به نام خدا

تمرین سری پنجم

ریاضیات مهندسی – دکتر حقی

ترم پاییز ۱۴۰۳ – دانشکده فنی دانشگاه تهران

هدف: آشنایی با شروط دیریکله

۱- توابع زیر را به لحاظ داشتن سری فوریه بررسی کنید. (شروط دیریکله را تحقیق کنید و ذکر کنید کدام شرط را نقض می‌کنند) آیا می‌توان گفت گزینه‌هایی که یکی از این شروط را ندارند به طور قطع سری فوریه ندارند؟

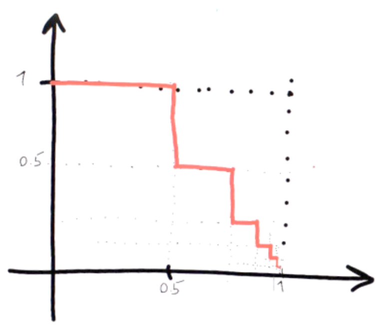
الف) $f(x) = \frac{1}{x}\ ;\ 0 < x < 1$

ب) $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)\ ;\ 0 < x < 1$

ج) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right];\ 0 < x < 1$

د) $f(x) = e^x - [e^x]\ ;\ 0 < x < 1$

ه) تابعی چون شکل مقابل در بازه‌ی صفر تا یک که زمانی که نیمی از مسیر را طی می‌کند، دامنه آن نصف می‌شود.



هدف: آشنایی با یکی از نتایج مهم خواص سری فوریه مختلط

۲- با توجه به خواصی که از سری فوریه مختلط آموخته‌اید، گزاره‌ی زیر را اثبات کنید:

« اگر تابع حقیقی و زوج باشد آنگاه ضرایب سری فوریه مختلط آن نیز زوج و حقیقی هستند و اگر تابع حقیقی و فرد باشد آنگاه ضرایب سری فوریه مختلط آن موهومی خالص (فقط ترم i) و فرد خواهند بود. »

(راهنمایی: از خاصیت قرینه در زمان، تعریف زوج و فرد بودن به همراه خاصیت مزدوج کردن تابع استفاده کنید.)

هدف: برقراری ارتباط بین سری فوریه مثلثاتی و مختلط و استفاده از خواص سری فوریه

-۳

الف) سری فوریه مختلط تابع $f(x) = x^2 \; ; \; -\pi < x < \pi$ را محاسبه کرده و سپس آن‌را به سری فوریه حقیقی تبدیل کنید.

ب) اگر ضرایب سری فوریه مختلط این تابع برابر با C_n باشد، ضرایب سری فوریه تابع $g(x) = \frac{df(-4x-\pi/6)}{dx}$ را بر حسب C_n بدست آورید.

هدف: محاسبه‌ی سری‌های پیچیده عددی با استفاده از سری فوریه

-۴

الف) سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ در بازه‌ی $(0, \pi)$ به صورت زیر بدست می‌آید.(چرا؟)

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad (۴.۱)$$

حال با استفاده از این رابطه، نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin x}{n^3} = \frac{1}{12}x(\pi^2 - x^2) \quad (۴.۲)$$

ب) با استفاده از سری فوریه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} -1; & -\pi < x < 0 \\ 1; & 0 < x < \pi \end{cases}$ که در زیر داده شده‌است، سری فوریه تابع $|x|$ را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad (۴.۳)$$

(راهنمایی: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$)

هدف: آشنایی با کاربردهای رابطه‌ی پارسوال و سری فوریه در بدست آوردن سری‌های پیچیده

-۵ مطلوب است:

الف) محاسبه حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ با بهره‌گیری از رابطه‌ی (۴.۱).

ب) محاسبه حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ با بهره‌گیری از رابطه‌ی (۴.۲).

ج) محاسبه حاصل تابع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$ با بهره‌گیری از رابطه‌ی (۴.۳).

هدف: محاسبه‌ی سری‌ها به کمک سری فوریه مثلثاتی

۶- با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ در بازه‌ی $-\pi \leq x \leq \pi$ حاصل S را بدست آورید.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2}$$

هدف: استفاده از رابطه‌ی پارسوال و سری فوریه برای محاسبه سری‌های عددی پیچیده

۷- می‌دانیم سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x\,; -\pi < x < 0 \\ -\cos x\,; 0 < x < \pi \end{cases}$ به صورت زیر می‌باشد.(چرا؟) حال حاصل سری عددی A را بدست آورید.

$$f(x) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \cdots$$

هدف: تسلط بر ایده‌ی استفاده شده در اثبات رابطه پارسوال

۸- اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ هر دو متناوب با دوره تناوب T ، و دارای سری فوریه به شکل زیر باشند:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi}{T} nxi}$$

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{\frac{2\pi}{T} mxi}$$

نشان دهید:

$$\frac{1}{T} \int_T f(x) g(x)^* \, \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n D_n^*$$
