گزارش پروژه اول متلب

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

امیرمرتضی رضائی

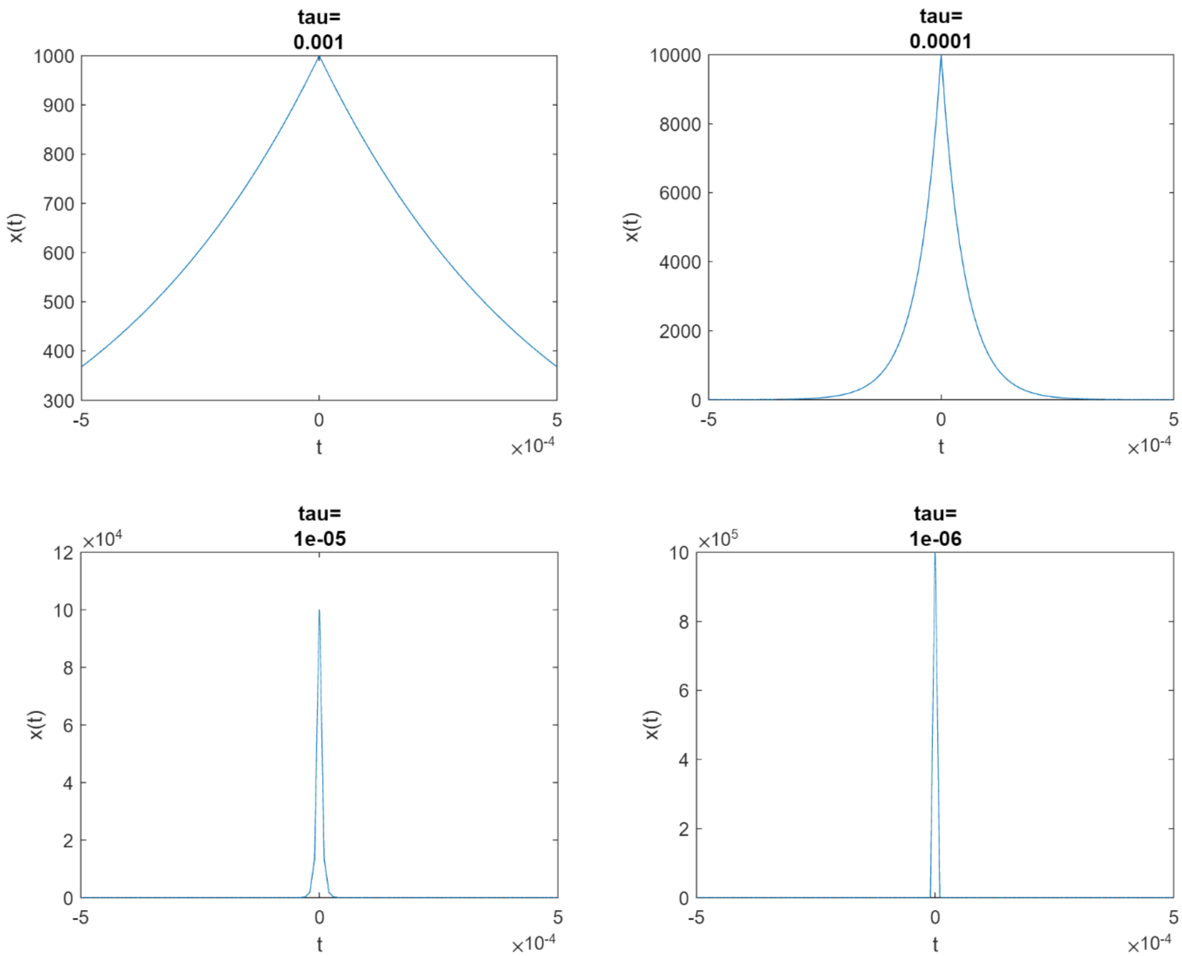
810101429

بهار 1403

سوال اول:

الف)

در ابتدا یک تابع تعریف می‌کنیم که ورودی‌های آن τ و t و خروجی آن مقدار $x(t)$ باشد. در ادامه نیز تابعی جهت رسم نمودار ایجاد می‌کنیم که به‌ازای مقادیر مختلف τ نمودار $x(t)$ را در بازه‌ی $|t| \leq 5 \times 10^4$ با گام‌های به طول 10^{-5} رسم کند. در نهایت نتایج بدست آمده به‌ازای مقادیر مختلف τ به‌صورت زیر می‌باشند:



همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با کاهش مقدار τ ، سیگنال $x(t)$ به سیگنال ضربه‌ی واحد نزدیک می‌شود.

ب)

می‌دانیم:

$$\delta\big(x(t)\big) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|x'(t_i)|}$$

که در آن t_i ها، ریشه‌های معادله‌ی x(t)=0 هستند. بنابرین داریم:

$$\delta(t^2) = \frac{\delta(t)}{2t_i}\Big|_{t_i=0} = \infty$$

بنابراین هرچقدر که سیگنال x_τ به سیگنال ضربه‌ی واحد نزدیک‌تر می‌شود (یعنی با کاهش مقدار τ) حاصل انتگرال I_τ واگرا خواهد شد.

نتایج بدست آمده برای این انتگرال به صورت زیر می‌باشد:

```
the result for tau=0.000100 is : 125.331414
the result for tau=0.000010 is : 396.332730
the result for tau=0.000001 is : 1253.314137
```

لازم به‌ذکر است که حاصل این انتگرال‌ها توسط تابعی با ورودی τ انجام شده که در آن ابتدا تابع *$x(t^2)$* تعریف شده و سپس از آن انتگرال گرفته می‌شود.

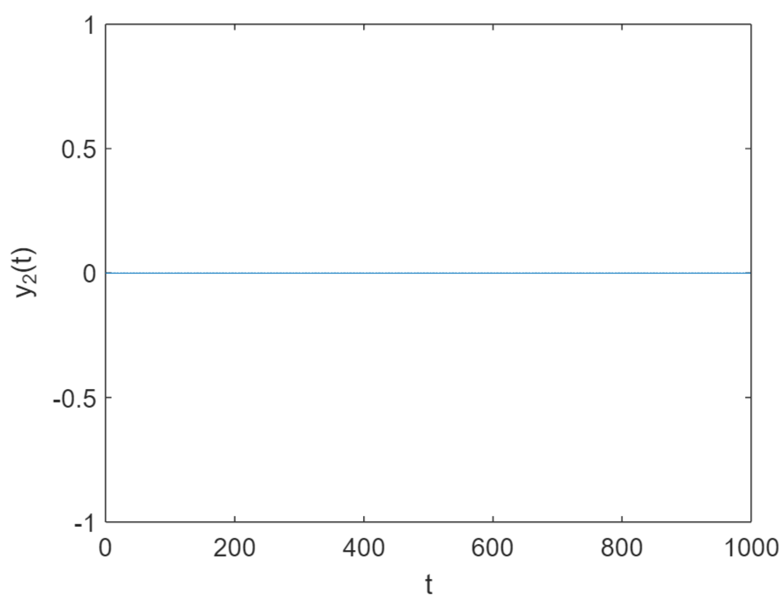
سوال دوم:

$$x_1(t') = e^{-t'} \quad ; \quad t' \geq 0 \quad \rightarrow \quad t' = -\ln\big(x_1(t')\big) \quad ; \quad t' \geq 0$$

حال کافیست به‌ازای مقادیر مختلف t ، $x_2(t)$ را بدست آوریم و با استفاده از رابطه‌ی بالا، مقدار t' متناظر را بدست آورده و با قرار دادن در رابطه‌ی زیر به $y_2(t\ )$ برسیم:

$$y(t') = \begin{cases} 1 - t' & 0 \leq t' \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

بنابراین در بازه‌ی $0 \leq t \leq 999$ با گام هایی به طول 0.001 ، به ازای هر t، مقدار $x_2(t)$ را توسط تابعی بدست آورده و سپس خروجی آن‌را به عنوان ورودی به تابعی دیگر داده و مقدار t' را محاسبه می‌کنیم. در نهایت نیز مقادیر y را با در نظر گرفتن شروط بیان شده یافته و نمودار آن را رسم می‌نماییم:



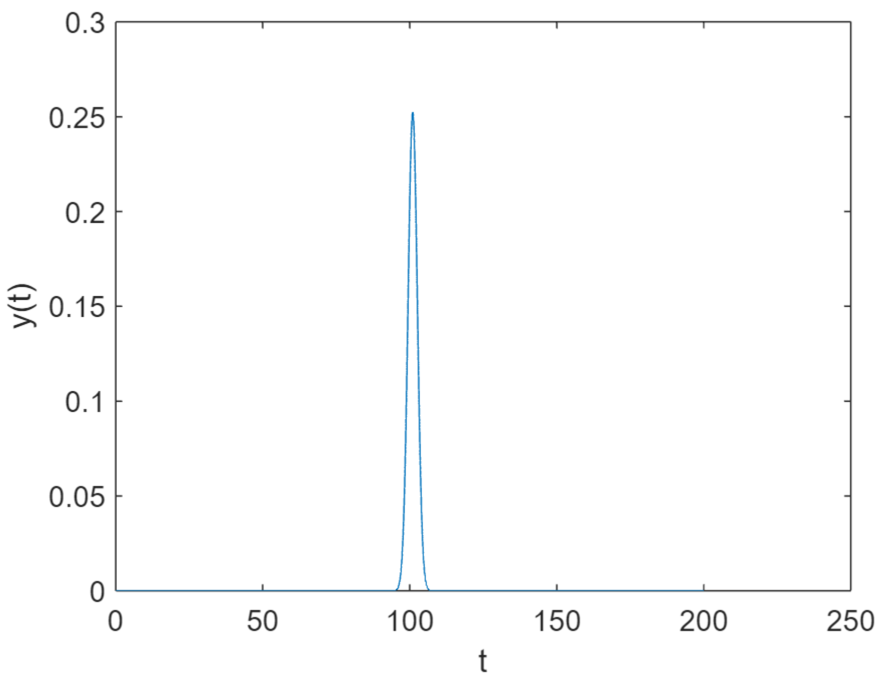
همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقدار y_2 به ازای نمام مقادیر t، متحد با صفر می‌باشد.

سوال سوم:

الف)

برای رسم حاصل کانولوشن دو سیگنال داده شده، می‌توان فرض کرد این دو سیگنال در بازه‌ی $|t| > 50$، متحد با صفر باشند. پس از تعریف دو تابع در این بازه، با استفاده از تابع *conv*، *y* را برابر با حاصل کانولوشن دو سیگنال قرار می‌دهیم. اما از آنجا که محاسبات در متلب به صورت گسسته انجام می‌شوند لازم است تا حاصل را در طول گام‌های زمانی (یعنی *dt*) ضرب نماییم. حال باید محور *t* را تولید کنیم. برای این کار برداری به طول *y* تولید کرده و درایه های آن‌را در طول گام زمانی ضرب می‌کنیم. در این صورت شروع نمودار از 0 خواهد بود. اما می‌دانیم نقطه‌ی شروع نمودار باید از مجموع نقاط شروع دو سیگنال اولیه باشد. بنابراین آن‌را به اندازه‌ی مجموع دونقطه‌ی شروع اولیه (*-50-50=-100*) شیفت می‌دهیم.

در نهایت سیگنال *y(t)* به صورت زیر خواهد بود.

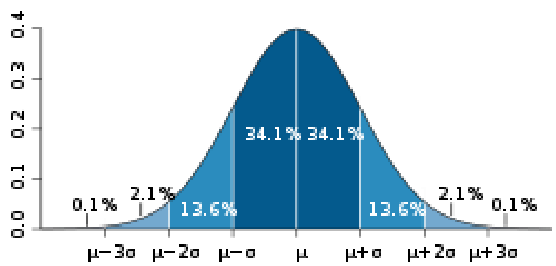


ب)

با توجه به نمودار بدست آمده، متوجه می‌شویم که به شکل یک موجه گاوسی می‌باشد. حال اگر مساحت زیر آن برابر با 1 باشد، می‌توان با قطعیت این را تائید کرد. بنابراین ابتدا با استفاده از یک حلقه‌ی *for*، مساحت زیر نمودار را به روش ریمانی پیدا می‌کنیم. نتیجه بدست آمده برابر است با:

```
the area is : 1.000000e+00
```

حال با توجه به نمودار زیر به دنبال یافتن σ^2 و η هستیم.



همان‌طور که در شکل مشخص است، مقدار η برابر با لحظه‌ای است که در آن نمودار بیشترین مقدار خود را دارد. بنابراین در یک حلقه‌ی *while* با شروع از اولین ایندکس زمان، در پی یافتن بیشترین مقدار y به جلو می‌رویم. در نهایت مقدار میانگین به صورت زیر بدست می‌آید:

```
the average is : 1.001000e+00
```

حال برای یافتن مقدار σ ، مساحت زیر نمودار را با شروع از نقطه‌ی میانگین محاسبه می‌کنیم و تا زمانی که به مقدار 0.341 برسد ادامه می‌دهیم. طبق نمودار، این نقطه همان $\eta + \sigma$ است. پس مقدار واریانس به صورت زیر بدست می‌آید:

```
the std^2 is : 2.490084e+00
```

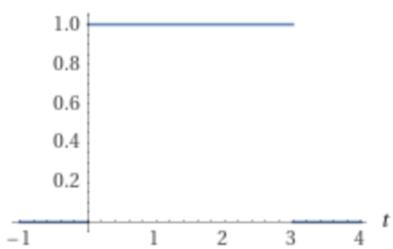
سوال چهارم:

می‌دانیم اگر *h(t)* پاسخ ضربه و *s(t)* پاسخ پله یک سیستم *LTI* پیوسته زمان باشند، خواهیم داشت:

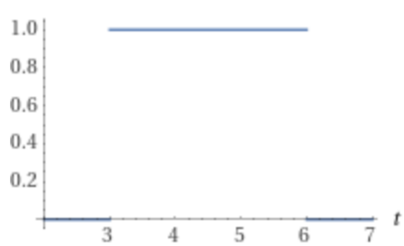
$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

بنابراین برای یافتن پاسخ ضربه سیستم در هر زمانی، کافیست تا پاسخ پله سیستم را پیدا کنیم:

می‌دانیم پاسخ سیستم به ورودی *x(t)=u(t)-u(t-3)*، سیگنال مثلثی شده‌است. از طرفی سیستم *TI* است؛ پس در صورتی که *x(t)* را *k* واحد به سمت راست شیفت دهیم، خروجی نیز به میزان *k* واحد به سمت راست شیفت داده خواهد شد. تعدادی از خروجی‌ها مطابق شکل زیر خواهند شد:



$$x_{1(t)} = x(t) \rightarrow y_{1(t)} = y(t)$$



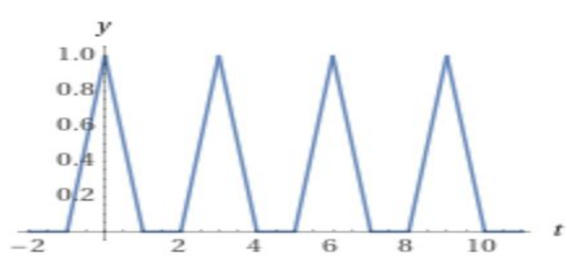
$$x_2(t) = x(t-3) \rightarrow y_2(t) = y(t-3)$$

همچنین با توجه به خطی بودن سیستم می‌توان اظهار داشت:

$$\Rightarrow X(t) = \sum_i x_i(t) \rightarrow Y(t) = \sum_i y_i(t)$$

واضح است که *X(t)* همان سیگنال پله واحد بوده و *Y(t)* نیز پاسخ سیستم به پله واحد می‌باشد. پس داریم:

$$Y(t) = \sum_i y_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(t-3k) = rep_3[y(t)]u(t)$$



بنابراین:

$$\frac{dY(t)}{dt}\Big|_{t=\tau} = \begin{cases} -1 & 3k < \tau < 3k+1 \\ 0 & 3k+1 < \tau < 3k+2 \\ 1 & 3k-1 < \tau < 3k \end{cases} ,k \in \mathbb{Z}$$

بدیهی است برای هر $\tau > 0$ که $\tau \notin \mathbb{Z}$ شروط بالا را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$3k < \tau < 3k+1 \to \lfloor\tau\rfloor = 3k\ ,\ \ 3k+1 < \tau < 3k+2 \to \lfloor\tau\rfloor = 3k+1\ ,$$

$$3k-1 < \tau < 3k \to \lfloor\tau\rfloor = 3k' + 2$$

پس برای حل مساله کافیست تا مقدار $\lfloor\sqrt[3]{1403}\rfloor$ را یافته و باقی‌مانده آن را بر 3 بدست آوریم و در نهایت توسط *if* مقدار *h* را محاسبه نماییم. نتیجه نهایی به‌صورت زیر خواهد بود:

```
h = 1
```

سوال پنجم:

الف)

می‌توان شرط صفر بودن پاسخ سیستم در $t < 4$ را به صورت زیر بیان نمود:

$$\forall t < 4 : y(t) = 0 \ \rightarrow x(9t - t^2 - a) = 0 \xrightarrow{x(t)=u(t-4)} 9t - t^2 - a \leq 4$$

پس کافیست تا مقدار *a* را به‌نحوی بیابیم که حاصل عبارت $9t - t^2 - a$ به‌ازای *t=4* برابر با 4 گردد. چرا که با برقراری این شرط، با توجه به شکل تابع، مقدار تابع به‌ازای همه‌ی *t<4* از 4 کمتر خواهد بود که در نتیجه سبب صفر شدن خروجی به‌ازای این مقادیر می‌گردد.

برای این کار از مقدار *a=0* شروع کرده و در هر مرحله مقدار تابع $9t - t^2 - a$ را به‌ازای *t=4* و *a* بررسی‌کرده و در صورتی که از 4 بزرگ‌تر باشد یکی به مقدار *a* اضافه کرده و این روند را تا انتها طی می‌کنیم. این فرایند توسط یک تابع *check* و یک حلقه‌ی *while* انجام می‌شود. نتیجه‌ی نهایی به‌صورت زیر خواهد بود:

```
a is = 16
```

ب)

می‌دانیم سیستم‌های علّی به سیستم‌هایی گفته می‌شود که اصطلاحا برای تعیین خروجی، نیازی به پیش‌بینی ورودی نداشته باشند. بنابراین از آنجا که در اینجا ورودی از لحظه‌ی *t=4* اعمال می‌شود و قبل از آن صفر است، و به دلیل علّیت، سیستم قادر به پیشگویی وقوع تغییر در ورودی در *t=4* نیست، پس سیستم فرض را بر صفر بودن ورودی می‌گذارد و لذا به دلیل خطی بودن سیستم، خروجی متناظر نیز برابر با صفر خواهد بود.