» (Signal Constellation) را جستجو کنید.
- ۲۰ در این بخش به سراغ مدولاسیون PSK میرویم، به جای شکل پالس مربّعی، شکل پالس سینوسی با فرکانس PSK در نظر بگیرید. دامنه ی آن را برای ارسال بیت یک، برابر با N و برای ارسال بیت صفر، برابر با N فرض کنید.
- (آ) دنبالهای به طول «به اندازه ی کافی بلند» از صفر و یک تولید کنید. با فرض وجود نداشتن نویز، فرآیند ارسال این دنباله را شبیه سازی کنید. شکل موج را برای خروجی هر بلوک رسم کنید. (بازه ی زمانی رسم کردن را به شکل معقولی در نظر بگیرید که شکلهای شما «قشنگ» باشند!)
- (ب) با فرض اینکه نویز AWGN، بعد از عبور سیگنال از کانال با آن جمع می شود، احتمال خطا را برحسب واریانس نویز رسم کنید. بازه ی محور افقی را به اندازه ی کافی بزرگ بگیرید. رفتار احتمال خطا را توجیه کنید.
- (ج) با توجّه به بخش قبل، ۶ مقدار مختلف برای واریانس نویز انتخاب کنید، (به صورتی که تا حدّ خوبی بازههای معنادار نمودار را پوشش دهد.) برای هرکدام از این واریانسها، scatter plot دوبعدی خروجی دو Matched Filter را پرسم کنید.
- FSK در این بخش می خواهیم از مدولاسیون FSK استفاده کنیم، در نتیجه از پالس سینوسی با فرکانس متناسب با مقدار بیت استفاده می کنیم، فرکانس آن را برای ارسال بیت ۱/۵ KHz و برای ارسال بیت VAM و برای ارسال بیت ۱/۵ VAM و برای ارسال بیت VAM و برای و برای ارسال بیت و برای ار
 - (آ) آیا فرکانسهای دادهشده، یک سیگنالینگ متعامد را میسازند؟
- (ب) دنبالهای به طول «به اندازهی کافی بلند» از صفر و یک تولید کنید. با فرض وجود نداشتن نویز، فرآیند ارسال این دنباله را شبیهسازی کنید. شکل موج را برای خروجی هر بلوک رسم کنید. (بازهی زمانی رسمکردن را به شکل معقولی در نظر بگیرید که شکلهای شما «قشنگ» باشند!)
- (ج) با فرض اینکه نویز AWGN، بعد از عبور سیگنال از کانال با آن جمع می شود، احتمال خطا را برحسب واریانس نویز رسم کنید. بازه ی محور افقی را به اندازه ی کافی بزرگ بگیرید. رفتار احتمال خطا را توجیه کنید.
- (د) با توجّه به بخش قبل، ۶ مقدار مختلف برای واریانس نویز انتخاب کنید، (به صورتی که تا حدّ خوبی بازههای معنادار نمودار را پوشش دهد.) برای هرکدام از این واریانسها، scatter plot دوبعدی خروجی دو Matched Filter را رسم کنید.
 - ۴. نتایج این سه سیستم را باهم مقایسه کنید.

۴ انتقال دنبالهای از اعداد ۸ بیتی

در این قسمت میخواهیم دنبالهای از اعداد تصادفی بین ۰ و ۲۵۵ را به دنبالهای از اعداد ۰ و ۱ تبدیل کرده و انتقال آنها را شبیهسازی کنیم. تفاوت اصلی این بخش با بخش قبلی در معیار سنجش صحت سیستم مخابره است. در این قسمت از مجذور اختلاف اعداد به جای احتمال خطا استفاده خواهیم کرد.

- ۱۰ تابعی با عنوان SourceGenerator بنویسید که دنباله ای از اعداد صحیح بین \circ تا ۲۵۵ را بگیرد و در خروجی، دنباله ی باینری متناظر با آن را بدهد. (می توانید از تابع de2bi در MATLAB استفاده کنید.) سیستم معکوس این تابع را نیز به صورت تابعی با عنوان OutputDecoder بنویسید. (می توانید از تابع bi2de در MATLAB استفاده کنید.)
- ۲۰ دنبالهای به حد کافی بلند از اعداد صحیح بین ۰ تا ۲۵۵ تولید کنید. مخابره ی آنها را شبیه سازی کنید. (شکل پالسها را مربعی بگیرید و مشخصات سیستم را مطابق قسمت قبل) واریانس خطای بازسازی این اعداد را برحسب واریانس نویز رسم کنید.
- ۳۰ در ادامه ی بخش قبل، به ازای چند واریانس نویز مشخّص، توزیع خطا را رسم کنید. رفتار حدّی این توزیع به چه شکلی است؟
- ۴. در حالتی که نویز به سمت بینهایت میل کند، واریانس خطا را به روش تحلیلی حساب کنید. آیا با آنچه که مشاهده میکنید سازگار است؟

۵ کدینگ منبع

در این قسمت میخواهیم با کدینگ منبع (Source Coding) آشنا شویم. خبر خوب آنست که این بخش از بخشهای قبلی پروژه مستقل است!

ابتدا باید با مفاهیم اوّلیه آشنا شویم. منبع اطّلاعات گسسته ی X که دنباله ی سمبلهای X_i را تولید می کند در نظر می گیریم. فرض می کنیم که الفبای خروجی این منبع، $\mathcal X$ است و فرض می کنیم $M = M < \infty$.

برای مدلکردن منبع اطّلاعات، باید به هر سمبل از منبع یک احتمال نسبت بدهیم. در نتیجه میتوانیم منبع اطّلاعات را به این صورت نمایش دهیم:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_7 & \dots & x_M \\ p_1 & p_7 & \dots & p_M \end{pmatrix}$$

به عنوان مثال اگر شما که به زبان فارسی حرف میزنید را به عنوان منبع اطلاعات در نظر بگیریم، هر سمبل خروجی این منبع، حرفی از حروف فارسی است. در نتیجه $\{\mathcal{L}=\{0\},\cdots,\cdots,0\}$ و $\mathcal{L}=\{0\}$ همچنین به طور تجربی میدانیم که برخی حروف در زبان فارسی بیشتر استفاده میشوند، مانند «الف» و «م»، و برخی حروف کمتر استفاده میشوند مانند «ژ» و «ض». در نتیجه در مدل احتمالاتی این منبع، باید به حروف پراستفاده احتمال بیشتری نسبت به حروف کماستفاده نسبت دهیم.

(البته ذکر این نکته لازم است که شما احتمالاً کاملاً تصادفی صحبت نمی کنید و میان حروف استفاده شده توسط شما ارتباطاتی وجود دارد! به تعبیر دیگر حرف تولید شده در زمان t-1 اظّلاعاتی درباره ی حرف تولید شده در زمان t در اختیار ما قرار می دهد و می توانیم $\mathbb{P}[X_t=x_i|X_{t-1}=x_j]$ را تشکیل دهیم و عملاً مدل دقیق تری برای منبع اظّلاعات به دست آوریم که به صورت یک «زنجیره ی مارکف» است. ولی در مدل فعلی فرض می کنیم که همه ی حروف تولیدی توسط شما از یکدیگر مستقلّند و توزیع تمامی آنها باهم برابر است.)

مسأله ی کدینگ منبع آنست که میخواهیم یک نگاشت مانند C از الفبای خروجی منبع به الفبای دوتایی $\{0,1\}$ پیدا کنیم. (البته در حالت کلّی تر الفبای کد می تواند D سمبلی باشد، ولی ما حالت ساده ی دوتایی را در نظر می گیریم.)، به گونه ای کنیم. (البته در حالت کلّی تر الفبای کد می تواند D سمبلی باشد، ولی ما حالت ساده ی دوتایی را در نظر می گیریم.)، به گونه ای کول متوسّط هر کلمه کد کمینه شود. به تعبیر دیگر اگر طول کلمه کد متناظر با سمبل $X \in \mathcal{X}$ را با $X \in \mathcal{X}$ نشان دهیم، هدف آنست که $\mathbb{E}[l(X)]$ کمینه شود.

طبعاً سادهترین کار ممکن آنست که به هرکدام از M خروجی منبع، یک عدد باینری $[\log_{\mathsf{Y}} M]$ بیتی نسبت بدهیم، ولی این راهحل اصلاً بهینه نیست. چرا؟

مثال سخنران را در نظر بگیریم. در این مثال چون M=T است، با Δ بیت می توان همه ی حروف را کد کرد. ولی در این حالت، ما برای حرف «(ث)» هم Δ بیت! اگر راهی باشد که بتوانیم حالت، ما برای حرف «(الف») که بسیار پراستفاده است، Δ بیت خرج کرده ایم و برای حرف «(الف») هم Δ بیت! اگر راهی باشد که بتوانیم حرف «الف» را با کمتر از Δ بیت، از آنجا که احتمال بیان شدن حرف «(أی» را با کمی بیشتر از Δ بیت، از آنجا که احتمال بیان شدن حرف «(ث)» است، انتظار داریم که به طور متوسط کمتر از Δ بیت برای کدکردن منبع خرج کنیم و به کد بهینه تری برسیم.

احتمالاً اوّلین سؤالی که به ذهن میرسد، آنست که «اگر طول کلمه کدها برابر نباشد، در گیرنده چگونه آنها را کدگشایی کنیم؟» داستان از همینجا شروع میشود!

منبع اطّلاعات زیر را در نظر بگیرید:

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

۱. کدهای زیر را در نظر بگیرید:

X	a	b	\mathbf{c}	d	e	f
$C_1(X)$	0	10	11	10	01	111
$C_2(X)$	0	10	01	010	11	111
$C_3(X)$	0	01	011	0111	01111	011111

 C_1 مشکل کد C_1 چیست

کدهایی که مشکل کد C_1 را نداشته باشند، کدهای «ناویژه» مینامیم،

(ب) مشکل کد C_2 چیست؟ (راهنمایی: فرض کنید در گیرنده دنبالهی 010 دریافت شده، دنبالهی سمبلهای ارسالی چگونه بوده است؟)

کدهایی که مشکل کد C_2 را نداشته باشند، کدهای «به طور یکتا قابل کشف» مینامیم،

رج) مشکل کد C_3 چیست؟ (راهنمایی: آیا با مشاهده ی کلمه کد مربوط به سمبل a در گیرنده، می توان بلافاصله با قطعیت گفت که سمبل a ارسال شده است؟)

کدهایی که مشکل کد C_3 را نداشته باشند، کدهای «آنی» مینامیم،

۲. میتوان نشان داد اگر هیچیک از کلمات یک کد، پیشوند کلمه کد دیگری نباشد، کد آنی است و در نتیجه به طور یکتا قابل
 کشف و ناویژه هم خواهد بود. این کدها را کدهای «پیشوندی» مینامیم.

همچنین می توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای وجود یک کد پیشوندی دودویی با طول کلمات l_1, l_2, \cdots, l_M آنست که:

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{Y}^{-l_i} \leq \mathbf{1}$$

و از آن جا که:

$$\mathbb{E}[l(X)] = \sum_{i=1}^{M} p_i l_i$$

باید مسألهی بهینهسازی زیر را حل کنیم:

$$\min_{l_1, l_2, \dots l_M} \sum_{i=1}^{M} p_i l_i \qquad \text{s.t. } \sum_{i=1}^{M} \mathbf{Y}^{-l_i} \leq \mathbf{Y}^{-l_i}$$

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ این مسأله را حل کنید و طول کلمه کدها را برای منبع X بیابید.

(راهنمایی: روش ضرایب لاگرانژ با قید تساوی را در درس ریاضی عمومی ۲ آموخته اید. در اینجا قید به صورت نامساوی است، ولی دقّت کنید که میخواهیم تا حدّ ممکن، l_i ها را کم کنیم و با کمکردن l_i ها، عبارت $\sum_{i=1}^M 2^{-l_i}$ بزرگ می شود. در نتیجه اگر فرض طبیعی بودن l_i ها را موقّتاً کنار بگذاریم، نقطه ی بهینه در جایی رخ می دهد که قید به صورت تساوی برقرار شود.)

۳. به جواب نزدیک شدهایم، ولی هنوزیک قدم دیگر باقی مانده است!

با توجّه به اینکه طول کلمه کدها را داریم و می خواهیم کد پیشوندی باشد، کلمه کدها را برای منبع X بسازید.

(راهنمایی: از کوچکترین کلمه کد شروع کنید! توجّه کنید که مسأله یک جواب ندارد و کافیست که یک جواب را گزارش کنید)

- ۴. طول متوسط كلمه كدها را بيابيد.
- ۵. تابعی با عنوان InformationSource بنویسید که در ورودی عدد n را بگیرد و در خروجی یک رشته شامل n سمبل بدهد، سمبلها باید i.i.d. باشند و همه از توزیع احتمالی مانند توزیع احتمال منبع X آمده باشند.
- ۶. تابعی با عنوان SourceEncoder بنویسید که در ورودی، n و دنبالهای به طول n از سمبلهای منبع X بگیرد و در خروجی یک رشته از صفر و یکها بدهد که کدشده ی رشته ی ورودی است (قانون کدگذاری را در بخش π پیدا کرده اید)
- ۷. تابعی با عنوان SourceDecoder بنویسید که در ورودی، دنبالهای از صفر و یکها دریافت کند و در خروجی، دنبالهی متناظر آن از سمبلهای منبع را بدهد.
- ۱. این سه تابع را به دنبال هم قرار دهید و سیستم را شبیه سازی کنید. اگر طول دنباله ی باینری حاصله از کدینگ یک رشته ی n سمبلی را $L_B(n)$ بنامیم، رفتار n بنامیم، رفتار n بنامیم، رفتار را توجه کنید!
- 9. کدینگی که در این بخش دیدید، یک کدینگ بی اتلاف بود. یعنی از روی کلمه کدها می توان رشته ی ورودی را به طور یکتا و بدون خطا تعیین کرد. امّا گاهی به این میزان بیت در دسترس نداریم! در نتیجه مجبور می شویم از کدینگهای بااتلاف استفاده کنیم که در آنها، نمی توان از روی کلمه کد، رشته ی ورودی را تعیین کرد. در این حالت باید یک «اعوجاج» تعریف کنیم که میزان خوب بودن کدینگ را بسنجد. به عنوان مثال اگر متغیّر تصادفی کدنشده را با X و متغیّر تصادفی کدشده را با \hat{X} نشان دهیم، یک اعوجاج مرسوم به صورت \hat{X} است.

این مسأله در حالت كلّی پیچیده و دشوار است، ولی یک حالت ساده از آن را می توان بررسی كرد:

فرض کنید $X \sim \mathcal{N}(\circ, \sigma^{\mathsf{r}})$ ، و میخواهیم این متغیّر تصادفی گاوسی را تنها با یک بیت کد کنیم. یعنی متغیّر تصادفی \hat{X} (که تابعی از متغیّر تصادفی X است) تنها میتواند دو مقدار حقیقی داشته باشد. این مقادیر و احتمال تحقّق هریک را \hat{X} محاسبه کنید و نحوه ی تبعیّت \hat{X} از روی X را نیز بیابید، به قسمی که $D = \mathbb{E}\left[(X-\hat{X})^{\mathsf{r}}\right]$ کمینه شود.

A,B راهنمایی: تابعیّت \hat{X} از X به صورتِ \hat{X} از X به صورتِ \hat{X} اند.) \hat{X} است. بدون اثبات فرض کنید که مجموعههای \hat{X} است. بازهاند.)

۶ نکات مهم

لطفاً به نكات زير دقّت كنيد:

- ۱. این پروژه امتیازی و اختیاری است.
- ۲. تمامی شبیه سازی ها باید با کمک MATLAB انجام شود.
- ۳. تحویل پروژه به صورت گزارش و کدهای نوشته شده است. گزارش باید شامل تصاویر و نمودارها و نتیجه گیریهای لازم باشد.
 همچنین تمیزی گزارش بسیار مهم است. کدها و گزارش را در یک فایل فشرده شده در سامانهی درسافزار آپلود کنید.
 - ۴. نوشتن گزارش کار با $\mathrm{IAT}_{E}X$ نمره ی امتیازی دارد.
 - ۵. درصورت مشاهده ی تقلّب، نمره ی هردو فرد صفر منظور خواهد شد.

موفّق باشيد