



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

امیررضا آذری - ۹۹۱۰۱۰۸۷

ω -Automata, Büchi and Generalized Büchi Automata

۱. مقدمه

در بخش اول درس نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها با زبان‌های منظم آشنا شدیم و ۳ بخش عبارت منظم^۱ و خودکاری قطعی متناهی^۲ و خودکاره غیرقطعی متناهی^۳ که با هم مرتبط بودند را بیان کردیم. اما همانطور که از اسم آن‌ها پیداست، همه آن‌ها مربوط به Finite words می‌باشند. در این پروژه به بررسی ماشین‌ها و زبان‌هایی که مربوط به Infinite words می‌باشند، می‌پردازیم.

۲. ω -Automata

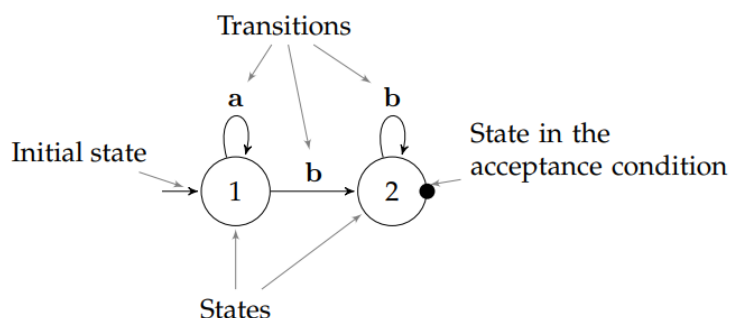
تعریف ۲.۱: اتوماسیون‌هایی هستند که زبان‌های نامتناهی را تشخیص می‌دهند. یک ω -automaton به شکل $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ تعریف می‌شود به گونه‌ای که:

- Q یک ست متناهی از استیت‌ها می‌باشد.
- Σ الفبا می‌باشد.
- δ تابع انتقال می‌باشد و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

- $q_0 \in Q$ استیت آغازین است.
- F نیز شرط پذیرش^۴ است که یک فرمول بر روی استیت‌ها می‌باشد. تفاوت با اتوماسیون‌های روی زبان‌های متناهی نیز مربوط به همین شروط پذیرش است.

برای مثال تصویر زیر یک نمونه از این اتوماسیون‌ها را مشخص می‌کند.



شکل ۱: An ω -automaton

^۱ Regular Expression

^۲ Deterministic Finite Automata

^۳ Non-deterministic Finite Automata

^۴ acceptance condition

تعریف ۲.۲ : یک توالی از استیت‌ها را به شکل $\pi = \pi_0, \pi_1, \dots \in Q^\omega$ یک اجرا^۵ بر روی زبان نامتناهی Σ^ω می‌نامیم اگر $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots \in \Sigma^\omega$ و برای هر i که σ_i در واقع i امین حرف σ باشد، $\pi_{i+1} \in \delta(\pi_i, \sigma_i)$ برقرار باشد. همچنین یک اجرای موفق، اجرایی است که شروط پذیرش را ارضا بکند.

مثال ۲.۱ : در شکل ۱، یک اجرا روی این ماشین می‌تواند $\pi = 1, 1, 2, 2, 2, \dots$ باشد که استیت دوم نامتناهی دفعه دیده می‌شود.

تعریف ۲.۳ : مجموعه نامتناهی یک اجرای π ، یک مجموعه‌ای از استیت‌هایی است که به طور نامتناهی در π دیده می‌شوند و با $\inf(\pi)$ نمایش داده می‌شوند.

مثال ۲.۲ : در مثال قبلی ذکر شده، $\inf(\pi) = \{2\}$.

تعریف ۲.۴ : زبان یک A ، مجموعه‌ای از ورودی‌ها می‌باشد که بر روی A یک اجرای موفق داشته‌اند و با \mathcal{L} نشان داده می‌شوند.

مثال ۲.۳ : زبان ماشین بیان شده در شکل ۱ که شرط پذیرشش مشاهده شدن نامتناهی دفعه استیت دوم است، برابر با زبان‌هایی است که متناهی دفعه شامل حرف a هستند و بعد از آن نامتناهی b دارند.

نکته ۲.۱ : توجه کنید قطعی یا غیرقطعی بودن یک ماشین مشابه همان حالاتی که از قبل در درس بیان شده است، در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲.۵ : برای زبان‌های منظم نامتناهی نیز، عبارات منظم تعریف می‌شود. یک عبارت منظم امگا^۶ G بر روی الفبای Σ فرم زیر را دارد:

$$G = E_1.F_1^\omega + \dots + E_n.F_n^\omega$$

که در آن $n \geq 1$ و $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_n$ عبارات منظمی روی الفبای Σ هستند به طوری که $\epsilon \notin L(F_i)$ برای $1 \leq i \leq n$.

مثال ۲.۴ : چند مثال از عبارات منظم امگا:

• $(a+b)^\omega$: مجموعه تمام کلمات نامتناهی

• $((a+b)^*c)^\omega$: کلماتی که تعداد نامتناهی c دارد.

حال در ادامه دو شرط پذیرش معروف به همراه ماشین‌های آن‌ها را معرفی خواهیم کرد. شرط پذیرش اول، شرط پذیرش بوچی^۷ و شرط پذیرش دوم، شرط پذیرش بوچی تعمیم یافته^۸ است.

۳. بوچی

تعریف ۳.۱ : شرایط پذیرش بوچی بدین شکل است که یک اجرا حتما باید تعدادی از استیت‌ها را به تعداد نامتناهی دفعه ببیند. به طور رسمی تر بخواهیم تعریف کنیم داریم:

یک اجرای π از یک بوچی اتوماتا با شرط پذیرش $\mathcal{F} \subseteq Q$ ، موفق یا accepting است اگر و تنها اگر $\inf(\pi) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

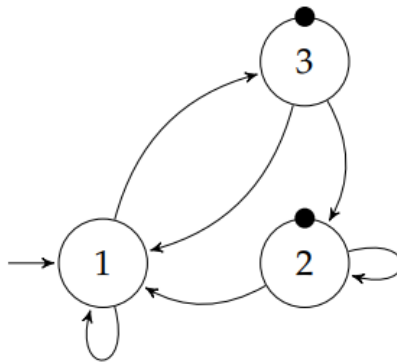
مثال ۳.۱ : شکل ۲ یک بوچی اتوماتون را نشان می‌دهد که شروط پذیرش آن مارک شده‌اند. یک اجرا از این اتوماتون، موفق یا accepting است اگر به طور نامتناهی استیت‌های ۲ یا ۳ را ببیند.

^۵run

^۶ ω -regular expression

^۷Büchi acceptance condition

^۸Generalized Büchi acceptance condition



شکل ۲: A Büchi automaton

تعریف ۳.۲: یک بوچی اتوماتون غیرقطعی A ، به شکل $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{F})$ تعریف می‌شود به گونه‌ای که:

- Q یک ست متناهی از استیت‌ها می‌باشد.
- Σ الفبا می‌باشد.
- δ تابع انتقال می‌باشد و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

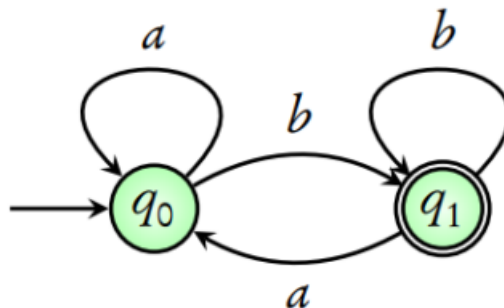
- $q_0 \in Q$ استیت آغازین است.
- \mathcal{F} نیز شرط پذیرش^۹ است که یک فرمول بر روی استیت‌ها می‌باشد.

همانطور که می‌بینید عیناً مانند ω -automaton می‌باشد و تنها شرط پذیرش در آن تعریف شده است.

قضیه ۳.۱: زبان $L \subseteq \Sigma^\omega$ به نوعی منظم امگا یا ω -regular است اگر توسط یک بوچی اتوماتون accept شود.

تعریف ۳.۳: بوچی اتوماتا قطعی از لحاظ ساختاری شبیه NBA است اما ۲ تفاوت دارد. این ماشین یک استیت آغازین دارد اما از هر استیت، تنها یک انتقال یکتا وجود دارد. تفاوت NBA و DBA تقریباً همانند همان NFA و DFA می‌باشد.

مثال ۳.۲: شکل ۳ یک DBA برای زبانی است که شامل کلماتی است که در آن‌ها حرف b به طور نامتناهی اتفاق افتاده است.

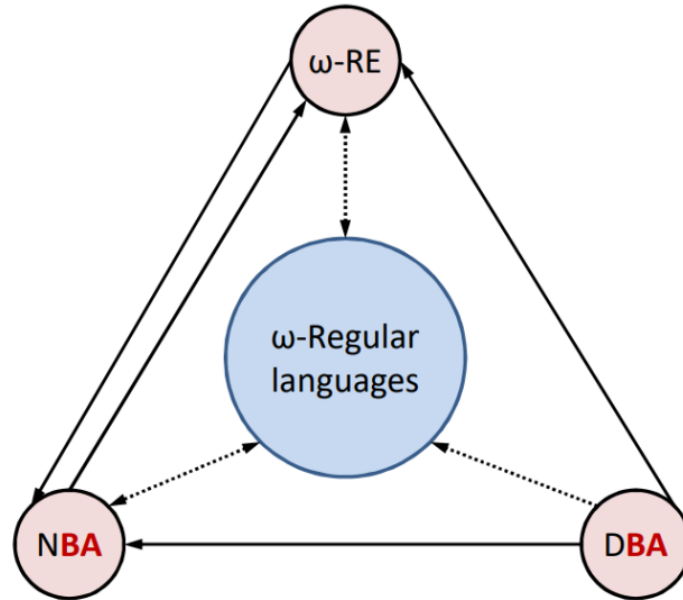


شکل ۳: An example of DBA

^۹acceptance condition

قضیه ۳.۲: DBA ها از NBA ها ضعیف تر می باشند. اثبات این موضوع به طور کامل در اسلایدها آمده است. اما برای مثال عبارت $(a+b)^{\omega}$ توسط DBA قابل پذیرش نمی باشد و این از ضعف های DBA و شروط پذیرش بوجی می باشد.

حال با توجه به مقدمه این گزارش که در مورد زبان های منتهای داشتیم، برای زبان های نامنتهای نیز به مانند شکل ۴، ۳ جز را کامل و بیان کردیم. حال در آخر شرط پذیرش بوجی تعمیم یافته را نیز بیان می کنیم.



شکل ۴: ω -Regular languages

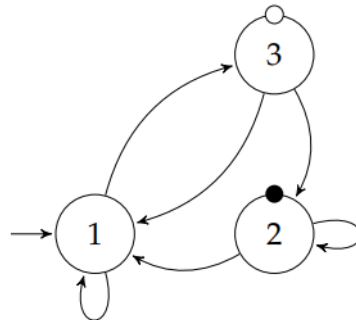
۴. بوجی تعمیم یافته

تعریف ۱.۴: اتوماتون بوجی تعمیم یافته، نوعی از بوجی اتوماتون هستند. شرط پذیرش بوجی تعمیم یافته، بیشتر از یک مجموعه استیت پذیرش دارد.

یک اجرا در این حالت موفق یا accepting است اگر از حداقل یکی از استیت های هر مجموعه به طور نامنتهای دفعه، گذر کند. به بیان رسمی تر داریم:

$$\forall i \mid \inf(\pi) \cap F_i \neq \emptyset \text{ with } F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}, F_i \subseteq Q.$$

مثال ۱.۴ شکل ۵ یک نمونه را مثال می زند که در آن دو مجموعه شروط پذیرش دارد (سیاه و سفید) که هر دو باید نامنتهای دفعه دیده بشوند.



شکل ۵: A generalized büchi automaton

۵. جمع‌بندی

در این پروژه به بیان زبان‌های امگا که بر زبان‌های نامتناهی تعریف می‌شوند صحبت نمودیم. ابتدا توضیحی بر ω -automata ها داشتیم و شرایط آن‌ها را بیان کردیم و اصل تفاوت آن‌ها با حالت متناهی که همان شرط پذیرش بود را بیان کردیم. سپس دو شرط پذیرش معروف که بوجی و بوجی تعمیم‌یافته بود را مطرح کردیم و ویژگی هر کدام را بیان کردیم.

در نهایت برای زبان‌های منظم امگا مانند شکل ۴، عبارات منظم و خودکاره‌های بوجی قطعی و غیرقطعی را بیان نمودیم.

۶. مراجع

- <https://www.cmi.ac.in/kumar/words/lecture07.pdf>
- <https://www.cs.colostate.edu/france/CS614/Slides/ModelCheckingChapter4.pdf>
- <https://www.youtube.com/watch?v=KOu6IUssxbs>
- <https://www.lrde.epita.fr/sadegh/buchi-complementation-techrep.pdf>
- <https://www.irif.fr/jep/PDF/InfiniteWords/Chapter1.pdf>