

## گزارش سوال اول تمرین کامپیوتری اول آمار و احتمال مهندسی

امیرمرتضی رضائی – 810101429

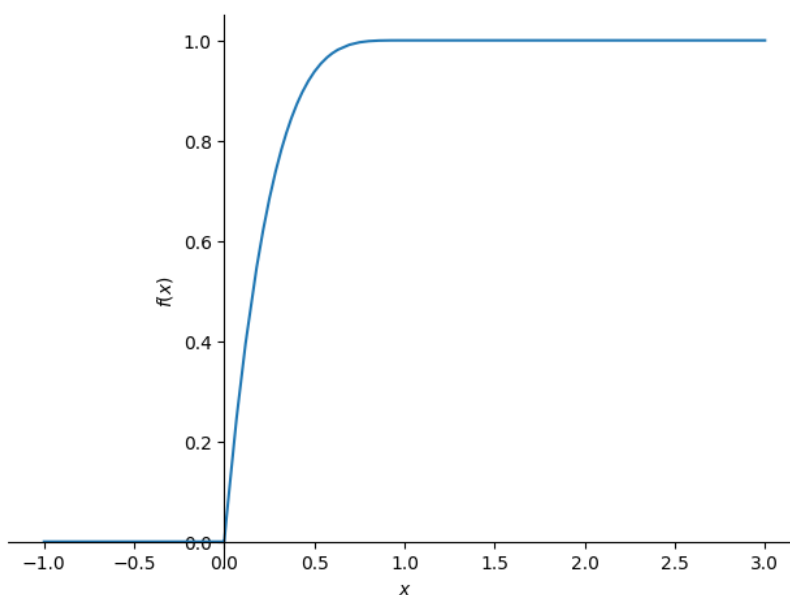
(a)

ابتدا تابعی را تعریف می‌کنیم که PDF را برگرداند. نکته مهم آنست که چون  $x$  بین 0 و 1 تعریف شده است، تابع PDF تنها در بازه  $[0,1]$  مقدار دارد؛ به همین دلیل در تعریف PDF از تابع پله‌ای واحد (Heaviside) استفاده شده است.

```
def pdf(t, x):  
    return (t+1)*((1-x)**t)* (sp.Heaviside(x) - sp.Heaviside(x-1))
```

سپس با انتگرال گیری از این تابع نسبت به  $x$ ، تابع توزیع تجمعی یا CDF بدست می‌آید. در نهایت نیز با گرفتن مقدار  $\theta$  از ورودی و جایگذاری در تابع بدست آمده، آنرا در یک بازه (برای مثال  $[-1,3]$ ) ترسیم می‌کنیم.

```
x = sp.Symbol('x')  
t = sp.Symbol('t')  
cdf=sp.integrate(pdf(t,x), x)  
t_value=input("please enter teta: ")  
cdf_function = cdf.subs(t,t_value)  
sp.plot(cdf_function,(x,-1,3))
```



$$\theta = 3$$

(b)

می‌دانیم:

$$P(x \leq 0.25) = F_X(0.25)$$

بنابراین با جایگذاری مقادیر  $\theta = 2$  و  $x = 0.25$  در تابع CDF بدست آمده در قسمت قبلی، حاصل احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

```
prob=cdf.subs(t,2).subs(x,0.25)
print("pr(x<=0.25 | t=2) = ",prob)
```

نتیجه بدست آمده به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{pr}(x \leq 0.25 \mid t=2) = 0.578125000000000$$

(c)

چون میانگین  $X$  را می‌خواهیم بدست آوریم، و می‌دانیم  $0 \leq F(x) \leq 1$ ، می‌توانیم با توجه به روابط زیر مقادیر  $X$  را با توجه به مقادیر  $F(x)$  بدست آورده و پس از ذخیره‌سازی، میانگین و واریانس آنها را محاسبه کنیم.

$$\theta = 2 \rightarrow f(x) = 3(1-x)^2 \rightarrow F(x) = \int_0^x 3(1-x)^2 dx = (x-1)^3 + 1$$

$$\Rightarrow F(x)^{-1} = 1 - \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow X = 1 - \sqrt[3]{1-F}$$

پس ابتدا تابع اینورس  $F$  را تعریف می‌کنیم:

```
def cdf_inverse(F):
    return (1-((1-F)**(1./3)))
```

حال با توجه به شرایط بیان شده در صورت سوال، 100000 عدد تصادفی بین 0 و 1 تولید کرده و با استفاده از تابع اینورس  $F$ ، مقادیر  $X$  را بدست آورده و ذخیره می‌کنیم. در نهایت نیز مقدار میانگین و واریانس اعداد بدست آمده را محاسبه می‌کنیم:

```
TheList=[]
random.seed(80)
for i in range(0, 100000):
    k = random.random()
    value=float(cdf_inverse(k))
    TheList.append(value)
mean = statistics.mean(TheList)
variance = statistics.variance(TheList)
print("mean = ", mean)
print("variance = ", variance)
```

$$\begin{aligned} \text{mean} &= 0.24976051107825056 \\ \text{variance} &= 0.037452929250073284 \end{aligned}$$

(d)

محاسبه میانگین و واریانس X به ازای  $\theta = 2$  :

$$\theta = 2 \rightarrow f(x) = 3(1-x)^2 \Rightarrow$$

$$E[x] = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 3x(1-x)^2 dx = 0.25$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2 \Rightarrow$$

$$E[x^2] = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 3x^2(1-x)^2 dx = 0.1 \Rightarrow \sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2 = 0.1 - 0.0625 = 0.0375$$

(e)

همانطور که مشاهده می‌گردد، نتایج بدست آمده به روش تئوری و عددی تقریباً یکسان می‌باشند. با افزایش تعداد نمونه برداری‌ها، اعداد بدست آمده در این دو بخش به هم نزدیک‌تر می‌شوند.