



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها
بهار ۱۴۰۳



تمرین نخست

پرسش نخست ✓

یک گزاره را همان‌گویی^۱ گوییم اگر همیشه درست باشد. نشان دهید گزاره‌های زیر همان‌گویی هستند.

(۳ نمره) (آ) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(۳ نمره) (ب) $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$

(۴ نمره) (ج) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s)$

پرسش دوم ✓

بگمارید که $L, K \subseteq \Sigma^*$ دو زبان هستند. آنگاه زبان‌های خارج‌قسمت چپ $K^{-1}L$ و خارج‌قسمت راست LK^{-1} را به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم. (۱۰ نمره)

$$K^{-1}L = \{x \in \Sigma^* \mid xy \in L \text{ for some } y \in K\}$$

$$LK^{-1} = \{x \in \Sigma^* \mid yx \in L \text{ for some } y \in K\}$$

نشان دهید که

$$K^{-1}L = (L^R(K^R)^{-1})^R$$

که در آن منظور از L^R زبانی است از که از وارون^۲ کردن رشته‌های L بدست می‌آید.

$$w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \implies w^R = w_n \dots w_1$$

$$L \subseteq \Sigma^* \implies L^R = \{w^R \mid w \in L\}$$

tautology^۱
reverse^۲

پرسش سوم ✓

۱. بگمارید که $A = \{0, 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150, 180, 210, 225, 240, 270, 300, 315, 330, 360\}$ رابطه‌ی R روی $A \times A$ به گونه‌ی زیر تعریف شده است.

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow \sin a \cos b = \sin c \cos d$$

(آ) بررسی کنید که آیا این رابطه هم‌ارزی هست و سپس برای ادعای خود برهان بیاورید. (۳ نمره)

(ب) رده هم‌ارزی $[(30, 60)]$ را بنویسید. (۲ نمره)

۲. نشان دهید که رابطه R روی مجموعه A پادتقارنی است اگر و فقط اگر $R \cap R^{-1}$ زیرمجموعه‌ای از رابطه قطری $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$ باشد. (۵ نمره)

پرسش چهارم ✓

زبان L روی الفبای $\{0, 1\}$ در نگر بگیرد به گونه‌ای که:

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ یک هامال}^3 \text{ است}\}$$

کدام یک از رشته‌های زیر عضو زبان هستند؟ ادعا خود را استدلال کنید.

(آ) ۰۱۰ (۲ نمره)

(ب) ۱۱۰۰۱۱ (۲ نمره)

(ج) ۱۱۱۱۱۱۱ (۲ نمره)

(د) ۱۰۱۰ (۲ نمره)

(ه) ۰۱۱۰ (۲ نمره)

پرسش پنجم ✓

نشان دهید زبان‌های زیر منظم هستند.

palindrome^۳

۱. $L = \{abwba : w \in \{a, b\}^*\}$ (۲ نمره)

۲. $L = \{w \in \{a, b\}^* : aba \leq_{\text{sub}} w \text{ }^{\text{۴}} \wedge bba \not\leq_{\text{sub}} w\}$ (۴ نمره)

۳. $L = \{w \in \{a, b\}^* : [n_a(w) \bmod 3] > [n_b(w) \bmod 2]\}$ (۴ نمره)

پرسش امتیازی

۱. نشان دهید که برای هر مجموعه شمارا نامتناهی $A \sim \mathbb{N}$ داریم که $A^n \sim A$ (۱ نمره)

۲. سپس نشان دهید که (۱ نمره)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n \sim A$$

۳. اکنون بگمارید که $A \sim \mathbb{R}$ است و سپس دو گزاره بالا را نشان دهید. (۳ نمره)

^۴ می‌گوییم که $x \leq_{\text{sub}} y$ است اگر دو رشته u, v باشند که $y = uxv$