«به نام خدا»

امیررضا اذری
۹۹۱۰۱۰۸۷

مبانی مدارهای الکتریکی

تمرین ۱

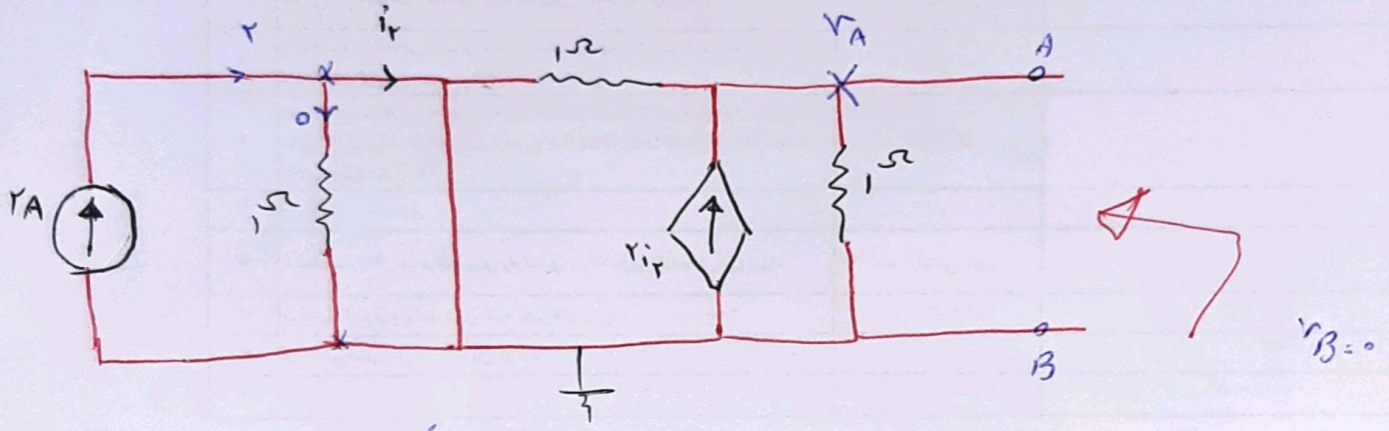
---

۱) الف)

V_{th}

در قسمت الف مقاومت ۹ اهمی را نباید در نظر بگیریم.

چون سمت راست مدار، مدار باز محسوب می‌شود پس $i_1=0$.



در واقع منبع جریان وابسته به i_1 مدار باز و منبع ولتاژ وابسته به i_1 اتصال کوتاه می‌شود.

$i_2=2A$

برای V_A، KCL می‌نویسیم:

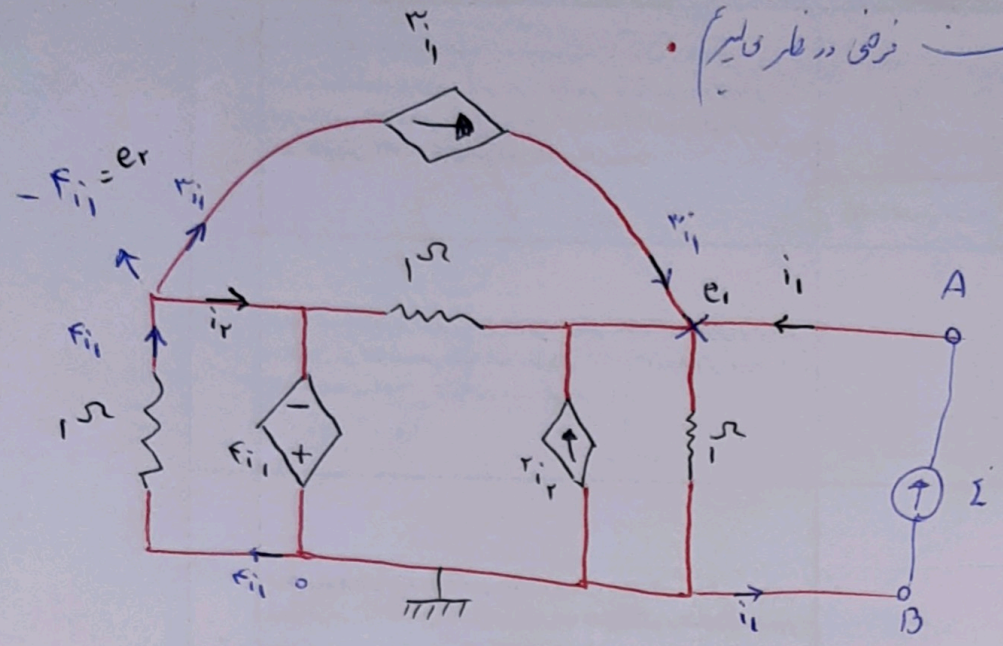
$$\frac{V_A-0}{1}+\frac{V_A-0}{1}-2i_2=0 \rightarrow 2V_A=4 \rightarrow V_A=2$$

$$V_{th}=V_A-V_B=2-0=\boxed{2\ V}$$

R_{th}

منابع مستقل را off می‌کنیم.

بین دو نقطه مورد نظر منبع ولتاژ فرضی در نظر می‌گیریم.



$v_B = 0$

$\boxed{I = i_1}$

$i_2 = i_1$

برای بدست آوردن e_1 ، KCL می‌نویسیم:

$$I: \quad -3i_1 + \frac{e_1 - (-4i_1)}{1} - 2i_2 + \frac{e_1 - 0}{1} - I = 0$$

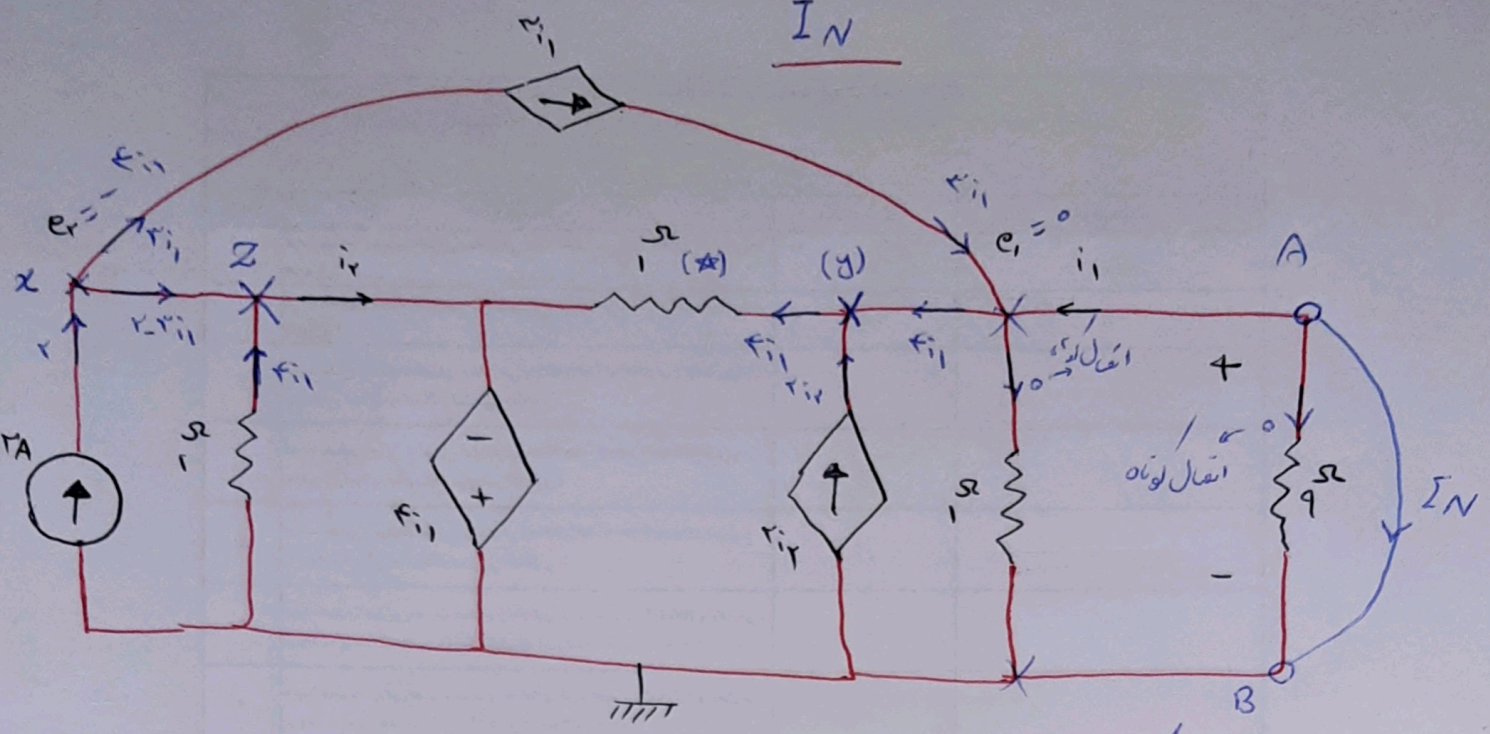
$$h_1: \quad i_1 = i_2$$

$$h_2: \quad I = i_1$$

$$\rightarrow -3i_1 + e_1 + 4i_1 - 2i_1 + e_1 - i_1 = 0 \rightarrow 2e_1 = 2i_1 \rightarrow e_1 = i_1 \rightarrow \boxed{e_1 = I}$$

اختلاف پتانسیل A و B برابر همان e_1 می‌باشد پس طبق معادله بدست آمده $\boxed{R_{th} = 1}$ می‌باشد.

I_N



از A به B سیمی وصل می‌کنیم و جریان گذرنده از A به B را I_N می‌یابیم.

$I_N = -i_1$

طبق اتصال کوتاه و سیمی که اضافه کرده‌ایم می‌یابیم که $e_1 = 0$. طبق منبع ولتاژ $4i_1$ هم در می‌یابیم که $e_2 = 4i_1$.

طبق e_1 و e_2 در می‌یابیم که جریان گذرنده از مقاومت ۱ اهمی ☆، برابر $\frac{0-(4i_1)}{1}$ می‌باشد.

در گره y داریم:

$$4i_1 + 2i_2 = 4i_1 \longrightarrow \underline{i_2 = 0}$$

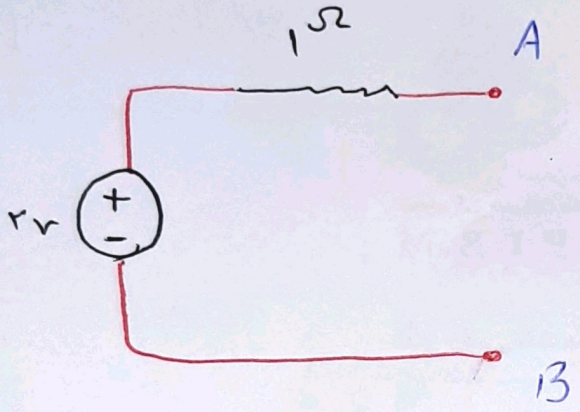
در گره z داریم:

$$2 - 3i_1 + \underbrace{4i_1}_{\left(\frac{0-(-4i_1)}{1}\right)} = i_2 \longrightarrow i_2 = 2 + i_1 = 0 \Longrightarrow i_1 = -2A \longrightarrow \underline{I_N = 2A}$$

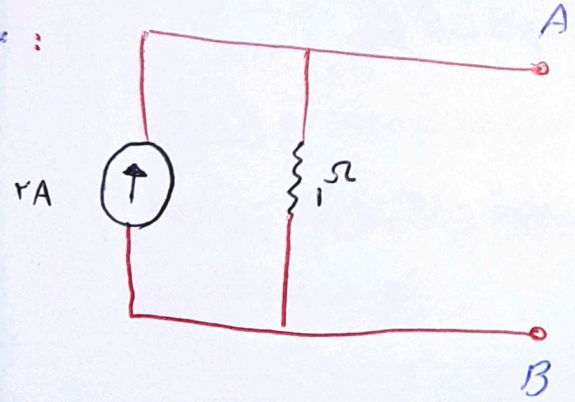
پس مدارهای معادل را رسم می‌کنیم:

$$\frac{V_{th}}{I_N} = R_{th}$$ ✓

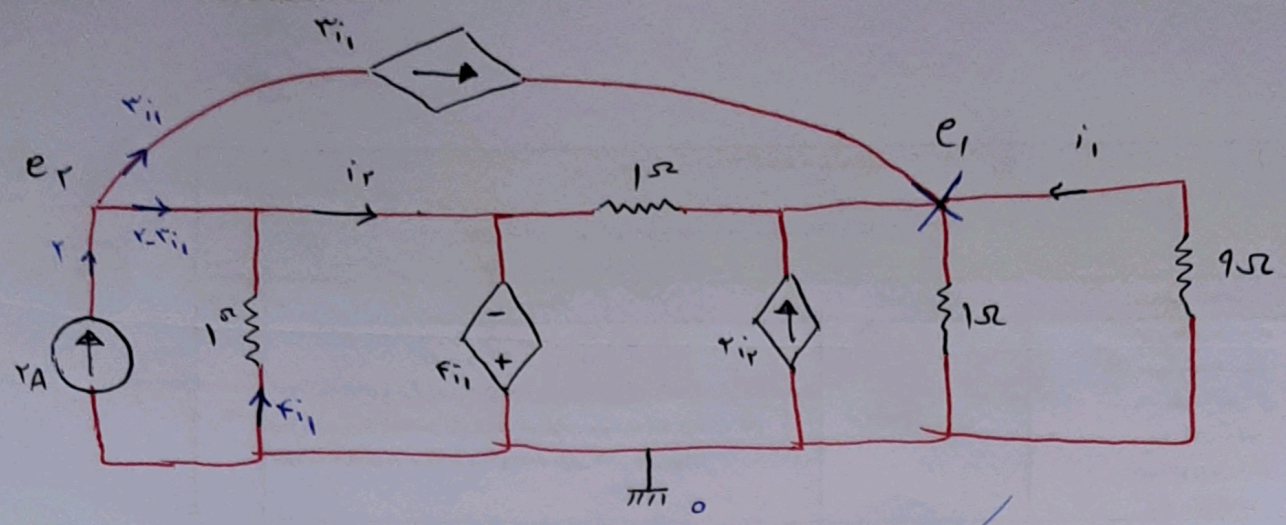
مدار معادل تونن :



مدار معادل نورتن :



ب ۱



با توجه به منبع ولتاژ $4i_1$ متوجه می‌شویم که $e_2 = -4i_1$.

$$\Sigma \quad -3i_1 + \frac{e_1-(-4i_1)}{1} - 2i_2 + \frac{e_1-0}{1} + \frac{e_1-0}{9} = 0$$

$$h_1 \quad i_1 = \frac{0-e_1}{9} \rightarrow \boxed{e_1 = -9i_1}$$

$$h_2 \quad i_2 = 2 + i_1$$

$$\longrightarrow -3i_1 + \frac{-9i_1+4i_1}{1} - 2(2+i_1) - 9i_1 - i_1 = 0$$

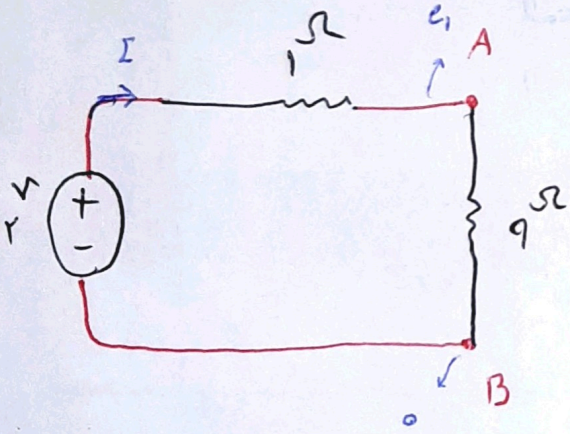
$$\rightarrow -18i_1 - 4 - 2i_1 = 0 \longrightarrow -4 = 20i_1 \longrightarrow \boxed{i_1 = -\frac{1}{5}}$$

در نتیجه $e_1 = -9i_1$ $\leftarrow$ $\boxed{e_1 = \frac{9}{5}}$

و $e_2 = -4i_1$ $\leftarrow$ $\boxed{e_2 = \frac{4}{5}}$

پ) با کمک مدار معادل تونن e_1 را بدست می آوریم :

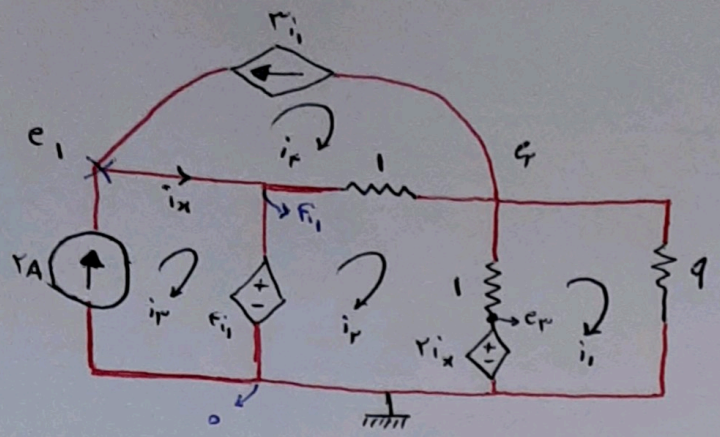
برای بدست آوردن e_1 مقاومت ۹ اهمی A و B را به مدار معادل تونن اضافه می کنیم.



$$I = \frac{2}{1+9} = 0.2$$

$$\rightarrow e_{1-0} = 9 \times 0.2 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

همانطور که مشاهده می شود e_1 برابر $\frac{9}{5}$ که در قسمت ب بدست آوردیم شد که عین انتظار را نیز داشتیم.



الف)

با استفاده از روش مش، جریان i_x را حساب می‌کنیم.

می‌دانیم $e_3 = 2i_x$ و $e_1 = 4i_1$.

می‌دانیم $i_4 = -3i_1$ و $i_3 = 2A$، پس کافی است برای دو حلقه دیگر، KVL بنویسیم:

(I) $-2i_x + 1(i_1 - i_2) + 9i_1 = 0 \longrightarrow 10i_1 - i_2 = 2i_x \quad (\star)$

(II) $-4i_1 + 1(i_2 - i_4) + 1(i_2 - i_1) + 2i_x = 0 \rightarrow -5i_1 + 2i_2 - i_4 + 2i_x = 0 \quad (\star\star)$

h_1: $i_4 = -3i_1$

h_2: $i_3 = 2A$

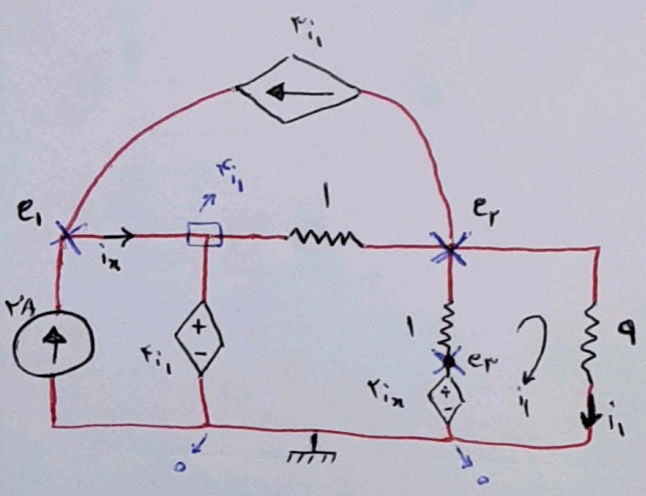
h_3: $i_x = 2 + 3i_1$

$$\xrightarrow{(\star)} 10i_1 - i_2 = 2(2 + 3i_1) \longrightarrow 4i_1 - i_2 = 4$$

$$\xrightarrow{(\star\star)} -5i_1 + 2i_2 + 3i_1 + 2(2 + 3i_1) = 0 \rightarrow 4i_1 + 2i_2 = -4$$

$$\rightarrow \boxed{i_2 = -\frac{1}{3}} \Rightarrow i_1 = \frac{1}{3}A$$

از h_3 می‌دانیم $i_x = 2 + 3i_1$. در نتیجه $i_x = 3A$.



ب)

همانطور که مشخص است ۳ گره داریم اما وابستگی دو گره را داریم. $e_1 = 4i_1$ و $e_3 = 2i_x$

پس فقط برای بدست آوردن e_2، KCL می‌نویسیم.

(I) $$3i_1 + \frac{e_2 - 4i_1}{1} + \frac{e_2 - 2i_x}{1} + \frac{e_2 - 0}{9} = 0$$

(h_1) $i_x = 2 + 3i_1$

(h_2) $i_1 = \frac{e_2 - 0}{9} \rightarrow e_2 = 9i_1$

برحسب i_1 می‌نویسیم.

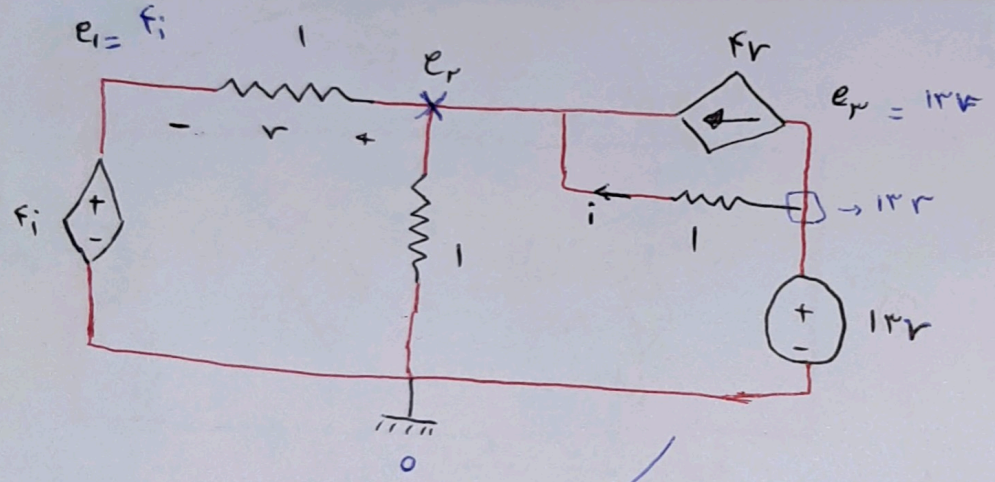
$$\rightarrow 3i_1 + \frac{9i_1 - 4i_1}{1} + \frac{9i_1 - 2(2+3i_1)}{1} + \frac{9i_1}{9} = 0$$

$$\rightarrow 12i_1 - 4 = 0 \rightarrow \boxed{i_1 = \frac{1}{3}}$$

با عرض پوزش، قسمت ج سوال ۲، بعد از پاسخ سوال نوشته شده است.

از h_1 می‌دانیم که $i_x = 2 + 3i_1$، پس $\underline{i_x = 3A}$.

(۳)



ابتدا مشخص می‌شود که $e_1 = 4i$ و $e_3 = 13v$. پس e_2 تنها گره ما می‌باشد.

(I) $$\frac{e_2 - 4i}{1} + \frac{e_2 - 0}{1} - 4v + \frac{e_2 - 13}{1} = 0 \rightarrow 3e_2 - 4i - 4v = 13 \quad (*)$$

(h_1) $i = \frac{13 - e_2}{1} = 13 - e_2$

(h_2) $v = e_2 - 4i$

h_1, h_2

$$\Longrightarrow 3e_2 - 4(13 - e_2) - 4(e_2 - 4i_1) = 13 \rightarrow 3e_2 - 52 + 4e_2 - 4e_2 + 16i_5 = 13$$

$$\Rightarrow 3e_2 + 16(13 - e_2) = 65$$

$$\Rightarrow -13e_2 + 208 = 65$$

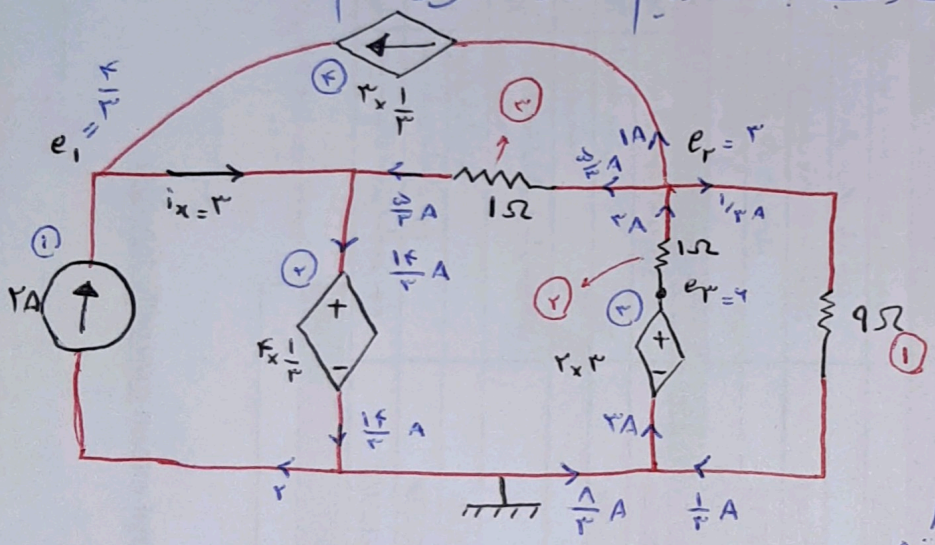
$$\rightarrow 143 = 13e_2 \rightarrow \boxed{e_2 = 11V}$$

در نتیجه $i = 2A$ و $v = 37$. (بنابر h_1 و h_2)

(۲)

ج) حال باید توان تمام عناصر را بدست آورده و اصل بقای توان را تحقیق کنیم.

طبق اعدادی که در بخش‌های الف و ب بدست آوردیم مدار را کامل‌تر می‌کشیم.



$i_1 = \frac{1}{3}$ و $i_x = 3$ و $i_2 = -\frac{8}{3}$ و $e_2 = 3$

$e_1 = \frac{4}{3}$, $e_3 = 6$

جریان تمام شاخه‌ها را با اطلاعات بالا بدست می‌آوریم.

داریم:

$$P_{\text{تولیدکننده}} = |P_{\text{تلف‌کننده}}| + P_{\text{ذخیره‌کننده}}$$

ابتدا توان عناصر تولیدکننده را حساب می‌کنیم:

(۱) $\rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta v = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3} V \\ I = 2A \end{array}\right\} \rightarrow P = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} W$

(۲) $\rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta v = -\frac{4}{3} V \quad \text{با توجه به جهت جریان} \\ I = \frac{14}{3} \end{array}\right\} \rightarrow P = -\frac{56}{9} W$

(۳) $\rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta v = 6 - 0 = 6 V \\ I = 3A \end{array}\right\} \rightarrow P = 6 \times 3 = 18 W$

(۴) $\rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta v = -\frac{5}{3} V \quad \text{با توجه به جهت جریان} \\ I = 1A \end{array}\right\} \rightarrow P = -\frac{5}{3} W$

$$P_{\text{تولید کننده}} = \frac{8}{3} - \frac{56}{9} + 18 - \frac{5}{3} = \frac{24 - 56 + 162 - 15}{9} = \frac{115}{9}\ W$$

حال برای عناصر تلف کننده (مقاومت‌ها) توان حساب می‌کنیم.

① → $\left.\begin{array}{l} R = 9\Omega \\ I = \frac{1}{3} A \end{array}\right\} \longrightarrow P = -9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -1\ W$

② → $\left.\begin{array}{l} R = 1\Omega \\ I = 3A \end{array}\right\} \longrightarrow P = -1 \times 3^2 = -9\ W$

③ → $\left.\begin{array}{l} R = 1\Omega \\ I = \frac{5}{3} A \end{array}\right\} \longrightarrow P = -1 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{25}{9}\ W$

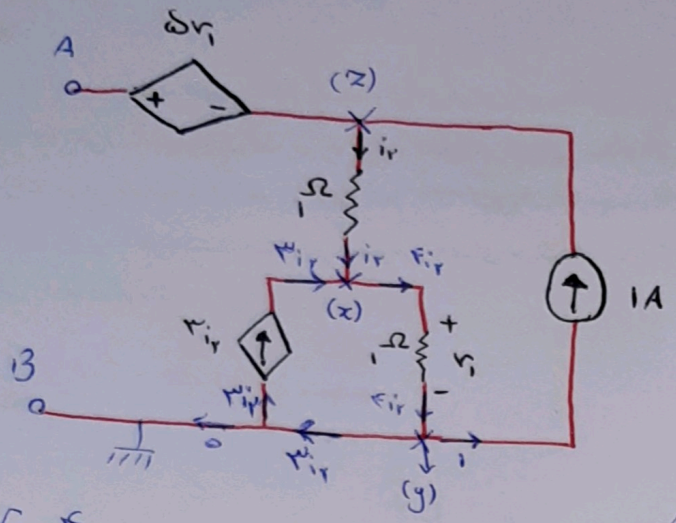
$$\left|P_{\text{تلف کننده}}\right| = \left|-1 - 9 - \frac{25}{9}\right| = \frac{115}{9}\ W$$

عنصر ذخیره کننده‌ای در مدار وجود ندارد پس $P_{\text{ذخیره کننده}} = 0$

$$\Longrightarrow P_{\text{تولید کننده}} = \left|P_{\text{تلف کننده}}\right| + P_{\text{ذخیره کننده}} \rightarrow \frac{115}{9} = \frac{115}{9} + 0 \quad \square$$

ابتدا مدار معادل تونن را بدست می‌آوریم :

V_{th}



ابتدا جریان هر شاخه را محاسبه می‌کنیم .

در گره y داریم : $4i_2 = 3i_2 + 1 \Rightarrow \boxed{i_2 = 1A}$

اگر سر B را به زمین وصل کنیم ، ولتاژ گره x برابر v_1 می‌شود . می‌دانیم $V_1 = 4i_2 \times 1$.

ولتاژ گره z را هم می‌توان محاسبه کنیم .

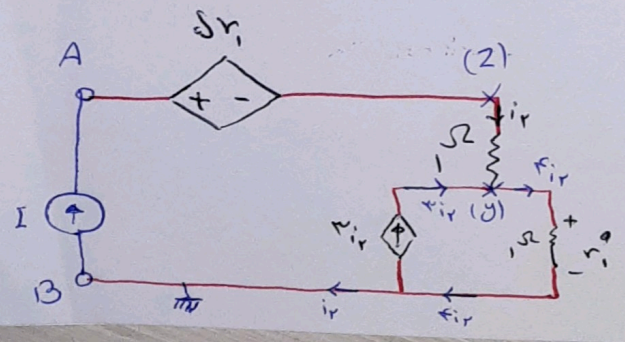
$V_z - i_2 \times 1 = 4i_2 \rightarrow \boxed{V_z = 5i_2}$

بنابراین V_A را می‌توان به شکل روبه‌رو محاسبه کرد :

$$V_A = V_z + 5v_1 \xrightarrow{V_1 = 4i_2} V_A = 5i_2 + 20 \cdot i_2 \xrightarrow{i_2 = 1A} V_A = 25V$$

$$\rightarrow V_{th} = V_A - V_B = 25 - 0 = \boxed{25V}$$

R_{th}



منابع مستقل را off می‌کنیم .

یک منبع جریان فرضی بین A و B قرار می‌دهیم .

و مدار را به زمین وصل می‌کنیم . $I = i_2$

می‌دانیم :

$v_1 = 4i_2 \rightarrow v_y = 4i_2$

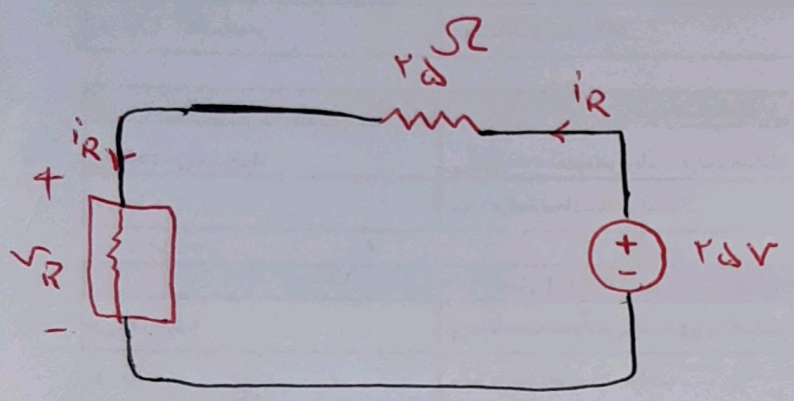
$v_z - i_2 = 4i_2 \rightarrow v_z = 5i_2 \Longrightarrow v_A = 5v_1 + 5i_2 \rightarrow v_A = 25 i_2$

می‌دانیم $\Delta v_{BA} = v_A - v_B = 25$ و $I = i_2$

$\Delta v = 25 I$

$R_{th} = 25\,\Omega$

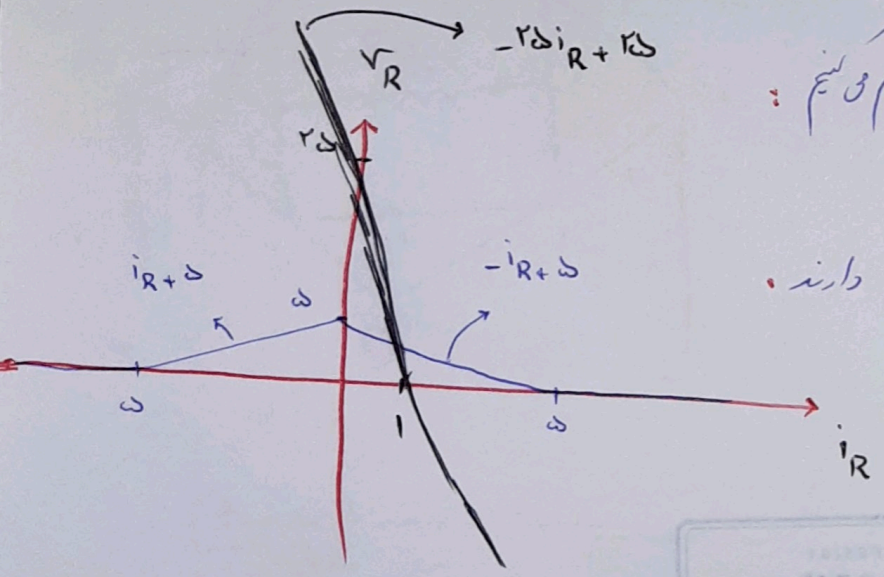
حال مدار را کامل می‌کنیم :



در هر حلقه داریم :

$-25 + 25 i_R + v_R = 0 \rightarrow v_R = 25 - 25 i_R$

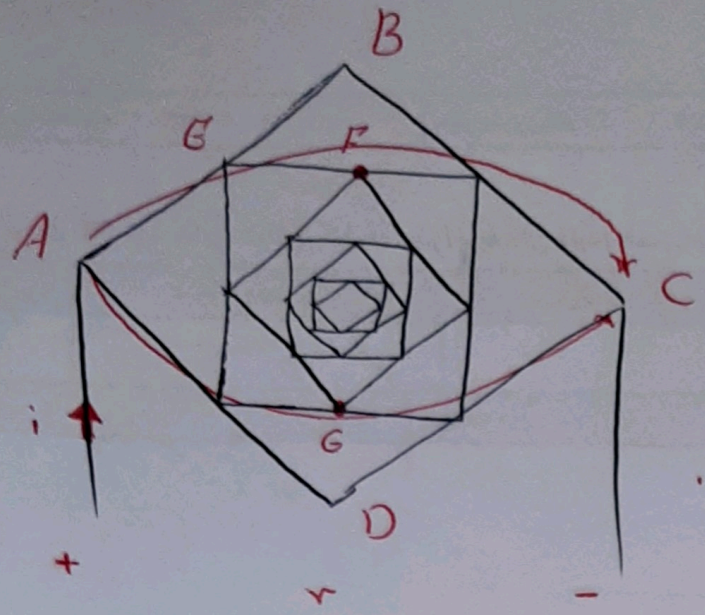
حال نمودار معادله بالا و نمودار داده شده را رسم می‌کنیم :



مشاهده می‌کنیم در قسمت $0 < i_R < 5$ برخورد دارند.

$\Longrightarrow 25 - 25 i_R = -i_R + 5 \longrightarrow i_R = \frac{5}{6}\,A \longrightarrow v_R = \frac{25}{6}\,V$

۵

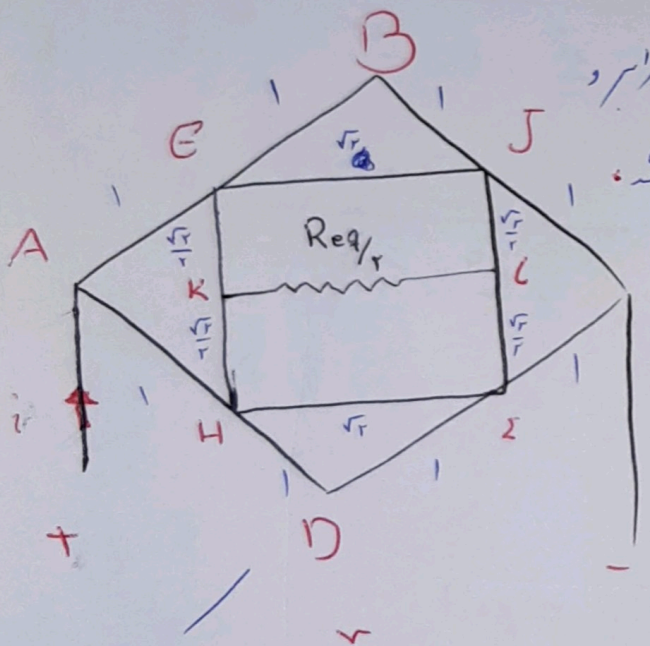


طبق قانون میری اگر نقاط F و G را جدا کنیم مشاهده می‌شود که پتانسیل برابری دارند (قسمت جدا شده با نقاط مشخص شده)

پس از مربع سوم به بعد در واقع مدار ما به نوعی تکرار می‌شود.

پس می‌توان نمودار را به شکل روبه‌رو رسم کرد:

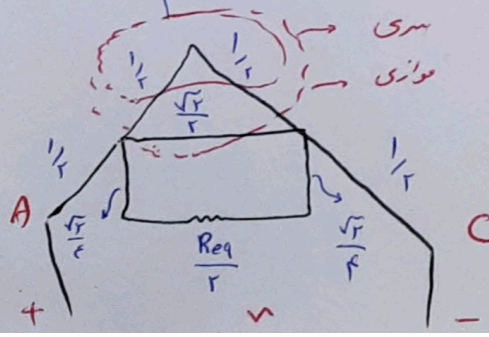
(می‌دانیم مربع سوم نصف اضلاع بزرگترین مربع را دارد بنابراین با $\frac{R_{eq}}{2}$ برابر است)



طبق قانون می‌دانیم که پتانسیل نقاط E و H باهم برابر و برای نقاط B و D و همچنین I و J هم همینطور می‌باشد.

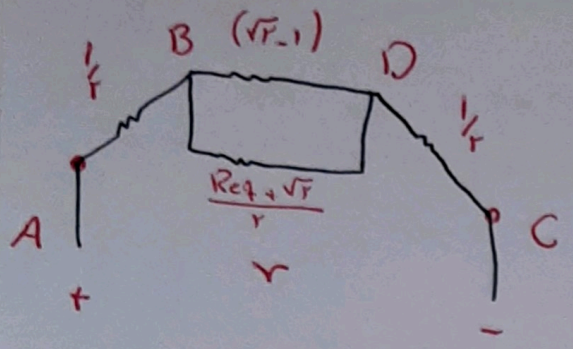
و همچنین می‌دانیم که $R_{AE}=1$ و $R_{EB}=1$.

حال با استفاده از قانون برابری پتانسیل و موازی بودن مقاومت‌ها مدار را ساده‌تر می‌کنیم:



(مقاومت‌های موازی: (AH, AE), (HD, EB), (DI, BJ)
(CI, CJ), (EK, KH), (JC, CI)
(EJ, HI))

حال مدار را ساده تر می کنیم :



حال داریم :

$$R_{eq} = \frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{2}-1)\left(\frac{R_{eq}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}-1+\frac{R_{eq}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2}$$

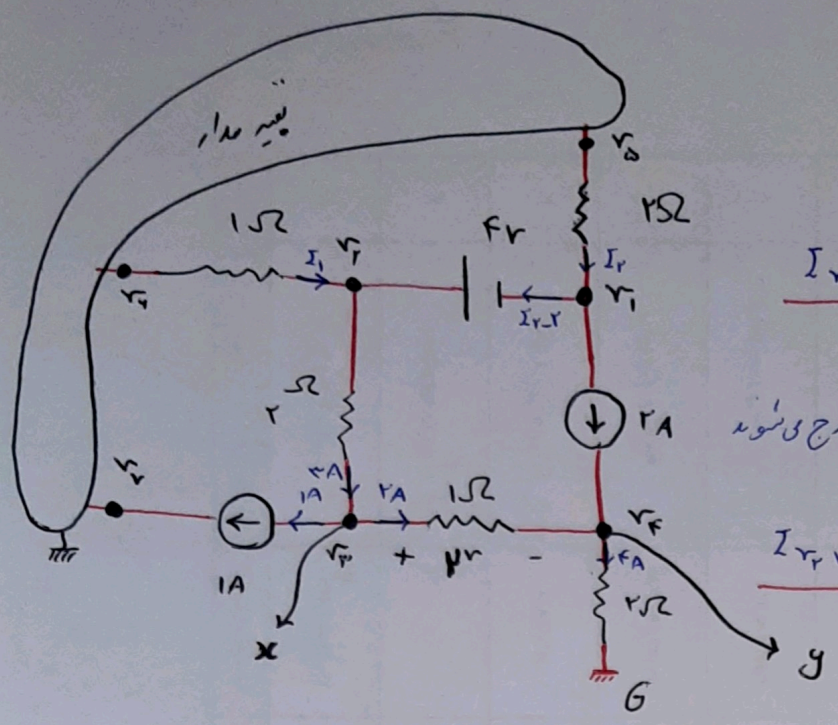
$$\Longrightarrow R_{eq} = \frac{\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}R_{eq} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{R_{eq}}{2}} + 1$$

$$\rightarrow R_{eq} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}R_{eq} + \sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{R_{eq}}{2}} \Longrightarrow \frac{R_{eq}^2}{2} + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)R_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2}R_{eq} + \sqrt{2}$$

$$= R_{eq}^2 + (3\sqrt{2}-2)R_{eq} - 2\sqrt{2} = 0$$

با حل معادله بالا بدست می آید :

$$R_{eq} \simeq 1{,}3178\ \Omega$$



می‌دانیم که $V_3 - V_4 = 2$ پس داریم: $I_{v_4 v_3} = 2A$

در گره x دو جریان ۱ و ۲ آمپری از آن خارج می‌شوند پس داریم: $I_{v_2 v_3} = 3A$

در گره ل داریم:

جریان شاخه v_4G

$2 + 2 = 4$

ورودی — خروجی

ورودی $\Rightarrow$ $I_{v_4G} = 4A$

چون $I_{v_4G} = 4A$ در نتیجه داریم: $V_4 = 8V$

و V_3 را با داشتن V_4 بدست می‌آوریم: $V_3 = 10V$

با داشتن V_3 و $I_{v_2v_3}$، V_2 را هم بدست می‌آوریم: $V_2 = V_3 + 2 \times I_{v_2v_3} = 16V$

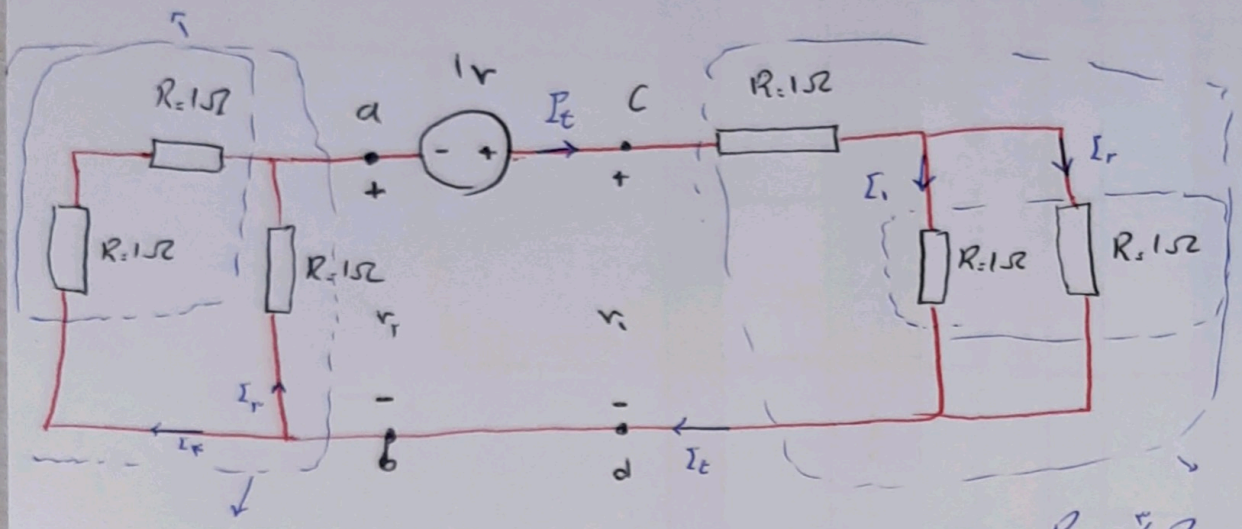
و V_1 نیز به راحتی بدست می‌آید: $V_1 = V_2 - 4 = 12V$

می‌دانیم: $I_{v_3v_7} = 1A$ و $I_{v_1v_4} = 2A$

GMAT

طبق نمودار داده شده مشاهده می‌شود که اگر جریان (مقدار جریان) کمتر مساوی ۱ باشد، مقاومت عکس‌العمل طبق ای شان داده و مقدارش هم برابر ۱ می‌باشد. اما بیشتر از آن عکس‌العمل دیگر نخواهد داشت.

با این شرایط، مدار را با R_2 حل کرده و در آخر مطمئن می‌شویم هیچ جریانی بالاتر از ۱، مقدار نداشته باشد.



موازی ← $R = \frac{1}{2}$

سری ⇐ $R_1 = \frac{3}{2}\Omega$

موازی ⇐ $R_2 = \frac{2}{3}\Omega$

$$\Longrightarrow I_t = \frac{1V}{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = \frac{9}{13} A$$

طبق سری و موازی بودن مقاومت‌ها، برای جریان‌ها داریم:

$$I_1 = \frac{\frac{9}{13}}{2} = \frac{3}{13} A$$

$$I_2 = \frac{3}{13} A$$

$$I_3 = \frac{9}{13} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{13} A$$

$$I_4 = \frac{9}{13} - \frac{4}{13} = \frac{2}{13} A$$

جریان‌ها منطقی‌اند.

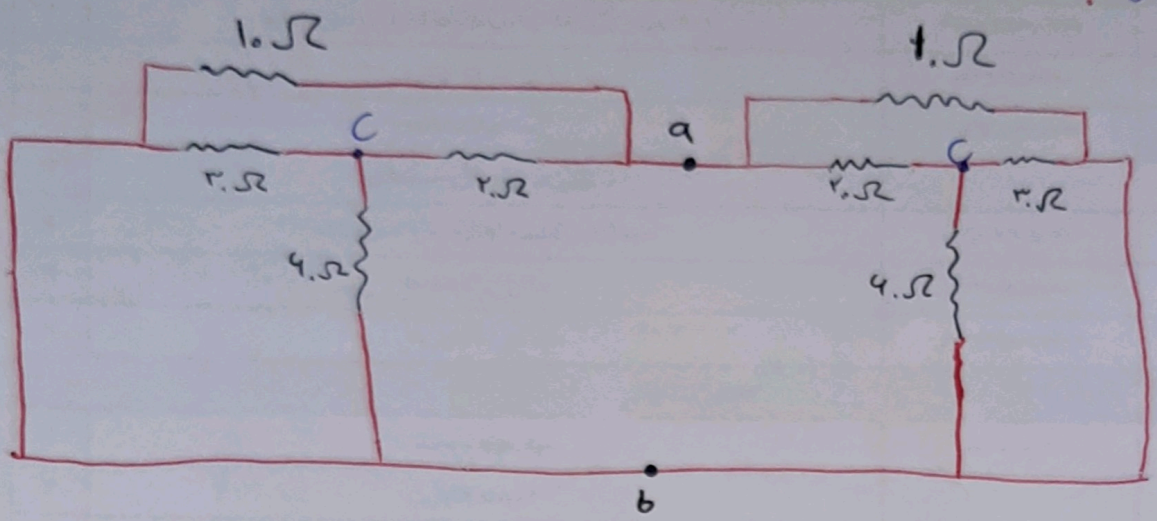
حال V_1 و V_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$V_1 = V_c - V_d = +1 - 1 \times \left(\frac{4}{13}\right) = \frac{9}{13} V$$

$$V_2 = V_a - V_b = -1 \times \left(\frac{4}{13}\right) = -\frac{4}{13} V$$

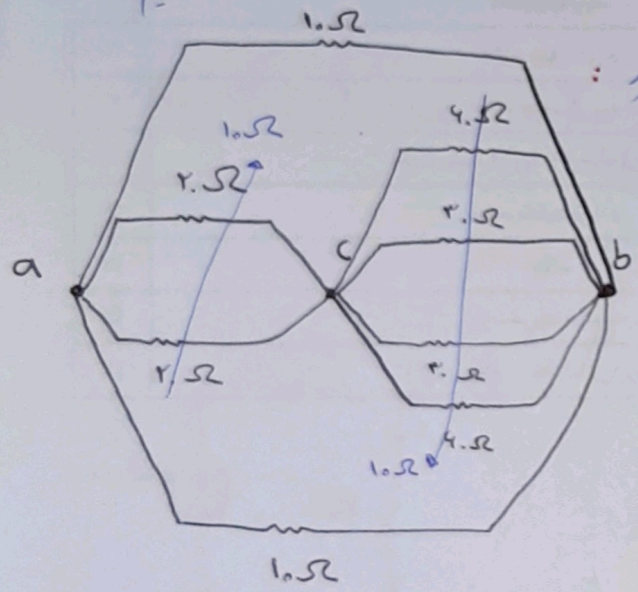
ابتدا R_N که همان R_{th} هست را بدست می‌آوریم:

منابع مستقل off:

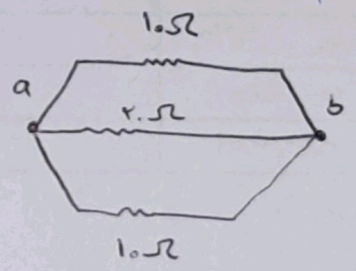


بدون اضافه کردن منبع خاصی به مدار، صرفا مقاومت معادل بین نقاط a و b را بدست می‌آوریم:

طبق قانون دری یابیم که پتانسیل نقاط ۱ نوشته شده باهم برابرند:



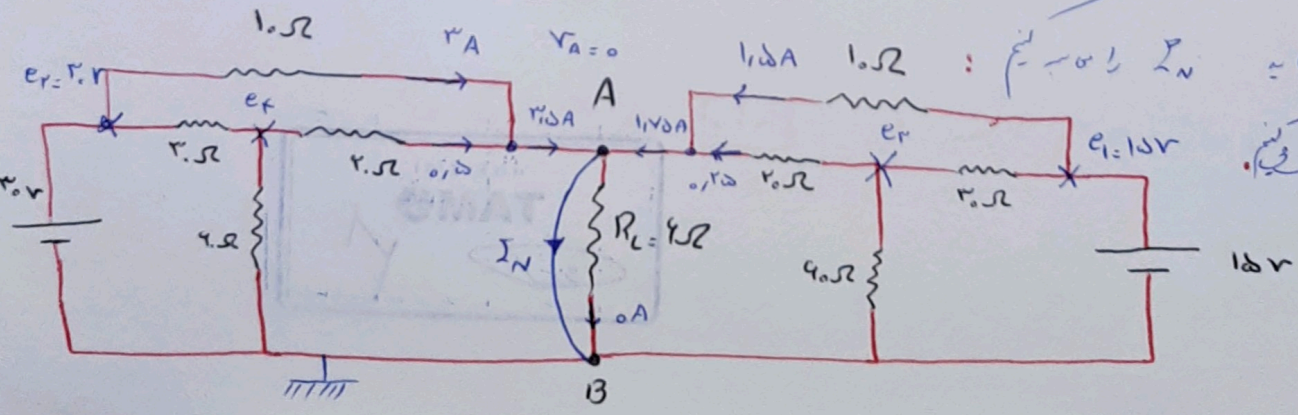
با معادل سازی داریم:



طبق مدار ساده شده بالا مقاومت معادل باطن R_N برابر با ۴ می‌باشد.

حال باید I_N را محاسبه کنیم:

مدار را به زمین متصل می‌کنیم.



مشخص است که $V_A = V_B = 0V$.

با داشتن ولتاژهای e_1 و e_2 و V_A جریان های گذرنده از مقاومت های ۱۰ اهمی را بدست می آوریم .

برای بدست آوردن e_3 و e_4 از KCL استفاده می کنیم :

$$e_3 \longrightarrow \frac{e_3-0}{20}+\frac{e_3-0}{60}+\frac{e_3-15}{30}=0 \Longrightarrow e_3=5V$$

$$e_4 \longrightarrow \frac{e_4-30}{30}+\frac{e_4-0}{60}+\frac{e_4-0}{20}=0 \Longrightarrow e_4=10V$$

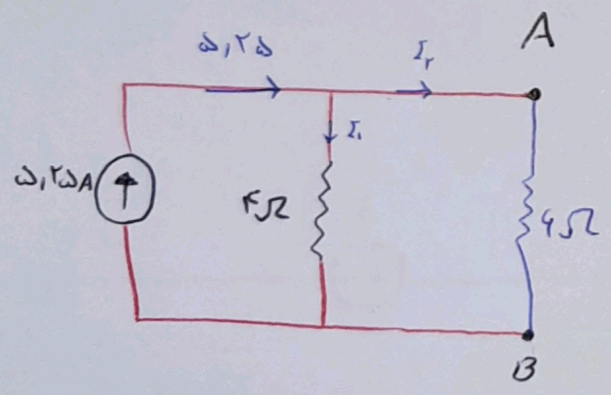
حال با داشتن دو مقادیر بالا، جریان گذرنده از مقاومت های ۲۰ اهمی را بدست می آوریم .

(تمامی اتفاقات در مدار اولیه نشان داده شده است)

پس در گره A خواهیم داشت :

$$I_N=(3+0.5)+(1.5+0.25)=5.25A$$

پس در مدار معادل نورتن خواهیم داشت :



برای بدست آوردن جریان گذرنده از مقاومت ۶ اهمی، آن مقاومت را به شکل اضافه می کنیم .

(مدار)

طبق مدار، خواهیم داشت :

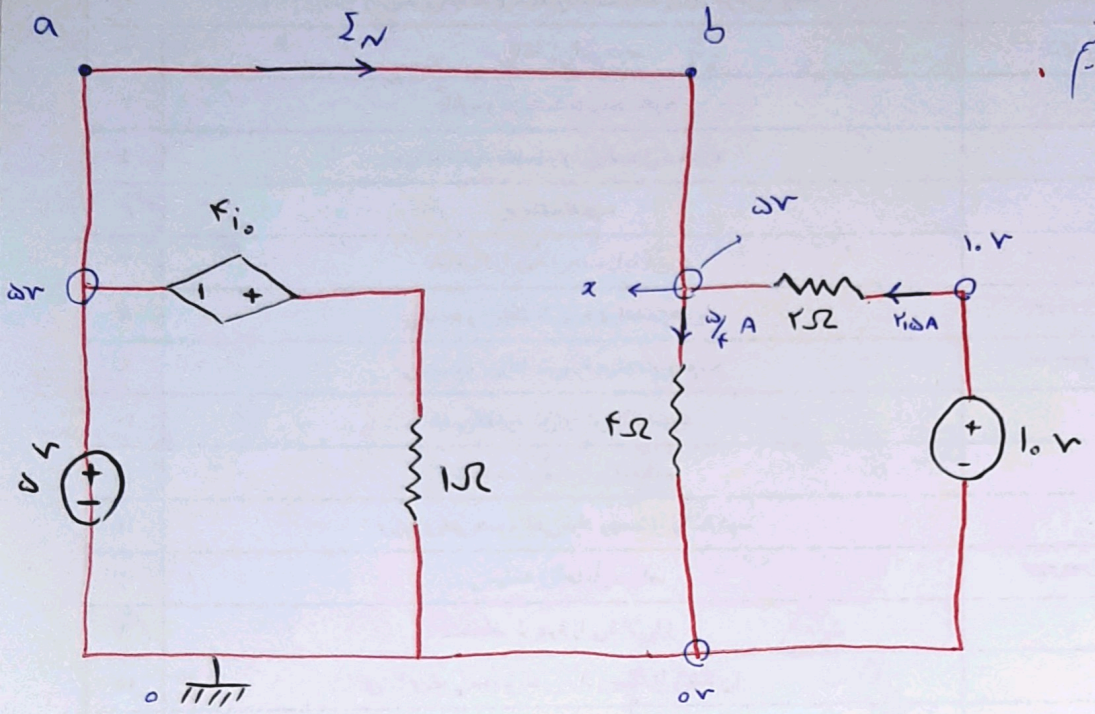
$$I_2=\frac{4}{6+4}\times 5.25=2.1A$$

ابتدا I_N را محاسبه می‌کنیم :

می‌دانیم چون $V_a = V_b$ پس $V_0 = 0$ می‌باشد .

مدار را به زمین متصل می‌کنیم .

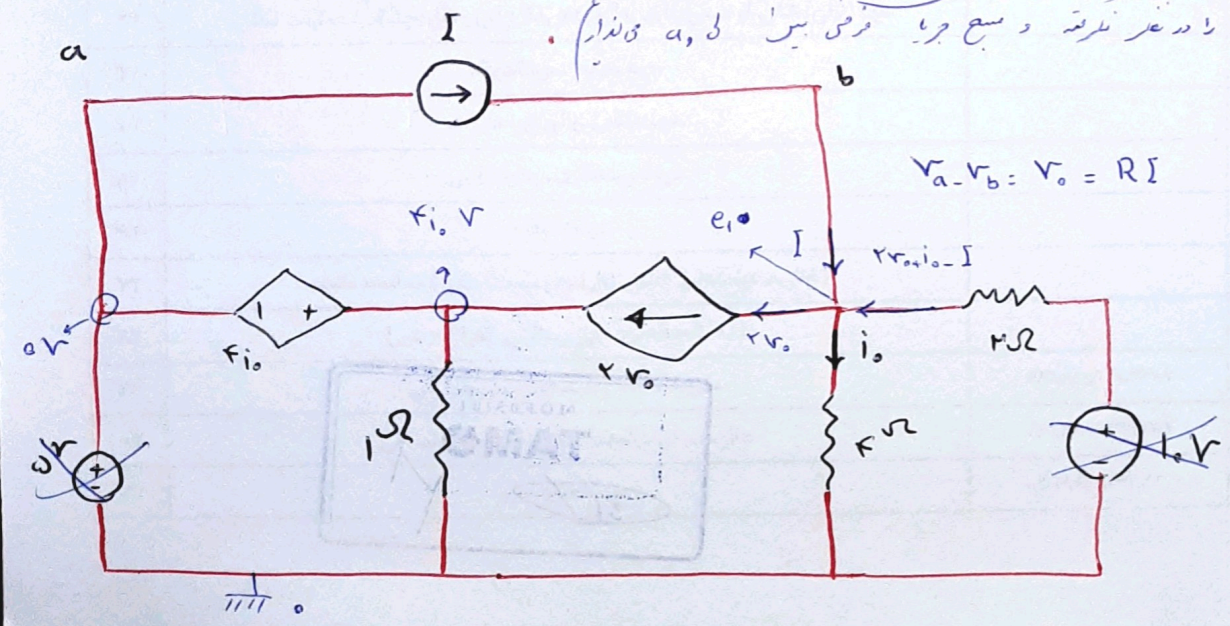
می‌دانیم $V_a = V_b = 5V$



در گره x داریم : $I_N + 2.5 = 1.25 \rightarrow \boxed{I_N = -1.25\,A}$

حال R_N را محاسبه می‌کنیم :

مقاومت R را در نظر نگرفته و منبع جریان فرضی بین a, b می‌گذاریم .



می‌دانیم :

$V_a - V_b = V_0 = RI$

منابع متصل off

و مدار را به زمین وصل می‌کنیم .

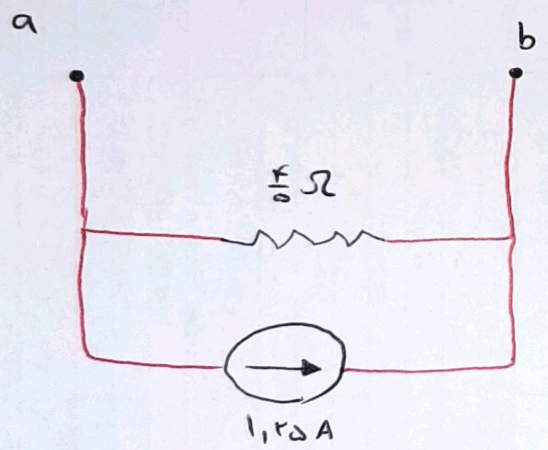
طبق جریان i_0 که از مقاومت 4Ω می‌گذرد، درمی‌یابیم که $e_1 = 4i_0\,V$. پس جریان گذرنده از مقاومت ۲ اهمی برابر $2i_0\,A$ می‌باشد. (به سمت راست)

طبق محاسبات خواهیم داشت:

$$2V_0 + i_0 - I = -2i_0 \rightarrow 2V_0 + 3i_0 = I \quad (\star)$$

اما در مدار مشخص است که $V_a = 0$ و $e_1 = V_b = 4i_0$. پس $V_0 = V_a - V_b = -4i_0$ (I)

$$\xrightarrow{(\star)} 2(-4i_0) + 3i_0 = I \rightarrow I = -5i_0 \longrightarrow \boxed{i_0 = -\frac{I}{5}} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} V_0 = -4\left(-\frac{I}{5}\right) = \frac{4}{5}I \Longrightarrow R_N = \frac{4}{5}\Omega$$

پس خواهیم داشت: