闭区间上端点各阶导数值给定的函数的存在性

苏桃*

1 问题

[1] 中第 201 页有这样一段话:"不应该认为每个无穷可微的函数的 Taylor 级数都在点 x_0 的某个邻域内收敛, 因为对于任何一个数列 $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ 都可以构造(这并不是很简单的)一个函数 $f(x), f^{(n)}(x_0) = c_n, n \in \mathbb{N}$."

[2] 中第 136 页第 6 题第 a) 问:"构作函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 使 $f|_{[-1,1]} \equiv 1$ 且 $\mathrm{supp} f \subset [-1-\delta, 1+\delta]$, 其中 $\delta > 0$."此题一般的做法是直接构造一个显式函数, 但笔者因受前一问题的启发, 在考虑的过程中想到这个命题可能被加强, 于是想到了以下命题:

命题1. *任给两个实数列* $\{a_n\}_{n\geq 0}$,$\{b_n\}_{n\geq 0}$ *及闭区间* $[a,b](a<b)$, *存在函数* $f \in C^{(\infty)}[a,b]$, *使得* $f^{(n)}(a) = a_n$,$f^{(n)}(b) = b_n$, $\forall\, n \geq 0$.

如果能证明上述命题, 稍加论述, 我们就能顺便给出前面两个问题的证明.

2 问题的证明

首先, 作简单考虑知闭区间 $[a,b]$可换为闭区间 $[0,1]$, 下面我们仅考虑闭区间 $[0,1]$.

为证命题 1, 考虑到函数在端点上各阶导数值比较随意, 自然想到构造级数来做, 大致思路如下:

对 0 阶导数值 a_0, b_0, 构造函数 f_0, 使得 $f_0(0) = a_0, f_0(1) = b_0$; 对 1 阶导数值 a_1, b_1, 构造 f_1, 使得 $f_1(0) = 0, f_1(1) = 0, f_1^{(1)}(0) = a_1 - f_0^{(1)}(0), f_1^{(1)}(1) = b_1 - f_0^{(1)}(1)$; 依此构造 $\ldots$ 对 f_n ,有 $f_n^{(i)}(0) = 0, f_n^{(i)}(1) = 0 (0 \leq i \leq n-1)$, 而 $f_n^{(n)}(0) = a_n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)}(0)$, $f_n^{(n)}(1) = b_n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)}(1)$, 这样函数 $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ 将满足前 n 阶导数值的条件, 从而(函数) $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ 可能满足命题中的所有要求. 下面来具体实现这一想法.

*基科 81

关键是构造合适的函数形式, 取

$$f_k(x)=(c_{k,0}(x-1)^{2p_k}+c_{k,1}x^{2q_k})\frac{x^k}{k!}\frac{(x-1)^k}{k!},\ p_k,q_k\in\mathbb{N}^+$$

知 $f_k\in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 且由 Leibniz 求导公式知 f_k 有很好的性质: $f_k^{(i)}(0)=0,\ f_k^{(i)}(1)=0\ (1\le i\le k-1)$, 而 $f_k^{(k)}(0)=\dfrac{(-1)^k}{k!}c_{k,0},\ f_k^{(k)}(1)=\dfrac{1}{k!}c_{k,1}$, 上面的构造已完成一半.

对 f_0, 令 $c_{0,0}=a_0,c_{0,1}=b_0$, 取 p_0,q_0 使 $|c_{0,0}|\le 2p_0,|c_{0,1}|\le 2q_0$, 并令 $h_0=f_0$;

对 f_1, 令 $c_{1,0}=-a_1+f_0^{(1)}(0),c_{1,1}=b_1-f_0^{(1)}(1)$, 取 p_1,q_1 满足: $2p_1\ge|c_{1,0}|,2q_1\ge|c_{1,1}|,p_1>p_0,q_1>q_0$, 并令 $h_1=f_0+f_1$;

……

若已取 $f_i,h_i(0\le i\le k),k\ge 1$, 则已有 $h_k\in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足: $h_k^{(i)}(0)=a_i,h_k^{(i)}(1)=b_i,|c_{i,0}|\le 2p_i,|c_{i,1}|\le 2q_i(0\le i\le k)$, 而 $p_j<p_{j+1},q_j<q_{j+1}(0\le j\le k-1)$.

对 f_{k+1}, 可令 $\dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}c_{k+1,0}=a_{k+1}-h_k^{(k+1)}(0),\ \dfrac{1}{(k+1)!}c_{k+1,1}=b_{k+1}-h_k^{(k+1)}(1)$, 即 $c_{k+1,0}=(-1)^{k+1}(k+1)!(a_{k+1}-h_k^{(k+1)}(0)),c_{k+1,1}=(k+1)!(b_{k+1}-h_k^{(k+1)}(1))$; 取 p_{k+1},q_{k+1}, 使 $|c_{k+1,0}|\le 2p_{k+1},\ |c_{k+1,1}|\le 2q_{k+1},\ p_{k+1}>p_k,\ q_{k+1}>q_k$, 令 $h_{k+1}=h_k+f_{k+1}$, 知 h_{k+1} 亦有与 h_k 类似的性质.

于是, 我们得到了函数序列 $\{f_n\}(n\ge 0)$, 其级数部分和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f_k$ 已满足前面的设想, 只需再证明:

命题2. *函数项级数* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ (f_n *如前*) *在闭区间* $[0,1]$ *上收敛, 且若其和函数记为* $f(x)$, *则* $f\in C^{(\infty)}([0,1],\mathbb{R})$, *且* $f^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(k)}(x),\forall x\in[0,1]$.

为证命题 2, 我们考虑下面的定理:

定理(Weierstrass)**.** *若函数序列* $f_n(z)(n=1,2,\dots)$ *在区域* D *内解析, 且级数* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ *在* D *内内闭一致收敛到函数* $f_(z)$, *则: (1) 函数* $f(z)$ *在* D *内解析; (2) 级数* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ *在* D *内内闭一致收敛到* $f^{(k)}(z),k\in\mathbb{N}$.

证明. 证明见 [3] Pg. 113. □

引理. *函数项序列* $\{F_n(x)\}_{n\ge 0}$ *满足: (1) 对* $n\ge 0$, $F_n(x)=c_n(x-1)^{p_n}\dfrac{x^n}{n!}$ $(p_n\ge 0,\ p_n\in\mathbb{Z})$; (2) $\exists N,N_0\in\mathbb{N}$, *使对* $\forall n\ge N_0$ *有* $|c_n|\le p_n^N$, *其中* $1\le p_n<p_{n+1}$. *令* $F=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}F_n$, *则*

$F \in C^{(\infty)}([0,1],\mathbb{R})$，且 $F^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(k)}(x) (\forall k \geq 0)$.

注. 若证明了引理 1, 则对 $F_n(x) = c_n x^{p_n} \frac{(x-1)^n}{n!}$ 而其它条件不变, 有同样的命题成立.这只需用 $1-x$ 代替命题中的 x 即可.

证明. 由于每个 F_n 均为 x 的多项式, 视其为复数域上的复变量函数, 则 $F_n(n \geq 0)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 考虑 $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$, 对 $\forall\, 0 < r < \frac{1}{2}$，在 $D_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{2}| \leq r\}$ 中, 当 $n \geq N_0$ 时, 成立

$$|F_n(z)| \leq \frac{1}{n!}|c_n|(\frac{1}{2}+r)^{p_n} \leq p_n^N(\frac{1}{2}+r)^{p_n} \leq (p_n+1)\dots(p_n+N)(\frac{1}{2}+r)^{p_n}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{n=N_0}^{\infty}|F_n(z)| &\leq \sum_{n=N_0}^{\infty}(p_n+1)\dots(p_n+N)(\frac{1}{2}+r)^{p_n} \leq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+N)(\frac{1}{2}+r)^n \\ &= \frac{N!}{(\frac{1}{2}-r)^{N+1}}\end{aligned}$$

从而知 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)$ 在 D 内内闭一致收敛.

故由定理 1 知, 在 $|z-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ 内 :$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)$解析，且 $F^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(k)}(z)$, 特别的对开区间 $]0,1[$ 成立.

为证引理 1 只需再考虑两端点 $0,1$. 对 $x=0,1, F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ 收敛性显然. 对 $\forall x \in\,]0,1[$, $m \geq N_0$，由

$$\begin{aligned}F(x) - F(0) &= \sum_{n=0}^{m}(F_n(x) - F_n(0)) + \sum_{n=m+1}^{\infty}(F_n(x) - F_n(0)) \\ &= \sum_{n=0}^{m}(F_n(x) - F_n(0)) + \sum_{n=m+1}^{\infty} F_n(x)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}|\sum_{n=m+1}^{\infty} F_n(x)| &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} p_n^N(1-x)^{p_n}x^{m+1} \leq (\sum_{n=0}^{\infty} n^N(1-x)^n)x^{m+1} \\ &\leq [\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+N)(1-x)^n]x^{m+1} = N!x^{m-N}\end{aligned}$$

可取 $m \geq N+2$, 则

$$F(x)-F(0)=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(0))+O(x^2)=\sum_{n=0}^{m}F_n^{(1)}(0)x+o(x),\ x\to 0_+$$

这说明 $F^{(1)}(0)=\sum_{n=0}^{m}F_n^{(1)}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(1)}(0)$.
可取 $m \geq N_0$, 使对 $\forall n \geq m, p_n > 2$. 则对 $\forall x \in]0,1[$

$$\begin{aligned}F(x)-F(1)&=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(1))+\sum_{n=m+1}^{\infty}(F_n(x)-F_n(1))\\&=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(1))+\sum_{n=m+1}^{\infty}F_n(x)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}|\sum_{n=m+1}^{\infty}F_n(x)|&\leq(1-x)^2[\sum_{n=m+1}^{\infty}p_n^N(1-x)^{p_n-2}]\\&\leq(1-x)^2[\sum_{n=m+1}^{\infty}(p_n-1)p_n\dots(p_n+N-1)(1-x)^{p_n-2}]\\&\leq(1-x)^2[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+N)(1-x)^n]=N!\frac{(1-x)^2}{x^{N+1}}\\&=O((1-x)^2),\ x\to 1_-\end{aligned}$$

$$F(x)-F(1)=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(1))+O((1-x)^2)=\sum_{n=0}^{m}F_n^{(1)}(1)(x-1)+o(1-x),\ x\to 1_-$$

从而有 $F^{(1)}(1)=\sum_{n=0}^{m}F_n^{(1)}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(1)}(1)$.

这样, 我们已得到: $F^{(1)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(1)}(x)\ (x\in[0,1])$.

现在可归纳完成引理 1 的证明:

若已证 $F^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(k)}(x), x\in[0,1](k\geq 1)$, 取 $n_0\in\mathbb{N}, n_0>k$, 使对 $\forall\, n\geq n_0$, 有 $p_n>k$. 则由 Leibniz 求导公式

$$\begin{aligned}F_n^{(k)}(x)&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}c_n((x-1)^{p_n})^{(k-i)}(\frac{x^n}{n!})^{(i)}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}c_np_n(p_n-1)\dots(p_n-k+i+1)(x-1)^{p_n-k+i}\frac{x^{n-i}}{(n-i)!}\end{aligned}$$

设 $F_{n,i}(x)=\binom{k}{i}c_np_n(p_n-1)\dots(p_n-k+i+1)(x-1)^{p_n-k+i}\dfrac{x^{n-i}}{(n-i)!}, n\geq n_0,\ 0\leq i\leq k.$

对 $F_{n,i}(n>n_0)$, 知其仍满足引理 1 的条件, 由前面的证明知对 $G_i(x)=\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}F_{n,i}(x)$ 收敛, 且有

$$G_i^{(1)}(x)=\sum_{n=n_0+1}^{\infty}F_{n,i}^{(1)}(x)\ (x\in[0,1])$$

从而知

$$\begin{aligned}F^{(k)}(x)&=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k)}(x)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}F_{n,i}(x)\\&=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k)}(x)+\sum_{i=0}^{k}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}F_{n,i}(x)\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}F^{(k+1)}(x)&=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k+1)}(x)+\sum_{i=0}^{k}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}F_{n,i}^{(1)}(x)\\&=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k+1)}(x)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}F_{n,i}^{(1)}(x)=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k+1)}(x)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}F_n^{(k+1)}(x)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(k+1)}(x)\quad(x\in[0,1])\end{aligned}$$

综上, 引理 1 证毕. □

至此, 我们证明了前面提出的问题并得到了一些有意义的结果. 作为补充我们指出: 只需对函数作简单的衔接, 命题 1 完全可推广到 n 个点的情况.

参考文献

[1] V.A.Zorich 著; 蒋铎等译, 数学分析, *第一卷(第四版)*, 高等教育出版社, 北京, 2006.

[2] V.A.Zorich 著; 蒋铎等译, 数学分析, *第二卷(第四版)*, 高等教育出版社, 北京, 2006.

[3] 方企勤著, 复变函数教程, 第一版, 北京大学出版社, 北京, 1996.