一道数学分析习题的解答讨论和推广

张野平　王竹海

命题 1

设 α 是一个无理数

定义函数 $T_\alpha:[0,1)\to[0,1)$ 如下 $T_\alpha(x)=\{x+\alpha\}$ （其中 $\{.\}$ 表示取小数部分）

设 $E\subseteq[0,1)$ 是一个区间

则 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}card\{n\,|\,0\le n<N,T_\alpha^n(0)\in E\}=length(E)$

引理 1

对于 $\delta>0$，记 $A_\delta(t)=\{k\cdot\delta+t\,|\,k\in Z,0\le k\cdot\delta+t<1\}$，

则对于任意区间 $E\subseteq[0,1)$，当 δ 趋于 0 时，$\dfrac{card(E\cap A_\delta(t))}{cardA_\delta(t)}$ 一致收敛于 $length(E)$

证明：

这里构造的集合 $A_\delta(t)$ 可以表示为更加直观的形式

$$A_\delta(t)=(t+\delta\cdot Z)\cap[0,1)$$

易证

$$(cardA_\delta(t)+1)\cdot\delta\ge 1$$

$$(cardA_\delta(t)-1)\cdot\delta\le 1$$

$$(card(A_\delta(t)\cap E)+1)\cdot\delta\ge length(E)$$

$$(card(A_\delta(t)\cap E)-1)\cdot\delta\le length(E)$$

因此

$$\frac{length(E)-\delta}{1+\delta}=\frac{length(E)\cdot\delta^{-1}-1}{\delta^{-1}+1}\le\frac{card(E\cap A_\delta(t))}{cardA_\delta(t)}\le\frac{length(E)\cdot\delta^{-1}+1}{\delta^{-1}-1}=\frac{length(E)+\delta}{1-\delta}$$

令δ趋于 0 即可
引理证毕

引理 2
如果α是一个无理数，

则$\forall\tau>0\exists m\in N$ s. t. $T_\alpha^m(0)<\tau$

证明略

命题 1 的证明:

为简便，记$T_\alpha^n(0)=a_n$，记$S_n=\{a_i\mid 0\le i<n\}$

对于任意$\varepsilon>0$

根据 Lemma1，存在$\tau>0$，使得对任意$\delta\in(0,\tau)$，对于任意$t\in R$有

$$\left|\frac{card(E\cap A_\delta(t))}{cardA_\delta(t)}-length(E)\right|<\varepsilon/2 \qquad （1）$$

又由 Lemma2，存在$m\in N$，使得$a_m<\tau$

构造S_n的划分$S_n=\bigcup_{j=0}^{m-1}T_{n,j}$，其中$T_{n,j}=\{a_t\in S_n\mid t\equiv j(\bmod m)\}$

则$$\frac{card(E\cap S_n)}{cardS_n}=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{cardT_{n,j}}{cardS_n}\cdot\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}} \qquad （2）$$

固定j，$T_{n,j}$是这样一个有限长数列中所有元素的集合，该数列中相邻两个元素在模 1 的意义下相距a_m。因此，可以将$T_{n,j}$划分成一族形如$A_{a_m}(t)$的集合和一个元素个数不超过$2(1+1/a_m)$的集合。记这些集合为$A_{a_m}(t_s)$ （$1\le s\le l$）和 B

并且有

$$cardT_{n,j}=cardB+\sum_{s=1}^{l}cardA_{a_m}(t_s)$$

$$cardB\le 2(1+1/a_m)$$

那么

$$\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}=\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+\sum_{s=1}^{l}\frac{cardA_{a_m}(t_s)}{cardT_{n,j}}\cdot\frac{card(A_{a_m}(t_s)\cap E)}{cardA_{a_m}(t_s)} \qquad (3)$$

根据（1）

$$\left|\frac{card(A_{a_m}(t_s)\cap E)}{cardA_{a_m}(t_s)}-length(E)\right|<\varepsilon/2$$

将该结果代入（3），得

$$\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}\le\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+\sum_{s=1}^{l}\frac{cardA_{a_m}(t_s)}{cardT_{n,j}}\cdot(length(E)+\varepsilon/2)$$

注意到$\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+\sum_{s=1}^{l}\frac{cardA_{a_m}(t_s)}{cardT_{n,j}}=1$，有

$$\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}\le\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+(1-\frac{cardB}{cardT_{n,j}})\cdot(length(E)+\varepsilon/2) \qquad (4)$$

同理

$$\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}\ge\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+(1-\frac{cardB}{cardT_{n,j}})\cdot(length(E)-\varepsilon/2) \qquad (5)$$

由（4）（5），存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时，$\left|\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}-length(E)\right|<\varepsilon$

结合上式和（2）式，知

存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时，$\left|\frac{card(E\cap S_n)}{cardS_n}-length(E)\right|<\varepsilon$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{card(E\cap S_n)}{cardS_n}=length(E)$

也就是说 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}card\{n\,|\,0\le n<N,T_\alpha^n(0)\in E\}=length(E)$

证毕

这个命题的最终结论可以用另一种方式表示

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\chi_E(T_\alpha^k(0))=\int_0^1\chi_E(x)dx$$

其中 χ_E 是区间 E 的特征函数

这种表达形式具有更鲜明的意义，它将函数的积分和函数在一个序列上的平均值建立了联系。

由于极限和积分都具有线性性，我们可以用 χ_E 线性地表示出任意的阶梯函数，也就是下述命题

命题 2

设 α 是一个无理数

定义函数 $T_\alpha:[0,1)\to[0,1)$ 如下 $T_\alpha(x)=\{x+\alpha\}$

函数 φ 是定义在区间 $[0,1)$ 上的阶梯函数，那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(T_\alpha^k(0))=\int_0^1\varphi(x)dx$$

证明略

注意到阶梯函数可以单调地逼近黎曼可积函数（这里说的逼近是在 1-范数的意义下），命题可以被推广到更加一般的形式

命题 3

设 α 是一个无理数

定义函数 $T_\alpha:[0,1)\to[0,1)$ 如下 $T_\alpha(x)=\{x+\alpha\}$

函数 f 是定义在区间 $[0,1)$ 上的黎曼可积函数，那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(T_\alpha^k(0))=\int_0^1 f(x)dx$$

证明：

根据黎曼可积函数的定义，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在区间 $[0,1)$ 的一个分划 P，使得 $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$ （6）

其中$S(f,P)$和$s(f,P)$分别是函数对于分划P的达布上和与达布下和，具体得说，

如果设分划P为$(x_k)_{1\le k\le m}$

那么

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{m}\sup_{\tau\in[x_{k-1},x_k]} f(\tau)\cdot|x_k-x_{k-1}|$$

$$s(f,P)=\sum_{k=1}^{m}\inf_{\tau\in[x_{k-1},x_k]} f(\tau)\cdot|x_k-x_{k-1}|$$

构造阶梯函数ϕ和φ，使得ϕ在$[x_{k-1,}x_k)$上取值$\sup\limits_{\tau\in[x_{k-1},x_k]} f(\tau)$，$\varphi$在$[x_{k-1,}x_k)$上取值

$\inf\limits_{\tau\in[x_{k-1},x_k]} f(\tau)$

显然有$\varphi\le f\le\phi$　　　　　　　　（7）

并且

$$S(f,P)=\int_0^1\phi(x)dx \qquad (8)$$

$$s(f,P)=\int_0^1\varphi(x)dx \qquad (9)$$

由于ϕ和φ都可以表示为有限个区间的特征函数的线性组合，应用 Proposition

2

可得

$$\int_0^1\phi(x)dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(T_\alpha^k(0)) \qquad (10)$$

$$\int_0^1\varphi(x)dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(T_\alpha^k(0)) \qquad (11)$$

由（6）（8）（9）（10）（11）

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(T_\alpha^k(0))-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(T_\alpha^k(0))<\varepsilon$$

再根据（7），对于任意的 N

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(T_\alpha^k(0)) \le \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(0)) \le \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(T_\alpha^k(0))$$

因此 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(0))$ 存在，并且 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(0)) = \int_0^1 f(x)dx$

证毕

事实上，遍历理论中 Birkhoff 定理与该命题有一定的联系，Birkhoff 定理中包含如下陈述:

如果(X,B,μ,T)是一个遍历的可测动力系统，那么对任意的 $\phi \in L^1(X,B,\mu)$ 序列 $\frac{1}{n}S_n\phi = \frac{1}{n}(\phi+\phi\circ T+\cdots+\phi\circ T^{n-1})$ 收敛到 $\int_X \phi d\mu$ （μ-几乎处处）

将该定理直接应用到本文讨论的问题，将得到如下命题

命题 4

设 α 是一个无理数

定义函数 $T_\alpha:[0,1)\to[0,1)$ 如下 $T_\alpha(x)=\{x+\alpha\}$

函数 f 是定义在区间 $[0,1)$ 上的勒贝格可积函数，那么对于几乎所有的 $t\in[0,1)$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(t)) = \int_0^1 f(x)dx$$

注意比较命题 3 和命题 4 的异同，由于在命题 3 的证明中没有任何一处利用了 0 点的特殊性，将命题 3 的证明稍加修改，就可以证明，对于黎曼可积分的 f，性质 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(t)) = \int_0^1 f(x)dx$，对于所有的 $t\in[0,1)$ 成立。

我们不能加强命题 4 的结论使之包含命题 3。反例是容易构造的：构造区间 $[0,1)$ 上的勒贝格可积函数 f，使得 f 在集合 $S=\{T_\alpha^n(0)\mid n\in N\}$ 上取值 1，在 S 外取值为零，S 是可数集，因此 $f=0$ $a.e.$，但是 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(0))=1$