Poincaré 群的表示及其物理意义

鲜于中之*

2009 年 4 月

1 前言

如所周知，数学和物理之间存在着奇妙的对应关系。本文试图通过一个例子来展示这种对应在具体问题中是如何实现的。按照 V.Arnold 的观点，即使再抽象的数学也有其直观的背景。本文可以作为这种观点的一个例证。

现代物理学的两大理论基础是相对论与量子力学。按照（狭义）相对论，在任何惯性参考系中，光速 c 不变。如果计入时间一维，则可在 $3+1$ 维时空流形上定义如下度量：

$$\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{1}$$

此即 Minkowski 度规，这是一个伪 Riemann 度规，它使得时空流形成为伪 Riemann 流形。相对论的光速不变原理保证，惯性参考系之间的坐标变换构成此流形的等距同构群。我们知道，如上度规的等距同构群即 Poincaré 群 P ，它是 $SO(3,1)$ 群与时空平移群 $T \simeq \mathbb{R}^4$ 的半直积：

$$P = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3,1)\,. \tag{2}$$

另一方面，根据量子力学的基本假设，物理状态构成 Hilbert 空间。而时空对称性在此空间中的具体实现，正是相应的对称群在此空间中的表示。为了将这一表述严格化，我们引入定义：

定义 1 (射线) 在域 F 上的 Hilbert 空间 H 中引入等价关系：

$$x \sim y\,, \qquad \text{若 } x = \lambda y \qquad \text{其中 } x, y \in H\,,\ \lambda \in F\,.$$

称由此等价关系所给出的等价类为 H 中的射线。

定义 2 (射线的内积) 设 r 和 s 是 Hilbert 空间 H 中的射线，则它们的内积 $u(r,s)$ 可以定义为：

$$u(r,s) = \langle x,y\rangle\langle y,x\rangle / \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

其中 $x \in r$, $y \in s$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 H 中的内积。

可以证明，$u(r,s)$ 与 x 和 y 的选取无关。

在此定义的基础上，我们有如下：

*清华大学物理系，xyzz06@mails.tsinghua.edu.cn

定理 1 (Wigner) 设 H 和 H' 是两个复 Hilbert 空间，σ 是从 H 到 H' 的可逆映射，且 σ 及其逆都保持内积。则:

1. H 和 H' 同构。

2. 存在从 H 到 H' 的映射 ϕ，使得在适当选取的基下，ϕ 可以被描述为:

$$x' = \phi(x)\,, \qquad x'_i = r_i f(x_i)\,, \quad i \in I$$

   其中，$r_i \in \mathbb{R}_+$，f 是复数域的自同构，x_i 是 x 在取定基下的分量，I 是基的指标集。

3. 如果进一步要求 σ 是保持射线内积 $u(r,s)$ 不变的映射，则 2 中的函数可被进一步描述为:

$$x' = \phi(x)\,, \qquad x'_i = f(x_i)\,, \quad i \in I$$

   其中 f 或者是恒等映射，或者是取复共轭函数。

4. ϕ 就是满足定理条件的映射 σ。

此定理的证明可见 [2]。在物理上，此定理给出限制：对称群在 Hilbert 空间中保持射线内积的表示必为酉表示或反酉表示。注意到对称群的单位元在 Hilbert 空间中的作用为恒等作用，因此我们需要的表示必为酉表示。

另一方面，我们注意到 $SO(3,1)$ 群同胚于 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$（详见下文），而后者作为 Lie 群是非紧的。我们知道，非紧群一定不存在有限维的酉表示。换言之，我们将要建立的表示空间 H 一定是无穷维表示。以下所用求表示的方法是数学中处理半直积群的经典方法之一：小群法。

以上是一般性的分析。下面介绍 Poincaré 群的结构。其中，平移部分 $\mathbb{R}^4$ 是平庸的。它的四个生成元 $P_\mu\ ,(\mu=0,1,2,3)$ 称为动量，由其生成的群元称为平移。而 $SO(3,1)$ 群的生成元可记作 $J_{\mu\nu}$，称为（广义的）角动量，而由其生成的群元称为转动。

2 平移

首先来看时空平移的作用。将群元表为生成元的指数映射：

$$U(e^{\omega},\epsilon) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\rho P^\rho}\,, \tag{3}$$

其中 ω 和 ϵ 是无穷小参数。可以写出在纯时空平移变换 $U(1,a)$ 下，有：

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma} = e^{ia_\mu P^\mu}\Psi_{p,\sigma} = e^{ia_\mu p^\mu}\Psi_{p,\sigma}\,. \tag{4}$$

可以用 P_μ 构造 Carsimir 算子（即与 Lie 代数中所有生成元皆对易的算子）$P^\mu P_\mu$。它对态 $\Psi_{p,\sigma}$ 的作用为：

$$P^\mu P_\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu p_\mu \Psi_{p,\sigma} = M^2 \Psi_{p,\sigma}\,. \tag{5}$$

这里定义了“质量参数”$M \equiv p_\mu p^\mu$，可见质量是作为 Lorentz 不变量 P^2 的取值而被引入的，它与熟知的惯性或引力等概念都无关。

3 转动

我们现在来说明，$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ 仍然是动量算符 P^μ 的本征态：

$$\begin{aligned}P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} =&U(\Lambda)[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda)[U(\Lambda^{-1})P^\mu U^{-1}(\Lambda^{-1})]\Psi_{p,\sigma}\\ =&U(\Lambda)(\Lambda_\rho^{-1\mu}P^\rho)\Psi_{p,\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}\,.\end{aligned}$$

其中用到了动量算符的 Lorentz 变换性质：

$$U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu\,. \tag{6}$$

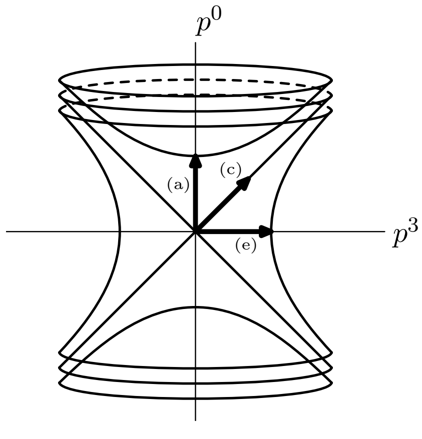
可见 $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ 作为动量算符的本征态，其本征值为 Λp。

另外可证，$p^2 \equiv g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ 和 p^0 的符号 (当 $p^2 \geq 0$ 时) 在 Lorentz 变换下不变，且任何两个具有同样的 p^2 值和 p^0 符号 (当 $p^2 \geq 0$ 时) 的动量必可以通过某个 Lorentz 变换相联系，可用这两个非齐次 Lorentz 变换的不变量标记不同的动量类。在每种动量类中，选出一个参考动量 k^μ 作为代表，则与之同类的动量 p^μ 皆可通过某一 Lorentz 变换 $L(p)$ 得到：$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu$。

下面列出按这种标准得到的态的种类，以及每种类别对应的一种参考动量 k^μ。当然，参考动量的选择在满足要求的前提下应当尽量简单。

		参考动量 k^μ	小群	物理意义
(a)	$p^2 = M^2 > 0\,, p^0 > 0$	$(M,0,0,0)$	$SO(3)$	有质量的正能态
(b)	$p^2 = M^2 > 0\,, p^0 < 0$	$(-M,0,0,0)$	$SO(3)$	有质量的负能态
(c)	$p^2 = 0\,, p^0 > 0$	$(\kappa,0,0,\kappa)$	$ISO(2)$	零质量正能态
(d)	$p^2 = 0\,, p^0 < 0$	$(-\kappa,0,0,\kappa)$	$ISO(2)$	零质量负能态
(e)	$p^2 = -N^2 < 0$	$(0,0,0,N)$	$SO(2,1)$	虚质量态
(f)	$p = 0$	$(0,0,0,0)$	$SO(3,1)$	真空态

按照上面的讨论，可以将 Lorentz 变换在动量空间中形象地表示出来。由于 Lorentz 变换在动量空间中保持 $p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2$ 不变，因此全动量空间可以被 Lorentz 变换划分为若干轨道，如图所示：



在 Lorentz 变换下，每个切片中的动量态跑遍其所在轨道中的每一点。具体而言：

有质量的态的轨道就是图中的双叶双曲面。每一个这样的双叶双曲面对应于一组具有相同质量的态，在 Lorentz 变换下它们可以在一个双曲面内自由运动；这组双曲面分为两叶，说明正的 Lorentz 变换不改变 p^0 的符号，即不会把一叶上的点变到另一叶，因此会有正能态和负能态之分。

无质量的态由图中的锥面表示，与正质量的情形相同，锥面也分为不连通的两叶（原点除外），因此也分为正能态和负能态。

虚质量态（也称为快子态，tachyon）对应于图中的单叶双曲面。显然，由于在 Lorentz 变换下态的动量可以抵达面内的任何点，因此与前两种情形不同，此时 p^0 的符号并不保持不变。

图中同时标示了 (a)、(c)、(e) 三个动量类中的标准动量。下面来研究使这些参考动量保持不变的 Lorentz 变换。不难证明，这样的变换构成群，它就是我们要找的小群。各种参考动量的小群已列在表中。这里只是列出结果，严格证明将在后面给出。不过可以想象，小群的结构与参考动量为零的分量所张空间的结构有关。例如表中的 (a)、(b)、(e) 对应的参考动量都仅有一个分量不为零。在这种情况下，小群就是零分量所张空间的对称群。其中 (a) 的小群更容易从图中看出：保持标准动量 (a) 不变的变换显然就是绕 p^0 轴的所有旋转，所以相应的小群就是 $SO(3)$。

而 (c)、(d) 的参考动量有两个相同或相反的非零分量。这种情况下，除了剩余的二维空间的对称群外，还存在其他保持这个动量不变的 Lorentz 变换，因此相应的小群比 $SO(2)$ 群大一点，是 $ISO(2)$ 群。可惜这个结论目前还没有直观的解释，Wigner 本人也承认这一点是不易想象的。后面我们将用严格的代数方法得到这一结论。

前面已知：$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ 是动量为 Λp 的态，考虑到简并，可以将其写成如下的线性组合：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,. \tag{7}$$

如果我们求出了 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$，就意味着已经找到了 Lorentz 变换齐次部分的表示，因此下面的任务是找出 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ 的结构。讨论的线索是从标准动量 k^μ 开始，再考虑一般动量 p^μ，最后看齐次 Lorentz 变换对动量的作用 Λp。首先，关系 $p^\mu = L^\mu{}_\nu k^\nu$ 在态空间的表达为：

$$U(L(p))\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(L(p), k)\Psi_{p,\sigma'}\,. \tag{8}$$

下面来证明，$C(L(p), k)$ 实际上是对角的矩阵。

为此，利用 $U(L(p))$ 的幺正性，可得：

$$\begin{aligned}
(\Psi_{k,\sigma}, \Psi_{k',\sigma})\delta_{\sigma\sigma'} =& (U(L(p))\Psi_{k,\sigma}, U(L(p))\Psi_{k',\sigma'}) \\
=& \Big(\sum_{\sigma_1} C_{\sigma_1\sigma}(L(p), k)\Psi_{p,\sigma_1}, \sum_{\sigma_1'} C_{\sigma_1'\sigma'}(L(p), k')\Psi_{p',\sigma_1'} \Big) \\
=& \sum_{\sigma_1} C^*_{\sigma_1\sigma}(L(p), k) C_{\sigma_1\sigma'}(L(p), k')(\Psi_{p,\sigma_1}, \Psi_{p',\sigma_1}) \\
=& (\Psi_{p,\sigma}, \Psi_{p',\sigma}) \sum_{\sigma_1} C^*_{\sigma_1\sigma}(L(p), k) C_{\sigma_1\sigma'}(L(p), k')\,.
\end{aligned}$$

因此：

$$C^\dagger(L(p),k)C(L(p),k)=\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}I\,. \tag{9}$$

这意味着 $\sqrt{\frac{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}}C(L(p),k)$ 是幺正的矩阵，因此存在可逆的线性变换（实际上也是幺正变换）S，使得 $\sqrt{\frac{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}}S^{-1}C(L(p),k)S$ 成为幺正矩阵的标准形式，即对角元素皆为单位模复数的对角阵 λ：

$$C(L(p),k)=\sqrt{\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}}S\lambda S^{-1}\,. \tag{10}$$

因此，如果用 S 作用于所有的单粒子态，则在所得的这组新的态下，$C(L(p),k)$ 取对角形式：

$$C_{\sigma'\sigma}(L(p),k)=\sqrt{\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}}\lambda_\sigma\delta_{\sigma'\sigma}\,. \tag{11}$$

再重新定义态的相角，把 λ_σ 吸进态的定义中，可得：

$$C_{\sigma'\sigma}(L(p),k)=\sqrt{\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}}\delta_{\sigma'\sigma}\,. \tag{12}$$

因此：

$$U(L(p))\Psi_{k,\sigma}=\sum_{\sigma'}C_{\sigma'\sigma}(L(p),k)\Psi_{p,\sigma'}=\sqrt{\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}}\Psi_{p,\sigma} \tag{13}$$

同时再定义 $\Psi_{p,\sigma}$ 为：

$$\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}}U(L(p))\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{14}$$

下面再考虑齐次 Lorentz 变换的表示 $U(\Lambda)$ 对一般动量态的作用：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}=N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{15}$$

作如此变形，是因为其中 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 恰好是不改变参考动量的变换：

$$[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)]^\mu{}_\nu k^\nu=[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)k]^\mu=[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda p]^\mu=k^\mu\,. \tag{16}$$

因此 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 就是小群的群元，记之为 $W(\Lambda,p)$，并将其表示记作 $D(W(\Lambda,p))$，则对参考动量态，有：

$$U(W)\Psi_{k,\sigma}=\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}\,. \tag{17}$$

对一般动量态，有：

$$\begin{aligned}U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}=&N(p)U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda,p))\Psi_{k,\sigma}=N(p)U(L(\Lambda p))\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{k,\sigma'}\\=&\Big(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\Big)\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\end{aligned}\tag{18}$$

可见，计算表示 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$，实际上就是计算出：

$$\Big(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\Big)\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\,.$$

到目前为止，我们已经得到了时空转动的表示：

$$U(\Lambda,0)\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,,\tag{19}$$

以及时空平移的表示：

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma}=e^{ia_\mu p^\mu}\Psi_{p,\sigma}\,.\tag{20}$$

使用乘法规则 $U(\Lambda_1,a_1)U(\Lambda_2,a_2)=U(\Lambda_1\Lambda_2,\Lambda_1a_2+a_1)$ 将它们组合起来，就有：

$$\begin{aligned}U(\Lambda,a)\Psi_{p,\sigma}=&U(1,a)U(\Lambda,0)\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))U(1,a)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\\=&\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}e^{ia_\mu(\Lambda p)^\mu}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\end{aligned}\tag{21}$$

接下来的步骤，就是找到小群表示 $D(W(\Lambda,p))$ 的具体形式。由于不同参考动量的小群不同，因此需分别讨论。在此，我们还要考察各个参考动量所在的动量类的物理意义。在前面的表中，(b)、(d)、(e) 和 (f) 不在今后的讨论范围。因为：物理上至今尚未发现负能态和虚质量态，而真空态是平庸的（至少看上去是如此），因此不予考虑。这样，需要仔细讨论的就只有 (a)、(c) 两种情况，分别是有质量和无质量的正能态。

在进入具体小群的讨论之间，可以给出量子数 σ 的意义。在我们选取的参考动量中，空间坐标的第 1、2 分量都是零。因而角动量算符 $\mathbf{J}$ 的第三分量 J^3 与动量算符 P^3 对易。

4 有质量的正能态

首先来看有质量的正能态。其参考动量为 $k^\mu=(M,0,0,0)$。将参考动量与任何此类中

的动量 p^μ 联系起来的 Lorentz 变换 $L(p)$ 可以取为：

$$L^i_k(p) = \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k \qquad \text{其中 } \hat{p}_i \equiv \frac{p^i}{|\vec{p}|}\,; \tag{22}$$

$$L^i{}_0(p) = L^0{}_i(p) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{p^i}{M}\,; \tag{23}$$

$$L^0{}_0(p) = \gamma \equiv \frac{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}{M}\,. \tag{24}$$

任何按以上形式给出的 $L(p)$ 均可分解成 $L(p) = R(\hat{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\hat{p})$。其中，$R(\hat{p})$ 是将 z 轴转到 $\hat{p}$ 方向的的空间转动，而 $B(|\vec{p}|)$ 是沿 z 轴的推进：

$$B(|\vec{p}|) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\gamma^2-1} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{25}$$

三维转动群 $SO(3)$ 的所有不等价不可约的幺正表示可以用一个参数 j 来标记，$j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots$，相应表示 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}$ 的维数为 $2j+1$。其具体形式为：

$$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(e^{\Theta}) = (e^{\frac{i}{2}\Theta_{ik}J^{(j)}_{ik}})_{\sigma'\sigma}\,; \tag{26}$$

其中 Θ_{ik} 是 $SO(3)$ 的群元，实际上就是三维正交矩阵。而 $J^{(j)}_{ik}$ 是相应的生成元的表示矩阵：

$$-(J^{(j)}_{12})_{\sigma'\sigma} = (J^{(j),3})_{\sigma'\sigma} = \sigma\delta_{\sigma'\sigma}\,; \tag{27}$$

$$-(J^{(j)}_{23} \pm iJ^{(j)}_{31})_{\sigma'\sigma} = (J^{(j),1} \pm iJ^{(j),2})_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma',\sigma\pm1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)} \tag{28}$$

其中 $\sigma = j, j-1, \cdots, -j+1, -j$。任何 $SO(3)$ 的表示都等价于某些不可约幺正表示的直和。我们称 j 为自旋。这些结果都是熟知的，但为了保持完整性，我们仍然简要给出对这个结果的推导：

根据角动量算符的对易关系，$[J^3, \mathbf{J}^2] = 0$，因此可以选择 $\mathbf{J}$ 和 J^3 的共同本征态，对应的本征值分别为 λ 和 σ。记这个态为 $\Psi_{\lambda,\sigma}$。

构造新的算符：$J_\pm = J^1 \pm iJ^2$，考察它们对 $\Psi_{\lambda,\sigma}$ 的作用。

$$J^3J_+\Phi_{\lambda,\sigma} = (J_+J^3 + J_+)\Phi_{\lambda,\sigma} = (\sigma+1)J_+\Phi_{\lambda,\sigma} \tag{29}$$

$$J^3J_-\Phi_{\lambda,\sigma} = (J_-J^3 - J_-)\Phi_{\lambda,\sigma} = (\sigma-1)J_+\Phi_{\lambda,\sigma}\,, \tag{30}$$

$$\mathbf{J}J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma} = J_\pm J^2\Phi_{\lambda,\sigma} = \lambda J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}\,. \tag{31}$$

由此得：

$$J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma} = C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}\,. \tag{32}$$

由归一化计算系数 $C_\pm$：

$$|C_\pm(\lambda,\sigma)|^2 = (C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}, C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}) = (J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}, J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}) = (\Phi_{\lambda,\sigma}, J_\mp J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma})$$

因此：

$$C_{\pm}(\lambda,\sigma)=\sqrt{\lambda-\sigma(\sigma\pm 1)}\,. \tag{33}$$

即：

$$J_{\pm}\Phi_{\lambda,\sigma}=\sqrt{\lambda-\sigma(\sigma\pm 1)}\Phi_{\lambda,\sigma\pm 1}\,. \tag{34}$$

进一步利用

$$\mathbf{J}^2-(J^3)^2=\frac{1}{2}(J_-^{\dagger}J_-+J_+^{\dagger}J_+)\,, \tag{35}$$

可得：

$$\lambda-\sigma^2=(\lambda-\sigma^2)(\Phi_{\lambda,\sigma},\Phi_{\lambda,\sigma})=(\Phi_{\lambda,\sigma},[\mathbf{J}^2-(J^3)^2]\Phi_{\lambda,\sigma})=\frac{1}{2}(\Phi_{\lambda,\sigma},[J_-^{\dagger}J_-+J_+^{\dagger}J_+]\Phi_{\lambda,\sigma})\geq 0$$

它意味着 σ 有上限和下限值, 设此上限值为 j, 下限值为 j', 则 $J_+\Phi_{\lambda,j}=0$,$J_-\Phi_{\lambda,j'}=0$。

$$\begin{aligned}0=&J_-J_+\Phi_{\lambda,j}=[\mathbf{J}^2-(J^3)^2-J^3]\Phi_{\lambda,j}=[\lambda-j(j+1)]\Phi_{\lambda,j} && (36)\\ 0=&J_+J_-\Phi_{\lambda,j'}=[\mathbf{J}^2-(J^3)^2+J^3]\Phi_{\lambda,j'}=[\lambda-j'(j'-1)]\Phi_{\lambda,j'} && (37)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\qquad \lambda=j(j+1)=j'(j'-1)\,. \tag{38}$$

j' 可解出为 $j'=-j$ 或 $j'=j+1$;$j'=j+1$ 显然是没意义的。因此 σ 的取值范围为 $-j\leq\sigma\leq j$。同时要求这个变化范围 $j-(-j)$ 为整数，因此 j 只可能为整数或半整数。

总结以上结果，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2\Phi_{j(j+1),\sigma}=&j(j+1)\Phi_{j,\sigma} && (39)\\ J^3\Phi_{j(j+1),\sigma}=&\sigma\Phi_{j(j+1),\sigma} && (40)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(J_{\pm})^j_{\sigma',\sigma}\equiv&(\Phi_{j(j+1),\sigma'},J_{\pm}\Phi_{j(j+1),\sigma})=C_{\pm}(j(j+1),\sigma)(\Phi_{j(j+1),\sigma'},\Phi_{j(j+1),\sigma\pm 1})\\ =&\sqrt{j(j+1)-\sigma(\sigma\pm 1)}\delta_{\sigma',\sigma\pm 1}=\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\delta_{\sigma',\sigma\pm 1} && (41)\\ (J^3)^j_{\sigma',\sigma}\equiv&(\Phi_{j(j+1),\sigma'},J^3\Phi_{j(j+1),\sigma})=\sigma(\Phi_{j(j+1),\sigma'},\Phi_{j(j+1),\sigma})=\sigma\delta_{\sigma',\sigma} && (42)\end{aligned}$$

由以上的讨论可知，有质量的正能单粒子态只能用 j 标记，因为 j 在 Lorentz 变换下不变，这对 σ 而言是不成立的。

5 无质量的正能态

无质量正能态的标准动量可取为 $k^{\mu}=(\kappa,0,0,\kappa)$。现在我们来找使它保持不变的 Lorentz 变换。前面已经提到，一切困难来源于 k^{μ} 有两个不为零的分量。然而我们可以通过坐标变换使得 k^{μ} 只剩一个不为零的分量。具体的做法就是引入光锥坐标系（light-cone coordinates）：

$$x^{\pm}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(x^3\pm x^0)\,. \tag{43}$$

而 x^1 和 x^2 保持不变。这样一来，标准动量就只剩下 k^- 分量不为零，其余分量皆为零。如果按 (x^+, x^2, x^3, x^-) 的顺序排列坐标，则使 $k^\mu = (0,0,0,\tilde{\kappa})$ 保持不变的坐标变换的一般形式为：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix} . \tag{44}$$

然而 Λ 作为 Lorentz 变换，须满足 $\Lambda g \Lambda^T = g$。注意到，度规在光锥坐标系下的矩阵为：

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{45}$$

由此给出 Λ 中各元素须满足的限制：

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = a_{13} = 0, \tag{46}$$

$$a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \qquad a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \qquad a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0\,, \tag{47}$$

$$a_{21} + a_{22}a_{42} + a_{23}a_{43} = 0, \qquad a_{31} + a_{32}a_{42} + a_{33}a_{43} = 0, \qquad 2a_{41} + a_{42}^2 + a_{43}^2 = 0\,. \tag{48}$$

由 (47) 诸式，可取 $a_{22} = a_{33} = \cos\theta$，$a_{23} = -a_{32} = \sin\theta$。而由 (48) 各式的限制，除了 θ 之外的自由变量只剩两个，不妨取之为 $\xi_1 = a_{42}$、$\xi_2 = a_{43}$。如此，则可得 $\Lambda(\xi,\theta)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 的一般形式：

$$\Lambda(\xi_1,\xi_2,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_1\cos\theta - \xi_2\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \xi_1\sin\theta - \xi_2\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -(\xi_1^2+\xi_2^2)/2 & \xi_1 & \xi_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

由此不难验证：

$$\Lambda(\xi,0)\Lambda(\bar{\xi},0) = \Lambda(\xi+\bar{\xi},0)\,. \tag{50}$$

$$\Lambda(0,\theta)\Lambda(0,\bar{\theta}) = \Lambda(0,\theta+\bar{\theta})\,. \tag{51}$$

$$\Lambda(\xi,\theta)\Lambda(\bar{\xi},\bar{\theta}) = \Lambda(R(\theta)\bar{\xi}+\xi,\theta+\bar{\theta})\,. \tag{52}$$

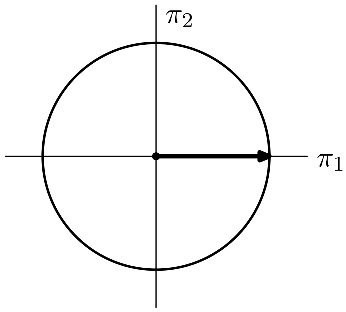
而以上三式说明，保持标准动量 k^μ 不变的 Lorentz 变换构成三参数群：$ISO(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$，即平面上的平移和旋转构成的群。其中 $\mathbb{R}^2$ 的两个参数对应于平移，$SO(2)$ 表示平面上的旋转。然而，这里的平面并非真实空间中的某个平面。前面已经说过，这个群在真实空间中没有很直观的对应。

现已证明，无质量正能态对应的小群是 $ISO(2)$ 群。下面求它的表示。由于 $ISO(2)$ 的结构和 Poincaré 群 $ISO(3,1)$ 几乎相同，因此可再次使用小群法。

定义群参数 ξ_1、ξ_2、θ 对应的生成元分别是 π_1、π_2、M。它们可以被分别解释成平面上的“动量”算符和“角动量”算子。由前面的群乘法规则可以写出生成元间的对易关系：

$$[\pi_1,\pi_2] = 0\,, \qquad [M,\pi_1] = i\pi_2\,, \qquad [M,\pi_2] = -i\pi_1\,. \tag{53}$$

仍然选取 π_1 和 π_2 的本征态作为表示基。在小群的作用下 $(\pi^1)^2+(\pi^2)^2$ 保持不变。则在现在的二维“动量”空间中，小群 $ISO(2)$ 的子群 $SO(2)$ 的轨道就是以原点为圆心的同心圆，以及原点：



任何不为零的“动量”$\pi=(\pi_1,\pi_2)$ 在 Lorentz 变换下都能转到“轨道”圆上的任何一点。故“动量”本征态在 M 的作用下可取任何本征值 θ。由于物理上未观察到这样的连续自由度，因此可以认为真实的物理对应于 $\pi=0$ 的情形。于是就只剩下 θ 一个自由度。回到普通坐标系，它恰对应于绕 x^3 轴的转动。因此，无质量正能态的唯一标记就是角动量在动量方向上的投影，或称为螺旋度 (helicity)。由此，可得：

$$U(W)\Psi_{k,\sigma}=e^{i\theta\sigma}\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{54}$$

或者：

$$D_{\sigma'\sigma}(W)=e^{i\theta\sigma}\delta_{\sigma'\sigma}\,. \tag{55}$$

接下来，我们研究 Poincaré 群的拓扑性质。它的一个重要结果是无质量正能态的螺旋度取分立的值。

首先，任何矢量 V^μ 都按如下规则对应于一个 2×2 的 Hermitian 矩阵：

$$V^\mu\to V^\mu\sigma_\mu=\begin{pmatrix}V^0+V^3 & V^1-iV^2\\ V^1+iV^2 & V^0-V^3\end{pmatrix}\equiv\nu\,. \tag{56}$$

注意到，$\det\nu=V^\mu V_\mu$，因此 Lorentz 变换在这种对应下表现为保持 ν 的行列式不变的变换。事实上，对任何行列式为 1 的 2×2 阶复矩阵 λ，$\det(\lambda\nu\lambda^\dagger)=\det\nu$ 并且 $\lambda\nu\lambda^\dagger$ 仍然是 Hermitian 矩阵。因此全体行列式为 1 的 2×2 阶复矩阵 $SL(2,\mathbb{C})$ 对应于全体齐次 Lorentz 变换 $SO(3,1)$。但是这个对应不是一一对应，因为容易验证 λ 和 $-\lambda$ 对应于同一个 Lorentz 变换。可以证明，在抹去这个“二对一”的条件下它们构成一一对应。因此可以写：$SO(3,1)\cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$。于是，可以通过研究 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ 的拓扑结构来得到 $SO(3,1)$ 的拓扑结构。

对任何 $\lambda\in SL(2,\mathbb{C})$，可以将之写为 $\lambda=ue^h$，其中 u 是行列式为 1 的矩阵，h 是零迹的 Hermitian 矩阵：

$$u=\begin{pmatrix}d+ie & f+ig\\ -f+ig & d-ie\end{pmatrix}\,,\qquad d^2+e^2+f^2+g^2=1\,. \tag{57}$$

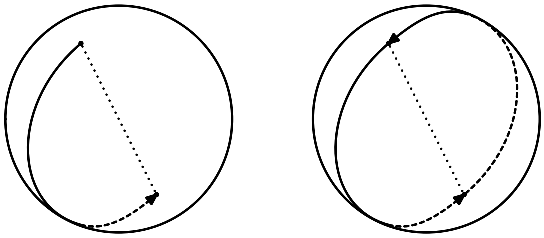
因此 u 的拓扑结构为 S_3，即三维球面。

$$h=\begin{pmatrix}c & a-ib\\ a+ib & -c\end{pmatrix}\,. \tag{58}$$

a, b, c 可取任意值，因此 h 对应的拓扑结构为 $\mathbb{R}^3$，是平庸的。

最后考虑到平移部分的拓扑 $\mathbb{R}^4$，可知 Poincaré 群的拓扑结构为 $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \times S_3/\mathbb{Z}_2$。其中只有 $S_3/\mathbb{Z}_2$ 具有非平凡的拓扑结构，即双连通性。亦即，它以 $\mathbb{Z}_2$ 为基本群。

我们用 $S_2/\mathbb{Z}_2$ 图示这个性质：



由于对径点被视作等同，因此左图的路径当然是一条闭合路径。显见它不能在球面内连续地缩成一点。但如果我们绕其两周，再次利用对径点等同的性质，可以将第二周转移到第一周的对径点上，从而绕两周的双圈变成了球面内的一条闭路。如右图所示，显然，它可以在球面内连续缩到一点。

为了解释非平凡的拓扑性质如何影响表示的行为，需要了解表示建立的方法。此处需要用到较多的数学。这里只作简述，而不过分追求数学的严格性。

对于任何以 θ 标记的群元素 $g(\theta)$，可以建立一条连接单位元 $e = g(0)$ 与 $g(\theta)$ 的路径 p。我们定义单位元的表示 $U(e)$ 就是单位映射，则 $g(\theta)$ 的表示可以通过单位元的表示沿着路径 p 的某种连续平移得到。如果群流形是单连通的，则连接单位元 e 与群元 $g(\theta)$ 的任何两条路径都同伦。但是，如果此群存在非平庸的基本群，则群上的所有路径将被分成若干道路（同伦）类。因此，如果从单位元 e 到 $g(\theta)$ 的两条路径 p_1 和 p_2 属于两个不同的道路类，则沿这两条道路得到的 $g(\theta)$ 的两个表示将相差一个相因子。这就是所谓投影表示（相差相因子的表示）的拓扑起源。事实上，投影表示的相因子本身形成了基本群的一维表示。

前面提到，双连通群的基本群就是 $\mathbb{Z}_2$，而 $\mathbb{Z}_2$ 的一维表示就是 ± 1。因此对于我们的 Lorentz 群而言，投影表示就是相差一个符号的表示。另一方面，双连通群中的任意双圈可缩为 1，即同伦于 0，因此按双圈平移的表示不含相因子。特别地，绕第三轴转 4π 的转动等于单位元。于是有 $e^{4i\pi\sigma} = 1$。因此，σ 只能取整数和半整数的值。

最后，我们来总结关于有质量与无质量的正能态的主要结果。

- 有质量的正能态的角动量第三分量 σ 在 Lorentz 变换下将发生变化，对于 $2j+1$ 维表示，一共有 $2j+1$ 个分量。这意味着这 $2j+1$ 个分量表示同一个单粒子态。

- 对于无质量正能态，角动量第三分量，亦即螺旋度，是 Lorentz 不变的。这意味着每个无质量正能态只有一种可能的态。但是正如我们将在后面看到的，空间反射会将螺旋度 σ 变成 $-\sigma$。如果我们认为能够通过空间反射联系起来的两个态也表示同一个单粒子态，则无质量的正能态至多有两个态，它们的螺旋度分别取 σ 和 $-\sigma$。

- 因此，对于自旋 0 和 1/2 的单粒子态，有质量与无质量的态的个数一样，但对于自旋 1 以及更高的单粒子态，有质量态的个数将超过无质量态。这一现象暗示，当我们研究无质量态时，将有质量态的结果取零质量极限的方法对于自旋 0 与 1/2 的粒子态也许成立，但对自旋为 1 以及更高的粒子态是有问题的。因为这一极限过程伴随着自由度的减少。如果我们希望自由度在零质量极限下变少，就需要某种对称性

以保证多余的自由度不能被观测到。这种对称性就是规范对称性。从另一方面看，如果自旋为 1 或更高的无质量态存在，则规范对称性的破坏必与质量有关，而与其它相互作用无关。

References

[1] 鲜于中之：《Seminar(1) 课程报告》，Chapter 2.

[2] S.Weinberg: *The quantum theory of fields*, Vol.1, Cambrige, 2002

****

Mathematical Quotation

Poincaré, Jules Henri (1854-1912)

Mathematics is the art of giving the same name to different things.

数学趣闻

Schwartz,Laurent 的岳父是 Levy,Paul，一个干瘪的法国老头，是 Hadamard 的学生。Functional analysis 这个词就是他最先引进的。有一次 Schwartz 问他是否知道 Lebesgue's theorem of density 的简单证明。" 我见到过几个，但是现在都记不得了，不过我可以想一下找出一个证明。" 半个小时以后，他给出了一个漂亮简洁的证明。6 个月后，当 Schwartz 再次向他提到这个证明时，他却说，" 啊！多么好的想法！我从未想到过这个。" 当 Schwartz 告诉他这就是他 6 个月前发现的证明，Levy 根本不相信。