测度论中的若干覆盖定理

喻伟

§1　测度的预备知识

§1.1　一般集合上的测度

称$(X,\mathcal{A},\mu)$是一个可测空间，μ是X上的一个测度，如果：

1) μ的定义域$\mathcal{A}$是一个σ-代数。

2) $\mu \geq 0$在$\mathcal{A}$上成立。

3) μ具有可数可加性。

4) $\mu(E) < \infty$对于某个$E \in \mathcal{A}$成立。

§1.2　R^N上的Borel测度

称R^N上的测度μ为$Borel$测度，如果它的定义域（即上面的σ代数$\mathcal{A}$)包含了R^N上的$Borel$集，从而$Lebesgue$测度和计数测度都是$Borel$测度。[1]。

§1.3　R^N上的Radon测度

如果一个$Borel$测度在R^N的紧集上的测度是有限的，那么称这个测度为Radon测度。

显然，$Lebesgue$测度是$Radon$测度，而计数测度不是。

§1.4　由已知测度诱导的外测度

设μ是R^N上的测度，对任意的$E \subset R^N$，定义：

$$\mu_e(E) = inf\{\mu(O)|E \subset O,\ O\text{是}R^N\text{中的开集}\}.$$

不难验证，这样定义的外测度具有单调性和次可加性。

[1]与$\mathbb{R}$中的情况类似，R^N中的$Borel$集合指包含R^N中所有开集的最小σ代数。

§2 I型Vitali覆盖

§2.1 覆盖的定义

设$E \subset R^N$可测且测度有限[2]，$\mathcal{F}$是R^N中的一些方体组成的集族，每个方体的边界都是平行于坐标轴的。如果$\mathcal{F}$中方体的并包含了集合E，那么我们称集族$\mathcal{F}$是集合E的I型$Vitali$覆盖。值得注意的是，组成$\mathcal{F}$ 的方体并不要求是开的或者闭的。

§2.2 I型Vitali覆盖定理

设集合$E \subset R^N$的测度有限，$\mathcal{F}$是E的I型Vitali覆盖，那么，我们可以从$\mathcal{F}$中选出两两不交的可列个方体$\{Q_n\}$，使得$\frac{\mu(E)}{5^N} \le \sum \mu(Q_n)$。

证明 记$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$，令：$2p_1 = sup\{l(Q)|Q \in \mathcal{F}_1\}$[3] 如果$p_1 = \infty$，那么就可以找到边长足够大的方体$Q$，使得$\mu(Q) \ge \frac{\mu(E)}{5^N}$，工作到此结束；如果$p_1 < \infty$，从$\mathcal{F}_1$中选出方体$Q_1$，使得其边长$l_1 > p_1$，同时把$\mathcal{F}_1$分成两个集合：

$$\mathcal{F}_2 = \{Q \in \mathcal{F}_1 | Q \bigcap Q_1 = \phi\};\ \mathcal{F}_2^{'} = \{Q \in \mathcal{F}_1 | Q \bigcap Q_1 \neq \phi\}.$$

记$Q_1^{'}$是与Q_1同心，边长为$5l_1$的方体，从而，由这个构造可知：$\bigcup\{Q|Q \in \mathcal{F}_2^{'}\} \subset Q_1^{'}$。如果$\mathcal{F}_2$是空集，那么$E \subset Q_1^{'}$，并且$\frac{\mu(E)}{5^N} \le \mu Q_1^{'}$。

如果$\mathcal{F}_2$不是空集，令：$2p_2 = sup\{l(Q)|Q \in \mathcal{F}_2\}$。从$\mathcal{F}_2$中选出方体$Q_2$，使得其边长$l_2 > p_2$，同时可以将$\mathcal{F}_2$分成两个集族$\mathcal{F}_3$和$\mathcal{F}_3^{'}$。归纳的选择下去，我们得到：

$$\mathcal{F}_n = \{Q \in \mathcal{F}_{n-1} | Q \bigcap Q_{n-1} = \phi\},$$

以及

$$2p_n = sup\{l(Q)|Q \in \mathcal{F}_n\},$$

其中Q_n是从$\mathcal{F}_n$中选出的边长$l_n > p_n$的方体，$Q_n^{'}$是与Q_n同心且边长为$5l_n$的方体。

如果$\mathcal{F}_{n+1}$对于某个$n \in \mathbb{N}$是空集，那么$E \subset \bigcup_{i=1}^n Q_i^{'}$，并且$\frac{\mu(E)}{5^N} \le \sum_{j=1}^n \mu(Q_j)$。

如果对于任意的$n \in \mathbb{N}$，都有$\mathcal{F}_n$不空，那么考虑级数$\sum \mu(Q_n)$，如果它发散，命题显然成立；如果它收敛，那么必有$p_n \to 0, n \to \infty$。在这种情形下，可以断言，每个$Q \in \mathcal{F}$属于某个Q_n,（否则它将属于每一个$\mathcal{F}_n$，从而导致其边长为0），故有$E \subset \bigcup Q_n^{'}$，并且$\mu(E) \le \sum \mu(Q_n^{'}) = 5^N \sum \mu(Q_n)$。

[2]这里的测度指Lebesgue测度

[3]$l(Q)$指方体的边长

§2.3 推论

在定理条件被满足的情况下，对任意的$\varepsilon > 0$，可以找到$\mathcal{F}$中两两不交的有限个方体$\{Q_i, 1 \le i \le m\}$，使得

$$\frac{\mu(E)}{5^N} - \varepsilon \le \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j).$$

§3 II型*Vitali*覆盖

§3.1 覆盖的定义

称R^N中的非平凡闭方体集族$\mathcal{F}$是集合$E \subset R^N$的II型*Vitali*覆盖，如果对于任意的$x \in E$和任意的$\varepsilon > 0$，都存在一个方体$Q \in \mathcal{F}$，使得$x \in Q$并且$D(Q) < \varepsilon$，其中$D(Q)$表示方体Q的直径。

§3.2 II型*Vitali*覆盖定理

设E是R^N中的有界集合，$\mathcal{F}$是它的II型*Vitali*覆盖，那么存在$\mathcal{F}$中的可列多个方体$\{Q_n\}$，它们两两不内交（即至多边界相交），并且$\mu^*(E - \bigcup Q_n) = 0$，其中$\mu^*$为*Lebesgue*外测度。

思路 与课堂上证明R上的*Vitali*覆盖定理的想法一致，我们先从覆盖$\mathcal{F}$中有条件的（即对方体的直径作出限制）找出可列个$\{Q_n\}$，再利用直径的关系用反证法证明$\{Q_n\}$满足我们的要求。

证明 不失一般性，设定集合E和集族$\mathcal{F}$中的方体都被包含于一个大的方体W中。

令$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$，从$\mathcal{F}_0$中取出一个方体$Q_0$。如果$Q_0$已经覆盖了$E$，那么我们的工作结束。否则，定义集族：

$$\mathcal{F}_1 = \{Q \in \mathcal{F}_0 | Q\text{和}Q_0\text{不内交}\}.$$

如果Q_0没有覆盖E，那么$\mathcal{F}_1$不空，令$d_1 = sup\{D(Q) | Q \in \mathcal{F}_1\}$。从$\mathcal{F}_1$中选取直径大于$\frac{1}{2}d_1$的方体$Q_1$，如果$Q_0 \bigcup Q_1$覆盖了$E$，那么命题成立；否则定义

$$\mathcal{F}_2 = \{Q \in \mathcal{F}_1 | Q\text{和}Q_1\text{不内交}\},\ d_2 = \sup\{D(Q) | Q \in \mathcal{F}_2\}.$$

归纳的选择下去，得到

$$\mathcal{F}_n = \{Q \in \mathcal{F}_{n-1} | Q\text{ 与 }Q_{n-1}\text{不内交}\},\ \text{以及 } d_n = \sup\{D(Q) | Q \in \mathcal{F}_n\}.$$

其中Q_n是从$\mathcal{F}_n$中选出的直径大于$\frac{1}{2}d_n$ 的方体。这些Q_n两两不内交，并且它们都被包含在大方体W中，从而

$$\sum(\frac{D(Q_n)}{\sqrt{N}})^N = \sum \mu(Q_n) < \infty,$$

级数的收敛说明$\lim_{n\to\infty} D(Q_n) = 0$。

下面用反证法说明命题是成立的。

设存在$\varepsilon > 0$，使得$\mu(E - \bigcup Q_n) \le 2\varepsilon$。对于每个$Q_n$，我们构造同心方体$Q_n^{*}$，使得

$$D(Q_n^{*}) = (4\sqrt{N} + 1)D(Q_n).$$

由级数的收敛性可知存在$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$使得

$$\mu(\bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n^{*}) \le \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} \mu(Q_n^{*}) \le \varepsilon,$$

从而

$$\mu((E - \bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon} - \bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n^{*}) \ge \mu(E - \bigcup Q_n) - \mu(\bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n^{*}) \ge \varepsilon.$$

这说明存在元素$x \in (E - \bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n) - \bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n^{*}$。从而$x$不属于前$n_\varepsilon$个方体的并，而后者是有界闭集合，从而存在包含$x$的方体$Q_\delta$，它和前$n_\varepsilon$个方体都不相交，从而它是$\mathcal{F}_{n_\varepsilon+1}$中的一个方体。但同时由于$\lim_{n\to\infty} D(Q_n) = 0$，方体$Q_\delta$必定和某个$Q_n, n > n_\varepsilon$内交。令$m$是最小的整数，使得$Q_\delta$和$Q_m$内交。从而

$$Q_\delta \in \mathcal{F}_m,\ \ \delta \le d_m,$$

但Q_δ不属于$\mathcal{F}_{m+1}$，同时x不属于Q_m^{*}，因此

$$\delta = D(Q_\delta) > \frac{D(Q_m^{*}) - D(Q_m)}{2\sqrt{(N)}},$$

即$d_m \ge \delta > d_m$，得出矛盾。

§3.3 推论

当定理的条件被满足时，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在有限个方体$\mathcal{F}_\varepsilon = \{Q_1, Q_2 \ldots Q_{n_\varepsilon}\}$，其中$Q_i \in \mathcal{F}$，它们两两不内交，并且

$$\sum \mu(Q_n) - \varepsilon \le \mu(E) \le \mu(\bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon}(E \bigcap Q_n)) + \varepsilon.$$

§4 I型Besicovtch覆盖

§4.1 覆盖的定义

设$E \subset R^N$，$\mathcal{F}$是由R^N中非平凡闭球组成的集族。称$\mathcal{F}$ 是E的一个I型$Besicovtch$ 覆盖，如果对于任意的$x \in E$，都存在以x为球心的闭球$B(x)$属于集族$\mathcal{F}$.

§4.2 I型Besicovtch覆盖定理

§4.2.1 定理陈述

$E \subset R^N$是一个有界集合，$\mathcal{F}$是E的一个I型$Besicovtch$覆盖。则存在可列个点$\{x_n\}$和$\mathcal{F}$中对应的可列个闭球$\{B_n\}$，使得$E \subset \bigcup B_n$ 其中$B_n = B_{p_n}(x_n)$是中心在x_n 半径为p_n 的闭球.进一步的，存在一个与E和$\mathcal{F}$无关、只和维数N有关的正整数c_N，使得我们可以把$\{B_n\}$ 分成c_N组：

$$\mathfrak{B}_1 = \{B_{n_1}\},\ \mathfrak{B}_2 = \{B_{n_2}\},\ \ldots\ldots \mathfrak{B}_{c_N} = \{B_{n_{c_N}}\},$$

其中每组中的闭球都不相交。

§4.2.2 证明提要

定理第一部分的证明相对而言是比较简单的，证明的想法和前面证明I、II型$Vitali$覆盖定理的想法一致，对半径有限制的选出可列个闭球，再证明这个选择的正确性。定理后一部分的证明是不平凡的，为此先是引入了一个更强的结论，这个结论的成立保证了定理后一部分的成立，而在证明这结论时，分解出两个重要的引理，而这两个引理的得证使得一切水到渠成。

§4.2.3 前一部分的证明

不失一般性，我们设E和$\mathcal{F}$中的闭球都被包含在一个足够大的闭球B_0中。设

$$E_1 = E,\ \mathcal{F}_1 = \{B(x) \in \mathcal{F} | x \in E_1\},\ \ r_1 = sup\{r(B) | B \in \mathcal{F}_1\}.$$

选择$x_1 \in E_1$，$B_1 = B_{p_1}(x_1)$，使得$p_1 > \frac{3}{4} r_1$。归纳的选择下去，得到

$$E_n = E - \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j, x_n \in E_n,$$

$$\mathcal{F}_n = \{B(x) \in \mathcal{F} | x \in E_n\},$$

$$r_n = sup\{r(B) | B \in \mathcal{F}_n\},$$

$$B_n = B_{p_n}(x_n),\ \ p_n > \frac{3}{4}r_n.$$

如果$m > n$，那么$p_n > \frac{3}{4}r_n \geq \frac{3}{4}r_m \geq \frac{3}{4}p_m$.(*)

从而说明$B_{\frac{1}{3}p_n}(x_n)$是两两不交的，这是因为x_m不属于B_n，导致

$$|x_n - x_m| > p_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}p_n \geq \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}p_m,$$

而这些闭球都被包含在闭球B_0中，从而有$p_n \to 0, n \to \infty$。此时，如果存在$x \in E - \bigcup B_n$，则会有闭球$B_p(x) \in \mathcal{F}$，它属于任意的$\mathcal{F}_n$，从而有$0 < p \leq r_n \to 0$，这和$p > 0$矛盾。

§4.2.4 后一部分的加强型结论

存在一个只和维数N有关的正整数c_N，使得对于任意的$k \in \mathbb{N}$，在$\{B_1, B_2 \ldots\ldots B_{k-1}, B_k\}$中至多有$c_N$个球与$B_k$相交。

由这个结论推导定理的后一部分是平凡的。

对于固定的正整数k，考虑下面两个集合：

$$\mathcal{G}_1 = \{B_j | B_j \bigcap B_k \neq \emptyset, p_j \leq \frac{3}{4}Mp_k\},\ \ \mathcal{G}_2 = \{B_j | B_j \bigcap B_k \neq \emptyset, p_j > \frac{3}{4}Mp_k\},$$

其中M是一个待定的正整数。

如果能证明上面两个集合的元素个数是有限的，且只和维数N有关，那么我们就可以完成定理的证明了，而下面的两个引理就是由此展开的。

§4.2.5 引理1

引理 $\mathcal{G}_1$中球的个数不超过$4^N(M+1)^N$。

证明 为简单起见，设$\mathcal{G}_1 = \{B_{p_j}(x_j)\}$。则球$\{B_{\frac{1}{3}p_j}(x_j)\}$互不相交且都被包含在$B_{(M+1)p_k}(x_k)$中，这是因为$B_j \bigcap B_k \neq \emptyset$，故$|x_j - X_k| \leq p_j + p_k \leq (\frac{3}{4}M + 1)p_k$。从而对于任意的$x \in B_{\frac{1}{3}p_j}(x_j)$，

$$|x - x_k| \leq |x - x_j| + |x_j - x_k| \leq \frac{1}{3}p_j + \frac{3}{4}M + 1)p_k \leq (M+1)p_k.$$

记v_N是R^N中单位球的体积，那么我们有

$$\sum_{j:Bj \in \mathcal{G}_1} v_N(\frac{1}{3}p_j)^N \leq v_N(M+1)^N p_k^N.$$

而$j < k$说明$\frac{1}{3}p_j > \frac{1}{4}p_k$，因此

$$\sharp(\mathcal{G}_1)v_N(\frac{1}{4}p_k)^N \leq v_N(M+1)^N p_k^N.$$

引理得证！[4]

[4] $\sharp(A)$表示集合A中元素的的个数

§4.2.6 引理2

为了估计$\mathcal{G}_2$中元素个数的上限，考虑从x_k出发射到各个x_j的射线，下面的引理将会告诉我们任意两条射线之间的夹角都不小于θ_0，由此射线的条数，从而$\mathcal{G}_2$中元素个数，将被控制，这正是我们想要的。

引理 设$B_{p_m}(x_m)$和$B_{p_n}(x_n)$是集合$\mathcal{G}_2$中的两个球，设θ是$\overrightarrow{x_k x_n}$和$\overrightarrow{x_k x_m}$之间的夹角，那么可以选择适当的M（注意：M是待定的!），使得$\theta > \theta_0 = arccos\frac{5}{6}$。

证明 不妨假定$n < m < k$，从而$|x_n - x_m| > p_n$（因为x_m不属于$B_{p_n}(x_n)$），类似得到$p_n < |x_n - x_k|$，$p_m < |x_m - x_k|$。而由$\mathcal{G}_2$的定义可知：

$$\frac{3}{4}Mp_k < p_n \leq |x_n - x_k| \leq p_n + p_k,\ \ \frac{3}{4}Mp_k < p_m \leq |x_m - x_k| \leq p_m + p_k,$$

从而

$$\begin{aligned} cos\theta &= \frac{|x_n - x_k|^2 + |x_m - x_k|^2 - |x_n - x_m|^2}{2|x_n - x_k||x_m - x_k|} \leq \frac{(p_n + p_k)^2 + (p_m + p_k)^2 - p_n^2}{2p_n p_m} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{p_m}{p_n} + \frac{p_k}{p_n}\frac{p_k}{p_m} + \frac{p_k}{p_m} + \frac{p_k}{p_n} \leq \frac{1}{2}\frac{p_m}{p_n} + (\frac{4}{3})^2\frac{1}{M^2} + \frac{8}{3}\frac{1}{M}, \end{aligned}$$

由于$m > n$，回到定理第一部分证明中的(*)式，我们得到$p_n > \frac{3}{4}p_m$，因此有

$$cos\theta \leq \frac{2}{3} + (\frac{4}{3})^2\frac{1}{M^2} + \frac{8}{3}\frac{1}{M},$$

从而可以选取适当的M，使得$cos\theta \leq \frac{5}{6}$。证明结束!

§4.2.7 定理后一部分的证明

如果$N = 2$，那么由$\theta > \theta_0$可知射线的条数（同时也是$\mathcal{G}_2$的个数）至多为$\frac{2\pi}{\theta_0}$。如果$N \geq 3$，设$C(\theta_0)$表示R^N中以原点为顶点、对称轴和侧棱夹角为$\frac{1}{2}\theta_0$的圆锥。设$\sigma_N(\theta_0)$表示该圆锥和单位球所交的区域的面积，而单位球的面积记为w_N，现在，我们终于能够确定c_N了：

$$c_N = \sharp(\mathcal{G}_1) + \sharp(\mathcal{G}_2) \leq 4^N(M+1)^N + \frac{w_N}{\sigma_N(\theta_0)}.$$

§5 II型Besicovtch覆盖

§5.1 覆盖的定义

称R^N中一些非平凡闭球组成的集族$\mathcal{F}$是集合$E \subset R^N$的II型*Besicovtch*覆盖，如果对于任意的$x \in E$和$\varepsilon > 0$，总是存在$\mathcal{F}$中的闭球$B_p(x)$，它以x为球心，半径$p < \varepsilon$。

§5.2 II型Besicovtch覆盖定理

设$\mathcal{F}$是R^N中的有界集合E的II型$Besicovtch$覆盖，μ为R^N的$Radon$测度，μ_e是其诱导的外测度。那么我们可从$\mathcal{F}$中选出可列个闭球$\{B_n\}$，使得$\mu_e(E-\bigcup B_n)=0$。

证明 不妨假设$\mu_e(E)>0$，并且E和$\mathcal{F}$中的闭球都包含在足够大的闭球B_0中。沿用I型$Besicovtch$覆盖中的记号：

$$\mathfrak{B}_1=\{B_{n_1}\},\ \mathfrak{B}_2=\{B_{n_2}\},\ \ldots\ldots\ \mathfrak{B}_{c_N}=\{B_{n_{c_N}}\}.$$

从而我们有：

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{c_N}\bigcup_{n_j=1}^{\infty}B_{n_j},$$

进一步有

$$\mu_e(E\bigcap\bigcup_{j=1}^{c_N}\bigcup_{n_j=1}^{\infty}B_{n_j})=\mu_e(E)>0.$$

因此存在$j\in\{1,2,\ldots,c_N\}$，使得

$$\mu_e(E\bigcap\bigcup_{n_j=1}^{\infty}B_{n_j})\geq\frac{1}{c_N}\mu_e(E).$$

而由于闭球都被包含在足够大的闭球B_0中，于是我们能够找到m_1，使得

$$\mu_e(E\bigcap\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j})\geq\frac{1}{2c_N}\mu_e(E),$$

由于闭球的有限并是μ可测的（回忆一下前面$Radon$测度的定义），故由$Caratheodory$公式得

$$\mu_e(E)=\mu_e(E\bigcap\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j})+\mu_e(E-\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j})\geq\frac{1}{2c_N}\mu_e(E)+\mu_e(E-\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j}),$$

[5] 从而我们有

$$\mu_e(E-\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j})\leq v\mu_e(E),v=1-\frac{1}{2c_N}\in(0,1).$$

设$E_1=E-\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j}$，如果$\mu_e(E_1)=0$，那么工作结束；否则，我们把$\mathcal{F}$中和$\bigcup_{n_j=1}^{m}B_{n_j}$不交的闭球取出来做成集族$\mathcal{F}_1$，从而$\mathcal{F}_1$是集合$E_1$的II型$Besicovtch$覆盖。像对待$E$那样，我们把上述工作在$E_1$上完成，会得到

$$\mu_e(E_1\bigcup_{n_l=1}^{m_2}B_{n_l})\leq v\mu_e(E_1)\leq v^2\mu_e(E).$$

[5]学习了抽象测度理论后，第一个等号是很自然的

由于前m_1和现在的m_2个闭球是不交的，我们把他们并起来得到$\mathcal{F}$中的$s_2 = m_1 + m_2$个闭球。归纳下去，我们会得到$\mu_e(E-\bigcup_n^{s_k} B_n) \le \nu^k \mu_e(E)$。如果存在某个$k$，使得$\mu_e(E-\bigcup_n^{s_k} B_n) = 0$，那么命题得证，否则令$k \to \infty$，同样命题也得证。

§6　5r覆盖定理

§6.1　预备概念

记$tB := B(x,tr)$，其中$B = B(x,r) = \{y|d(x,y) \le r\}$。称一个度量空间$X$是有界紧的，如果它的任意有界闭子集都是紧集。$R^N$就是一个有界紧空间。

§6.2　定理陈述

设X是一个有界紧的度量空间，$\mathfrak{B}$是一些闭球组成的集族，满足

$$\sup\{d(B)|B \in \mathfrak{B}\} < \infty.$$

则我们可以选出至多有限个不交的闭球$B_i \in \mathfrak{B}$，使得：$\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B \subset \bigcup_i 5B_i$。

§6.3　弱化后定理的证明

为使证明简洁一些，我们先对$\mathfrak{B}$对一些限制（从而弱化了定理）。令$\mathfrak{B} = \{B(x,r(x))|x \in A\}$，其中$A \in X$是一个有界集。设定

$$M = sup\{r(x))|x \in A\},\ \ A_1 = \{x \in A|\frac{3M}{4} < r(x) \le M\}.$$

任取$x_1 \in A_1$，归纳下去，有$x_{k+1} \in A_1/\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, 3r(x_i))$。(**)

如果$A_1/\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, 3r(x_i)) \ne \phi$，那继续下去。注意到$A$是有界的，从而我们的工作必将在有限步之后停下来，因为选出的闭球的半径都是大于$\frac{3M}{4}$的。从而得到$A_1 \subset \bigcup_{i+1}^{k_1} B(x_i, 3r(x_i))$。同时，由于$r(x) \le 2r(x_i)$，其中$x \in A_1, i = 1,2\dots,k_1$。这告诉我们

$$\bigcup_{x\in A_1} B(x,r(x)) \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 5r(x_i)).$$

设

$$A_2 = \{x \in A|(\frac{3}{4})^2 M < r(x) \le \frac{3}{4}M\},$$

$$A_2' = \{x \in A_2|B(x,r(x))\bigcap\bigcup_{i=1}^{k_1} B(B(x_i,r(x_i)) = \phi.$$

如果$x \in A_2/A_2'$，那么存在$1 \le i \le k_1$，使得$B(x, r(x)) \bigcap B(x_i, (r(x_i)) \ne \phi$，从而有$d(x, x_i) \le r(x) + r(x_i) \le 3R(x_i)$，这表明$A_2/A_2' \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 3r(x_i))$。就像对待$A_1$那样，归纳的从$A_2'$中选出$x_{k_1+1}$，到有限步终止，我们将会得到

$$\bigcup_{x \in A_2} B(x, r(x)) \subset \bigcup_{i=1}^{k_2} B(x_i, 5r(x_i)).$$

归纳下去，我们就完成了弱化后定理的证明!

§6.4 定理的证明

回顾一下上面的证明中对$\mathfrak{B}$的限制：$\mathfrak{B} = \{B(x, r(x)) | x \in A\}$，其中$A \in X$是一个有界集。可以看出，我们对$\mathfrak{B}$进行了如下两个方面的限制：对于任意的$x \in A$，仅有一个闭球$B(x, r(x)) \in \mathfrak{B}$；$A$是有界的。为此，也应该从这两个方面来改进证明。

对于前者，从所有以x为中心的闭球中取出$B(x, r(x))$，满足$r(x) > \frac{14}{15} sup\{r | B(x, r) \in \mathfrak{B}\}$。此时，只需将上面证明过程中的（**）式的3改为$\frac{8}{3}$即可。

对于后者，我们来考虑上面证明中的A_1，对于$A_1^k = A_1 \bigcap B(0, k)$，从$k = 1, 2 \ldots$，可以按次序选择有限个闭球，使其半径扩充三倍后覆盖A_1^k，并且第k步选择的闭球是在前$k-1$步已经选好的闭球的基础上选择的。从而有$A_1 \in \bigcup_{i+1}^{k_1} B(x_i, 3r(x_i))$，至多$k_1 = \infty$。

§7 小结

在对五个覆盖定理总结之前，先定义一个概念：称集合A在测度意义下B覆盖，如果$\mu(B - A) = 0$，类似的，可以定义外测度意义下的覆盖。

下面的表是对前四个覆盖的总结（因为它们都是在R^N中的）：

覆盖名称	I型*Vitali*覆盖	II型*Vitali*覆盖
覆盖中的元素	平行于坐标轴的方体	非平凡闭方体
是否对半径，边长，直径有要求	无	有
对空间R^N的要求	装备了Lebesgue测度的度量空间	装备了Lebesgue测度的度量空间
定理的结论	存在可列不交方体，其测度可控制其所覆盖的集合测度	存在可列（Lebesge外测度意义下的）覆盖
覆盖名称	I型*Besicovtch*覆盖	II型*Besicovtch*覆盖
覆盖中的元素	非平凡闭球	非平凡闭球
是否对半径，边长，直径有要求	无	有
对空间R^N的要求	度量空间	装备了*Radon*测度的度量空间
定理的结论	存在可列覆盖，且可将将其分为不交子类，子类的组数仅和维数有关	存在可列（*Radon*外测度下意义的）覆盖

而最后一个覆盖定理5r覆盖定理只要求度量空间是有界紧的，覆盖中的元素为闭球（其实这里它并不是一个覆盖，而是后面选出的子集），而对直径的限制是上限（这一点不同于一般的覆盖），结论是存在可列不交半径扩充5倍后的闭球覆盖以前的所有闭球。

§8　参考文献

- Emmanuele DiBenedetoo，Real Ananlysis(影印版)，高等教育出版社，北京，2007

- Pertti Mattila ，Geometry of set and Measures in Euclidean Spaces，Cambridge University Press 1999