



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها
بهار ۱۴۰۳



تمرین پنجم

پرسش نخست

گزاره‌های زیر را نشان دهید.

۱. $n^k \in o(n^r)$ برای هر $k < r$. ✓
(۳ نمره)
۲. $2^{O(\log n)} = n^{O(1)}$. ✓
(۳ نمره)
۳. $2^n \in o(3^n)$. ✓
(۴ نمره)

پرسش دوم

بگمایید که L یک زبان منظم است. آنگاه نشان دهید که $L \in DTIME(n)$. همچنین اگر L زبان مستقل از متن باشد، آنگاه $L \in DTIME(n^3)$ و $L \in NTIME(n)$ است. ✓

(۱۰ نمره)

پرسش سوم

دو تعریف زیر از رده NP را در نگر بگیرید و برابری آن دو را نشان دهید. (۱۰ نمره)

□ زبان L در رده NP است اگر یک رایانه تورینگ تشخیص‌دهنده غیر قطعی زمان چند جمله‌ای برای آن موجود باشد. ✓

□ زبان L در رده NP است اگر یک رابطه $R \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ به همراه یک چند جمله‌ای p موجود باشد که ✓

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^{p(n)} (x, y) \in R\}$$

پرسش چهارم

رایانه‌های تورینگ استاندارد رده‌ای از رایانه‌های تورینگ هستند که تنها یک نوار دارند و الفبا نوار آنها $\{0, 1, \Delta\}$ است. برای هر دسته از رایانه‌های تورینگ زیر یک تبدیل کارا^۱ به یک رایانه تورینگ استاندارد بیاورید. در واقع بایستی نشان دهید که برای هر رایانه با پیچیدگی محاسباتی $T(n)$ می‌توان یک رایانه تورینگ استاندارد با پیچیدگی محاسباتی $p(T(n))$ آورد.

۱. رایانه تورینگ تک نواره با الفبا نوار دلخواه Γ .

۲. رایانه تورینگ دو نواره با الفبا نوار $\{0, 1, \Delta\}$.

۳. رایانه تورینگ تک نواره با الفبا $\{0, 1, \Delta\}$ که دو سر^۲ دارد.

پرسش پنجم

برای مسئله‌های تصمیم‌گیری^۳ زیر یک زبان صوری بیاورید و سپس نشان دهید که در **NP-complete** هستند.

۱. آیا می‌توان راس‌های گراف G را با k رنگ رنگ کرد به گونه‌ای که هیچ دو راس همسایه هم‌رنگ نباشند. (۲ نمره)

۲. بگمارید که S_1, \dots, S_k مجموعه‌هایی متناهی هستند و $s = \cup S_i$. آیا یک زیرمجموعه $J \subset \{1, 2, \dots, k\}$ موجود است که به ازای هر $i, j \in J$ متمایز، $S_i \cap S_j = \emptyset$ و $\cup_{i \in J} S_i = S$ باشد. (۴ نمره)

۳. بگمارید که $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ زیرمجموعه‌ای از شماره‌های صحیح و M یک شماره صحیح باشد. آیا زیر مجموعه $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ موجود است که $\sum_{i \in J} a_i = M$ باشد. (۴ نمره)

پرسش امتیازی

نشان دهید که رده‌های **P** و **NP** زیر اجتماع، اشتراک، الحاق و عملگر ستاره بسته هستند.

^۱ حداکثر چند جمله‌ای

^۲ head

^۳ Decision problems