دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

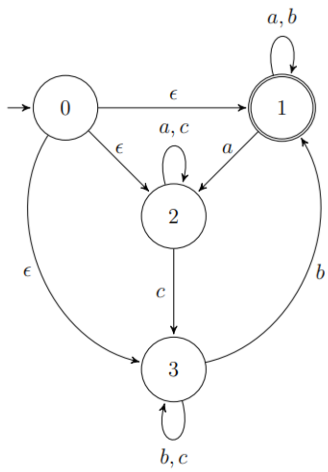
امیررضا آذری - ۹۹۱۰۱۰۸۷

پاسخ تمرین دوم

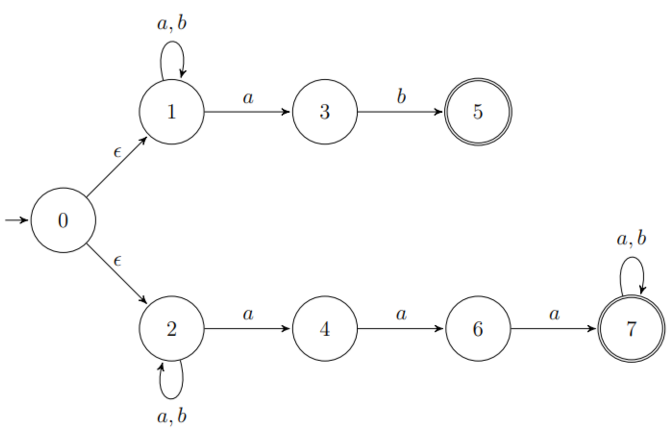
۱. **پرسش نخست**

هر یک از خودکاره‌های غیرقطعی متناهی زیر را به خودکاره‌ی متناهی قطعی برابری تبدیل کنید.

(آ)



(ب)



پاسخ.

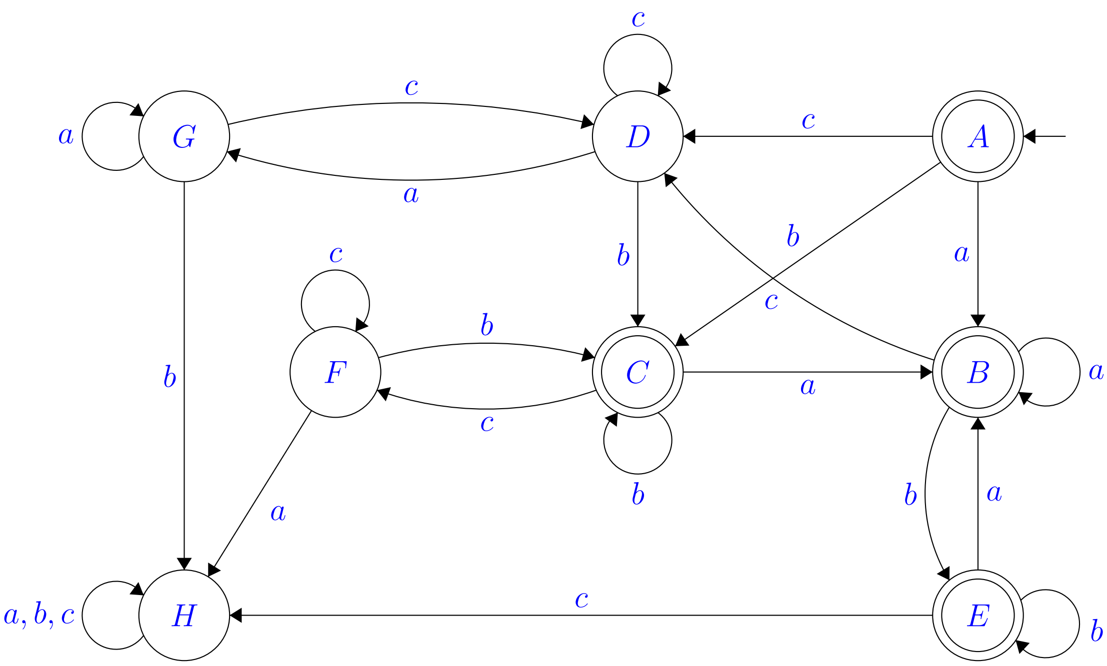
(آ)

همانطور که در صورت سوال ذکر شده است نیازی نیست تمامی حالات را بررسی کنیم. بنابراین از ϵ-closure استیت آغازین شروع به حرکت کرده و در هر مرحله که استیت جدیدی اضافه شد، مراحل مشابه را برای آن تکرار می‌نماییم تا جایی که استیت جدید دیگری تولید نشود. داریم:

$$
\begin{cases}
\delta &= \begin{array}{c|c|c|c}
 & a & b & c \\ \hline
\{۰,۱,۲,۳\}^* & \{۱,۲\} & \{۱,۳\} & \{۲,۳\} \\
\{۱,۲\}^* & \{۱,۲\} & \{۱\} & \{۲,۳\} \\
\{۱,۳\}^* & \{۱,۲\} & \{۱,۳\} & \{۳\} \\
\{۲,۳\} & \{۲\} & \{۱,۳\} & \{۲,۳\} \\
\{۱\}^* & \{۱,۲\} & \{۱\} & \varnothing \\
\{۳\} & \varnothing & \{۱,۳\} & \{۳\} \\
\{۲\} & \{۲\} & \varnothing & \{۲,۳\} \\
\varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing
\end{array} \\
Q &= \{A=\{۰,۱,۲,۳\},\ B=\{۱,۲\},\ C=\{۱,۳\}, \\
 & \quad D=\{۲,۳\},\ E=\{۱\},\ F=\{۳\},\ G=\{۲\},\ H=\varnothing\} \\
\Sigma &= \{a,b,c\} \\
q_۰ &= A \\
F &= \{A,\ B,\ C,\ E\}
\end{cases}
$$

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_۰, F)$$

حال DFA را رسم می‌کنیم. دقت کنید در جدول بالا، علامت * به معنای نهایی بودن آن استیت می‌باشد.



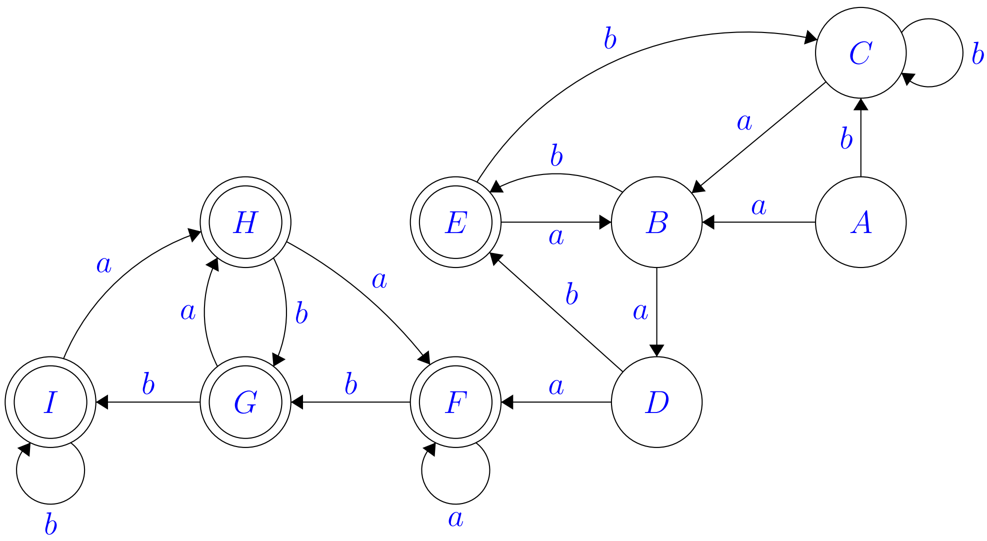
(ب)

همانطور که در صورت سوال ذکر شده است نیازی نیست تمامی حالات را بررسی کنیم. بنابراین از ϵ-closure استیت آغازین شروع به حرکت کرده و در هر مرحله که استیت جدیدی اضافه شد، مراحل مشابه را برای آن تکرار می‌نماییم تا جایی که استیت جدید دیگری تولید نشود. داریم:

$$
\begin{cases}
\delta \quad = & \begin{array}{c|c|c}
 & a & b \\
\hline
\{۰,۱,۲\} & \{۱,۲,۳,۴\} & \{۱,۲\} \\
\{۱,۲,۳,۴\} & \{۱,۲,۳,۴,۶\} & \{۱,۲,۵\} \\
\{۱,۲\} & \{۱,۲,۳,۴\} & \{۱,۲\} \\
\{۱,۲,۳,۴,۶\} & \{۱,۲,۳,۴,۶,۷\} & \{۱,۲,۵\} \\
\{۱,۲,۵\}^* & \{۱,۲,۳,۴\} & \{۱,۲\} \\
\{۱,۲,۳,۴,۶,۷\}^* & \{۱,۲,۳,۴,۶,۷\} & \{۱,۲,۵,۷\} \\
\{۱,۲,۵,۷\}^* & \{۱,۲,۳,۴,۷\} & \{۱,۲,۷\} \\
\{۱,۲,۳,۴,۷\}^* & \{۱,۲,۳,۴,۶,۷\} & \{۱,۲,۵,۷\} \\
\{۱,۲,۷\}^* & \{۱,۲,۳,۴,۷\} & \{۱,۲,۷\}
\end{array} \\
Q \quad = & \{A = \{۰,۱,۲\},\ B = \{۱,۲,۳,۴\},\ C = \{۱,۲\}, \\
 & D = \{۱,۲,۳,۴,۶\},\ E = \{۱,۲,۵\},\ F = \{۱,۲,۳,۴,۶,۷\}, \\
 & G = \{۱,۲,۵,۷\},\ H = \{۱,۲,۳,۴,۷\},\ I = \{۱,۲,۷\}\} \\
\Sigma \quad = & \{a, b\} \\
q_۰ \quad = & A \\
F \quad = & \{E,\ F,\ G,\ H,\ I\}
\end{cases}
$$

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_۰, F)$$

حال DFA را رسم می‌کنیم. دقت کنید در جدول بالا، علامت * به معنای نهایی بودن آن استیت می‌باشد.



در حل سوال به ۲ نکته زیر توجه شده است:

- استیت‌های قابل دسترس، گام به گام و به ترتیب اضافه شده‌اند.
- DFA های به دست آمده حالات کوتاه شده‌تر نیز دارند که به دلیل اینکه خواسته سوال نبوده است، صرفا به حالت کلی بسنده کرده‌ایم.

* نکته: در DFA دوم، فراموش شده است که استیت A به عنوان حالت شروع ذکر بشود، اما در تعریف آن به $q_0 = A$ اشاره کرده‌ایم و همین متن نیز مجدد به آن اشاره دارد :).

۲. **پرسش دوم**

براي زبان هاي زير عبارت منظمي بياوريد.

(آ) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| = ۳n + ۲\}$

(ب) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_b(w) \equiv ۰ \ mod \ ۲\}$

(ج) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid$ در w پس از هر واك b حداقل يك a آمده است. $\}$

(د) $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid$ در w پس از هر واك b تنها a يا b آمده است. $\}$

پاسخ.

(آ)

$((a+b)(a+b)(a+b))^* \ (a+b)(a+b)$

(ب)

$a^* + (a^*ba^*ba^*)^*$

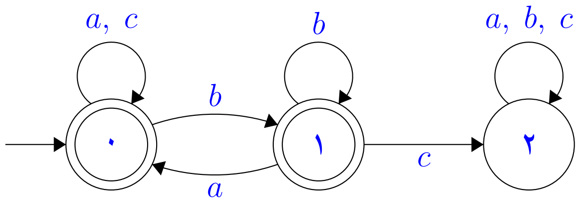
که به صورت خلاصه‌تر به شکل $(a + ba^*b)^*$ هم وجود دارد.

(ج)

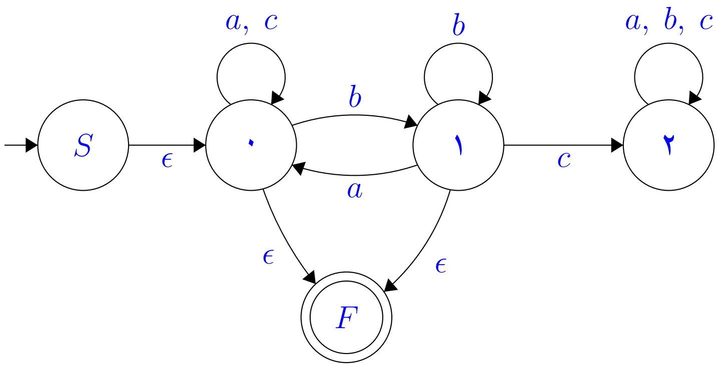
$(a + ba)^*$

(د)

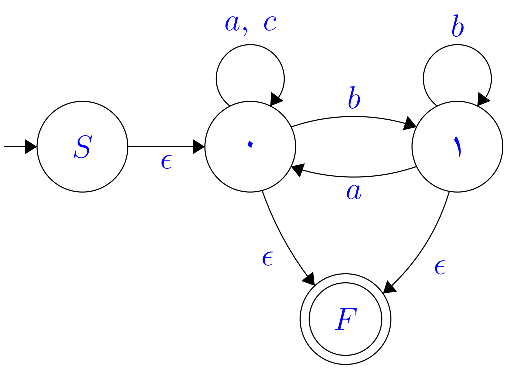
نخست خودکاره‌ی قطعی متناهی آن را رسم می‌کنیم:



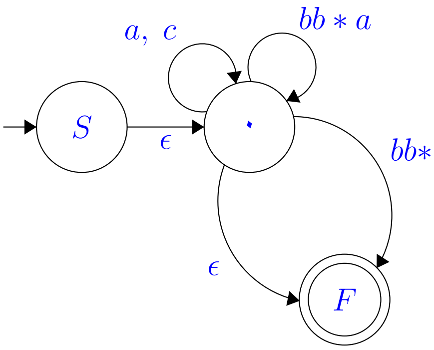
حال آن را به خودکاره غیرقطعی متناهی گسترش یافته تبدیل می‌کنیم. برای این کار یک استیت شروع و پایان جدید اضافه می‌نماییم و مطابق جزئیات گفته شده در اسلایدها ادامه می‌دهیم:



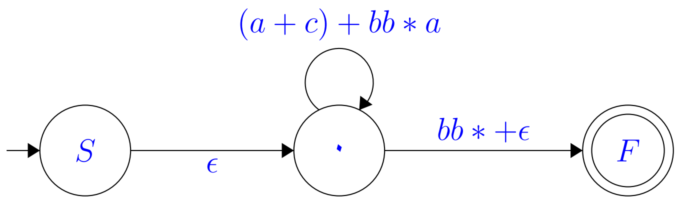
استیت ۲ در این حالت مرده در نظر گرفته می‌شود زیرا از آن به استیت نهایی نمی‌رسیم:



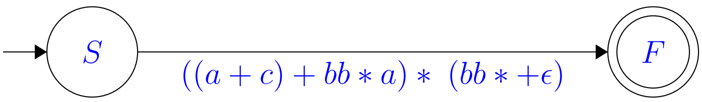
اکنون استیت ۱ را حذف می‌نماییم:



حال تنها استیت باقی‌مانده یعنی ۰ را حذف می‌نماییم. قبل آن کمی ساده می‌کنیم:



و در مرحله آخر داریم:



بنابراین به عبارت منظم زیر خواهیم رسید:

$$(a + c + b^+a)^*\ (b^+ + \epsilon)$$

۳. پرسش سوم

۱.

نشان دهید که رده‌ی زبان‌های منظم زیر عملیات وارون بسته است.

.۲

پردازه $h : \Sigma^* \to \Pi^*$ یک همریختی می‌گوییم اگر برای هر $x, y \in \Sigma^*$ داشته باشیم که $h(xy) = h(x)h(y)$.
همچنین می‌توان هر پردازه همریخت را به گونه زیر برای زبان‌ها گسترش داد.

$$h(L) = \{h(x) \mid x \in L\}$$

نشان دهید که رده‌ی زبان‌های منظم زیر پردازه‌های همریخت بسته است.

پاسخ.

.۱

فرض کنید A یک زبان منظم باشد. می‌خواهیم نشان بدهیم که A^R نیز منظم است. وقتی می‌گوییم که A منظم است یعنی یک DFA مانند M وجود دارد که آن را تشخیص می‌دهد.

$$M = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_\circ,\ F)$$

حال ماشین N که یک NFA است را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم تا A^R را تشخیص بدهد. داریم:

$$N = (Q', \Sigma', \delta', q'_\circ, F')$$

$$\begin{cases} Q' &= Q \cup \{q'_\circ\} \\ \Sigma' &= \Sigma \\ \delta' &\to \begin{cases} \delta'(q'_\circ, \epsilon) &= F \\ \delta'(q'_\circ, a) &= \emptyset \ \text{ all } a \in \Sigma \\ \delta'(p, a) &= \{q \mid \delta(q, a) = p\} \ \text{ all } q \in Q, a \in \Sigma \end{cases} \\ F' &= \{q_\circ\} \end{cases}$$

بنابراین A^R نیز منظم است و رده‌ی زبان‌های منظم زیر عملیات وارون بسته است.

.۲

برای حل این سوال زیبا، زبان L و پردازه h را تعریف کرده‌ایم. در بخش اول نیاز است همریختی h را به عنوان یک عملگر روی عبارات منظم تعریف بنماییم. در بخش دوم باید نشان بدهیم $h(L(R)) = L(h(R))$.
بنابراین شروع به حل می‌کنیم:

بخش اول

برای عبارت منظم R، در نظر بگیرید $h(R)$ عبارت منظمی است که از طریق جایگزین کردن هر رویداد $a \in \Sigma$ در R به وسیله رشته $h(a)$ به دست آمده است. برای شفافیت مثالی می‌زنیم:

$$R = (۰ + ۱)۰۱(۰ + ۱)^*, \quad h(۰) = ab, \; h(۱) = ba$$
$$\rightarrow h(R) = (ab + ba)abba(ab + ba)^*$$

بنابراین به طور رسمی می‌توان $h(R)$ به کمک استقرا به طور زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= \emptyset \\ h(\epsilon) &= \epsilon \\ h(a) &= h(a) \\ h(R^*) &= (h(R))^* \\ h(R_۱R_۲) &= h(R_۱)h(R_۲) \\ h(R_۱ \cup R_۲) &= h(R_۱) \cup h(R_۲) \end{aligned}$$

بخش دوم

راه اول:
در این بخش باید نشان بدهیم که $L(h(R)) = h(L(R))$. برای این کار نیاز است از استفرا کمک بگیریم و مسئله را به ۳ بخش تقسیم نماییم. ابتدا پایه استقرا را می‌نویسیم.

پایه استقرا:

- $R = \epsilon \mid \emptyset \longrightarrow R = h(R) \longrightarrow L(R) = h(L(R))$.
- $R = a \longrightarrow L(R) = \{a\} \longrightarrow L(h(R)) = L(h(a)) = \{h(a)\} = h(L(R))$.

حال برای گام استقرا، مسئله را به ۳ بخش تقسیم می‌کنیم:

حالت اول: $R = R_۱^*$

به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم. دقت کنید از فرض استقرا نیز استفاده خواهیم کرد:

$$h(R) = h(R_۱^*) = h(R_۱)^* \quad (۱)$$
$$\rightarrow L(h(R)) = L(h(R_۱^*)) = L(h(R_۱)^*) = L(h(R_۱))^* \quad (۲)$$
$$\rightarrow L(h(R_۱))^* = h(L(R_۱))^* = h(L(R_۱)^*) = h(L(R_۱^*)) = h(L(R)) \quad (۳)$$

حالت دوم: $R = R_1R_2$

به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم. دقت کنید از فرض استقرا نیز استفاده خواهیم کرد:

$$\begin{aligned} h(L(R)) = & \quad h(L(R_1R_2)) & = h(L(R_1)L(R_2)) = h(L(R_1))h(L(R_2)) \\ \to h(L(R_1))h(L(R_2)) = & \quad L(h(R_1))L(h(R_2)) & = L(h(R_1)h(R_2)) = L(h(R_1R_2)) \\ \to L(h(R_1R_2)) = & \quad L(h(R)) & \end{aligned}$$

حالت سوم: $R = R_1 \cup R_2$

به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم. دقت کنید از فرض استقرا نیز استفاده خواهیم کرد:

$$\begin{aligned} h(L(R)) &= h(L(R_1 \cup R_2)) = h(L(R_1) \cup L(R_2)) = h(L(R_1)) \cup h(L(R_2)) \\ \to h(L(R_1)) \cup h(L(R_2)) &= L(h(R_1)) \cup L(h(R_2)) = L(h(R_1) \cup h(R_2)) = L(h(R_1 \cup R_2)) \\ \to L(h(R_1 \cup R_2)) &= L(h(R)) \end{aligned}$$

حال برای جمع‌بندی این سوال داریم:

ابتدا زبان منظمی مانند l را درنظر بگیرید . چون این زبان منظم است، عبارت منظمی مانند R وجود دارد که $l = L(R)$. و طبق اثباتی که داشتیم می‌دانیم $h(L(R)) = L(h(R))$، پس نتیجه می‌شود که $h(l) = L(h(R))$.
پس $h(l)$ زبانی است که توسط عبارت منظم $h(R)$ توصیف می‌شود؛ درنتیجه زبانی منظم است. پس زبان‌های منظم زیر پردازه‌های هم‌ریخت بسته می‌باشند.

نکته: شاید نیاز بود خواص خود پردازه‌های هم‌ریخت را نیز قبل حل، اثبات نماییم.

ویژگی‌های پردازه هم‌ریخت

۱. $h(L^*) = h(L)^*$

برای این ویژگی، رشته دلخواهی که عضو $h(L^*)$ هست را درنظر بگیرید. این رشته را m می‌نامیم. درنتیجه رشته‌ای مانند n وجود دارد که $h(n) = m$. حال اگر n را به طور $n_1n_2 \dots n_k$ تعریف کنیم که $h(n)$ برابر می‌شود با حاصل ضرب تمامی $h(n_i)$ها که هر کدام عضو $h(L)$ می‌باشند. درنتیجه:

$$m \in h(L)^* \to h(L^*) \subseteq h(L)^*$$

این از سمت اول. برای سمت دوم، به طور برعکس عمل می‌کنیم.

$$\begin{gathered} m \in h(L)^* \quad , \quad m = m_1 \dots m_k \\ \forall i \in \{1, \dots, k\}, \exists t_i \in L, m_i = h(t_i) \quad \to \quad m = h(t_1) \dots h(t_k) = h(t_1 \dots t_k) \end{gathered}$$

که حاصل ضرب t_iها عضو L^* می‌باشند و داریم:

$$m \in h(L^*) \to h(L)^* \subseteq h(L^*)$$

دو طرف را ثابت کردیم. پس ویژگی را داراست.

۲. $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$

به طور مشابه هر دو طرف را نشان می‌دهیم.

$$m \in h(L_1 \cup L_2), \quad \exists n \in L_1 \cup L_2, \quad h(n) = m$$

حال n را اگر عضو L_1 درنظر بگیریم، داریم:

$$\begin{gathered} h(n) \in h(L_1), \\ m \in h(L_1), \quad \rightarrow m \in h(L_1) \cup h(L_2) \rightarrow h(L_1 \cup L_2) \ \subseteq h(L_1) \cup h(L_2) \end{gathered}$$

این از سمت اول. برای سمت دوم ادامه می‌دهیم. رشته m عضو $h(L_1) \cup h(L_2)$ را درنظر بگیرید.

$$\begin{gathered} \textbf{if } m \in L_1, \rightarrow \ \exists\, n \in L_1, \quad h(n) = m \\ n \in L_1 \cup L_2, \quad m \in h(L_1 \cup L_2) \rightarrow \ h(L_1) \cup h(L_2) \subseteq h(L_1 \cup L_2) \end{gathered}$$

بنابراین این ویژگی را نیز دارا می‌باشد.

۳. $h(L_1 \circ L_2) \ = \ h(L_1) \circ h(L_2)$

به طور مشابه هر دو طرف را نشان می‌دهیم. ابتدا طرف اول را نشان می‌دهیم.

$$\begin{gathered} m \in h(L_1) \circ h(L_2), \quad \exists r \in h(L_1), \ q \in h(L_2), \ m = rq \\ \rightarrow r \in h(L_1), \ \exists s \in L_1, \ h(s) = r \\ q \in h(L_2) \rightarrow \exists t \in L_2, \ h(t) = q \end{gathered}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{gathered} m = h(st), \ st \in L_1 \circ L_2 \rightarrow m \in h(L_1 \circ L_2) \\ \rightarrow h(L_1) \circ h(L_2) \subseteq h(L_1 \circ L_2) \end{gathered}$$

فرض کنید m عضو $h(L_1 \circ L_2)$ می‌باشد. داریم:

$$\begin{gathered} \exists n \in L_1 \circ L_2, \ h(n) = m \\ \exists r \in L_1, \ q \in L_2, \quad n = rq, \quad m = h(r)h(q) \\ h(r) \in h(L_1), \ h(q) \in h(L_2), \quad m \in h(L_1) \circ h(L_2) \rightarrow h(L_1 \circ L_2) \subseteq h(L_1) \circ h(L_2) \end{gathered}$$

بنابراین این ویژگی نیز اثبات شد.

راه دوم، سریع و خلاصه:
میدانیم برای A یک NFA وجود دارد که آن را تشخیص می‌دهد. طبق تعریف h میتوان مرحله ب مرحله و کاراکتر به کاراکتر جلو رفت و نتایج را الحاق کرد. اگر $h(a)$ بیش از یک کاراکتر باشد، میتوان به NFA اولیه، استیت جدید اضافه کرد. و به همین شکل می‌توان یک NFA ساخت و اثبات کرد $h(a)$ منظم است.

۴. **پرسش چهارم**

يك عبارت منظم زمانی مبهم است که رشته‌ای وجود داشته باشد که بتوان آن را به دو روش گوناگون از آن عبارت منظم ساخت. کدام يك از عبارت‌های منظم زیر مبهم است؟

(آ) $a[(ab)^*cd]^* \ \cup \ a(ababcb^*)^*a^*$

(ب) $aab^*(ab)^* \ \cup \ ab^* \ \cup \ a^*bba^*$

(ج) $a^*(a^*b)^*c \ \cup \ (abdc)^+$

پاسخ.

(آ)

این عبارت منظم، رشته a را با ۲ روش می‌سازد. یک‌بار با انتخاب جمله اول و بار دیگر با انتخاب جمله دوم می‌توان a را ایجاد کرد. پس مبهم است.

(ب)

این عبارت منظم، رشته abb را هم می‌تواند به کمک عبارت a^*bba^* بسازد و هم با عبارت ab^* این کار را انجام دهد. بنابراین مبهم است.

(ج)

این عبارت منظم، رشته $aabc$ را می‌تواند برای مثال به این ۲ روش بسازد:

- $a^*(a^*b)^*c \xrightarrow{a-ab-c} aabc$
- $a^*(a^*b)^*c \xrightarrow{\epsilon-aab-c} aabc$

بنابراین مبهم است.

۵. پرسش پنجم

۱.

با بکار گیری لم تزریق نشان دهید که زبان‌های زیر نامنظم هستند.

(آ) $L = \{a^i b^j a^k \mid i, j, k \in \mathbb{N},\ k > i + j\}$

(ب) $L = \{a^{۲^n} \mid n \geq ۰\}$

(ج) $L = \{a^p \mid \text{عدد اول است.}\ p\}$

۲.

با بکار گیری ویژگی‌های بستاری نشان دهید که زبان‌های زیر نامنظم هستند.

(آ) $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n\}$

(ب) $L = \{a^m b^{۲^n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

پاسخ.

۱.

(آ) فرض کنید این زبان منظم و طول پمپ p باشد. در این صورت رشته $s = a^p b^p a^{۴p}$ را در نظر بگیرید. طبق لم تزریق می‌دانیم:

- $s = xy^iz \in L, \ \forall i \geq ۰$

- $|xy| \leq p$

- $|y| > ۰$

همچنین دقت کنید طبق ویژگی دوم لم تزریق، رشته y تنها از a تشکیل شده و به صورت $y = a^t$ می‌توان آن را نمایش داد.
حال داریم:

$$xy^iz = a^{p+(i-۱)t}b^pa^{۴p} \rightarrow p + (i-۱)t + p < ۴p$$
$$\rightarrow i < \frac{۲p}{t} + ۱$$

با توجه به اینکه i هر عدد طبیعی و دلخواهی می‌تواند باشد، این نامساوی اشتباه است و به تناقض ریسدیم و زبان منظم نمی‌باشد. راه دیگر برای عدم منظم بودن این زبان، آ« بود که رشته را برابر $a^pb^pa^{۲p+۱}$ در نظر بگیریم و مشابه بالا، اثبات کنیم که $xy^۲z$ در زبان نیست، زیرا ویژگی گفته شده را ندارد.

(ب) فرض کنید این زبان منظم باشد و طول پمپ را p در نظر بگیرید. لم پامپینگ را برای رشته $a^{۲^p}$ درنظر می‌گیریم. مشخص است که طول این رشته از p بزرگتر است. همچنین طبق شروط لم تزریق می‌دانیم که:

$$y = a^t, \ ۱ \leq t \leq p \rightarrow xy^۲z = a^{۲^p+t} \in L$$

اما $۲^p + t$ توانی از ۲ نمی‌باشد.

$$۲^p < ۲^p + t < ۲^p + p < ۲^p + ۲^p < ۲^{p+۱}$$

این تناقض به ما نشان می‌دهد که این زبان منظم نیست.

(ج) فرض کنید این زبان منظم باشد و طول پمپ را pump در نظر بگیرید. لم پامپینگ را برای رشته a^p را داریم. این رشته را به طور xyz در نظر گرفته و به طور واضحی، $y = a^t, \ ۱ \leq t \leq pump$. حال رشته $xy^{p+۱}z$ را درنظر بگیرید. این رشته برابر $a^{p(۱+t)} = a^{p+tp}$ است که همانطور که مشخص است، طول رشته عدد اول نیست. بنابراین به تناقض رسیدیم و این زبان نامنظم است.

دقت کنید در تمامی حالات بالا، از برهان خلف استفاده نمودیم. فرض خلفی داشتیم و درنهایت به تناقض می‌رسیدیم. همچنین تمام رشته‌های گفته شده، شروط لم تزریق را دارا بودند.

۲.

(آ) با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم زبان مورد نظر منظم است. حال طبق ویژگی بستاری، می‌دانیم که $\bar{L}$ نیز منظم است. همچنین اشتراک یک زبان منظم با زبان منظم دیگر نیز منظم است. از طرف دیگر می‌دانیم که aa*bb* نیز منظم است زیرا یک DFA برایش وجود دارد. در نتیجه:

$$\bar{L} \cap \text{aa*bb*} = \{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

اما طبق اسلایداهای درس می‌دانیم که a^ib^i نامنظم* است. پس به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل و حکم ثابت شد که زبان L منظم نیست.

*. برای اثبات مجدد آن همانند بخش ۱ می‌توانیم رشته a^pb^p را در نظر بگیریم و اثبات کنیم که $xy^۲z$ در زبان مورد نظر نمی‌باشد.

(ب) با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم زبان مورد نظر منظم است. همچنین اشتراک یک زبان منظم با زبان منظم دیگر نیز منظم است. همچنین می‌دانیم که ab^* نیز منظم است زیرا یک DFA معادل می‌توان برای آن ارائه داد. در نتیجه:

$$L \cap ab^* = \{ab^{۲^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

که $ab^{۲^n}$ منظم نمی‌باشد؛ پس به تناقض رسیده‌ایم. دلیل نامنظم بودن آن هم این است که در بخش ۱ همین سوال، شبیه آن را اثبات نمودیم که $b^{۲^n}$ نامنظم است. بنابراین رشته $ab^{۲^n}$ نمی‌تواند منظم باشد.

۶. پرسش امتیازی

پاسخ.

۱.

فرض کنید DFAای به نام M داریم که زبان منظم $L \subseteq \Pi^*$ را تشخیص می‌دهد. حال باید یک DFA دیگر طراحی کنیم تا $h^{-۱}(L)$ را تشخیص بدهد.

$$\begin{aligned} M &= (Q, \Pi, \delta, q_۰, F) \\ M' &= (Q', \Sigma, \delta', q'_۰, F') \end{aligned}$$

حال باید M' را طوری طراحی کنیم که پاسخگوی مسئله باشد. استیت‌های هر دو را یکسان در نظر می‌گیریم. $Q' = Q$.
استیت شروع و استیت های نهایی در ماشین M' دقیقا مشابه ماشین M خواهد بود. $F' = F$ و $q'_۰ = q_۰$.
برای δ'، این منطق را پیش می‌گیریم که به ازای استیت دلخواه s و ورودی t از الفبای این ماشین، به استیتی خواهیم رفت که ماشین M، با شروع از استیت s و مشاهده $h(t)$ به آن خواهد رفت.
بنابراین ماشین M' را تعریف کردیم. حال برای اثبات درستی آن داریم:
رشته $n = n_۱n_۲\dots n_k$ را در نظر بگیرید. ماشین M با دیدن $h(n_۱n_۲\dots n_k)$ به استیتی می‌رسد که ماشین M' با دیدن خود رشته n به آن می‌رسد. در این حال اگر M به استیت نهایی نرسد، یعنی $n \notin h^{-۱}(L)$. اما اگر به استیت نهایی برسد در نتیجه $h(n) \in L$ و $n \in h^{-۱}(L)$ خواهد بود. که M' نیز دقیقا کار درست و مورد انتظار را انجام می‌دهد.
در نتیجه درستی M' نیز اثبات شد.

۲.

الفبای Π و همریختی‌های $g,\ h,\ k$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Pi = \{x, \bar{x} \mid x \in \Sigma\}$$

$$g(a) = \begin{cases} x, & a = x \\ \epsilon, & a = \bar{x} \end{cases}$$

$$k(a) = \begin{cases} \epsilon, & a = x \\ x, & a = \bar{x} \end{cases}$$

$$h(a) = \begin{cases} x, & a = x \\ x, & a = \bar{x} \end{cases}$$

طبق تعریف، h یک همریختی بسیار خوب و دوتای دیگر، دو همریختی خوب هستند. حال داریم:

- $k^{-1}(B)$ شامل رشته‌هایی است که قرار دادن حروف با بار آنها، رشته‌ای در B می‌سازد.
- $g^{-1}(A)$ شامل رشته‌هایی است که کنار هم قرار دادن حروف بدون بار آنها، رشته‌ای در A می‌سازد.

بنابراین اشتراک این دو، شامل رشته‌هایی می‌شود که حروف بدون بار آن کنار هم رشته‌ای از A و حروف با بار آن رشته ای از B می‌سازند. بنابراین اشتراک این دو همان شافل است که روی حروف مربوط به B بار گذاشته شده است. همریختی h هم علامت بار را از روی حرف برمی‌دارد. درنتیجه داریم:

$$h(g^{-1}(A) \cap k^{-1}(B)) = \text{Shuffle}(A, B)$$

موفق باشید :)