دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

امیررضا آذری - ۹۹۱۰۱۰۸۷

پاسخ تمرین نخست

۱. **پرسش نخست**

یک گزاره را همان‌گویی گوییم اگر همیشه درست باشد. نشان دهید گزاره‌های زیر همان‌گویی هستند.

آ)

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

ب)

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r)$$

ج)

$$[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s)] \to (r \vee s)$$

پاسخ.

آ)

می‌دانیم:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

بنابراین داریم:

$$((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \to (\neg p \vee r)$$

مجددا:

$$((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg p \vee r)$$

مشاهده می‌شود میان تمامی عناصر، $\vee$ وجود دارد. بنابراین برای ساده‌سازی مسئله به شکل زیر عمل می‌نماییم:

$$[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p)] \vee [(q \wedge \neg r) \vee (r)] \equiv [(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee [(r \vee q) \wedge (r \vee \neg r)]$$

می‌دانیم $p \vee \neg p \equiv \text{True}$ و همچنین $q \equiv \text{True} \wedge q$. بنابراین داریم:

$$[(\neg p \vee \neg q)] \vee [(r \vee q)] \equiv (q \vee \neg q) \vee \neg p \vee r \equiv \text{True}$$

در نتیجه این گزاره، همان‌گویی می‌باشد.

ب)

مشابه بخش آ عمل می‌نماییم.

$$\begin{aligned} ((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r) &\equiv \neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \\ &\equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee (q \vee r) \end{aligned}$$

برای ساده‌سازی داریم:

$$\begin{aligned} &[q \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee [(p \wedge \neg r) \vee r] \\ \equiv &[(q \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)] \vee [(p \vee r) \wedge (\neg r \vee r)] \end{aligned}$$

می‌دانیم $p \vee \neg p \equiv \text{True}$ و همچنین $q \equiv q \wedge \text{True}$.

$$(q \vee \neg p) \vee (p \vee r) \equiv (p \vee \neg p) \vee q \vee r$$

می‌دانیم $\text{True} \vee q \equiv \text{True}$ که از آن در بخش قبل نیز استفاده کردیم. درنتیجه داریم:

$$(p \vee \neg p) \vee q \vee r \equiv \text{True} \vee q \vee r \equiv \text{True}$$

بنابراین این گزاره، همان‌گویی می‌باشد.

ج)

ابتدا عبارت را ساده‌تر می‌نماییم:

$$\begin{aligned} &[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s) \\ \equiv &[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee s)] \rightarrow (r \vee s) \\ \equiv &[(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg s)] \vee (r \vee s) \end{aligned}$$

میان تمامی عناصر $\vee$ وجود دارد. برای ساده‌سازی داریم:

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee [r \vee (p \wedge \neg r)] \vee [s \vee (q \wedge \neg s)]$$

حال به کمک روش‌های بخش قبل، همان‌گویی بودن این گزاره را اثبات می‌نماییم:

$$\begin{aligned} (\neg p \wedge \neg q) \vee [(r \vee p) \wedge (r \vee \neg r)] \vee [(s \vee q) \wedge (s \vee \neg s)] \\ \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \vee p) \vee (s \vee q) \end{aligned}$$

حال یک بار q و در ادامه p را با عبارت $(\neg p \wedge \neg q)$ ادغام می‌نماییم:

$$\begin{aligned} &[(\neg p \wedge \neg q) \vee q] \vee p \vee r \vee s \\ \equiv &[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)] \vee p \vee r \vee s \\ \equiv &(\neg p \vee q) \vee p \vee r \vee s \\ \equiv &(\neg p \vee p) \vee q \vee r \vee s \\ \equiv &\text{True} \vee q \vee r \vee s \equiv \text{True} \end{aligned}$$

۲. **پرسش دوم**

بگمارید که $L, K \subseteq \Sigma^*$ دو زبان هستند. آنگاه زبان‌های خارج قسمت چپ $K^{-1}L$ و خارج قسمت راست LK^{-1} را به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

$$K^{-1}L = \{x \in \Sigma^* | yx \in L \text{ for some } y \in K\}$$
$$LK^{-1} = \{x \in \Sigma^* | xy \in L \text{ for some } y \in K\}$$

نشان دهید که

$$K^{-1}L = (L^R(K^R)^{-1})^R$$

که در آن منظور از L^R زبانی است که از وارون کردن رشته‌های L بدست می‌آید.

$$w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \Longrightarrow w^R = w_n \dots w_1$$
$$L \subseteq \Sigma^* \Longrightarrow L^R = \{w^R |\ w \in L\}$$

پاسخ.

هر دو طرف را اثبات می‌نماییم.

بخش اول:

می‌دانیم:

$$x = x_1 \dots x_n$$
$$y = y_1 \dots y_n$$
$$x^R = x_n \dots x_1$$
$$y^R = y_n \dots y_1$$

فرض می‌کنیم که $x \in K^{-1}L$. حال در بخش اول کافی است اثبات نماییم: $x \in (L^R(K^R)^{-1})^R$. داریم:

$$if\ x \in K^{-1}L\ then\ yx \in L,\ y \in K$$
$$\longrightarrow (yx)^R \in L^R \Longrightarrow x^Ry^R \in L^R,\ \ y^R \in K^R$$

بنابراین طبق تعاریف داریم:

$$x^R \in L^R(K^R)^{-1}$$

از طرفی می‌دانیم که $(x^R)^R = x$، پس:

$$x \in (L^R(K^R)^{-1})^R$$

بنابراین سمت اول تساوی اثبات شد و طرف چپ زیرمجموعه طرف راست می‌باشد.

بخش دوم:

دقیقا برعکس بخش اول می‌توان عمل نمود. داریم:

$$if\ x \in (L^R(K^R)^{-۱})^R\ \ then\ \ x^R \in L^R(K^R)^{-۱}$$

طبق تعاریف y^Rای داریم که:

$$y^R \in K^R\ \ and\ \ x^Ry^R \in L^R$$
$$\longrightarrow (yx)^R \in L^R \longrightarrow yx \in L,\ \ y \in K$$

همان‌طور که مشخص می‌باشد طبق تعریف داریم:

$$x \in K^{-۱}L$$

بنابراین اثبات نمودیم هر دو زیرمجموعه دیگری و در نتیجه برابر می‌باشند.

۳. پرسش سوم

۱. بگمارید که A = {0, 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150, 180, 210, 225, 240, 270, 300, 315, 330, 360} رابطه‌ی R روی $A \times A$ به گونه‌ی زیر تعریف شده است.

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow \sin a \cos b = \sin c \cos d$$

(آ) بررسی کنید که آیا این رابطه هم‌ارزی هست و سپس برای ادعای خود برهان بیاورید.

(ب) رده هم‌ارزی $[(۳۰,۶۰)]$ را بنویسید.

۲. نشان دهید که رابطه R روی مجموعه A پادتقارنی است اگر و فقط اگر $R \cap R^{-۱}$ زیرمجموعه‌ای از رابطه قطری $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$ باشد.

پاسخ.

۱. (آ) رابطه R، یک رابطه هم‌ارزی[۱] می‌باشد. می‌دانیم رابطه R زمانی یک رابطه هم‌ارزی است که شروط زیر را داشته باشد:

- R is reflexive:
$$\forall\ x \in A,\quad xRx.$$
- R is symmetric:
$$\forall\ x,y \in A,\quad xRy\ \rightarrow\ yRx.$$
- R is transitive:
$$\forall\ x,y,z \in A,\quad xRy \text{ and } yRz\ \rightarrow xRz.$$

[۱] equivalence relation

حال قبل از اینکه به رابطه R بپردازیم، یک موضوع بدیهی را شرح می‌دهیم. می‌دانیم رابطه تساوی [۲] ، یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد.

1. (Reflexivity) $x = x$,
2. (Symmetry) $x = y \rightarrow y = x$,
3. (Transitivity) $x = y$ and $y = z \rightarrow x = z$.

اکنون به سراغ رابطه R می‌رویم:

- ویژگی اول:

$$\forall\ a, b \in A,$$
$$(a, b)R(a, b) \Leftrightarrow \sin a \cos b = \sin a \cos b$$

طبق اینکه رابطه تساوی، ویژگی $reflexivity$ را داراست، بنابراین $(a, b)R(a, b)$ درست می‌باشد و R ویژگی $reflexivity$ را دارا است.

- ویژگی دوم:

می‌دانیم اگر $(a, b)R(c, d)$، یعنی $\sin a \cos b = \sin c \cos d$. پس طبق ویژگی $symmetry$ برای رابطه تساوی، نتیجه می‌گیریم که $\sin c \cos d = \sin a \cos b$. که همان $(c, d)R(a, b)$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$(a, b)R(c, d) \rightarrow (c, d)R(a, b)$$

- ویژگی سوم:

در نظر بگیرید:

$$\forall\ a, b, c, d, e, f \in A, \quad (a, b)R(c, d) \ \text{ and } \ (c, d)R(e, f)$$
$$\Longrightarrow \sin a \cos b = \sin c \cos d$$
$$\Longrightarrow \sin c \cos d = \sin e \cos f$$
$$\xrightarrow{transitivity\ of\ "="} \sin a \cos b = \sin e \cos f \rightarrow (a, b)R(e, f)$$

به روش دیگری نیز می‌توانیم این ویژگی را اثبات نماییم:

$$\sin a \cos b = \sin c \cos d \qquad (۱)$$

$$\sin c \cos d = \sin e \cos f \qquad (۲)$$

حال با ضرب کردن ۱ در ۲ داریم:

[۲] is equal to or =

$$\sin a \cos b \ \sin c \cos d = \sin c \cos d \ \sin e \cos f$$

اگر مقدار $\sin c \cos d$ صفر باشد، که تمامی عبارت‌ها صفر هستند و برابری ثابت می‌شود. در غیر این‌صورت با تقسیم دو طرف معادله بر $\sin c \cos d$ داریم:

$$\sin a \cos b = \sin e \cos f$$

بنابراین رابطه R ویژگی سوم را نیز دارا می‌باشد.

در نتیجه این رابطه، یک رابطه هم‌ارزی است.

(ب) رده هم‌ارزی یا همان کلاس هم‌ارزی a تحت رابطه R، برابر تمام bهایی است که:

$$aRb$$

بنابراین در این سوال باید a و bهایی را بیابیم که:

$$(۳۰, ۶۰)R(a,b) \Leftrightarrow \sin(۳۰)\cos(۶۰) = \sin a \cos b$$
$$\longrightarrow \sin a \cos b = \tfrac{۱}{۴}$$

با توجه به A داریم:

$$\sin(۳۰)\cos(۶۰) = \left\{\begin{array}{ll} \sin(۳۳۰) & \cos(۲۴۰) \\ \sin(۳۳۰) & \cos(۱۲۰) \\ \sin(۲۱۰) & \cos(۲۴۰) \\ \sin(۲۱۰) & \cos(۱۲۰) \\ \sin(۱۵۰) & \cos(۳۰۰) \\ \sin(۱۵۰) & \cos(۶۰) \\ \sin(۳۰) & \cos(۳۰۰) \\ \sin(۳۰) & \cos(۶۰) \end{array}\right\} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین رده هم‌ارزی $[(۳۰, ۶۰)]$ برابر است با:

$$\{(۳۰,۶۰),(۳۰,۳۰۰),(۱۵۰,۶۰),(۱۵۰,۳۰۰),(۲۱۰,۱۲۰),(۲۱۰,۲۴۰),(۳۳۰,۱۲۰),(۳۳۰,۲۴۰)\}$$

۲. ابتدا دو تعریف را یادآوری می‌نماییم:

- The inverse relationship of R is denoted by R^{-1}

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \ \in A\}$$

- R is anti-symmetric:

$$\forall \ x,y \ \in A, \quad xRy \text{ and } yRx \ \rightarrow \ x = y.$$

حال به شروع اثبات می‌پردازیم:

۱. طرف اول:

فرض کنید R پادتقارنی است. اگر $R \cap R^{-1}$ تهی یا $\varnothing$ باشد، که زیرمجموعه Δ می‌باشد و اثبات می‌شود. (زیرا $\varnothing$ زیرمجموعه تمامی setها می‌باشد.) حال فرض کنید $R \cap R^{-1}$ تهی نمی‌باشد و داریم:

$$(a, b) \ \in \ R \cap R^{-1} \longrightarrow (a, b) \in R \text{ and } (a, b) \in R^{-1}$$

به کمک تعریفی که از R^{-1} داریم:

$$(a, b) \in R^{-1} \longrightarrow (b, a) \in R$$

$$\Longrightarrow (a, b) \in R, \ \ (b, a) \in R \ \xrightarrow{\text{R is anti-symmetric}} \ a = b$$

در نتیجه اعضایی که در $R \cap R^{-1}$ هستند، به فرم (a, a) می‌باشند و از آنجا که $(a, a) \ \in \ \Delta$، نتیجه می‌شود:

$$R \cap R^{-1} \ \subseteq \ \Delta$$

۲. طرف دوم:

فرض کنید $\Delta \ \subseteq \ R \cap R^{-1}$. حال درنظر بگیرید $(a, b) \in R$ و $(b, a) \in R$. با توجه به تعریف R^{-1} داریم:

$$(a, b) \in R^{-1}$$
$$(b, a) \in R^{-1}$$

یک عضو در اشتراک دو مجموعه قرار دارد اگر عضو هر دو مجموعه باشد، بنابراین:

$$(a, b) \in R \cap R^{-1}$$
$$(b, a) \in R \cap R^{-1}$$
$$\xrightarrow{R \cap R^{-1} \in \Delta} \ (a, b) \in \Delta, \ \ (b, a) \in \Delta$$

حال طبق تعریف Δ داریم:

$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\} \ \rightarrow \ a = b$$

در نتیجه نشان دادیم که anti-symmetric می‌باشد.

بنابراین به خواسته سوال رسیدیم و نشان دادیم که R پادتقارنی است اگر وتنها اگر $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$ باشد. راه دیگر برای این سوال را در تصویر زیر مشاهده می‌فرمایید:

Proof: Assume that R is antisymmetric, but $R \cap R^{-1} \not\subseteq \Delta$. Then there are elements $a, b \in A$ with $a \neq b$ such that $(a, b) \in R \cap R^{-1}$. Thus, $(a, b) \in R$, and $(a, b) \in R^{-1}$. The latter implies that $(b, a) \in R$ by the definition of R^{-1}. But then we have $(a, b) \in R$, and $(b, a) \in R$, with $a \neq b$, contradicting that R is antisymmetric. Thus, $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$.
Now assume that $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$, but R is not antisymmetric. Then there are elements $a, b \in A$ with $a \neq b$ such that $(a, b) \in R$ and $(b, a) \in R$. Then $(a, b) \in R^{-1}$ (since $(b, a) \in R$), so that $(a, b) \in R \cap R^{-1}$. Since $a \neq b$, this contradicts that $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$. Thus, R is antisymmetric.

۴. پرسش چهارم

زبان L روی الفبای $\{۰, ۱\}$ در نگر بگیرید به گونه‌ای که:

$$L = \{w \in \{۰, ۱\}^* \mid \text{طول } w \text{ توانی از دو است و } w \text{ یک هامال است}\}$$

کدام یک از رشته‌های زیر عضو زبان هستند؟ ادعای خود را استدلال کنید.

(آ) ۰۱۰
(ب) ۱۱۰۰۱۱
(ج) ۱۱۱۱۱۱۱۱
(د) ۱۰۱۰
(ه) ۰۱۱۰

پاسخ.

(آ)
۱. طول رشته ۳ می‌باشد و توانی از ۲ نیست.
۲. این رشته یک هامال می‌باشد.
بنابراین عضو زبان نیست. ✗

(ب)
۱. طول رشته ۶ می‌باشد و توانی از ۲ نیست.
۲. این رشته یک هامال می‌باشد.
بنابراین عضو زبان نیست. ✗

(ج)
۱. طول رشته ۸ می‌باشد و توانی از ۲ می‌باشد.
۲. این رشته یک هامال می‌باشد.
بنابراین عضو زبان هست. ✓

(د)
۱. طول رشته ۴ می‌باشد و توانی از ۲ می‌باشد.
۲. این رشته یک هامال نیست زیرا تقارن ندارد.
بنابراین عضو زبان نیست. ✗

(ه)
۱. طول رشته ۴ می‌باشد و توانی از ۲ می‌باشد.

۲. این رشته یک هامال می‌باشد.
بنابراین عضو زبان هست. ✓

۵. **پرسش پنجم**

نشان دهید زبان‌های زیر منظم هستند.

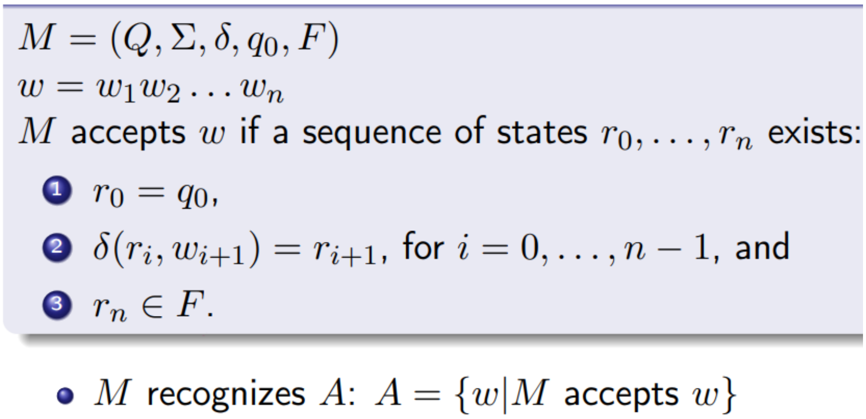
۱. $L = \{abwba : w \in \{a,b\}^*\}$.

۲. $L = \{w \in \{a,b\}^* : aba \leq_{sub} w \wedge bba \nleq_{sub} w\}$.

۳. $L = \{w \in \{a,b\}^* : [n_a(w) \ \ mod \ \ ۳] > [n_b(w) \ \ mod \ \ ۲]\}$.

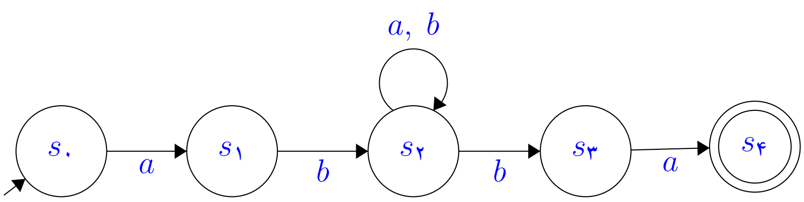
پاسخ.

برای اینکه نشان بدهیم زبانی منظم است باید نشان دهیم که finite automation ای وجود دارد که زبان را تشخیص [۳] می‌دهد. همچنین به طور کلی برای DFAها می‌دانیم:



شکل ۱: DFA

۱. برای این زبان NFA زیر را رسم می‌نماییم:



زبان L، زبانی است که رشته‌هایی را می‌پذیرد که حتما با ab شروع بشوند و حتما با ba خاتمه بیابند. به همین دلیل در NFA رسم شده، ابتدا و به ترتیب با مشاهده کردن حروف a و b به استیت $s_۲$ می‌رسیم. بعد از آن از خواص NFA کمک می‌گیریم. می‌توانیم با دیدن هر حروف از الفبای زبان، به خود $s_۲$ برگردیم و یا اگر به طور متوالی ba را دیدیم و رشته به پایان رسید، آن را $accept$ نماییم. حال به تعریف

[۳]recognize

کامل NFA خود می‌پردازیم:

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_۰, F)$$

$$\begin{cases} Q & = \{s_۰, s_۱, s_۲, s_۳, s_۴\} \\ \Sigma & = \{a, b\} \\ \delta & = \begin{array}{c|c|c} & a & b \\ \hline s_۰ & \{s_۱\} & \varnothing \\ s_۱ & \varnothing & \{s_۲\} \\ s_۲ & \{s_۲\} & \{s_۲, s_۳\} \\ s_۳ & \{s_۴\} & \varnothing \\ s_۴ & \varnothing & \varnothing \end{array} \\ q_۰ & = s_۰ \\ F & = \{s_۴\} \end{cases}$$

حال ثابت می‌نماییم که این ماشین زبان گفته شده را تشخیص می‌دهد. برای یک NFA می‌دانیم:

Consider $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
$w \in L(N)$, if:

1. It is possible to write $w = y_1 y_2 \dots y_m$ where $y_i \in \Sigma_\varepsilon$,
2. There is a sequence of states $r_1, \dots, r_m$ with following conditions:
    1. $r_0 = q_0$,
    2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$, for $i = 0, \dots, m-1$, and
    3. $r_m \in F$.

شکل ۲: NFA

حال به کمک استقرا، ماشین رسم شده و به روش زیر، اثبات را تکمیل می‌نماییم:

۱. پایه استقرا:

اگر $w = \epsilon$، آنگاه رشته ایجاد شده $abba$ می‌باشد که ماشین N آن را تشخیص می‌دهد. داریم:

$$s_۰ \xrightarrow{a} s_۱ \xrightarrow{b} s_۲ \xrightarrow{b} s_۳ \xrightarrow{a} s_۴$$

در نتیجه تشخیص داده می‌شود.

۲. گام استقرا:

فرض می‌کنیم که این ماشین، رشته ایجاد شده توسط زیررشته به طول k را تشخیص می‌دهد. درواقع فرض می‌کنیم $w = r_۱ r_۲ \dots r_k$. داریم:

$$l_1 = abr_1r_2\dots r_kba$$
$$\Longrightarrow s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{r_1} s_2 \ \dots \ \xrightarrow{r_k} s_2 \xrightarrow{b} s_3 \xrightarrow{a} s_4$$

حال کافی است نشان دهیم که به ازای $w = r_1r_2\dots r_kr_{k+1}$ نیز رشته ایجاد شده را تشخیص می‌دهیم. داریم:

$$\delta(s_2, a) = s_2, \quad \delta(s_2, b) = s_2, s_3$$

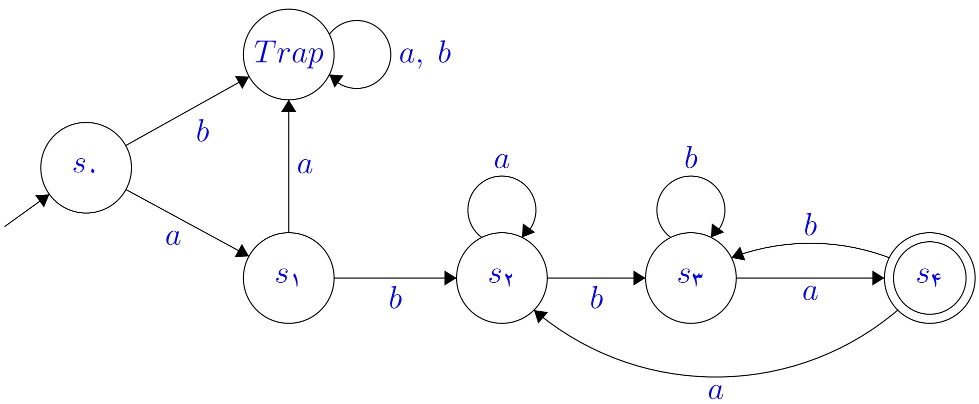
بنابراین با دریافت هر حرفی، می‌توانیم در s_2 بمانیم. بنابراین با دریافت r_{k+1} داریم:

$$l_2 = abr_1r_2\dots r_kba$$
$$\Longrightarrow s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{r_1} s_2 \ \dots \ \xrightarrow{r_k} s_2 \xrightarrow{r_{k+1}} s_2 \xrightarrow{b} s_3 \xrightarrow{a} s_4$$

در نتیجه این رشته را نیز تشخیص می‌دهد و نشان دادیم که ماشین N این این زبان را تشخیص می‌دهد و:

$$L(N) = L \longrightarrow \text{L is regular.}$$

* نکته: می‌دانیم هر NFA یک DFA معادل دارد. همین‌که نشان دادیم زبان داده شده یک ماشین NFA دارد برای منظم بودن آن کافی است اما برای کار اضافه‌تر نشان می‌دهیم یک DFA معادل نیز دارد و آن را از تبدیل NFA رسم شده به DFA به‌دست می‌آوریم. DFA معادل به شکل زیر می‌باشد:



دقیقا همان مراحل استقرا را برای اثبات می‌توان برای این ماشین طی کرد.

۱. پایه استقرا:

اگر $w = \epsilon$، آنگاه رشته ایجاد شده $abba$ می‌باشد که ماشین DFA آن را تشخیص می‌دهد. داریم:

$$s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{b} s_3 \xrightarrow{a} s_4$$

در نتیجه تشخیص داده می‌شود.

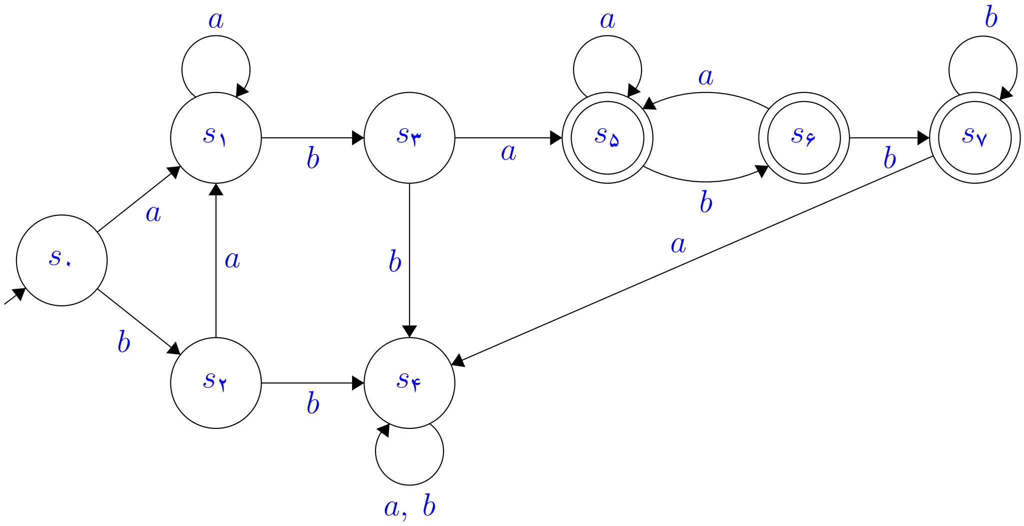
۲. گام استقرا:

فرض می‌کنیم که این ماشین، رشته ایجاد شده توسط زیررشته به طول k را تشخیص می‌دهد. درواقع

فرض می‌کنیم $w = r_۱ r_۲ \ldots r_k$. تفاوت DFA و NFA در اینجا مشخص می‌شود که هنگامی که به استیت $s_۲$ می‌رسیم، مانند NFA با هر ورودی‌ای در همان استیت نمی‌مانیم. اگر a دریافت کنیم در همان استیت می‌مانیم. به محض دیدن اولین b به استیت $s_۳$ خواهیم رفت. حال اگر b ببینیم در همان استیت می‌مانیم اما اگر a را ببینیم به استیت نهایی خواهیم رفت. حال اگر رشته تمام شده باشد که تشخیص داده‌ایم. در غیر این صورت اگر a ببینیم به استیت $s_۲$ و اگر b ببینیم به استیت $s_۳$ باز می‌گردیم و همان مراحل را طی می‌کنیم. بنابراین اگر رشته $l_۱ = abr_۱r_۲ \ldots r_k ba$ تشخیص داده شود، هنگام دیدن رشته r_k یا به استیت $s_۲$ می‌رویم یا در استیت $s_۳$ خواهیم بود.

حال اگر یک حرف $r_{k+۱}$ اضافه بشود، طبق گفته‌های قبلی، ماشین رسم شده همچنان رشته را تشخیص می‌دهد. (به دلیل اینکه مراحل را به طور جزئی‌تر برای NFA نشان دادیم، در این بخش از توضیح اضافه خودداری می‌نماییم.)

۲. برای این زبان DFA زیر را رسم می‌نماییم:



اگر بخواهیم توضیحی کلی برای DFA رسم شده بدهیم، این‌گونه عمل می‌کند که در هر حالتی، اگر رشته aba را مشاهده نکرده باشد اما حداقل دو b متوالی ببیند، به استیت $s_۴$ خواهد رفت و هیچ‌گاه $accept$ نخواهد شد. زیرا یا bba را خواهد داشت و یا aba را نخواهد دید. اما اگر به استیت $s_۵$ برسیم، یعنی قطعا aba را مشاهده کرده‌ایم. حال باید حالاتی که bba را بعد از آن داریم حذف نماییم که اگر به استیت $s_۷$ برسیم یعنی قطعا دو b را دیده‌ایم. اگر دیگر a نبینیم، باز در حالت درستی هستیم اما اگر a را ببینیم، پاسخ باید $reject$ بشود زیرا bba مشاهده شده است. حال به تعریف کامل DFA خود می‌پردازیم:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_۰, F)$$

$$\begin{cases} Q & = \{s_۰, s_۱, s_۲, s_۳, s_۴, s_۵, s_۶, s_۷\} \\ \Sigma & = \{a, b\} \\ \delta & = \begin{array}{c|c|c} & a & b \\ \hline s_۰ & s_۱ & s_۲ \\ s_۱ & s_۱ & s_۳ \\ s_۲ & s_۱ & s_۴ \\ s_۳ & s_۵ & s_۴ \\ s_۴ & s_۴ & s_۴ \\ s_۵ & s_۵ & s_۶ \\ s_۶ & s_۵ & s_۷ \\ s_۷ & s_۴ & s_۷ \end{array} \\ q_۰ & = s_۰ \\ F & = \{s_۵, s_۶, s_۷\} \end{cases}$$

حال برای اثبات اینکه این ماشین زبان داده شده را تشخیص می‌دهد به کمک استقرا و شکل ۱ داریم:

۱. پایه استقرا:

اگر $w = aba$، آنگاه رشته ایجاد شده aba می‌باشد که ماشین M آن را تشخیص می‌دهد. داریم:

$$s_۰ \xrightarrow{a} s_۱ \xrightarrow{b} s_۳ \xrightarrow{a} s_۵$$

در نتیجه تشخیص داده می‌شود.

۲. گام استقرا:

فرض می‌کنیم که این ماشین، رشته ایجاد شده توسط زیررشته به طول k را تشخیص می‌دهد. درواقع فرض می‌کنیم $w = r_۱r_۲aba\ldots r_{k-۲}$. داریم:

$$w = r_۱r_۲aba\ldots r_{k-۳}$$

$$r_{k-۳} \in \{s_۵, s_۶, s_۷\}$$

حال باید برای $w = r_۱r_۲aba\ldots r_{k-۳}r_{k-۲}$ اثبات نماییم که M آن را تشخیص خواهد داد. همانطور که اشاره کردیم $r_{k-۳}$ در یکی از استیت‌های $s_۵$ یا $s_۶$ یا $s_۷$ حضور دارد. همچنین می‌دانیم $r_i \in \{a, b\}$. بنابراین ۳ حالت پیش خواهد آمد:

- $r_{k-۳} \in s_۵$: در این حالت با ورودی گرفتن a یا b یا در $s_۵$ خواهیم ماند و یا به $s_۶$ خواهیم رفت که در هر دو حالت در استیت نهایی هستیم پس رشته تشخیص داده می‌شود. دلیل منطقی آن هم این است که ما تنها هنگامی در استیت $s_۵$ هستیم که آخرین کاراکتر حتما a بوده باشد. بنابراین چه با دریافت a و چه با دریافت b، زیررشته bba به وجود نخواهد آمد و همچنان رشته تشخیص داده می‌شود.

- $r_{k-۳} \in s_۶$: در این حالت با ورودی گرفتن a یا b یا به $s_۵$ خواهیم رفت و یا به $s_۷$ خواهیم رفت که در هر دو حالت در استیت نهایی هستیم پس رشته تشخیص داده می‌شود. دلیل منطقی آن هم این است که ما هنگامی در $s_۶$ هستیم که دو کاراکتر آخر ab باشند:

$$r_{k-۴} = a, \quad r_{k-۳} = b$$

حال با دریافت هر کدام از a و یا b زیررشته bba تولید نمی‌شود؛ پس رشته مورد نظر همچنان تشخیص داده می‌شود.

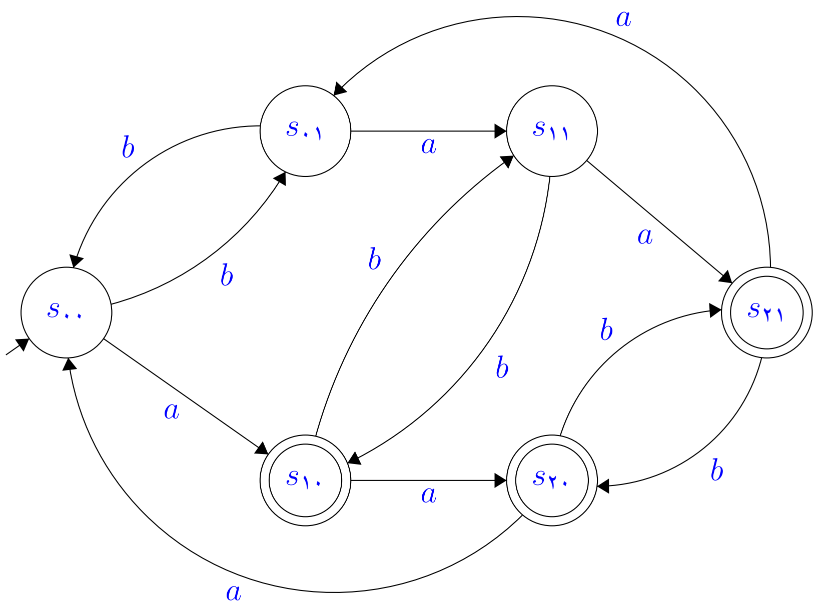
- $r_{k-۳} \in s_۷$: ما هنگامی در این استیت خواهیم بود که دو کاراکتر اخر حتما b باشند:

$$r_{k-۴} = b, \quad r_{k-۳} = b$$

در این حالت طبیعتا با دیدن b مشکلی پیش نخواهد آمد و در همان استیت $s_۷$ خواهیم ماند و رشته‌ای که قبلا تشخیص داده شده بود، اکنون نیز تشخیص داده می‌شود. اما اگر a ببینیم، قطعا زیررشته bba به وجود آمده است و ما به استیت $s_۴$ که نهایی نیست می‌رویم و مطابق انتظار رشته تشخیص داده نمی‌شود.

بنابراین تمامی شروط مورد نیاز را نشان دادیم که اجرا می‌شود و با استقرا ثابت کردیم که این ماشین رشته‌های این زبان را تشخیص می‌دهد و زبان منظم است. توجه بفرمایید در هر دو بخش این پرسش و در بخش بعد، $s.$ استیت شروع است. ترنزیشن‌ها یا همان δ برای هر ماشین نشان داده شده است و همچنین استیت‌های نهایی را نیز مشخص نموده‌ایم. پس شروط نشان‌داده شده در شکل‌های ۱ و۲ ارضا شده‌اند.

۳. برای این زبان، DFA زیر را رسم می‌کنیم:



این ماشین باید رشته‌هایی را تشخیص بدهد که باقی‌مانده تعداد دفعات دیده شدن a بر ۳ از باقی‌مانده تعداد دفعات دیده شدن b بر ۲ ، بیشتر باشد. می‌دانیم باقی‌مانده بر ۳، ۳ حالت دارد و باقی‌مانده بر ۲ نیز ۲ حالت دارد. در شماره گذاری استیت‌های این DFA از s_{mn} استفاده نمودیم که به این معناست که در آن استیت، باقی‌مانده تعداد a بر ۳ برابر با m و باقی‌مانده تعداد b بر ۲ برابر با n می‌باشد.
بنابراین در این حالت استیت‌هایی که در آن‌ها $m > n$ می‌باشد، استیت‌های نهایی هستند.

در هر استیت هم با دیدن a به استیت $s_{((m+۱)\%۳)n}$ می‌رویم و اگر b ببینیم به استیت $s_{m((n+۱)\%۲)}$ خواهیم رفت. حال به تعریف کامل DFA خود می‌پردازیم:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_۰, F)$$

$$\begin{cases} Q & = \{s_{۰۰}, s_{۰۱}, s_{۱۰}, s_{۱۱}, s_{۲۰}, s_{۲۱}\} \\ \Sigma & = \{a, b\} \\ \delta & = \begin{array}{c|c|c} & a & b \\ \hline s_{۰۰} & s_{۱۰} & s_{۰۱} \\ s_{۰۱} & s_{۱۱} & s_{۰۰} \\ s_{۱۰} & s_{۲۰} & s_{۱۱} \\ s_{۱۱} & s_{۲۱} & s_{۱۰} \\ s_{۲۰} & s_{۰۰} & s_{۲۱} \\ s_{۲۱} & s_{۰۱} & s_{۲۰} \end{array} \\ q_۰ & = s_{۰۰} \\ F & = \{s_{۱۰}, s_{۲۰}, s_{۲۱}\} \end{cases}$$

حال برای اثبات اینکه این ماشین زبان داده شده را تشخیص می‌دهد به کمک استقرا و شکل ۱ داریم:
(برای راحتی در نظر بگیرید: $n_a(w) \ \% \ ۳ = c, \quad n_b(w) \ \% \ ۲ = d$)

۱. پایه استقرا:

اگر $w = a$، آنگاه رشته ایجاد شده a می‌باشد که ماشین M آن را تشخیص می‌دهد. داریم:

$$s_{۰۰} \xrightarrow{a} s_{۱۰}$$

در نتیجه تشخیص داده می‌شود. برای aba نیز می‌توانیم نشان دهیم:

$$s_{۰۰} \xrightarrow{a} s_{۱۰} \xrightarrow{b} s_{۱۱} \xrightarrow{a} s_{۲۱}$$

۲. گام استقرا:

فرض می‌کنیم که این ماشین، رشته ایجاد شده توسط زیررشته به طول k را تشخیص می‌دهد. درواقع فرض می‌کنیم $w = r_۱ r_۲ \dots r_k$. داریم:

$$w = r_۱ r_۲ \dots r_k$$
$$r_k \in \{s_{۱۰}, s_{۲۰}, s_{۲۱}\}$$

بنابراین برای $w = r_۱ r_۲ \dots r_k r_{k+۱}$ ۳ حالت وجود دارد:

- $r_k \in s_{۱۰}$: ما هنگامی در این استیت قرار داریم و کارمان به پایان می‌رسد که:

$$c = ۱, \quad d = ۰$$

حال اگر $r_{k+1} = a$، آنگاه همچنان شرط خواسته شده سوال پابرجاست و به استیت s_{20} می‌رویم که آن هم یک استیت نهایی می‌باشد. اما اگر $r_{k+1} = b$، در آن صورت $c = b$ پس نباید رشته تشخیص داده بشود که ما نیز در این حالت به استیت s_{11} می‌رویم که نهایی نیست.

- $r_k \in s_{20}$: ما هنگامی در این استیت قرار داریم و کارمان به پایان می‌رسد که:

$$c = 2, \quad d = 0$$

حال اگر $r_{k+1} = a$، آنگاه $c = 0$ و رشته نباید تشخیص داده بشود که ماشین نیز به درستی به استیت s_{00} که نهایی نیست می‌رود. اما اگر $r_{k+1} = b$، آنگاه $d = 1$ و همچنان $c > d$، بنابراین رشته باید تشخیص داده بشود که ماشین نیز به استیت s_{21} که نهایی است می‌رود.

- $r_k \in s_{21}$: ما هنگامی در این استیت قرار داریم و کارمان به پایان می‌رسد که:

$$c = 2, \quad d = 1$$

حال اگر $r_{k+1} = a$، آنگاه $c = 0$ و رشته نباید تشخیص داده بشود که ماشین نیز به درستی به استیت s_{01} که نهایی نیست می‌رود. اما اگر $r_{k+1} = b$، آنگاه $d = 0$ و همچنان $c > d$، بنابراین رشته باید تشخیص داده بشود که ماشین نیز به استیت s_{20} که نهایی است می‌رود.

بنابراین نشان دادیم که ماشین رسم شده زبان خواسته شده را تشخیص می‌دهد و زبان، منظم می‌باشد. باز هم تاکید می‌نماییم که تمامی شروط ذکر شده در شکل ۱ برآورده شده است و در این بخش نیز استیت s_{00} استیت آغازین می‌باشد.

۶. پرسش امتیازی

۱. نشان دهید که برای هر مجموعه شمارا نامتناهی $A \sim \mathbb{N}$ داریم که $A^n \sim A$.

۲. سپس نشان دهید که

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n \sim A$$

۳. اکنون بگمارید که $A \sim \mathbb{R}$ است و سپس دو گزاره بالا را نشان دهید.

پاسخ.

۱و۲. هردو بخش اول این سوال را با هم حل می‌نماییم. ابتدا نشان می‌دهیم اگر هر مجموعه‌ای از A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ شمارا و نامتناهی باشند، آنگاه $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز شماراست. داریم:

For each $i \in \mathbb{N}$, choose a bijection $\phi_i : \mathbb{N} \longrightarrow A_i$, i.e. an ordering of the elements of A_i.

داریم:

$$a_{ij} = \phi_i(j) \to a_{ij} \text{ is the j-th element of } A_i$$

جدول زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\
2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\
3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\
4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots \\
5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

به صورت زیگ‌ـزاگی داریم:

$$a_{۱۱}, a_{۲۱}, a_{۱۲}, a_{۳۱}, a_{۲۲}, a_{۱۳}, \ldots$$

بدین شکل یک bijection داریم که:

$$\phi : A \to \mathbb{N}$$
$$\longrightarrow a_{۱۱} \mapsto ۱,\ a_{۲۱} \mapsto ۲,\ \ldots$$

پس نتیجه می‌گیریم که این ست شمارا می‌باشد.

حال در نظر بگیرید دو ست شمارا و نامتناهی A و T را داشته باشیم. می‌خواهیم اثبات کنیم که $A \times T$ نیز شمارا می‌باشد.

$$(a, t) \in A \times T, \quad a \in A,\ t \in T$$

اگر تمامی عناصر T را به شکل زیر لیست کنیم (چون می‌دانیم شمارا می‌باشد)،

$$t_۱, t_۲, t_۳, \ldots$$

آنگاه تمامی زیرمجموعه‌هایی در $A \times T$ که شامل زوج (a, t_i) را A_i بنامیم، آنگاه A_i شمارا خواهد بود از آنجا که یک bijection داریم:

$$A \longrightarrow A_i \text{ maps that } a \mapsto (a, t_i)$$
$$A \times T = \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$$

که به کمک بخش قبل ثابت می‌شود $A \times T$ شمارا می‌باشد.

حالا در نظر بگیرید در همین بخش داشته باشیم $A = T$. در نتیجه طبق بخش قبل می‌دانیم $A \times A = A^۲$ شماراست. حال در نظر بگیرید $T = A^۲$. بنابراین $A \times A \times A = A^۳$ شماراست. در نتیجه با استقرا

روی n نتیجه می‌گیریم که A^n نیز شمارا می‌باشد. بنابراین طبق بخش اول، $\cup_{n=۱}^{\infty} A^n$ هم باید شمارا باشد.
در نتیجه هر دو خواسته بخش ۱ و ۲ را اثبات نمودیم.

$$
\begin{aligned}
A^n &\sim A \\
\bigcup_{n=۱}^{\infty} A^n &\sim A
\end{aligned}
$$

۳. این بخش را به طور مفصل توضیح می‌دهیم. چند نکته را ذکر می‌نماییم و به اثبات کوتاه آن‌ها می‌پردازیم.

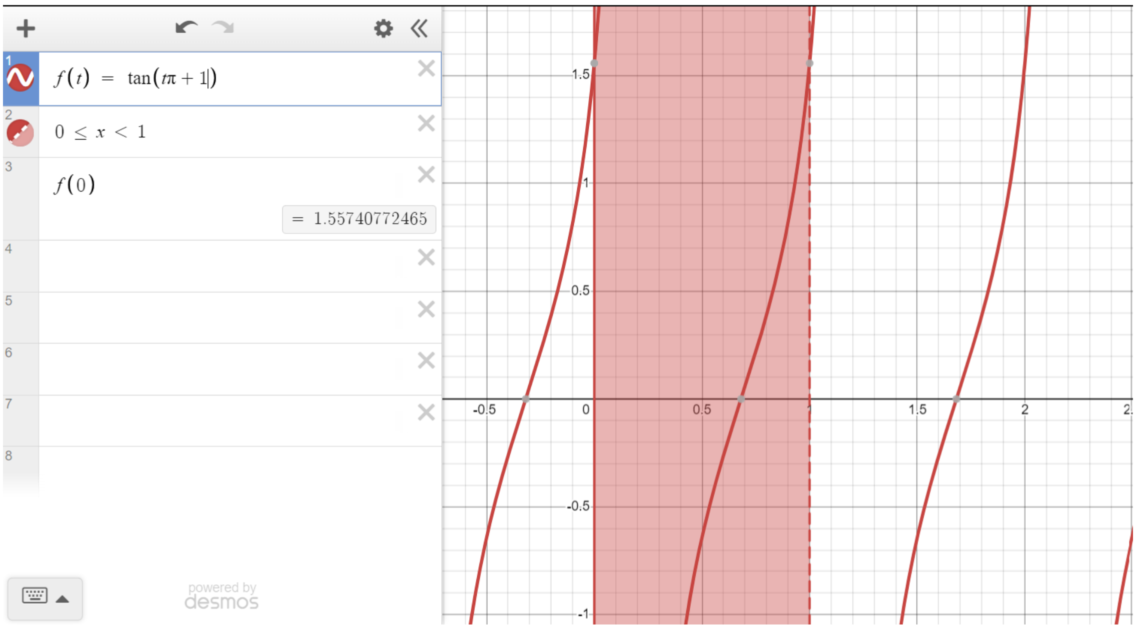
- برای اثبات و جزئیات بیشتر آن می‌توانید به اینجا مراجعه کنید.

Theorem 1 (Cantor-Schröder-Bernstein). *If $f : A \to B$ and $g : B \to A$ are both injections, then $A \sim B$.*

- داریم:

$$S = [۰, ۱) \Longrightarrow \mathbb{R} \sim S$$

برای مثال تابع $\tan(x\pi + ۱)$ ورودی آن بازه S و خروجی آن R می‌باشد و تناظر یک به یکی ایجاد می‌کند.



- داریم:

$$R \sim R^+, \quad R \sim R^-$$

توابع $log(x)$ و $log(-x)$ برای اثبات این بخش به کار می‌روند.

- داریم:

$$S = [۰, ۱) \Longrightarrow S^۲ \sim S$$

برای اثبات و جزئیات بیشتر آن می‌توانید به اینجا مراجعه کنید.

حال از نکات بالا استفاده می‌نماییم. داریم:

$$\begin{aligned} S = [0,1) &\sim \mathbb{R} \\ A &\sim \mathbb{R} \\ \xrightarrow{second\ hint} A &\sim S \\ \xrightarrow{S^2 \sim S} A^2 &\sim S \\ &\vdots \quad induction \\ A^n &\sim S \\ \xrightarrow{second\ hint} A^n &\sim R \\ \xrightarrow{Cantor-Schroder-Bernstein} A^n &\sim A \end{aligned}$$

بنابراین بخش اول اثبات شد. برای بخش دوم داریم:

$$\begin{aligned} A &\sim \mathbb{R} \\ A^n &\sim \mathbb{R} \\ S_1 = [0,1) \quad &, \quad S_2 = [1,2) \ \ldots \\ A^n \sim S_n \quad &, \quad A^{n-1} \sim S_{n-1}, \ldots \\ \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n &\sim \mathbb{R}^+ \\ \xrightarrow{\mathbb{R}^+ \sim \mathbb{R}} \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n &\sim \mathbb{R} \end{aligned}$$

و در نهایت به کمک Cantor-Schroder-Bernstein ثابت می‌شود که:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n \sim A$$

برای اثبات این بخش، از لینک‌های زیر کمک گرفته شده است و اثبات‌های بیشتر و دقیق‌تر برای نکته‌های بیان شده، در آن‌ها آمده است.

- لینک اول
- لینک دوم
- لینک سوم
- لینک چهارم
- لینک پنجم

موفق باشید :)