به نام خدا

پاسخنامه تمرین سری پنجم

ریاضیات مهندسی – دکتر حقی

ترم پاییز 1403 – دانشکده فنی دانشگاه تهران

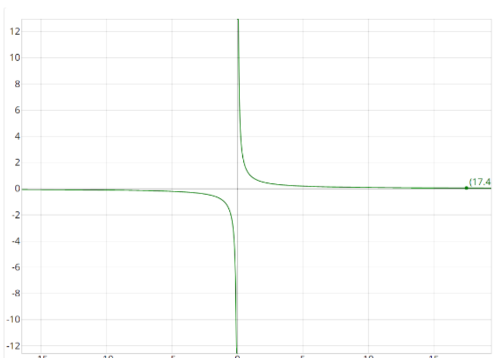
۱- همانطور که می‌دانیم هر تابعی ولو متناوب را نمی‌توان برحسب سری فوریه بیان کرد، یکی از شرایط کافی که وجود سری فوریه را تضمین می‌کنند شرایط دیریکله هستند:

شرط اول: تابع باید در دوره تناوب خود انتگرال پذیر باشد، یعنی انتگرال در بازه‌ی گفته شده محدود شود.

شرط دوم: تعداد ماکزیمم و مینیم‌ها در هر بازه محدودی، محدود و شمارا باشند.

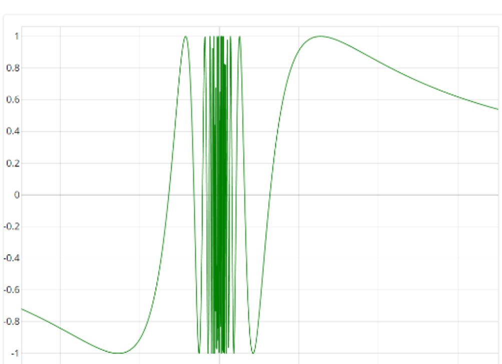
شرط سوم: تعداد و میزان ناپیوستگی‌های تابع در هر بازه محدودی، محدود باشد.

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



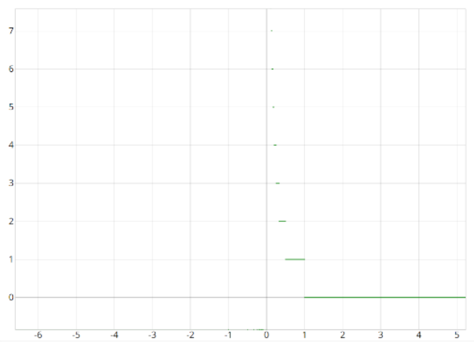
گزینه اول دقیقا نقض کننده‌ی شرط اول یعنی انتگرال‌پذیری در بازه است، همانطور که از به بینهایت میل کردن تابع $\frac{1}{x}$ در صفر مشخص است انتگرال تابع از بازه صفر تا یک نیز محدود نخواهد بود.

$$\int_0^1 {}^1/_x \, dx = \ln x|_0^1 = \infty$$

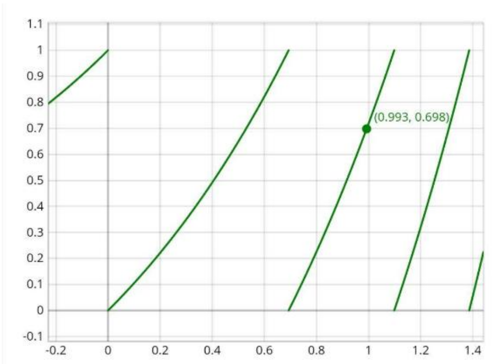


گزینه دوم اما نقض کننده‌ی شرط دوم است چرا که تعداد ماکزیمم و مینیمم‌های تابع در بازه‌ی نزدیک به صفر ناشمارا و نامحدود خواهد شد:

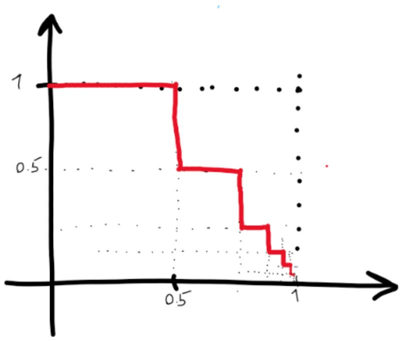
گزینه سوم نیز مثالی خوب برای نقض شرط سوم است همانطور که می‌بینید تعداد ناپیوستگی‌ها در بازه‌ی داده شده وقتی به سمت صفر می‌رویم به بی‌نهایت میل می‌کند:



گزینه چهارم تمامی شروط فوق را داراست و در عین ناپیوسته بودن در چند نقطه محدود اما دارای سری فوریه خواهد بود:



گزینه آخر این سوال همانطور که در شکل هم پیداست، مجددا مانند گزینه سوم تعداد ناپیوستگی هایش در حوالی یک نامحدود و ناشمارا خواهد شد بنابرین شرایط دیریکله را نقض می‌کند.



در انتها باید اشاره کرد که چون این شرایط، شرایطی کافی عنوان شده‌اند بنابرین نقض شدن یکی از آن‌ها توسط تابعی نمی‌تواند به معنای قطعی نشان دهنده نداشتن سری فوریه آن تابع باشند.

۲- برای اثبات این خاصیت مهم و کاربردی ابتدا دو خاصیت مهم را که برای سری فوریه مختلط آموخته‌اید مرور می‌کنیم:

- اگر ضرایب سری فوریه‌ی $f(x)$ برابر $\{C_n\}$ باشد آنگاه ضرایب سری فوریه‌ی تابع $f(-x)$ برابر $\{C_{-n}\}$ هم خواهد بود.
- اگر ضرایب سری فوریه‌ی $f(x)$ برابر $\{C_n\}$ باشد آنگاه ضرایب سری فوریه‌ی تابع $f(x)^*$ برابر $\{C^*_{-n}\}$ خواهد بود.

همچنین همانطور که میدانید وقتی میگوییم یک تابع زوج است یعنی $f(-x) = f(x)$ و فرد بودن تابع هم به معنای $f(-x) = -f(x)$ است.

حالا عبارت اول خواسته شده در این سوال بیان می‌کند که اگر f(x) تابعی حقیقی و زوج باشد، سری فوریه مختلط آن نیز حقیقی و زوج خواهد بود.
برای اثبات میدانیم $f(-x) = f(x)$ و چون تابع حقیقی است، مزدوج کردن آن، تغییری در آن ایجاد نمی‌کند، پس: $f(x)^* = f(x)$.
حالا از سری فوریه گرفتن برای دو معادله بالا داریم :
$\{C^*_{-n}\} = \{C_n\}$ که نشان دهنده‌ی حقیقی بودن تمامی ضرایب است و $\{C_n\} = \{C_{-n}\}$ که نشان دهنده‌ی زوج بودن ضرایب می‌باشد.

در عبارت دوم خواسته شده که اثبات کنیم اگر f(x) تابعی حقیقی و فرد باشد، سری فوریه مختلط آن نیز تماما موهومی و فرد خواهد بود .
میدانیم $f(-x) = -f(x)$ و چون تابع حقیقی است، مزدوج کردن آن تغییری در آن ایجاد نمی‌کند، پس: $f(x)^* = f(x)$.
حالا از سری فوریه گرفتن برای معادله اول داریم :

$-\{C_n\} = \{C_{-n}\}$ که می‌توان نوشت $\{-C_n\} = \{C_{-n}\}$ نشان دهنده‌ی فرد بودن ضرایب میباشد.

و از سری فوریه گرفتن برای معادله دوم مانند قبل داریم $\{C^*_{-n}\} = \{C_n\}$ و اگر در اینجا عبارت سمت راست را با $-\{C_{-n}\}$ جاگذاری کنیم داریم :

$$\{C^*_{-n}\} = -\{C_{-n}\}$$

و این به این معنا است که اثری که مزدوج کردن بر روی ضرایب داشته است صرفا قرینه کردن آن ها بوده است که به معنای موهومی خالص بودن ضرایب می‌باشد، به خاطر دارید که برای یک عدد مختلط مثل a+bi مزدوج کردن حاصل a-bi در پی داشت.
حتما این خاصیت را در سوال‌هایی که سری فوریه حساب می‌کنید بررسی کرده و لذت ببرید!

-۳

الف) ابتدا ضرایب سری فوریه مختلط را بدست می‌آوریم:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{-inx}dx\xrightarrow{n\neq0}C_n=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{ix^2}{n}+\frac{2x}{n^2}-\frac{2i}{n^3}\right)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$if\ n=0\ \rightarrow C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{x^3}{6\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{(-1)^ne^{inx}}{n^2}$$

حال ضرایب سری فوریه حقیقی را پیدا می‌کنیم:

$$a_0=C_0=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=C_n+C_{-n}=\frac{2(-1)^n}{n^2}+\frac{2(-1)^{-n}}{(-n)^2}=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n=i(C_n-C_{-n})=i\left(\frac{2(-1)^n}{n^2}-\frac{2(-1)^{-n}}{(-n)^2}\right)=0$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

ب) داریم:

$$f(x)\xrightarrow{F.S.}C_n;(T=2\pi)\Rightarrow f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\xrightarrow{F.S.}C_ne^{-\frac{in\pi}{6}};(T=2\pi)$$

$$\Rightarrow\ f\left(-4x-\frac{\pi}{6}\right)\xrightarrow{F.S.}C_{-n}e^{\frac{in\pi}{6}};\left(T=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{df\left(-4x-\frac{\pi}{6}\right)}{dx}\xrightarrow{F.S.}C_{-n}e^{\frac{in\pi}{6}}.(4in)$$

۴-

الف) از دو طرف سری فوریه انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^x x^2 dx = \int_0^x \frac{1}{3}\pi^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^x \cos nx\, dx$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\pi^2 x + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

با تقسیم طرفین این معادله بر ۴، قضیه اثبات می‌شود.

ب) از دو طرف سری فوریه انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\int_0^x \sin(2n-1)x\, dx = \int_0^x f(x)dx$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}(-\cos(2n-1)x+1) = \begin{cases}-x; & -\pi < x < 0\\ x\ ; & 0 < x < \pi\end{cases}$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases}-x; & -\pi < x < 0\\ x\ ; & 0 < x < \pi\end{cases}$$

$$\frac{4}{\pi}\frac{\pi^2}{8} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases}-x; & -\pi < x < 0\\ x\ ; & 0 < x < \pi\end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases}-x; & -\pi < x < 0\\ x\ ; & 0 < x < \pi\end{cases} = |x|$$

۵-

الف)

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \xrightarrow{x=0} 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

ب)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin x}{n^3} = \frac{1}{12}x(\pi^2 - x^2) \rightarrow a_0 = a_n = 0\,, b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$$

با استفاده از رابطه پارسوال داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{144}\int_0^{\pi} [x^6 + \pi^4 x^2 - 2\pi^2 x^4]dx = \frac{\pi^6}{945}$$

ج) با دوبار انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \begin{cases} -\frac{x^2}{2};\ -\pi < x < 0 \\ \frac{x^2}{2}\ ;\quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{(2n-1)^3} = \frac{-\pi^3}{32}$$

۶- ابتدا سری فوریه مثلثاتی $f(x)=x^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$T=2\pi\ ,b_n=0\rightarrow f(x)=x^2=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$$

$$\rightarrow b_0=\frac{<x^2,1>}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^2}{3}$$

$$\rightarrow a_n=\frac{<x^2,\cos nx>}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$\rightarrow x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\left(\frac{\cos\pi\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2\pi\cos 2x}{2^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right)$$

پس می‌توان گفت:

$$x=0\rightarrow\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots(*)$$

$$\rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

$$(*)\rightarrow\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-2)^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

$$=\frac{2\pi^2}{24}+\frac{\pi^2}{24}=\frac{3\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$$

۷- از دو طرف معادله انتگرال نامعین می‌گیریم:

$$-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)(2n-1)}\int \sin 2nx\,dx = \int f(x)dx$$

$$C+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)(2n-1)(2n)}\cos 2nx = \pm\sin x$$

$$C+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n+1)(2n-1)} = \pm\sin x \to C = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}$$

$$\to \pm\sin x = -\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n+1)(2n-1)}$$

با توجه به رابطه پارسوال داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx = 2\frac{4}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2(2n-1)^2}$$

$$\to 1 = \frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}A \to\ A = \frac{\pi^2-8}{16}$$

۸- تنها کافیست سری‌ها را به جای توابع گفته‌شده در انتگرال جاگذاری کنید، اما قبل از اثبات و انجام این کار یادآوری از تناوبِ توابع مختلط متناوب می‌کنیم:

$$\int_T e^{\frac{2\pi}{T}wxi}\,dx = 0 \qquad (w \neq 0)$$

$$\int_T e^{\frac{2\pi}{T}wxi}\,dx = T \qquad (w = 0)$$

حال وارد اثبات می‌شویم:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi}{T}nxi}$$

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{\frac{2\pi}{T}mxi}$$

$$\frac{1}{T}\int_T f(x)g(x)^*\,dx = \frac{1}{T}\int_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi}{T}nxi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^* e^{\frac{-2\pi}{T}mxi}\,dx$$

پس می‌توان گفت:

$$\frac{1}{T}\int_T f(x)g(x)^*\,dx = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^* C_n \int_T e^{\frac{2\pi}{T}xi(n-m)}\,dx$$

حالا چیزی که ابتدای کار یادآوری کردیم را به خاطر بیاورید؛ عبارت داخل انتگرال فقط به ازای مقادیر برابر m و n صفر نیست پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{T}\int_T f(x)g(x)^*\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^* C_n$$