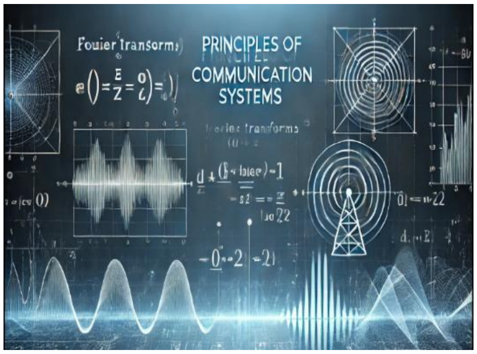
به نام خدا

دانشگاه تهران – دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر



اصول سیستم‌های مخابراتی – بهار ۱۴۰۴

دکتر هادی امیری

پاسخنامه تمرین ۳ : مدولاسیون دامنه

طراح تمرین : امیرمرتضی رضائی

۱. (الف) واضح است که

$$2m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t+\theta)=m(t)\cos(\theta)+2f_c \text{ term}$$

$$2m(t)\cos(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_c t+\theta)=m(t)\sin(\theta)+2f_c \text{ term.}$$

از آنجا که بهره فیلتر پایین‌گذر (LPF) در باند عبور $[-W,\ W]$ برابر با ۲ است، داریم:

$$x_I(t)=2m(t)\cos(\theta)$$

$$x_Q(t)=2m(t)\sin(\theta).$$

بنابراین:

$$y=2\sin(2\theta)\int_{t=-\infty}^{\infty}m^2(t)dt$$

$$=2\sin(2\theta)\int_{f=-\infty}^{\infty}|M(f)|^2 df$$

$$=4\sin(2\theta)\int_{f=0}^{W}\left(\frac{-2f}{W}+2\right)^2 df$$

$$=\frac{16}{3}W\sin(2\theta)$$

در اینجا از **قضیه انرژی رایلی** استفاده شده است.

(ب) واضح است که زمانی $y=0$ است وقتی:

$$\theta=\frac{k\pi}{2},$$

که در آن k یک عدد صحیح است.

۲. رابطه کلی برای سیگنال تک‌تون مدوله شده با AM به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c[1+\mu\cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_c t) \\ &= A_c\cos(2\pi f_c t)+\frac{\mu A_c}{2}\cos(2\pi(f_c-f_m)t) \\ &+\frac{\mu A_c}{2}\cos(2\pi(f_c+f_m)t). \end{aligned}$$

(الف) توان حامل برابر با $\frac{A_c^2}{2}$ و توان هر یک از باندهای کناری برابر با $\frac{1}{2}(\frac{\mu A_c}{2})^2$ می‌باشد. بنابراین نسبت توان باندهای جانبی به توان کل به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{2\times\frac{1}{2}(\frac{\mu A_c}{2})^2}{\frac{A_c^2}{2}+2\times\frac{1}{2}(\frac{\mu A_c}{2})^2}=\frac{\frac{\mu^2 A_c^2}{4}}{\frac{2A_c^2}{4}+\frac{\mu^2 A_c^2}{4}}=\frac{\mu^2}{2+\mu^2}$$

(ب) در این مسئله داریم:

$$\begin{aligned} A &= A_c \\ B &= \frac{\mu A}{2} \\ f_c &= 200\text{Hz} \\ f_c - f_m &= 180\text{Hz} \\ f_c + f_m &= 220\text{Hz}. \end{aligned}$$

توان حامل از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{A^2}{2}=100W$$
$$\Rightarrow A=\sqrt{200}.$$

با جایگذاری در رابطه‌ی بازدهی توان داریم:

$$\frac{\mu^2}{2+\mu^2}=40\%=\frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow \mu=1.155$$

مقدار ثابت B برابر است با:

$$B=\frac{\mu A}{2}=8.165.$$

۳. مقدار بیشینه $m(t)$ در $t=0$ رخ می‌دهد. همچنین:

$$m(0)=1=\int_{f=-\infty}^{\infty} M(f)df$$

(الف) سیگنال AM با ۵۰٪ مدولاسیون:

$$s(t)=A_{c1}\left(1+\frac{0.5}{1+t^2}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

تبدیل فوریه $s(t)$ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$S(f)=\frac{A_{c1}}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]+\frac{A_{c1}}{4}[M(f-f_c)+M(f+f_c)]$$

با اعمال شرط بیان شده داریم:

$$\frac{A_{c1}}{2}[1+1]+\frac{A_{c1}}{4}[1+1]=1 \Rightarrow A_{c1}=2/3$$

(ب) سیگنال مدوله شده DSB-SC :

$$s(t)=\frac{A_{c2}}{1+t^2}\cos(2\pi f_c t)$$

تبدیل فوریه:

$$S(f)=\frac{A_{c2}}{2}[M(f-f_c)+M(f+f_c)]$$

اعمال شرط مساحت:

$$\frac{A_{c2}}{2}[1+1]=1 \Rightarrow A_{c2}=1$$

(ج) می‌دانیم:

$$\frac{1}{1+t^2} \overset{HT}{\rightleftarrows} \frac{t}{1+t^2}$$

سیگنال مدوله شده USSB :

$$s(t)=A_{c3}\left[\frac{1}{1+t^2}\cos(2\pi f_c t)-\frac{t}{1+t^2}\sin(2\pi f_c t)\right]$$

طیف سیگنال:

$$S(f)=\frac{A_{c3}}{2}M(f-f_c)[1+\operatorname{sgn}(f-f_c)]+\frac{A_{c3}}{2}M(f+f_c)[1-\operatorname{sgn}(f+f_c)]$$

توجه کنید که $m(t)$ یک تابع حقیقی و زوج نسبت به زمان است. در نتیجه، $M(f)$ نیز یک تابع حقیقی و زوج خواهد بود.

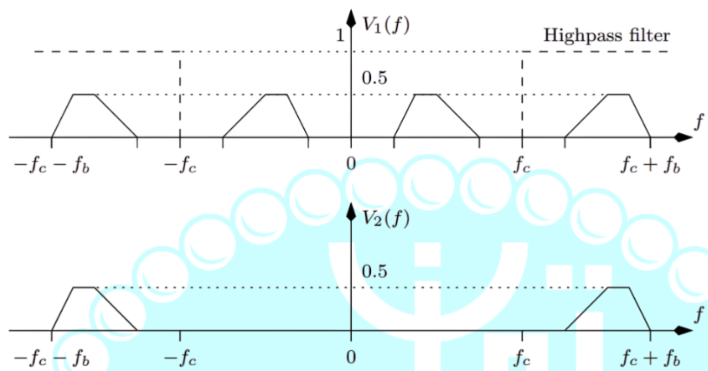
بنابراین داریم: $\int_{f=0}^{\infty} M(f)df=1/2$. حال با اعمال شرط مساحت خواهیم داشت:

$$\frac{2\times 0.5A_{c3}}{2}+\frac{2\times 0.5A_{c3}}{2}=1 \Rightarrow A_{c3}=1$$

۴. (الف) به وضوح، طیف خروجی اولین ضرب کننده به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$V_1(f) = \frac{1}{2}\left[M(f - f_c) + M(f + f_c)\right]$$

پس با گذر از فیلتر بالاگذر داریم:



همان‌طور که در شکل مشخص است، خروجی فیلتر بالاگذر یک سیگنال USSB است. بنابراین:

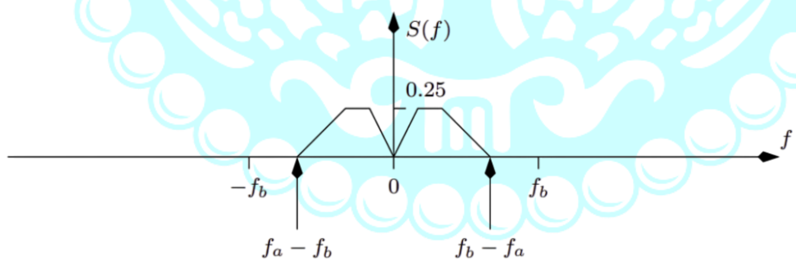
$$v_2(t) = \frac{1}{2}\left[m(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)\right]$$

پس:

$$\begin{aligned} v_3(t) &= v_2(t)\cos(2\pi(f_c + f_b)t) \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} m(t)(\cos(2\pi(2f_c + f_b)t) + \cos(2\pi f_b t)) \\ -\hat{m}(t)(\sin(2\pi(2f_c + f_b)t) - \sin(2\pi f_b t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

که پس از فیلتر پایین‌گذر خواهیم داشت:

$$s(t) = \frac{1}{4}\left[m(t)\cos(2\pi f_b t) + \hat{m}(t)\sin(2\pi f_b t)\right]$$



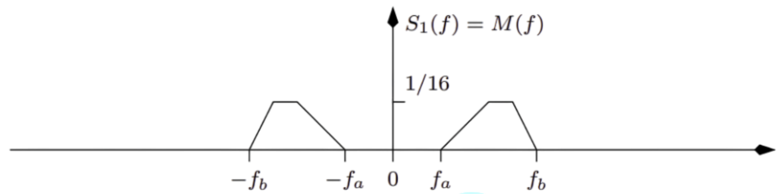
(ب) به وضوح مشاهده می‌شود که $s(t)$ یک سیگنال LSSB با فرکانس حامل f_b است. حال هنگامی که $s(t)$ به سیستم اسکرامبلر اعمال می‌شود، خروجی با توجه به رابطه‌ای که قبلا بدست آوردیم، مطابق زیر خواهد بود:

$$s_1(t) = \frac{1}{4}\left[s(t)\cos(2\pi f_b t) + \hat{s}(t)\sin(2\pi f_b t)\right].$$

به عبارت دیگر، ما نوار جانبی پایین[1] $s(t)$ را با فرکانس حامل f_b منتقل می‌کنیم. بنابراین:

$$s_1(t) = \frac{1}{16} m(t)$$

و



---

۵. (الف) سیگنال $s(t)$ را می‌توان به صورت زیر ساده‌سازی کرد:

$$s(t) = \frac{A_m A_c}{2}\left[\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_m t) + (1-2a)\sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_m t)\right].$$

با مقایسه با نمایش متعارف سیگنال میان‌گذر، مؤلفه متعامد به صورت زیر است:

$$-\frac{A_m A_c}{2}(1-2a)\sin(2\pi f_m t).$$

(ب) پس از افزودن حامل، سیگنال حاصل به این صورت است:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)\left[1 + \frac{A_m}{2}\cos(2\pi f_m t)\right]$$
$$+\frac{A_m A_c}{2}(1-2a)\sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_m t)].$$

پوش سیگنال را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$E(t) = A_c\left[1 + \frac{A_m}{2}\cos(2\pi f_m t)\right]\sqrt{1 + D(t)},$$

که در آن $D(t)$ همان اعوجاج است و به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$D(t) = \left[\frac{(A_m/2)(1-2a)\sin(2\pi f_m t)}{1 + (A_m/2)\cos(2\pi f_m t)}\right]^2.$$

(ج) به وضوح مشاهده می‌شود که $D(t)$ وقتی $a = \frac{1}{2}$ باشد به حداقل و وقتی $a = 0,1$ باشد به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

---

[1] Lower sideband

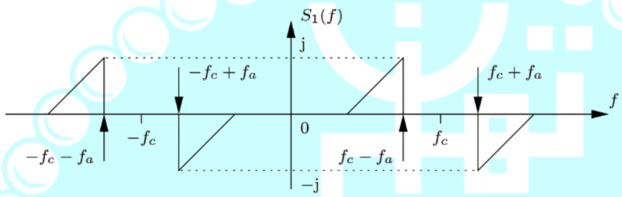
۶. می‌دانیم که تبدیل فوریه $\hat{m}(t)$ به صورت زیر است:

$$\hat{m}(t) \rightleftharpoons -j\,\mathrm{sgn}(f)M(f).$$

سپس داریم:

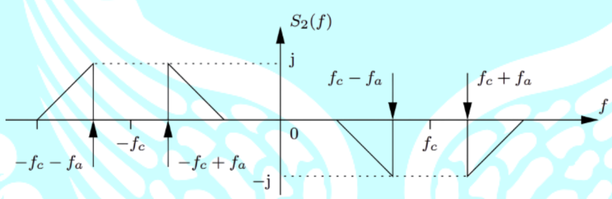
$$\begin{aligned}\hat{m}(t)\cos(2\pi f_c t) &\rightleftharpoons \frac{-j}{2}\big[\mathrm{sgn}(f-f_c)M(f-f_c) \\ &\quad +\mathrm{sgn}(f+f_c)M(f+f_c)\big] \\ &\overset{\Delta}{=} S_1(f),\end{aligned}$$

که در زیر رسم شده است.



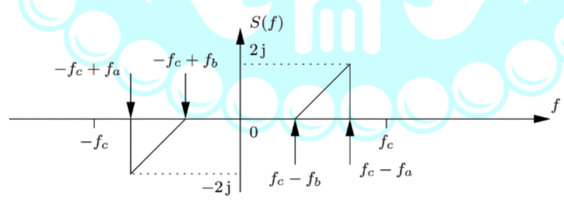
به طور مشابه:

$$\begin{aligned}m(t)\sin(2\pi f_c t) &\rightleftharpoons \frac{-j}{2}\big[M(f-f_c)-M(f+f_c)\big] \\ &\overset{\Delta}{=} S_2(f)\end{aligned}$$

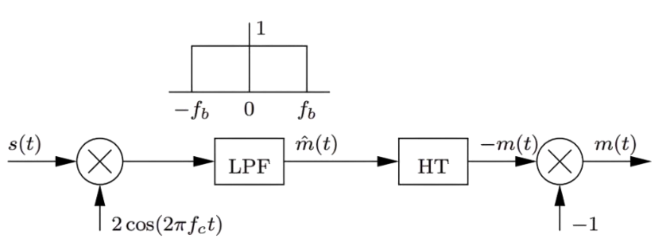


در نهایت:

$$S(f) = S_1(f) - S_2(f),$$



(ب) یک پیاده‌سازی ممکن برای گیرنده در شکل نشان داده شده است:



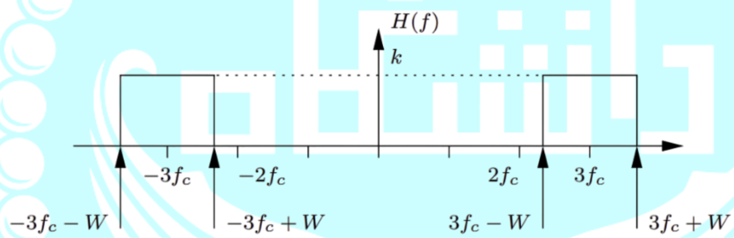
۷. (الف) داریم:

$$v_2(t) = \frac{A_c}{2}\cos(2\pi f_c t)$$
$$+\frac{A_c}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(\cos(4\pi(n-1)f_c t)+\cos(4\pi n f_c t))$$
$$+\frac{m(t)}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2\pi(2n-1)f_c t)m(t).$$

در این رابطه، تنها جمله با فرکانس $3f_c$ جمله‌ی $-\dfrac{2}{3\pi}\cos(6\pi f_c t)m(t)$ می‌باشد که در $n=2$ رخ می‌دهد. به‌طور مشابه:

$$A_1\cos^3(2\pi f_c t) = \frac{A_1}{4}[3\cos(2\pi f_c t)+\cos(6\pi f_c t)]$$

که شامل مؤلفه‌هایی در f_c و $3f_c$ است. بنابراین مشخص است که برای استخراج مؤلفه‌های $3f_c$، طیف فیلتر BPF باید مطابق شکل زیر باشد.



(ب) خروجی فیلتر BPF به صورت زیر خواهد بود:

$$s(t) = \frac{A_1 k}{4}\cos(6\pi f_c t) - \frac{2k}{3\pi}m(t)\cos(6\pi f_c t)$$
$$= \frac{kA_1}{4}\left[1-\frac{8}{3\pi A_1}m(t)\right]\cos(6\pi f_c t).$$

برای مدولاسیون ۱۰۰٪ نیاز داریم:

$$\max\frac{8}{3\pi A_1}|m(t)|=1$$
$$\Rightarrow \frac{16}{3\pi A_1}=1$$
$$\Rightarrow A_1 = 1.7$$

توان حامل نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{k^2 A_1^2}{32}=10$$
$$\Rightarrow k = 10.5.$$

۸. (الف) برای بدست آوردن معادل پایین‌گذر، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$v_{lp} = \frac{1}{2}(v_i(t) + jv_q(t))$$

با توجه به $x_c(t)$:

$$v_i(t) = A_c m(t), \quad v_q(t) = A_c \hat{m}(t)$$

$$v_{lp} = \frac{A_c}{2}(m(t) + j\hat{m}(t))$$

(ب) ابتدا $y(t)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y(t) = (A_c m(t) + A_p)\cos(2\pi f_c t) - A_c \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$Envelope = \sqrt{(A_c m(t) + A_p)^2 + (A_c \hat{m}(t))^2}$$

(ج)

$$\begin{aligned}
\text{Envelope} &= \sqrt{\left(A_p + A_c m(t)\right)^2 + \left(A_c \hat{m}(t)\right)^2} \\
&= \left|A_p + A_c m(t)\right| \sqrt{1 + \left(\frac{A_c \hat{m}(t)}{A_p + A_c m(t)}\right)^2} \\
&= A_p \left|1 + \mu m(t)\right| \sqrt{1 + \left(\frac{\mu \hat{m}(t)}{1 + \mu m(t)}\right)^2} \quad \text{where} \quad \mu = \frac{A_c}{A_p}
\end{aligned}$$

$$\text{For} \quad \mu \ll 1 \quad (A_c \ll A_p): \quad \text{Envelope} \approx A_p \left|1 + \mu m(t)\right| = \left|A_p + A_c m(t)\right|$$