



۳۱ اردیبهشت ۱۴۰۳

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها
بهار ۱۴۰۳



تمرین چهارم

پرسش نخست

برای هر یک از زبان‌ها زیر یک رایانه تورینگ بیاورید که آن زبان را می‌پذیرد. دقت کنید که شما بایستی توصیف صوری یا نموداری بیاورید. همچنین می‌توانید یارانه تورینگ شما می‌تواند ناقطعی و چندنواره باشد.

۱. $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ (۳ نمره)

۲. $L = \{1^n \text{bin}(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (۳ نمره)

۳. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = 2^{n_b(w)}\}$ (۴ نمره)

پرسش دوم

برای دو گونه رایانه زیر یک توصیف صوری بیاورید و سپس نشان دهید که این دو گونه هم‌ارز^۱ با رایانه‌های تورینگ هستند.

۱. خودکاره ۲-پشته‌ای که دارای دو پشته جدا از هم است. (۵ نمره)

۲. خودکاره صفی^۲ که به جای یک پشته یک صف دارد. صف را به صورت یک نوار در نگر بگیرید که تنها می‌توان با سر سمت چپ آن نوشت و با سر راست آن خواند. در هر گام، این خودکاره می‌تواند حالت خود را عوض کند،

واک سمت راست دور بریزد^۳ و یک واک از سمت چپ در نوار بنویسد^۴. (۵ نمره)

^۱ به این معنا که هر رایانه تورینگ را می‌توان با یک رایانه از آن گونه شبیه‌سازی کرد و هر رایانه از آن گونه را می‌توان با یک رایانه تورینگ

شبیه‌سازی کرد.

^۲ queue automaton

^۳ همان pop کردن است.

^۴ همان push کردن است.

پرسش سوم

نشان دهید که زبان‌های زیر تصمیم‌پذیرند.

۱. $L = \{ \langle P \rangle \mid P \text{ یک خودکاره پشته‌ای قطعی است} \}$. ^۵✓

۲. $L = \{ \langle D \rangle \mid w \in L(D) \iff w^R \in L(D) \}$. ✓

۳. $L = \{ \langle G, D \rangle \mid L(G) \subseteq L(D) \}$. ✓

پرسش چهارم

بسته بودن زبان‌های تشخیص‌پذیر را زیر هر یک از عملگرهای زیر بررسی کنید و برای ادعای خود دلیلی کوتاه بیاورید.

۱. اجتماع. ✓

۲. متمم. ✓

۳. هم‌ریختی. به یاد بیاورید که پردازش $h : \Sigma^* \rightarrow \Pi^*$ را هم‌ریختی می‌نامیم اگر برای هر دو رشته $x, y \in \Sigma^*$ داشته باشیم $h(xy) = h(x)h(y)$. ✓

۴. بستار چرخشی. ✓

$$RC(L) = \{yx \mid xy \in L\}$$

۵. وارون هم‌ریختی. ✓

$$h^{-1}(L) = \{x \mid h(x) \in L\}$$

^۵در این تمرین منظور از $\langle P \rangle$ ، $\langle D \rangle$ ، $\langle G \rangle$ و $\langle M \rangle$ ، به ترتیب کدینگ یک خودکاره پشته‌ای، خودکاره متناهی قطعی، دستور زبان مستقل از متن، یارانه تورینگ است.

پرسش پنجم

۱. نشان دهید که زبان‌های زیر تصمیم‌ناپذیر هستند.

(۳ نمره) (آ) $SUBSET_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \subseteq L(M_2)\}$ ✓

(۳ نمره) (ب) $L = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid L(G_1) = L(G_2)\}$ ✓

(۴ نمره) (ج) $L = \{\langle G, D \rangle \mid L(G) = L(D)\}$ ✓

۲. نشان دهید که زبان‌ها زیر تشخیص‌ناپذیر هستند. ✓

(۳ نمره) (آ) $K = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\}$ تشخیص‌ناپذیر بودن این زبان را تنها با بکار بردن برهان قطری‌سازی نشان دهید. ✓

(۳ نمره) (ب) $EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$ تشخیص‌ناپذیر بودن این زبان را با کاهش زبان K به آن نشان دهید. ✓

(۴ نمره) (ج) $CONCAT_{TM} = \{\langle M_1, M_2, M_3 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)L(M_3)\}$ تشخیص‌ناپذیر بودن این زبان را با کاهش زبان EQ_{TM} به آن نشان دهید. ✓

پرسش امتیازی

یک خودکاره n -شمارنده یک رایانه است که یک نوار فقط خواندنی دو سویه^۶ برای ورودی به همراه n شمارنده اعداد طبیعی دارد. این رایانه می‌تواند کارها زیر انجام دهد.

۱. واک زیر سر نوار ورودی بخواند.

۲. صفر بودن مقدار یک تا شماری از شمارنده‌ها را بررسی کند.

۳. سر نوار یک خانه به راست یا چپ ببرد.

۴. شمارنده‌ها را جدا از هم یکی افزایش و یا کاهش دهد.

(۱ نمره) (آ) یک تعریف صوری برای خودکاره n -شمارنده بیاورید. ✓

(۳ نمره) (ب) نشان دهید که هر خودکاره پشته‌ای را می‌توان با یک خودکاره ۲-شمارنده شبیه‌سازی کرد. ✓

^۶two-way read-only tape

✓(ج) می‌دانیم که هر رایانه تورینگ را می‌توان با یک خودکاره ۲-پشته‌ای شبیه‌سازی کرد. با گماردن این گزاره نشان دهید که هر رایانه تورینگ را می‌توان با یک خودکاره ۲-شمارنده‌ای شبیه‌سازی کرد.

(۲ نمره)