Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
http://tmancini.di.uniroma1.it

Slides A.3 (S.A.3)

Analisi dei requisiti

Logica del Primo Ordine (FOL)

Versione 2024-02-08

Indice

Queste slide sono composte dalle seguenti sottounità:

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
http://tmancini.di.uniroma1.it

Slides A.3.1 (S.A.3.1)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Introduzione

Versione 2024-02-08

Logica

Famiglia di linguaggi formali per rappresentare informazione e derivare conseguenze.

Ogni logica (come ogni altro linguaggio formale) è definita da una sintassi e una semantica.

Sintassi: Considera il linguaggio come l'insieme delle sequenze finite di simboli ammesse dal linguaggio (formule), dove ogni simbolo appartiene ad un insieme prefissato (alfabeto). La sintassi definisce quindi la struttura delle formule.

Semantica: Definisce il significato di ogni formula della logica, ovvero la sua verità nei diversi mondi possibili.

Logica (2)

Esempio: il linguaggio dell'aritmetica

- Sintassi: $x + 2 \geq y$ è una formula, $x2 + y \geq$ non lo è.
- Semantica:
  - $x + 2 \geq y$ è vero sse valore di $x + 2$ non è minore del valore di y
  - $x + 2 \geq y$ è vero in un mondo dove $x = 7$ e $y = 1$
  - $x + 2 \geq y$ è falso in un mondo dove $x = 0$ e $y = 6$.

Decidibili

Nelle logiche classiche, ogni formula è vera o falsa in ogni mondo.

Dato mondo m e formula φ: $m \models \varphi$ sse φ è vera nel mondo m
$\Longrightarrow$ m modello di φ.

Logica: Sintassi

Sintassi: Considera il linguaggio come l'insieme delle sequenze finite di simboli ammesse dal linguaggio(formule), dove ogni simbolo appartiene ad un insieme prefissato (alfabeto). La sintassi definisce quindi la struttura delle formule.

Per definire la sintassi di una logica occorre stabilire:

- Quali simboli appartengono al suo alfabeto
- Quali sequenze finite di elementi dell'alfabeto (formule) compongono il linguaggio.

Nota: La sintassi stabilisce quali sequenze di simboli siano formule logiche, e non dice nulla sul loro significato.

Logica: Semantica

Semantica: Definisce il significato di ogni formula della logica, ovvero la sua verità nei diversi mondi possibili. In ogni mondo possibile, una formula può essere "vera" o "falsa".

Idea:

- Si dà un significato (interpretazione) alle formule più semplici (atomiche).
- Si usano le regole del sistema logico per stabilire il significato di formule arbitrarie.

Simile a valutare un'espressione algebrica a partire dalla valutazione dei suoi termini atomici.

Esempio: Si dà una interpretazione (valore) ad x ed y
$\Longrightarrow$ si usano le regole dell'aritmetica per valutare $x + y \leq 20$.

Logica (dei predicati) del primo ordine

- Sintassi
- Semantica
  - Interpretazione
  - Assegnamento di variabili
  - Modello
  - Valutazione di una formula rispetto ad una interpretazione e ad un assegnamento di variabili
- Soddisfacibilità
- Insoddisfacibilità
- Validità

Sapienza
Università di Roma

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
http://tmancini.di.uniroma1.it

Slides A.3.2 (S.A.3.2)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Sintassi

Versione 2024-02-08

Sintassi di FOL: Alfabeto

Definizione (Alfabeto della logica del primo ordine)

L'alfabeto della logica del primo ordine è dato da:

- *un insieme $\mathcal{V}$ di variabili*
- *un insieme $\mathcal{F}$ di simboli di funzione, ognuno dei quali ha associato il suo numero di argomenti detto arità*
- *un insieme $\mathcal{P}$ di simboli di predicato, ognuno dei quali ha associato il suo numero di argomenti detto arità*
  $\Longrightarrow$ *assumeremo che $\mathcal{P}$ contenga il predicato di arità 2 "$=$" (chiamato uguaglianza)*
- *i connettivi logici $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$*
- *i quantificatori $\forall$ ed $\exists$, denominati rispettivamente quantificatore universale e quantificatore esistenziale*
- *i simboli speciali " (", ") " e " , " (virgola).*

Alfabeto di FOL: osservazioni

- Poiché il simbolo di predicato "=" è obbligatorio, per semplicità spesso lo ometteremo nella lista dei simboli di interesse
- Per riferirci ad un simbolo di funzione f o ad un simbolo di predicato p di arità k, scriveremo rispettivamente f$/k$ e p$/k$
- I simboli di funzione di arità 0 vengono anche detti simboli di costante
- Rispetto alla logica proposizionale, gli oggetti più simili alle lettere proposizionali sono i simboli di predicato di arità 0, che verranno appunto denominati lettere proposizionali anche in questo contesto.

Alfabeto di FOL: esempio

Alcuni simboli di funzione con i loro significati "intuitivi":

- zero/0
  il numero naturale 0 – simbolo di costante
- succ/1
  succ(X) è il numero naturale $X + 1$ (successore di X)
- socrate/0
  l'individuo "Socrate" – simbolo di costante
- padre/1
  padre(X) è il padre dell'individuo X.

Alfabeto di FOL: esempio (2)

Alcuni simboli di predicato con i loro significati "intuitivi":

- doppio/2
  doppio(X, Y): il numero naturale Y è il doppio del numero naturale X
- somma/3
  somma(X, Y, Z): il numero naturale Z è la somma dei numeri naturali X ed Y
- uomo/1
  uomo(X): l'individuo X è un uomo
- mortale/1
  mortale(X), l'individuo X è mortale.

Sintassi di FOL: formule

A partire dall'alfabeto si può definire il linguaggio della logica del primo ordine.

Questo linguaggio ha una struttura sintattica più complessa di quello della logica proposizionale: la sua definizione induttiva deve essere effettuata in due passi:

1. Viene definito un linguaggio intermedio, chiamato linguaggio dei termini denota oggetti del mondo
2. Si definisce il linguaggio delle formule (o della logica del prim'ordine), utilizzando nella regola base della definizione il linguaggio dei termini.

Il linguaggio dei termini

Definizione (Termini)

L'insieme dei termini è definito induttivamente come segue:

- *ogni variabile in $\mathcal{V}$ è un termine*
- *ogni simbolo di costante in $\mathcal{F}$ è un termine*
- *se f è un simbolo di funzione ($f \in \mathcal{F}$) di arità $n > 0$ e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora anche $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.*

vuole n argomenti

Il linguaggio dei termini (2)

Esempio:
Sia $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1, \text{socrate}/0, \text{padre}/1\}$

Le seguenti sequenze di simboli sono termini (MiaVariabile e X sono variabili)

1. zero
2. MiaVariabile
3. succ(zero)
4. padre(padre(socrate))
5. padre(succ(X))
6. succ(succ(zero))

Idea: i termini denotano oggetti di interesse
(quale oggetto di interesse è denotato da un termine non è stabilito dalla sintassi!)

Il linguaggio delle formule

Definizione (Formule)

L'insieme delle formule è definito induttivamente come segue:

- *se p è un simbolo di predicato di arità n e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, $p(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula (detta formula atomica)*
- *se ϕ e ψ sono formule, lo sono anche:*
  - (ϕ)
  - $\neg\phi$
  - $\phi \vee \psi$
  - $\phi \wedge \psi$
  - $\phi \rightarrow \psi$
  - $\phi \leftrightarrow \psi$
- *se ϕ è una formula e X è una variabile allora anche $\forall X\ \phi$ e $\exists X\ \phi$ sono formule.*

Scriveremo $X = Y$ invece di $=(X, Y)$ e $X \neq Y$ al posto di $\neg(X = Y)$ (a sua volta al posto di $\neg{=}(X, Y)$).

Il linguaggio delle formule (2)

Esempio: siano

- $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1, \text{socrate}/0, \text{padre}/1\}$
- $\mathcal{P} = \{\text{doppio}/2, \text{somma}/3, \ \text{uomo}/1, \text{mortale}/1\}$.

Le seguenti sequenze di simboli sono formule:

- $\text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X)$
- $\exists X \ \text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X)$
- $\forall X \ \text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X)$
- $\text{somma}(\text{succ}(\text{zero}), \text{zero}, \text{succ}(\text{zero}))$
- $\forall X \forall Y \ \text{somma}(X, X, Y) \rightarrow \text{doppio}(X, Y)$
- $(\forall X \exists Y \ \text{doppio}(X,Y)) \land (\forall I \forall J \exists K \ \text{somma}(I,J,K))$
- $\text{mortale}(\text{socrate})$
- $\text{mortale}(\text{socrate}) \land \text{mortale}(\text{padre}(\text{socrate}))$
- $\forall X \ \text{mortale}(X)$

Il linguaggio delle formule (3)

- $(\forall X \ \text{uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(X)) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$
- $\forall X \ \text{uomo}(X) \rightarrow \text{uomo}(\mathit{padre}(X))$
- $\forall X \ \text{uomo}(\text{socrate})$
- $\forall X \forall Y \ \text{uomo}(X)$
- $\text{uomo}(X)$
- $X = \text{socrate}$
- $X = Y$
- $\forall X \ \text{uomo}(X) \rightarrow \text{uomo}(\text{socrate})$.

Il linguaggio delle formule (4)

Le seguenti sequenze di simboli non sono formule:

- succ(zero) **funzione**
- mortale($\underline{\text{mortale}}$(socrate))
- padre($\underline{\text{mortale}(X)}$)
- $\exists\underline{\text{socrate}}$ mortale(socrate)
- $\exists X$ $\underline{\text{padre}(X)}$
- $\underline{X} \vee \underline{Y}$
- $\underline{\text{zero}} \wedge \underline{\text{zero}}$
- $\underline{X} \wedge \underline{\text{zero}}\ \underline{=}$

Sapienza
Università di Roma

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
http://tmancini.di.uniroma1.it

Slides A.3.3 (S.A.3.3)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Semantica

Versione 2024-02-08

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
http://tmancini.di.uniroma1.it

Slides A.3.3.1 (S.A.3.3.1)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Semantica
Introduzione

Versione 2024-02-08

Richiamo: semantica nella logica proposizionale

- Formule atomiche $\Longrightarrow$ lettere proposizionali
- Interpretazione: funzione I che assegna un valore di verità ad ogni lettera proposizionale
- Funzione di valutazione (predefinita nella logica!) che date:
  - una formula arbitrariamente complessa
  - una interpretazione sulle sue lettere (sottoformule atomiche)

  calcola il valore di verità della formula rispetto all'interpretazione data.

Richiamo: semantica nella logica proposizionale (2)

Esempio:

- Formula: $\varphi : a \wedge (b \vee c)$
- Lettere proposizionali in φ: $\{a, b, c\}$
- Interpretazione I: $I(a) = \text{true}, \quad I(b) = \text{true}, \quad I(c) = \text{false}$

La valutazione della formula avviene per induzione dai valori delle sue sotto-formule atomiche (lettere) dati dall'interpretazione I.

Richiamo: semantica nella logica proposizionale (3)

Esempio (continua):

- Formula: $\varphi : a \wedge (b \vee c)$
- Interpretazione I: $I(a) = \text{true}, \quad I(b) = \text{true}, \quad I(c) = \text{false}.$

La funzione induttiva di valutazione è predefinita nella logica (e implementa la nota semantica dei connettivi logici):

1. Passo base La formula atomica b vale $I(b) = \text{true}$
2. Passo base La formula atomica c vale $I(c) = \text{false}$
3. Passo induttivo La formula $(b \vee c)$ vale true (semantica di $\vee$)
4. Passo base La formula atomica a vale $I(a) = \text{true}$
5. Passo induttivo La formula $a \wedge (b \vee c)$ vale true (semantica di $\wedge$).

$\Longrightarrow$ La formula proposizionale φ è vera nell'interpretazione I.

$\Longrightarrow$ L'interpretazione I è un modello di φ: $I \models \varphi$.

↳ modella

Richiamo: semantica nella logica proposizionale (4)

Si può estendere il significato di ogni formula proposizionale senza riferimento a particolari interpretazioni:

- formula soddisfacibile: esiste una interpretazione che è suo modello
- formula valida: ogni interpretazione è suo modello
- formula insoddisfacibile: nessuna interpretazione è suo modello.

Esempio:

- la formula $a \wedge (b \vee c)$ è soddisfacibile
- la formula $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)$ è valida
- la formula $(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow b) \wedge \neg b$ è insoddisfacibile.

Semantica della logica del prim'ordine

Stesso itinerario concettuale della logica proposizionale:

1. Si definisce la nozione di interpretazione (valutazione delle formule atomiche)
2. Si definisce come viene valutata una formula data una particolare interpretazione
3. Si stabilisce il significato di ogni formula senza riferimento a particolari interpretazioni.

Semantica: termini vs. formule

La struttura del linguaggio evidenzia due livelli sintattici:

- Il livello dei termini
- Il livello delle formule

Abbiamo bisogno quindi di due nozioni di valutazione:

- La valutazione dei termini:
  - Valutazione dei termini atomici:
    - Pre-interpretazione (valutazione dei simboli di funzione)
    - Assegnamento di variabili (valutazione delle variabili)
  - Funzione (predefinita nella logica) di valutazione dei termini "complessi" a partire dalla valutazione dei termini atomici
- La valutazione delle formule: ...

Semantica: termini vs. formule (2)

Abbiamo bisogno quindi di due nozioni di valutazione:

- La valutazione dei termini: ...
- La valutazione delle formule:
  - Valutazione delle formule atomiche:
    - interpretazione
  - Valutazione (predefinita nella logica) delle formule "complesse" a partire dalla valutazione delle formule atomiche.

Semantica: esempio

Iniziamo informalmente con un semplice esempio.

Esempio: siano

- $\mathcal{F} = \{\text{socrate}/0, \text{padre}/1\}$
- $\mathcal{P} = \{\text{uomo}/1, \text{mortale}/1\}$

Per valutare la formula:

$$(\forall X \ \text{uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

dobbiamo fornire:

Semantica: esempio (2)

Esempio (continua): Per valutare la formula

$$(\forall X \; \text{uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

dobbiamo fornire:

Livello dei termini:

- un insieme $\mathcal{D}$ di "oggetti del mondo" (dominio) mondo di interpretazione
- una corrispondenza dai simboli di funzione a funzioni su $\mathcal{D}$ (funzioni di opportuna arità):
  - socrate/0 (simbolo di costante) $\Longrightarrow$ funzione da $\mathcal{D}^0$ a $\mathcal{D}$ $\Longrightarrow$ elemento di $\mathcal{D}$
  - padre/1 (simbolo di funzione 1-aria) $\Longrightarrow$ funzione da $\mathcal{D}^1$ a $\mathcal{D}$
- una ~~corrispondenza~~ dalle variabili a elementi di $\mathcal{D}$:
  - X (variabile) $\Longrightarrow$ elemento di $\mathcal{D}$

non fa parte della Interpretazione

Livello della formula: ...

Semantica: esempio (3)

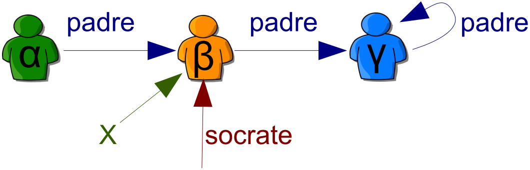
Esempio (continua): Una possibile interpretazione della formula

$$(\forall X \ \text{uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

è la seguente:

Livello dei termini:

$\mathcal{D} = \{$  $\}$



Livello della formula: . . .

Semantica: esempio (4)

Esempio (continua): Per valutare la formula

$$(\forall X \text{ uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(\text{padre}(X))) \wedge \text{uomo}(\text{socrate})$$

dobbiamo fornire:

Livello dei termini: ...

Livello della formula:

- una corrispondenza dai simboli di predicato a relazioni su $\mathcal{D}$ di opportuna arità:
  - uomo/1 $\Longrightarrow$ relazione 1-aria su $\mathcal{D}$ ($\Longrightarrow$ sottoinsieme di $\mathcal{D}^1$)
  - mortale/1 $\Longrightarrow$ relazione 1-aria su $\mathcal{D}$ ($\Longrightarrow$ sottoinsieme di $\mathcal{D}^1$)

Semantica: esempio (5)

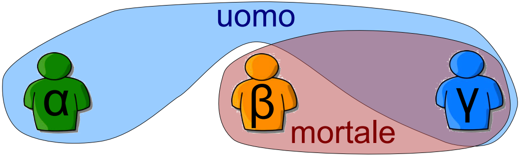
Esempio (continua): Una possibile interpretazione della formula

$$(\forall X \ \mathrm{uomo}(X) \rightarrow \mathrm{mortale}(\mathrm{padre}(X))) \wedge \mathrm{uomo}(\mathrm{socrate})$$

è la seguente:

Livello dei termini: ...

Livello della formula:



Semantica: esempio (6)

Esempio (riepilogo): Una possibile interpretazione della formula

$$(\forall X\ \mathrm{uomo}(X) \rightarrow \mathrm{mortale}(\mathrm{padre}(X))) \wedge \mathrm{uomo}(\mathrm{socrate})$$

è la seguente:

Livello dei termini:

- $\mathcal{D} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- socrate/0 associato all'elemento β (funzione $\mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}$)
- padre/1 associato alla seguente funzione $P : \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{D}$:

$$P(\alpha) = \beta,\ P(\beta) = \gamma,\ P(\gamma) = \gamma$$

- X associato a β

Livello della formula:

- uomo/1 associato alla relazione $U \subseteq \mathcal{D}^1$: $U = \{\alpha, \gamma\}$
- mortale/1 associato alla relazione $M \subseteq \mathcal{D}^1$: $M = \{\beta, \gamma\}$.

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
http://tmancini.di.uniroma1.it

Slides A.3.3.2 (S.A.3.3.2)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Semantica
Valutazione dei Termini

Versione 2024-02-08

Valutazione dei termini

Ricordiamo la definizione induttiva dei termini (sintassi):

Definizione (Termini)

L'insieme dei termini è definito induttivamente come segue:

- *ogni variabile in $\mathcal{V}$ è un termine*
- *ogni simbolo di costante in $\mathcal{F}$ è un termine*
- *se f è un simbolo di funzione ($f \in \mathcal{F}$) di arità $n > 0$ e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora anche $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine*

Valutazione dei termini (2)

Per valutare ogni termine che può essere scritto a partire da un insieme di variabili $\mathcal{V}$ e un insieme di simboli di funzione $\mathcal{F}$ abbiamo bisogno di definire:

- la valutazione dei termini atomici:
  - pre-interpretazione (valutazione dei simboli di funzione)
  - assegnamento di variabili (valutazione delle variabili)
- la funzione (predefinita nella logica) di valutazione dei termini "complessi" a partire dalla valutazione dei termini atomici.

Pre-interpretazione

Definizione (Pre-interpretazione)

Sia $\mathcal{F}$ un insieme di simboli di funzione.
Una pre-interpretazione preI *per $\mathcal{F}$ è costituita da:*

- *un insieme non vuoto $\mathcal{D}$: il dominio di interpretazione (finito o infinito)*
- funzione
  una corrispondenza che associa ad ogni simbolo di funzione $f/n \in \mathcal{F}$ di arità $n \geq 0$ una funzione (totale) del tipo

$$\mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$$

→ sempre una funzione Totale

denotata "preI(f)" (se $n = 0$, la funzione associa al simbolo di costante $f/0$ un elemento di $\mathcal{D}$)

Esempio di pre-interpretazione: *preNAT*

Sia $\mathcal{F} = \{\mathrm{zero}/0, \mathrm{succ}/1\}$.

Definiamo la pre-interpretazione *preNAT* per $\mathcal{F}$ come segue:

- il dominio di interpretazione $\mathcal{D}$ è l'insieme degli interi non negativi: $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathit{preNAT}(\mathrm{zero}) = 0 \in \mathcal{D}$
- $\mathit{preNAT}(\mathrm{succ})$ è la funzione $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ definita come:

$$\begin{array}{ll} \mathit{preNAT}(\mathrm{succ})(0) = 1 & \mathit{preNAT}(\mathrm{succ})(2) = 3 \\ \mathit{preNAT}(\mathrm{succ})(1) = 2 & \ldots \end{array}$$

preNAT associa correttamente al simbolo unario $\mathrm{succ}/1$ una funzione del tipo $\mathcal{D}^1 \longrightarrow \mathcal{D}$ (funzione unaria)

Per nostra scelta, la funzione (totale) $\mathit{preNAT}(\mathrm{succ})$ codifica correttamente la funzione successore sugli interi non negativi

Assegnamento di variabili

Definizione (Assegnamento di variabili)

Sia $\mathcal{V}$ un insieme di variabili e sia preI una pre-interpretazione con dominio $\mathcal{D}$.
Un assegnamento delle variabili $\mathcal{V}$ per preI è una funzione

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{D}$$

che associa ad ogni variabile in $\mathcal{V}$ un elemento del dominio di interpretazione di preI.

Nota: manteniamo l'assegnamento di variabili separato dalla pre-interpretazione. Questo risulterà comodo per valutare formule con variabili quantificate

Esempio: assegnamento di variabili per *preNAT*

Sia $\mathcal{V} = \{X, Y, Z\}$. Considerando la pre-interpretazione *preNAT* in cui il dominio di interpretazione $\mathcal{D}$ è l'insieme degli interi non negativi, la funzione W tale che

- $W(X) = 3$
- $W(Y) = 6$
- $W(Z) = 4$

è un assegnamento delle variabili $\mathcal{V}$ per *preNAT*

Valutazione dei termini

Siano $\mathcal{F}$ un insieme di simboli di funzione e $\mathcal{V}$ un insieme di variabili.

Per valutare un termine (arbitrariamente complesso) su $\mathcal{F}$ e $\mathcal{V}$, dobbiamo avere a disposizione:

- una pre-interpretazione *prel* per $\mathcal{F}$ e
- un assegnamento delle variabili $\mathcal{V}$ per *prel*.

Valutazione dei termini (2)

Definizione (Valutazione di termini) Dati $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$, sia $\mathcal{T}$ l'insieme di tutti i termini che possono essere generati da $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$. Dati una pre-interpretazione *preI* su dominio $\mathcal{D}$ e un assegnamento di variabili S per *preI*, la funzione

$$\textit{pre-eval}^{\textit{preI},S} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}$$

è definita induttivamente come segue, seguendo la struttura induttiva dei termini:

1. caso base (termini atomici):
   1.1. se X è una variabile: $\textit{pre-eval}^{\textit{preI},S}(X) = S(X)$
   1.2. se c è un simbolo di costante: $\textit{pre-eval}^{\textit{preI},S}(c) = \textit{preI}(c)$
2. caso induttivo (termini complessi):
   2.1. se f è un simbolo di funzione di arità $n > 0$ e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini: $\textit{pre-eval}^{\textit{preI},S}(\ f(t_1, \ldots, t_n)\ ) =$ $\textit{preI}(f)(\ \textit{pre-eval}^{\textit{preI},S}(t_1), \ldots, \textit{pre-eval}^{\textit{preI},S}(t_n)\ )$

Valutazione dei termini: esempio

Sia $\mathcal{V} = \{X, Y, Z\}$ e $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1\}$.

Riconsideriamo la pre-interpretazione *preNAT* e l'assegnazione W:

- $W(X) = 3$
- $W(Y) = 6$
- $W(Z) = 4$

L'insieme $\mathcal{T}$ dei termini che possono essere generati da $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ è:

$zero$, X, Y, Z, $succ(zero)$, $succ(X)$, $succ(Y)$, $succ(Z)$, $succ(succ(zero))$, $succ(succ(X))$, $succ(succ(Y))$, $succ(succ(Z))$, $succ(succ(succ(zero)))$, $succ(succ(succ(X)))$, $succ(succ(succ(Y)))$, $succ(succ(succ(Z)))$, $\ldots$

Nota: $\mathcal{T}$ è infinito, data la presenza in $\mathcal{F}$ di simboli di arità > 0.

Valutazione dei termini: esempio (2)

A cosa corrisponde $\textit{pre-eval}^{\textit{preNAT},W}(\text{zero})$?

- La pre-interpretazione *preNAT* associa il simbolo zero $\in \mathcal{F}$ di arità zero (simbolo di costante) all'elemento $0 \in \mathcal{D}$ [caso 1.2]

Quindi $\textit{pre-eval}^{\textit{preNAT},W}(\text{zero}) = \textit{preNAT}(\text{zero}) = 0$

Valutazione dei termini: esempio (3)

A cosa corrisponde $\textit{pre-eval}^{\textit{preNAT},W}(\text{succ}(\text{succ}(X)))$?

$= \textit{preNAT}(\text{succ})(\textit{pre-eval}^{\textit{preNAT},W}(\text{succ}(X)))$ [caso 2.1]

$= \textit{preNAT}(\text{succ})(\textit{preNAT}(\text{succ})(\textit{pre-eval}^{\textit{preNAT},W}(X))$ [caso 2.1]

$= \textit{preNAT}(\text{succ})(\textit{preNAT}(\text{succ})(W(X)))$
$= \textit{preNAT}(\text{succ})(\textit{preNAT}(\text{succ})(3))$ [caso 1.1]

La pre-interpretazione *preNAT* associa il simbolo succ $\in \mathcal{F}$ di arità 1 alla funzione $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ definita come:

$\textit{preNAT}(\text{succ})(0) = 1$ $\quad$ $\textit{preNAT}(\text{succ})(2) = 3$
$\textit{preNAT}(\text{succ})(1) = 2$ $\quad$ $\ldots$

Quindi:

$= \textit{preNAT}(\text{succ})(\textit{preNAT}(\text{succ})(3)) = \textit{preNAT}(\text{succ})(4) = 5$

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ing. dell'Informazione, Informatica e Statistica
Laurea in Informatica

Basi di Dati, Modulo 2

Prof. Toni Mancini
Dipartimento di Informatica
http://tmancini.di.uniroma1.it

Slides A.3.3.3 (S.A.3.3.3)

Analisi dei requisiti
Logica del Primo Ordine (FOL)
Semantica
Valutazione delle Formule

Versione 2024-02-08

Interpretazione

Definizione (Interpretazione)

Una interpretazione I è costituita da:

- *Una pre-interpretazione preI (che a sua volta definisce un dominio $\mathcal{D}$ e una funzione su $\mathcal{D}$ per ogni simbolo di funzione)*
- *Una funzione che associa ad ogni simbolo di predicato p/n di arità n una relazione $I(p)$ su $\mathcal{D}^n$:*

$$I(p) \subseteq \underbrace{\mathcal{D} \times \cdots \times \mathcal{D}}_{n \text{ volte}}$$

Tale corrispondenza deve assegnare al simbolo di predicato "$=$" la relazione $\{(d, d) \mid d \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$

Nota: una (pre-)interpretazione non include un assegnamento di variabili!

Interpretazione (2)

Interpretazione di "="
L'ultimo punto della definizione di interpretazione chiarisce che l'interpretazione di "=" deve rispettare i vincoli intuitivi dell'uguaglianza.

Ad esempio

- se abbiamo una interpretazione I con dominio di interpretazione $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$,
- allora la relazione associata da I al simbolo "=" deve essere necessariamente quella definita come:

$$\{(d_1, d_1), (d_2, d_2), (d_3, d_3)\}$$

Esempio di interpretazione: *NAT*

Siano:

- $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1\}$
- $\mathcal{P} = \{\text{doppio}/2, \text{somma}/3\}$

L'interpretazione *NAT* è definita in questo modo:

- la pre-interpretazione è *preNAT* (cfr. esempio precedente)
- $NAT(\text{doppio}) = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle, \ldots\} = \{\langle x, y\rangle \mid y = 2x\}$
- $NAT(\text{somma}) = \{\langle 0, 0, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle, \langle 1, 0, 1\rangle, \langle 1, 1, 2\rangle, \ldots\} = \{\langle x, y, z\rangle \mid z = x + y\}$

Valutazione di formule

Sia $\mathcal{F}$ un insieme di simboli di funzione, $\mathcal{P}$ un insieme di simboli di predicato e $\mathcal{V}$ un insieme di varibili.

Per valutare una formula (arbitrariamente complessa) su $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{V}$, abbiamo bisogno di:

- una interpretazione I su $\mathcal{P}$, che include una pre-interpretazione *preI* su $\mathcal{F}$
- un assegnamento alle variabili $\mathcal{V}$ per *preI*.

Valutazione di formule (2)

Definizione (Valutazione di una formula)

Siano dati $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$, e sia Φ l'insieme di tutte le formule che possono essere generate da $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$.
Sia I una interpretazione su $\mathcal{P}$ che include una pre-interpretazione $preI$ su $\mathcal{F}$. Sia inoltre S un assegnamento alle variabili $\mathcal{V}$ per $preI$.
Definiamo, in dipendenza da I e da S, la funzione

$$eval^{I,S} : \Phi \longrightarrow \{true, false\}$$

come segue:

Valutazione di formule (3)

Definizione (Valutazione di una formula) (continua)

La funzione è definita in modo induttivo, seguendo la struttura induttiva delle formule:

1. caso base (formule atomiche):
   1.1. se p/n è un simbolo di predicato e $t_1, \ldots t_n$ sono termini: $\mathit{eval}^{I,S}(p(t_1, \ldots, t_n)) = I(p)(\mathit{pre\text{-}eval}^{preI,S}(t_1), \ldots, \mathit{pre\text{-}eval}^{preI,S}(t_n))$
2. caso induttivo (formule complesse):
   ...

Valutazione di formule (4)

Definizione (Valutazione di una formula) (continua)

1. caso base (formule atomiche): ...
2. caso induttivo (formule complesse):
   2.1. se ϕ e ψ sono formule allora (similm. alla logica prop.):
   - $eval^{I,S}(\ (\phi)\ ) = eval^{I,S}(\phi)$
   - $eval^{I,S}(\neg\phi)$ = true se $eval^{I,S}(\phi) =$ false;
     = false altrimenti
   - $eval^{I,S}(\phi \vee \psi)$ = true se $eval^{I,S}(\phi) =$ true oppure se $eval^{I,S}(\psi) =$ true
     = false altrimenti
   - $eval^{I,S}(\phi \wedge \psi)$ = true se $eval^{I,S}(\phi) = eval^{I,S}(\psi) =$ true
     = false altrimenti
   - $eval^{I,S}(\phi \rightarrow \psi) = eval^{I,S}(\neg\phi \vee \psi)$
   - $eval^{I,S}(\phi \leftrightarrow \psi) = eval^{I,S}(\ (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\ )$

   2.2. ...

Valutazione di formule (5)

Definizione (Valutazione di una formula) (continua)

1. case base (formule atomiche): ...
2. caso induttivo (formule complesse):
   2.1. ...
   2.2. se ϕ è una formula e V è una variabile in $\mathcal{V}$ allora:

$$
\begin{aligned}
eval^{I,S}(\exists V\ \phi) &= \text{true se esiste d} \in \mathcal{D} \text{ t.c. } eval^{I,S[V/\mathrm{d}]}(\phi) = \text{true} \\
&= \text{false altrimenti} \\
eval^{I,S}(\forall V\ \phi) &= \text{true se per ogni d} \in \mathcal{D} \text{ vale } eval^{I,S[V/\mathrm{d}]}(\phi) = \text{true} \\
&= \text{false altrimenti}
\end{aligned}
$$

Nota: Dato un assegnamento di variabili S, con $S[X/\mathrm{d}]$ si indica un assegnamento uguale ad S eccettuato il fatto che alla variabile X viene assegnato il valore d (esempio: se $S(X) = 3$ e $S(Y) = 4$, allora $S[Y/9](X) = 3$ e $S[Y/9](Y) = 9$).

Nota: in una formula chiusa (dove tutte le variabili sono quantificate) l'assegnamento di variabili non gioca alcun ruolo (!!)

Esempio: valutazione su *NAT*

Riconsideriamo l'interpretazione *NAT* (che include *preNAT*) su:

- $\mathcal{F} = \{\text{zero}/0, \text{succ}/1\}$
- $\mathcal{P} = \{\text{doppio}/2, \text{somma}/3\}$

vista in un esempio precedente, e la seguente assegnazione W sulle variabili $\mathcal{V} = \{X, Y, I, J, K\}$:

- $W(X) = 3$
- $W(Y) = 6$
- $W(I) = W(J) = W(K) = 4$

Esempio: valutazione su NAT (2)

Quanto vale $\mathit{eval}^{NAT,W}(\text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X))$?

$$
\begin{aligned}
&= NAT(\text{doppio})(\mathit{pre\text{-}eval}^{preNAT,W}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero}))), \mathit{pre\text{-}eval}^{preNAT,W}(X))\\
&= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(\mathit{pre\text{-}eval}^{preNAT,W}(\text{succ}(\text{zero}))), W(X))\\
&= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(\mathit{pre\text{-}eval}^{preNAT,W}(\text{zero}))), 3)\\
&= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{zero}))), 3)\\
&= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(preNAT(\text{succ})(0)), 3)\\
&= NAT(\text{doppio})(preNAT(\text{succ})(1), 3)\\
&= NAT(\text{doppio})(2, 3)\\
&= \text{false}
\end{aligned}
$$

Esempio: valutazione su NAT (3)

Quanto vale $eval^{NAT,W}(\exists X \text{ doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X))$?

La variabile X è esistenzialmente quantificata. Dalla regola 2.2, la formula è true sse esiste $d \in \mathcal{D}$ tale che:

$$eval^{NAT,W[X/d]}(\text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X)) = \text{true}$$

Questo è vero per $d = 4$. La formula è quindi vera

Nota: il valore assegnato da W alla variabile quantificata X è irrilevante

Esempio: valutazione su NAT (4)

Quanto vale $eval^{NAT,W}(\forall X \text{ doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X))$?

La variabile X è universalmente quantificata. Dalla regola 2.2, la formula è false sse esiste $d \in \mathcal{D}$ tale che:

$$eval^{NAT,W[X/d]}(\text{doppio}(\text{succ}(\text{succ}(\text{zero})), X)) = \text{false}$$

Questo avviene, ad es., per $d = 1$. La formula è quindi falsa

Nota: il valore assegnato da W alla variabile quantificata X è irrilevante

Esempio: valutazione su NAT (5)

Quanto vale $eval^{NAT,W}(\text{somma}(\text{succ}(\text{zero}), \text{zero}, \text{succ}(\text{zero})))$?

$$
\begin{aligned}
&= NAT(\text{somma})(\ \textit{pre-eval}^{preNAT,W}(\text{succ}(\text{zero})),\\
&\qquad\qquad \textit{pre-eval}^{preNAT,W}(\text{zero}),\\
&\qquad\qquad \textit{pre-eval}^{preNAT,W}(\text{succ}(\text{zero})))\\
&= NAT(\text{somma})(\ preNAT(\text{succ})(\textit{pre-eval}^{preNAT,W}(\text{zero})),\\
&\qquad\qquad preNAT(\text{zero}),\\
&\qquad\qquad preNAT(\text{succ})(\textit{pre-eval}^{preNAT,W}(\text{zero})))\\
&= NAT(\text{somma})(\ preNAT(\text{succ})(0), 0, preNAT(\text{succ})(0))\\
&= NAT(\text{somma})(\ 1, 0, 1)\\
&= \text{true}
\end{aligned}
$$

Esercizio: valutazione su *NAT*

1. Si calcoli il valore di verità delle formule seguenti sull'interpretazione *NAT* e sull'assegnamento di variabili *W* definiti in precedenza
   1.1. $\forall X \forall Y\ (\text{somma}(X, X, Y) \rightarrow \text{doppio}(X, Y))$
   1.2. $(\forall X \exists Y\ \text{doppio}(X, Y)) \wedge (\forall I \forall J \exists K\ \text{somma}(I, J, K))$
   1.3. $\forall X \exists Y\ \text{doppio}(X, Y)$
   1.4. $\exists Y \forall X\ \text{doppio}(X, Y)$
2. L'assegnamento di variabili *W* gioca un qualche ruolo nel determinare il valore di verità delle formule qui sopra? Perché?
3. L'assegnamento di variabili *W* gioca un qualche ruolo nel determinare il valore di verità delle sotto-formule delle formule qui sopra?
4. L'ordine dei quantificatori ha un qualche impatto nel determinare il valore di verità di una formula?

Soddisfacibilità, insoddisfacibilità, validità, modelli

- Formula ϕ soddisfacibile: esiste una interpretazione I e un assegnamento di variabili S tale che $eval^{I,S}(\phi) = \text{true}$
- Formula ϕ insoddisfacibile: per ogni interpretazione I e assegnamento di variabili S, si ha $eval^{I,S}(\phi) = \text{false}$
- Formula ϕ valida: per ogni interpretazione I ed ogni assegnamento di variabili S, si ha $eval^{I,S}(\phi) = \text{true}$

Nota: in una formula chiusa (dove tutte le variabili sono quantificate) l'assegnamento di variabili non gioca alcun ruolo (!!)

Per formule chiuse abbiamo anche:

- Modello di ϕ: interpretazione M per cui si ha: $eval^{M,S}(\phi) = \text{true}$ per qualunque assegnamento di variabili S (formula chiusa $\implies$ S irrilevante)

$$M \models \phi$$

Esempio: valutazione di formule aperte

Si consideri la seguente formula aperta

$$\exists X \; \text{doppio}(X, Y)$$

Data l'interpretazione *NAT* definita in un esempio precedente, si definiscano tutte le assegnazioni alle variabili che rendono la formula vera e tutte quelle che la rendono falsa

Esempio: valutazione di formule aperte

Si consideri la seguente formula aperta

$$\exists X \ \mathrm{doppio}(X, Y)$$

Data l'interpretazione *NAT* definita in un esempio precedente, si definiscano tutte le assegnazioni alle variabili che rendono la formula vera e tutte quelle che la rendono falsa

Soluzione

- La formula è vera per tutte le assegnazioni alle variabili che assegnano ad Y un valore pari
- La formula è falsa per tutte le assegnazioni alle variabili che assegnano ad Y un valore dispari

Regole di precedenza per la valutazione

In FOL vengono usate convenzionalmente le seguenti regole di precedenza per la valutazione dei connettivi e quantificatori:

1. $\neg$
2. $\wedge, \vee$
3. $\forall, \exists$
4. $\rightarrow$

Esempio: La formula

$$\forall X \; \mathrm{P}(X) \vee \mathrm{S}(X) \rightarrow \exists Y \; \mathrm{Q}(X, Y) \wedge \neg \mathrm{R}(Y)$$

viene valutata come se fosse

$$\forall X \; ((\mathrm{P}(X) \vee \mathrm{S}(X)) \rightarrow (\exists Y \; (\mathrm{Q}(X, Y) \wedge \neg (\mathrm{R}(Y)))))$$

Campo d'azione dei quantificatori

La presenza di più quantificatori che quantificano variabili omonime può creare ambiguità

Esempio: Si consideri la formula

$$\forall X \text{ uomo}(X) \wedge \exists X \text{ mortale}(X) \vee X = \text{padre}(\text{socrate})$$

- A quale quantificatore fa riferimento X in mortale(X)?
- A quale quantificatore fa riferimento X in X = padre(socrate)?

Il problema del campo di azione di un quantificatore è analogo a quello del campo d'azione degli identificatori in un linguaggio di programmazione con sottoprogrammi

Campo d'azione dei quantificatori (2)

Osservazione: il nome di una variabile quantificata non gioca alcun ruolo, analogamente ai parametri formali nei linguaggi di programmazione

La formula può essere sempre riscritta evitando che due quantificatori siano applicati a variabili omonime

Quindi, in base alle intenzioni del progettista, la formula può essere scritta come (formule non equivalenti!):

1. $\forall X$ uomo$(X) \wedge \exists Y$ mortale$(X) \vee Y =$ padre(socrate)
2. $\forall X$ uomo$(X) \wedge \exists Y$ mortale$(Y) \vee Y =$ padre(socrate)
3. $\forall X$ uomo$(X) \wedge \exists Y$ mortale$(Y) \vee X =$ padre(socrate)
4. $\forall X$ uomo$(X) \wedge \exists Y$ mortale$(X) \vee X =$ padre(socrate)

Nota: in alcuni casi (come quello dell'esempio) l'ambiguità può essere risolta semplicemente aggiungendo le parentesi, ad es.:
$(\forall X$ uomo$(X)) \wedge (\exists X$ mortale$(X) \vee X =$ padre(socrate)) (equiv. alla 2.)

Suggerimento: usare parentesi ed evitare quantificatori su var. omonime!