

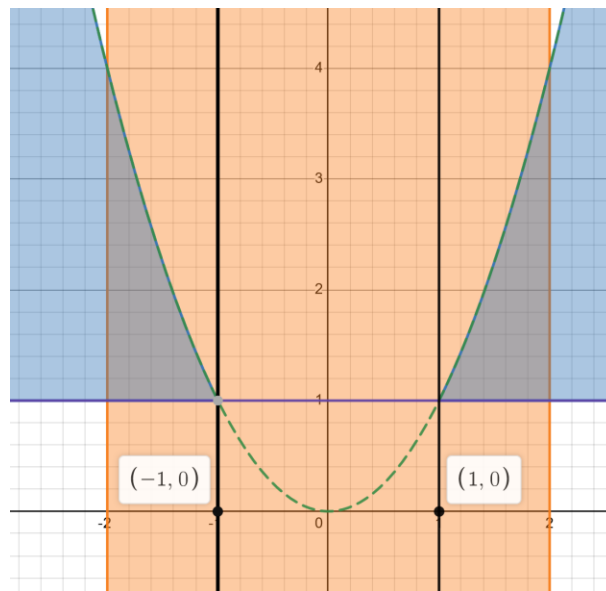
گزارش سوال چهارم تمرین کامپیوتری دوم آمار و احتمال مهندسی

امیرمرتضی رضائی – 810101429

a) می‌دانیم برای هر تابع چگالی (توأم) رابطه زیر در ناحیه تعریف X و Y (ناحیه D) برقرار است:

$$\iint_D f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

از طرفی نواحی تعریف X و Y در این سوال به صورت زیر می‌باشد:



پس در این سوال داریم:

$$\int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=1}^{y=x^2} Ky dy dx + \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=x^2} Ky dy dx = 1$$
$$\rightarrow K = \frac{1}{\int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=1}^{y=x^2} y dy dx + \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=x^2} Ky dy dx}$$

بنابراین برای حل معادله بالا و بدست آوردن مقدار K، ابتدا حدود پایین و بالای X و Y را جهت انتگرال گیری مشخص می کنیم، توجه شود که دو بازه برای X داریم:

```
integrand = y
x_lower_limit_1 = -2
x_upper_limit_1 = -1
x_lower_limit_2 = 1
x_upper_limit_2 = 2
def y_lower_limit(x):
    return 1
def y_upper_limit(x):
    return (x*x)
```

سپس انتگرال های بیان شده را محاسبه کرده و مقدار K را توسط حاصل جمع آن ها بدست آورده و آن را نمایش می دهیم:

```
result_1 = sp.integrate(sp.integrate(integrand, (y, y_lower_limit(x), y_upper_limit(x))), (x, x_lower_limit_1, x_upper_limit_1))
result_2 = sp.integrate(sp.integrate(integrand, (y, y_lower_limit(x), y_upper_limit(x))), (x, x_lower_limit_2, x_upper_limit_2))
k = 1/(result_1+result_2)
print("k = ",float(k))
```

نتیجه به صورت زیر می باشد:

```
k = 0.19230769230769232
```

(b) می دانیم توابع حاشیه ای دو متغیر تصادفی X و Y به روش زیر بدست می آید:

$$f_X(x) = \int f_{XY}(x, y) dy = \int_{y=1}^{x^2} Ky dy$$

$$f_Y(y) = \int f_{XY}(x, y) dx = \int_{x=-2}^{-\sqrt{y}} Ky dx + \int_{x=\sqrt{y}}^2 Ky dx$$

حاصل این انتگرال ها به صورت زیر محاسبه شده است:

```
joint_pdf = k * y
pdf_x = sp.integrate(joint_pdf, (y, y_lower_limit(x), y_upper_limit(x)))
pdf_y = sp.integrate(joint_pdf, (x, x_lower_limit_1, -sp.sqrt(y))) + sp.integrate(joint_pdf, (x, sp.sqrt(y), x_upper_limit_2))
print("pdf_x = ", sp.simplify(pdf_x))
print("pdf_y = ", sp.simplify(pdf_y))
```

نتیجه به صورت زیر می باشد:

```
pdf_x = 5*x**4/52 - 5/52
pdf_y = -5*y**(3/2)/13 + 10*y/13
```

(C) داریم:

$$\Pr(Y > 1.5 | X < 0.5) = \frac{\Pr(Y > 1.5 \cap X < 0.5)}{\Pr(X < 0.5)}$$

$$\Pr(Y > 1.5 \cap X < 0.5) = \int_{x=-2}^{x=-\sqrt{1.5}} \int_{y=1.5}^{y=x^2} f_{XY}(x, y) dy dx = \int_{x=-2}^{x=-\sqrt{1.5}} \int_{y=1.5}^{y=x^2} Ky dy dx$$

$$\Pr(X < 0.5) = \int_{x=-\infty}^{x=0.5} f_X(x) dx = \int_{x=-2}^{-1} f_X(x) dx$$

این معادلات را به صورت زیر پیاده‌سازی می‌کنیم. اما با توجه به حد پایین Y در عبارت اول، لازم است تا ابتدا آن‌ها را به صورت یک متغیر ذخیره‌سازی کنیم:

```
y_new_lower_limit = 1.5
pdf_A = sp.integrate(sp.integrate(joint_pdf, (y, y_new_lower_limit, y_upper_limit(x))), (x, x_lower_limit_1, -sp.sqrt(1.5)))
pdf_B = sp.integrate(pdf_x, (x, x_lower_limit_1, x_upper_limit_1))
conditional_result = pdf_A / pdf_B
print("conditional_result : ", conditional_result)
```

در نهایت نتیجه به صورت زیر می‌باشد:

```
conditional_result : 0.789334763174012
```