



گزارش پروژه سوم (امتیازی) متلب

درس محاسبات عددی

امیرمرتضی رضائی

810101429

تابستان 1402



سوال دوم:

(الف)

توضیح مبحث تئوری:

می دانیم برای محاسبه انتگرال تابع f در بازه $[a, b]$ با طول گام h به روش ذوزنقه ای داریم:

$$\int_a^b f(x) dx \approx T(h) = \frac{h}{2} (f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b))$$

که در آن، n برابر است با:

$$n = \frac{b - a}{h}$$

حل سوال:

در ابتدا در 3 سطر اول، مقادیر a و b و h را تعریف می کنیم.

1	<code>h=0.1;</code>
2	<code>a=0;</code>
3	<code>b=1;</code>

سپس تابعی با نام `f_calculator` را ایجاد می کنیم که خروجی آن یعنی f ، با مقدار تابع f در نقطه x که آن را به صورت ورودی دریافت می کند، برابر باشد.

6	<code>function f=f_calculator(x)</code>
7	<code> f= (2*x)*exp(-(x^2));</code>
8	<code>end</code>

حال برای محاسبه مقدار انتگرال به روش ذوزنقه، تابعی با نام `trapezoidal` ایجاد کرده که مقادیر a و b و h را به عنوان ورودی دریافت کرده و حاصل انتگرال گیری را در متغیر `result` به عنوان خروجی تابع ذخیره می کند.

ابتدا مقدار n را محاسبه می کنیم. سپس متغیری به نام sum را برای ذخیره حاصل زیگما، تعریف کرده و مقدار اولیه آن را برابر با صفر قرار می دهیم. مقدار اولیه متغیر x را نیز برابر با a قرار می دهیم.

حال در یک حلقه که از x_1 تا x_{n-1} حرکت می کند، مقدار sum را با دو برابر حاصل تابع در نقطه x_i آپدیت میکنیم. بعد از محاسبه حاصل زیگما، مقادیر تابع در نقاط a و b را نیز با sum جمع کرده و در انتها حاصل جمع نهایی را در مقدار $h/2$ ضرب می کنیم.

```
9 function result= trapezoidal(a,b,h)
10     n=((b-a)/h);
11     sum=0;
12     x=a;
13     for i=(1:n-1)
14         x=x+h;
15         sum=sum+2*(f_calculator(x));
16     end
17     sum=sum+f_calculator(a)+f_calculator(b);
18     result=(h/2)*sum;
19 end
```

حال در متن برنامه، حاصل انتگرال بدست آمده را با نمایش یک متن مناسب چاپ می کنیم.

```
5 fprintf('the final result is : %d\n', trapezoidal(a,b,h));
```

حاصل این انتگرال به روش ذوزنقه برابر است با:

```
the final result is : 6.298381e-01
```

(ب)

توضیح مبحث تئوری:

می دانیم برای محاسبه انتگرال تابع f در بازه $[a, b]$ با طول گام h به روش ذوزنقه ای داریم:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(h) = \frac{h}{3} (f(a) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(b))$$

که در آن، n برابر است با:

$$n = \frac{b - a}{h}$$

حل سوال:

در ابتدا در 3 سطر اول، مقادیر a و b و h را تعریف می کنیم.

```
1 h=0.1;  
2 a=0;  
3 b=1;
```

سپس تابعی با نام `f_calculator` را ایجاد می کنیم که خروجی آن یعنی f ، با مقدار تابع f در نقطه x که آن را به صورت ورودی دریافت می کند، برابر باشد.

```
5 function f=f_calculator(x)  
6     f= (2*x)*exp(-(x^2));  
7 end
```

حال برای محاسبه مقدار انتگرال به روش سیمپسون، تابعی با نام `simpson` ایجاد کرده که مقادیر a و b و h را به عنوان ورودی دریافت کرده و حاصل انتگرال گیری را در متغیر `result` به عنوان خروجی تابع ذخیره می کند. ابتدا مقدار n را محاسبه می کنیم. سپس متغیری به نام `sum` را برای ذخیره حاصل زیگما، تعریف کرده و مقدار اولیه آن را برابر با صفر قرار می دهیم. مقدار اولیه متغیر x را نیز برابر با a قرار می دهیم.

حال در یک حلقه که از x_1 تا x_{n-1} حرکت می کند، توسط یک شرط، بررسی میکنیم اگر i زوج باشد، مقدار sum را با دو برابر حاصل تابع در نقطه ی x_i آپدیت کرده و اگر فرد باشد مقدار sum را با چهار برابر حاصل تابع در نقطه ی x_i آپدیت میکنیم.

بعد از محاسبه حاصل زیگما ها، مقادیر تابع در نقاط a و b را نیز با sum جمع کرده و در انتها حاصل جمع نهایی را در مقدار $h/3$ ضرب می کنیم.

```
8 function result= simpson(a,b,h)
9     n=((b-a)/h);
10    sum=0;
11    x=a;
12    for i=(1:n-1)
13        x=x+h;
14        if(rem(i,2)==0)
15            sum=sum+2*(f_calculator(x));
16        else
17            sum=sum+4*(f_calculator(x));
18        end
19    end
20    sum=sum+f_calculator(a)+f_calculator(b);
21    result=(h/3)*sum;
22 end
```

حال در متن برنامه، حاصل انتگرال بدست آمده را با نمایش یک متن مناسب چاپ می کنیم.

```
4 fprintf('the final result is : %d\n',simpson(a,b,h) );
```

حاصل این انتگرال به روش سیمپسون برابر است با:

```
the final result is : 6.321314e-01
```

ج)

توضیح مبث تئوری:

می دانیم برای محاسبه انتگرال تابع f در بازه $[-1, 1]$ به روش گاوس 2 نقطه ای داریم:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

همچنین برای محاسبه ی این انتگرال به روش گاوس سه نقطه ای داریم:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} \left(5f\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + 8f(0) + 5f\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) \right)$$

البته در صورتی که بازه انتگرال گیری $[a, b]$ باشد، باید تغییر متغیری به صورت زیر را روی انتگرال اعمال نماییم:

$$x = \frac{(b-a)}{2}u + \frac{b+a}{2} \rightarrow dx = \frac{(b-a)}{2}du \rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f(u)du$$

حل سوال:

در ابتدا، مقادیر a و b را تعریف می کنیم.

1	<code>a=0;</code>
2	<code>b=1;</code>

سپس تابعی با نام `f_calculator` را ایجاد می کنیم که مقادیر a و b را به عنوان ورودی دریافت می کند. این تابع، در ابتدا تغییر متغیر متناسب را اعمال کرده و مقدار تابع را به ورودی به دست می آورد.

```
5 function f=f_calculator(a,b,u)
6     x=((b-a)/2)*u+((b+a)/2);
7     f= (2*x)*exp(-(x^2));
8 end
```

حال برای محاسبه انتگرال به روش گاوس دو نقطه ای، تابعی با نام gauss_2 با ورودی های a و b و خروجی result ایجاد می کنیم.

در سطر اول این تابع مقدار u را برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3}$ قرار داده و در سطر دوم، با توجه به توضیحات ارائه شده، حاصل انتگرال گیری را برابر با حاصل جمع مقادیر تابع در دونقطه ی u و -u قرار می دهیم. ولی از آنجا که در فرآیند تغییر متغیر، یک ضرب به صورت $\frac{b-a}{2}$ ایجاد شده بود، آنرا در حاصل پایانی ضرب می کنیم.

```
9 function result= gauss_2(a,b)
10     u=(sqrt(3))/3;
11     result=((b-a)/2)*(f_calculator(a,b,-u)+f_calculator(a,b,u));
12 end
```

حال برای محاسبه انتگرال به روش گاوس سه نقطه ای، تابعی با نام gauss_3 با ورودی های a و b و خروجی result ایجاد می کنیم.

در سطر اول این تابع مقدار u را برابر با $\frac{\sqrt{3}}{5}$ قرار داده و در سطر دوم، با توجه به توضیحات ارائه شده، حاصل انتگرال گیری را برابر با یک نهم حاصل جمع پنج برابر مقادیر تابع در دونقطه ی u و -u و هشت برابر مقدار تابع در نقطه ی 0 قرار می دهیم. ولی از آنجا که در فرآیند تغییر متغیر، یک ضرب به صورت $\frac{b-a}{2}$ ایجاد شده بود، آنرا در حاصل پایانی ضرب می کنیم.

```
13 function result= gauss_3(a,b)
14     u=(sqrt(3))/5;
15     result=((b-a)/2)*(5*f_calculator(a,b,-u)+8*f_calculator(a,b,0)+5*f_calculator(a,b,u))/9;
16 end
```

حال در متن برنامه، حاصل انتگرال های بدست آمده را با نمایش یک متن مناسب چاپ می کنیم.

```
3 fprintf('the final result for 2 points is : %d', gauss_2(a,b));
4 fprintf('the final result for 3 points is : %d', gauss_3(a,b));
```

نتایج بدست آمده به صورت زیر می باشند:

```
the final result for 2 points is : 6.255072e-01
the final result for 3 points is : 7.470086e-01
```