根系的分拆

黄瀚贤[1]

指导教师：张贺春教授

摘　要

根系是欧几里得空间中满足某些公理的有限集， 在李群、李代数与代数群理论中起着非常重要的作用。对根系深入研究可以使我们对代数学诸领域有更深入的认识。

用外尔群作为基本工具，我们研究了把根系中的正根和全根系分拆成两个加法封闭集合的必要和充分条件， 给出了这两种二分拆的完全分类。

关键词：根系；外尔群；加法封闭；分拆

背景和现状

在数学中，根系是欧几里得空间中满足某些公理的有限集， 在李群、李代数与代数群理论中起着非常重要的作用。对于根系的研究是李群、李代数与代数群理论中重要研究课题；而在研究根系分类时所发展出的主要工具——邓肯图，也见诸奇异性理论等与李群并无显著关系的学科。至今根系仍然是李群和李代数的工作者重要的研究对象。

由李代数的根分解，可知道中心以外的子空间对李代数的运算满足加法封闭性（详见[1]）。因此如果能把根系拆成一些集合的并，从而满足加法封闭性，就可以同样的分解李代数空间，使得括号运算在该集合内为封闭。

本文所关心的问题是根系被分拆成两个集合的情况下，在什么条件下两个集合均为加法封闭？[2]内给出一部分答案。正根系一个加法封闭的 2-分拆，即正根系被分拆成两个不交的加法封闭集，则这些集合有一个固定的形式，而且这种形式与二分集的关系一一对应。由此产生了进一步的问题：能不能由此结论，或者另辟方法，研究全根系的二分拆的表达形式？

[1]基数 52

根系——定义和简介

在我们开始我们的讨论以前，我们先介绍一下一些名词和符号。

定义 1（*根系*）

根系 R 是欧几里得 n 维空间 E 中的一个子集，满足公理：

A. *R 有限，张成 E，不包含 0。*

B. *若$\alpha \in \Phi$，则$k\alpha \in R$当且仅当$k = \pm 1$，即只有$\pm\alpha$ 属于 R。*

C. *若$\alpha \in \Phi$，反射σ_α维持 Φ 不变*

D. *如果α，$\beta \in \Phi$，则$2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbf{Z}$。*

$2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$是 β 沿垂直于 α 的超平面（记为$P_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{\beta \in E|(\beta,\alpha) = 0\}$）反射所出现的系数，即

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)\alpha}{\alpha,\alpha}$$

为方便起见，我们记

$$<\beta，\alpha >= 2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$$

在一个基（下面将定义）下，一个根被称为正根，如果它在基的线性和中的系数全非负。所有的正根组成**正根系**集。而所有系数非正的根（负根）组成的集合为**负根系**。

定义 2（*基*）*根系的一个子集 Π 称为基，如果：*

A. *Π 是 E 的一组基*

B. *根系的每一个根 β 可以记为基的整线性和*

$$\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} \mathrm{k}_\alpha \alpha，\alpha \in \Pi，k_\alpha \in \boldsymbol{Z}，$$

且所有k_α*全为非负或全为非正。*

属于基的根被称为单根。因为根系的基也是相应欧氏空间的基。每个根系都有基（且不唯一），证明可参考 [1]。

在一个基下，每一个根 β 可以定义其**高度**：对于$\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} \mathrm{k}_\alpha \alpha$，$\alpha \in \Pi$，$k_\alpha \in \boldsymbol{Z}$，

$$\mathrm{ht}\beta = \sum_{\alpha\in\Pi} \mathrm{k}_\alpha$$

有了基以后我们可以定义

定义 3（*反射和外尔群*）*一个**反射**是欧几里得空间的一个可逆线性映射，固定一个超平面，并把一个向量* α *映成它的负向量。文中将把这些反射记为*σ_α*。因为对于*$\alpha \in R$*，根系 R 对反射*σ_α*不变。因此所有*σ_α，$\alpha \in \Pi$*生成欧氏空间线性变换的一个子集，这个子集称为（对应于根系 R 的）**外尔群**。*

外尔群是由反射生成的，自然就是保距变换，也即

$$< \beta, \alpha > = < \omega(\beta), \omega(\alpha) >$$

外尔群的每个元素 ω 都是由σ_α，$\alpha \in \Pi$生成的，因此可以表达为单根反射$\omega = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_n}$的乘积。取元素个数最少的表示，其个数 n 定义为 ω 的**长度**。换句话说，长度$\mathrm{l(w)} = \mathrm{n}$，若 $\omega = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_n}$，且对于$\mathrm{k} < n$，不存在$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_\mathrm{k}$，使$\omega = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_k}$。

以下三个定义跟本文的研究密切相关，也在此表述。

定义 4（*支撑集*）*对于每一个根* β*，定义支撑*

$$supp\beta = \{\alpha \in \Pi | \beta = \sum_{\alpha\in\Pi} k_\alpha \alpha，\ k_\alpha \neq 0\}$$

是基的一个子集。

明显的，

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{supp}\,\beta} \mathrm{k}_\alpha \alpha = \sum_{\alpha\in\Pi} \mathrm{k}_\alpha \alpha = \beta$$

且

$$\mathrm{k}_\alpha = 0，\alpha \,\overline{\in}\, \mathrm{supp}\beta$$

定义 5 *（加法封闭）根系 R 中的一个子集 S 称为**加法封闭**的，当*

$$\alpha，\beta \in S，\alpha + \beta \in R \Rightarrow \alpha + \beta \in S$$

本文以后把加法封闭称为**封闭**。

定义 6（子根系）对于基 Π 的一个子集 S，记

$$\mathrm{R}(S) = < S > \cap \mathrm{R}$$

为 S 所生成的子根系。

注 R(S)对于$< S >$，一个欧氏子空间，是其上的一个根系。从邓肯图的角度来看，R(S)的邓肯图就是由原邓肯图中去掉不在 S 中的点的邓肯图。

为以后方便起见，本文中定义**分拆**为：把一个集合分解成两个加法封闭的集合的并，而且两个集不交，符号$\dot\cup$除了表示并以外，表示其前后两个集合不交。

我们以下叙述一些根系中比较显然或者广为人知的定理。

命题 1 *对于*$\omega \in W, S_1$*闭*$\Leftrightarrow \omega(S_1)$*闭*

命题 2 *如果*$S \in R$*是闭的，则*$S \cap R^+$*和*$S \cap R^-$*均为闭的。*

这是因为，R^+和R^-都是闭的。

命题 3 *如果*

$$\alpha, \beta \in R, (\alpha, \beta) < 0$$

则$\alpha + \beta \in R$

命题 4 *外尔群忠实地作用在基上。换句话说，*

$$\omega(\Pi) = \Pi \Leftrightarrow \omega = 1$$

命题 5 *对于*$\alpha \in \Pi$*，*

$$\sigma_\alpha(R^+) = R^+ - \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}$$

即σ_α反射 α，且对其他正根进行排列。

根系的二分拆

正根系的二分拆

正如引言所说，这个问题的结论已经由[2]给出。但是由于研究目的的不同，在此提供一个比较简单的证明。在此以前我们先定义

定义 7 *对于外尔群的元素 ω，定义*

$$N(\omega) = \{\alpha \in R^+ | \omega(\alpha) \in R^-\}$$

即被 ω 映到负根的正根的集合。

容易观察到$N(\omega)$是一个闭集，因为

$$\omega(\alpha) + \omega(\beta) = \omega(\alpha + \beta)$$

一个比较常见和常用的结果是，$N(\omega)$的元素个数，正是 ω 的长度。

命题 6 $\#N(\omega) = l(\omega)$

推论 *外尔群 W 内最长的元素把正根系映为负根系，即*

$$\omega(R^+) = R^-\text{，}\omega\text{为外尔群内最长元素。}$$

考虑到外尔群忠实地作用在基上（命题 4），因为$-\Pi$也是一组基，因此必有元素 ω，使$\omega(\Pi) = -\Pi$。所以$\omega(R^+) = -R^+ = R^-$。由命题该元素必为最长元素。

[2]给出了下面定理的一个等价形式，但其证明较为复杂。下面我们提供一个比较简洁的证明。

定理 1 *对于*R^+*的一个闭的分拆，即*

$$R^+ = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset，$$

存在一个外尔群的元素ω*，使得*

$$S_1 = N(\omega), \qquad S_2 = N(\omega_0\omega)$$

其中ω_0*是外尔群内最长的元素。*

*证明：*首先，如果$S_1 = N(\omega)$，则由命题 6 的推论，

$$S_2 = R^+ - S_1 = \{\alpha \in R^+ | \omega(\alpha) \in R^+\} = \{\alpha \in R^+ | \omega_0\omega(\alpha) \in R^-\} = N(\omega_0\omega)$$

所以我们只需要证明定理的第一段。

如果$S_1 = \emptyset$，则$S_1 = N(1)$

剔除了上述情形，我们断言，

$$S_1 \cap \Pi \neq \emptyset$$

如果不然，则S_2包含 Π，由S_2闭知$S_2 = R^+ \Rightarrow S_1 = \emptyset$，与断言条件矛盾。

由此，我们用对于S_1中的元素个数（S_1是有限的）进行数学归纳法：

如果S_1有一个元素，则它必然是一个单根 α，则

$$S_1 = N(\sigma_\alpha)$$

定理在S_1有一个根时正确。

如果定理在S_1有 n 个根时正确，在$\#S_1 = n + 1$时，存在一个单根，仍记为α，则

$$\sigma_\alpha(S_1) \cap R^+ = \sigma_\alpha(S_1 - \{\alpha\}) = S_1{}'$$

是一个闭集。注意到$S_1{}'$有 n 个元素。

现在考虑$R^+ - S_1{}' = S_2{}'$，往证$S_2{}'$是一个闭集。

首先把S_2'显性表出：

$$S_2' = R^+ - S_1' = R^+ - \sigma_\alpha(S_1 - \{\alpha\})$$

以σ_α作用于上式，可得

$$\sigma_\alpha S_2' = \sigma_\alpha(R^+ - S_1') = \sigma_\alpha R^+ - (S_1 - \{\alpha\})$$
$$= R^+ - \{\alpha\} \cup \{-\alpha\} - (S_1 - \{\alpha\}) = R^+ - S_1 \cup \{-\alpha\} = S_2 \cup \{-\alpha\}$$

只要证明上述集合为闭的，即可完成S_2'闭的证明。

由S_2是闭的，我们只需证，对于$\beta \in S_2$，$-\alpha + \beta \in S_2$。如果$-\alpha + \beta \notin S_2$，则$-\alpha + \beta \in R \Rightarrow -\alpha + \beta \in S_1$，如此则有$\alpha + (-\alpha + \beta) = \beta \in S_1$，与原条件矛盾。

因此，S_1'，S_2'是正根系的一个闭分拆而且$\#S_1' = n$，由题设可知$S_1' = N(\omega)$。因此$(S_1) = \sigma_\alpha S_1' + \{\alpha\} = N(\sigma_\alpha \omega)$。从而完成了证明。 ■

由$N(\omega)$的闭性可知以上的关系是等价的。

这个定理也明显的给出正根系内闭分拆的个数：

推论 *正根系内闭分拆的个数，是外尔群元素个数的一半减一。*

证明： 明显的，如果$N(\omega_1) = N(\omega_2)$则$\omega_1 = \omega_2$。因此不同外尔群元素生成的集合各不相同。考虑一个分拆需要两个不同的元素（定理中为ω 和$\omega_0\omega$），可知共有 n/2 个分拆方法，而其中一对是由ω_0和 1生成的全正根集和空集．去掉该对组合即为推论。 ■

完成正根系分拆以后，自然希望能用上述结果，或者其它方法能完成全根系的分拆。在下一节，我们用另一个方法去讨论全根系的分拆。

全根系的二分拆

我们首先证明两个简单的命题：

命题 6 *$R^+ - R(A)$是闭的。*

*证明：*对于$\alpha, \beta \in R^+ - R(A)$，存在 γ 使得$\gamma \in R(A), \gamma \in supp\alpha$，因为 α，β 均为正根，所以$\gamma \in supp(\alpha+\beta)$，可得$\alpha+\beta \in R(A)$。由于所讨论的均为正根，结论明显。 ■

命题 7 *一个根β 的支撑集不能被分解成两个相互垂直的集合的并，即*

$$supp\beta = A_1 \dot\cup A_2, A_1 \text{垂直于} A_2 \Rightarrow A_1 = \emptyset \text{ 或} A_2 = \emptyset$$

*证明：*如果可以的话，则因垂直，$R(supp\beta)=R(A_1 \cup A_2)=R(A_1) \cup R(A_2)$且最后一个等号右端的两者不交。因此$\beta \in R(A_1)$或者 $\beta \in R(A_2)$。然而这意味着 β 垂直于A_2 或者A_1。明显地这与 β 本身的设定矛盾。 ■

现在我们研究互为正负的两个根$\pm\alpha$。

引理 1 *如果有一个全根系 R 的分拆:$R = S_1 \dot\cup S_2$，而且$\pm\alpha \in S_1$，$\pm\beta \in S_2$，则α 垂直于β，即$(\alpha,\beta) = 0$*

证明:（反证）如果 $(\alpha,\beta) \neq 0$，不妨设$(\alpha,\beta) < 0$，则$\alpha+\beta \in R$，所以$\alpha+\beta \in S_1$或者$\alpha+\beta \in S_2$。如果$\alpha+\beta \in S_1$，则由S_1闭可得$(\alpha+\beta)+(-\alpha)=\beta \in S_1$；如果$\alpha+\beta \in S_2$，则由$S_2$闭可得$(\alpha+\beta)+(-\beta)=\alpha \in S_2$。均与题设矛盾。 ■

推论　如果有一个全根系 R 的分拆：$R = S_1 \dot\cup S_2$，而且

$$R(A) \in S_1,\ R(B) \in S_2$$

则 R(A)垂直于 R(B)。

引理 2 *对于$\beta \in R^+$，$\beta = \sum k_\alpha \alpha$，$\sum k_\alpha = n$，$\gamma \in supp\beta$，存在一个序列（根列）$\{\beta_i\}_{i=1。。n}$满足*

1. $\beta_i \in R^+$，
2. $\beta_i - \beta_{i-1} \triangleq \gamma_i \in \Pi$，$i = 2,3,\dots,n$，
3. $\beta_1 \triangleq \gamma_1 = \gamma$。

*证明：*此引理的第一、第二个条件只是根的分解：对于每个根 β，$ht\beta = n$，必存在一个单根 α，使$(\beta, \alpha) > 0$[2]。因此$\beta - \alpha \in R^{+}$是一个根，且 $ht(\beta - \alpha) = n - 1$，由根的高度归纳法即得首两个条件。

我们继而用对根的高度的归纳法证明第三个条件：

当$ht(\alpha) = 1$时，结论显然，因为$supp\beta = \{\alpha\}$。

假设对根高为 $n - 1, n \geq 2$ 成立，则对于根β，$ht(\beta) = n$，必存在单根α使 $\beta - \alpha \in R^{+}$，$ht(\beta - \alpha) = n - 1$。如果$\gamma_1 = \gamma \neq \alpha$，则$\gamma \in \beta - \alpha$，由归纳法可证。如果$\gamma = \alpha$，且$\gamma$在$\beta$中的系数大于 1，则$\gamma \in supp\beta$命题仍成立。最后只剩下 $\gamma = \alpha$，且γ在β中的系数等于 1，则对于$\beta - \alpha$我们按引理建立序列$\{\beta_i\}_{i=1}^{n-1}$。由于$\gamma \overline{\in} supp(\beta - \alpha)$，且$(\gamma, \beta_i) \leq 0$，故$\gamma + \beta_i$为根。故建立新序列

$\overline{\beta_1} = \gamma, \overline{\beta_{i+1}} = \gamma + \beta_i$即可满足要求。 ■

我们现在表述主要的分拆定理。

定理 2 *如果有一个全根系 R 的分拆：$R = S_1 \dot{\cup} S_2$，则存在外尔群的元素ω，使*

$$\omega(S_1) = R^{+} - R(A) \cup R(B)$$
$$\omega(S_2) = R^{-} - R(B) \cup R(A)$$

其中A，$B \in \Pi$，且 A 垂直于 B。

证明： 我们选择一个 ω，使得$\omega(S_1) \cap R^{+}$的元素个数达到最大。对于这样的 ω，我们建立如下引理

引理 3 *如果一个单根α属于$\omega(S_2)$，则$-\alpha$也属于$\omega(S_2)$。*

证明： 如果一个单根，α，属于$\omega(S_2)$而$-\alpha$属于$\omega(S_1)$，则$\sigma_\alpha\omega$是外尔群的一个元素，并且

---

[2] 否则，$\{\alpha\} \cup \Pi$是一个基，是不可能的。详见[1]

$$\sigma_\alpha \omega(S_1) \cap R^+ = \omega(S_1) \cap R^+ + \{\alpha\}$$

与 ω 的假设矛盾。 ■

在此以后的证明，我们把$\omega(S_1)$和$\omega(S_2)$直接写成S_1和S_2。例如上述引理 3 变为

$$\alpha \in S_2 \Rightarrow -\alpha \in S_2$$

现在，我们考虑$\beta = S_2 \cap R^+$，即S_2内的正根。我们将证明，suppβ 包含于S_2。

由引理 2，对于这个根，记为 β_n，有一个根列$\{\beta_i\}$，根列中的元素有

$$\beta_i = \beta_{i-1} + \gamma_i, \gamma_i \in \Pi, i = 1..n$$

（补充定义$\beta_0 = 0$）将用归纳法证明$\beta_i \in S_2$。

显然$\beta n \in S_2$。如果$\beta_i \in S_2$，则必有$\beta_{i-1} \in S_2$或者$\gamma_i \in S_2$，如果$\beta_{i-1} \in S_2$，则归纳条件已达成，否则$\gamma_i \in S_2$。但由引理 3，$-\gamma_i \in S_2$，也就由$\beta_i + (-\gamma_i) = \beta_{i-1}$知$\beta_{i-1} \in S_2$。所以归纳可得$\beta_i \in S_2$，$i = 1 \dots n$，特别$\beta_1 \in S_2$。

因为根列中的第一个元素能取遍 suppβ，因此 suppβ 包含于S_2。

取遍$S_2 \cap R^+$中所有的根，可知$\bigcup_{\beta \in S_2 \cap R^+} \operatorname{supp} \beta$包含于$S_2$，记$\bigcup_{\beta \in S_2 \cap R^+} \operatorname{supp} \beta = A$，再由引理 3，以及$S_2$的闭性，知 R(A)包含于$S_2$。且显然没有 R(A)以外的正根包含于$S_2$。总结以上结论，可知$R^+ - R(A)$包含于$S_1$，R(A)包含于$S_2$。

回顾我们所定的那个外尔群元素 ω，该元素使S_1包含于正根的根个数最大化，因此也把S_2包含于负根的根个数最大化。重复上述的证明，可知存在一集合$B \in \Pi$，使$R^- - R(B)$包含于S_2，R(B)包含于S_1。综合这两个结果，即可得定理结论，而 A，B 之间的关系则明显可由引理 1 的推论给出。 ■

由这个结论，我们希望，这样形式的集合都是加法封闭的。以下定理就是说明这点，从而完成等价关系的证明。

定理 3 *如下的集合*

$$R^{+} - R(A) \cup R(B)\text{，}A\text{垂直于}B$$

是闭的。

证明：　由引理，已知$\mathrm{R}^{+} - \mathrm{R(A)}$和$\mathrm{R(B)}$是封闭的。因此只需证明，如果$\alpha \in \mathrm{R}^{+} - \mathrm{R(A)}$，$\beta \in \mathrm{R(B)}^{-}$，则

$$\alpha + \beta \in \mathrm{R}^{+} \Rightarrow \alpha + \beta \overline{\in} \mathrm{R(A)}\text{，和}$$

$$\alpha + \beta \in \mathrm{R}^{-} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathrm{R(B)}^{-}\text{。}$$

对于第一个，如果$\alpha + \beta \in \mathrm{R(A)}$，则$(\alpha + \beta) + (-\beta) = \alpha$，$\mathrm{supp}\alpha = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$，与命题 7 矛盾。

对于第二个，$\alpha + \beta \in \mathrm{R}^{-}$推出 $\mathrm{supp}\beta$ 包含 $\mathrm{supp}\alpha$，因此$\alpha \in \mathrm{R(B)}$，所以$\alpha + \beta \in \mathrm{R(B)}$。

也就完成了证明。 ■

参考文献

[1] James E. Humpreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Second printing, revised. New York, Springer. 1972.

[2] Papi Paolo, A characterization of a special ordering in a root system. *Proceedings of the A.M.S.*, 120, 661-665, 1994.