

گزارش سوال سوم تمرین کامپیوتری دوم آمار و احتمال مهندسی

امیرمرتضی رضائی – 810101429

a) می‌دانیم برای هر تابع چگالی (توأم) رابطه زیر در ناحیه تعریف X و Y (ناحیه D) برقرار است:

$$\iint_{(x,y) \in D} f_{XY}(x,y) dx dy = 1$$

پس در این سوال داریم:

$$\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x^2} ky dy dx = 1 \rightarrow k = \frac{1}{\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=x^2} y dy dx}$$

بنابراین برای حل معادله بالا و بدست آوردن مقدار k ، ابتدا حدود پایین و بالای X و Y را جهت انتگرال‌گیری مشخص می‌کنیم:

```
integrand = y
x_lower_limit = 0
x_upper_limit = 2
def y_lower_limit(x):
    return 0
def y_upper_limit(x):
    return (x*x)
```

سپس انتگرال بیان‌شده را محاسبه کرده و حاصل آن را در متغیر `result` ذخیره کرده و در نهایت مقدار k را بدست‌آورده و آن را نمایش می‌دهیم:

```
result = sp.integrate(sp.integrate(integrand, (y, y_lower_limit(x), y_upper_limit(x))), (x, x_lower_limit, x_upper_limit))
k = 1/result
print("k = ", float(k))
```

نتیجه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$k = 0.3125$$

(b) برای بررسی استقلال دو متغیر تصادفی X و Y، ابتدا توابع حاشیه‌ای آن‌ها را به روش زیر بدست می‌آوریم:

$$f_X(x) = \int f_{XY}(x, y) dy = \int_{y=0}^{x^2} ky dy$$

$$f_Y(y) = \int f_{XY}(x, y) dx = \int_{x=\sqrt{y}}^2 ky dx$$

حاصل این انتگرال‌ها به صورت زیر محاسبه شده است:

```
joint_pdf = k * y
pdf_x = sp.integrate(joint_pdf, (y, y_lower_limit(x), y_upper_limit(x)))
pdf_y = sp.integrate(joint_pdf, (x, sp.sqrt(y), x_upper_limit))
```

می‌دانیم شرط لازم و کافی برای استقلال دو متغیر تصادفی X و Y آن است که:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

بنابراین هریک از طرفین تساوی را چاپ کرده و در نهایت بررسی می‌کنیم که آیا این تساوی برقرار است یا خیر:

```
print("joint pdf = ", joint_pdf)
print("pdf_x * pdf_y = ", sp.simplify(pdf_x*pdf_y))
if pdf_y * pdf_x == joint_pdf:
|   print('X & Y are independent\n')
else:
|   print('X & Y are not independent\n')
```

نتیجه به صورت زیر می‌باشد:

```
joint pdf = 5*y/16
pdf_x * pdf_y = 25*x**4*(-y**(3/2) + 2*y)/512
X & Y are not independent
```

(C) طبق LOTUS داریم:

$$E\{g(x, y)\} = \iint g(x, y) \times f_{XY}(x, y) dx dy$$

با توجه به همین اصل، از حاصل ضرب تابع مصرف سوخت و تابع چگالی توام X و Y در بازه‌ی تعریف X و Y انتگرال گرفته و نتیجه را نمایش می‌دهیم:

```
consumption = 3 + 2*x + 1.5*y
mean = sp.integrate(sp.integrate((consumption * joint_pdf), (y, y_lower_limit(x), y_upper_limit(x))), (x, x_lower_limit, x_upper_limit))
print("mean diesel consumption is : ", mean)
```

نتیجه به‌صورت زیر می‌باشد:

```
mean diesel consumption is : 9.19047619047619
```