有关 Lebesgue 可测的非 Borel 集的一个注记

李超[*]

使用集合论的工具来说明存在 Lebesuge 可测的非 Borel 集, 或许看起来远比构造单独一个例子来的强大, 因为我们将证明一个奇妙的事实: "**几乎所有的**"可测集均非 Borel 集. 许多文献都提到了类似的集合论论证(如 [6, 2, 4]), 但要么略去了证明, 要么简单的提及"每个集合都能通过有限次或可列次运算得到". 但问题在于, 通过开集出发经过可列次运算得到的集族关于可列并是否真的**封闭**呢?

在这里, 我们将用超限归纳法给出 Borel 集的完整构造, 并计算 Borel 集类的基数. 构造与计算本身并不复杂, 只是需要一系列的准备. 这里将关于所需要的基数运算, 序数, 超限归纳法的内容整理在前两节以保证自包含性. 因此如果熟悉集合论的话, 可以直接跳过前两节的准备而到第 3 节.

1 基数

记 $\operatorname{card} A$ 表示集合 A 的基数, 下面有关基数的结论是我们从 [1] 中熟知的.

定理1 (Schröder-Bernstein)**.** *若* $\operatorname{card} A \le \operatorname{card} B$ *且* $\operatorname{card} B \le \operatorname{card} A$*, 则* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$*.*

为了计算集合的基数更加方便, 我们可以引入如下自然的基数算术运算.

定义1 (基数的算术运算)**.** 设 A, B 为两个集合且 $A \cap B = \varnothing$, $\kappa = \operatorname{card} A$, $\lambda = \operatorname{card} B$, 则定义

$$\kappa + \lambda := \operatorname{card}(A \cup B),$$
$$\kappa \cdot \lambda := \operatorname{card} A \times B,$$
$$\kappa^{\lambda} := \operatorname{card} A^{B}.$$

其中 $A \times B$ 为 A, B 的 Cartesian 积, A^B 表示由 B 到 A 的所有函数构成的集合.

[*]基数 61.

容易验证如上的定义是可以定义好的. 如果我们将 n 个元组成的有限集的基数记为 n, 那么定义 1 下, $\mathscr{P}(A)$(集合 A 的幂集)的基数为 $2^{\operatorname{card} A}$ 就有了精确的含义, 同时也可以知道

$$\underbrace{\kappa+\cdots+\kappa}_{n\text{个}}=n\cdot\kappa,$$

可见加法和乘法符合的规则和一般数的运算相差不大, 下面的命题列出了一些基数运算的基本法则.

命题1 (基数的运算法则)**.** *设 κ,λ,μ 为三个基数, 则有:*

1° $\kappa+(\lambda+\mu)=(\kappa+\lambda)+\mu$;

2° $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$;

3° $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$;

4° $\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu)=(\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu$;

5° $\kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\mu$;

6° $\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu=\kappa^{\lambda+\mu}$;

7° $\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu=(\kappa\cdot\lambda)^\mu$;

8° $(\kappa^\lambda)^\mu=\kappa^{\lambda\cdot\mu}$;

9° 若 $\kappa\le\lambda$, 则 $\kappa+\mu\le\lambda+\mu$;

10° 若 $\kappa\le\lambda$, 则 $\kappa\cdot\mu\le\lambda\cdot\mu$;

11° 若 $\kappa\le\lambda$, 则 $\kappa^\mu\le\lambda^\mu$;

12° 若 $\kappa\le\lambda$, 则 $\mu^\kappa\le\mu^\lambda$.

证明. 不难直接构造所需要的双射. □

命题2. *记 $\aleph_0=\operatorname{card}\mathbb{N}$, $\aleph=\operatorname{card}\mathbb{R}$, 则*

1° $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$;

2° $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$;

3° $\aleph=2^{\aleph_0}$;

4° $\aleph\cdot\aleph=\aleph$;

5° $\forall 0<\kappa\le\aleph$, $\kappa\cdot\aleph=\aleph$;

6° $\aleph^{\aleph_0}=\aleph$.

证明. 1°, 2°, 3° 都是我们所熟知的, 对 4°, 由 3°, 1° 及命题 1 知

$$\aleph\cdot\aleph=2^{\aleph_0}\cdot2^{\aleph_0}=2^{2\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph.$$

对于 5°, 由于 $\kappa\cdot\aleph\le\aleph\cdot\aleph=\aleph$ 及 $\aleph\le\kappa\cdot\aleph$, 根据定理 1 可知 $\kappa\cdot\aleph=\aleph$.

对于 $6°$, 由 $2°$ 及命题 1 可知

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph,$$

即得结论. □

在本节最后给出我们熟知的重要的 Cantor 定理.

定理2 (Cantor)**.** 对任意集合 A, $\operatorname{card} A < 2^{\operatorname{card} A}$.

2 序数

我们简单地介绍一下序数的理论, 序数的一些性质在 Borel 集的构造中起到十分重要的作用.

定义2 (序数)**.** 设 A, B 为两个线性序集, 若存在映射 $f : A \to B$ 为双射且保持序关系, 则称 A 和 B 是**序同构**的(易知是一个等价关系). 我们给 A 所属的序同构集类赋予一个记号 $\operatorname{ord} A$, 称为 A 的**序型**. 如果 A 还是良序集, 则称 $\operatorname{ord} A$ 为一个**序数**.

例2.1. 集合 $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ 可以赋予一个普通的序关系, 对应的序数 $\operatorname{ord} A_n$ 可记为 n. 我们记 $0 = \operatorname{ord} \varnothing$. 对 $\mathbb{N}$ 也赋予普通序关系, 可知 $\mathbb{N}$ 与 A_n 不是序同构的, 对应的序数 $\operatorname{ord} \mathbb{N}$ 记为 ω. 我们还可以给 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$($\infty$ 只是一个记号)定义一个序关系:

$$1 < 2 < 3 < \cdots < \infty,$$

对应的序数记为 $\omega + 1$, 注意此集与 $\mathbb{N}$ 也不是序同构的, 可知 $\omega \neq \omega + 1$. 类似还可以定义 $\mathbb{N} \cup \{\infty, \infty + 1\}$($\infty + 1$ 也只是一个记号) 上的序关系:

$$1 < 2 < 3 < \cdots < \infty < \infty + 1,$$

对应的序数记为 $\omega + 2$ 等等. 还有更多的序数, 例如

$$1 < 2 < 3 \cdots < \infty < \infty + 1 < \cdots < 2 \cdot \infty,$$

对应的序数可记为 $2 \cdot \omega$ 等等. 可见虽然只有一个可数基数 $\aleph_0$, 可数集对应的序数却不只一个.

下面我们要在全体序数中引入序结构, 就像我们对自然数所做的那样.

定义3 (初始段)**.** 设 A 为一个线性序集, 由 x 决定的**初始段**$A_x := \{y \in A \mid y < x\}$.

定义4 (序数的序关系)**.** 设 α, β 为两个序数, 称 $\alpha < \beta$, 若存在 $x \in B$ 使得 A 与 B_x 是序同构的. 称 $\alpha \leq \beta$, 若 $\alpha < \beta$ 或 $\alpha = \beta$.

根据选择公理可以证明:

定理3 (序数的序结构)**.** *任意由序数组成的集合在定义 4 下构成线性序集.*

下一个定理看上去是很直观的.

定理4. *设 $\alpha > 0$ 为序数, 令 P_α 为所有小于 α 的序数构成的集合, 则 P_α 为良序集, 且 $\operatorname{ord} P_\alpha = \alpha$.*

证明. 设 A 满足 $\operatorname{ord} A = \alpha$, 构造序同构 $f : P_\alpha \to A$, $\forall \beta < \alpha$ 定义 $f(\beta) = x$, 其中 x 满足 $\operatorname{ord} A_x = \beta$(验证 x 是唯一的!). $\square$

可以知道对任一个基数 κ, 都有序数 α, 使得 $P_\alpha = \kappa$. 因为设集合 A 的基数为 κ, 即 $\operatorname{card} A = \kappa$. 利用良序定理(任一个集均可良序化, 等价于选择公理), 在 A 上定义一个良序, 再由定理 4 即知 $\alpha = \operatorname{ord} A$ 对应的 P_α 满足 $\operatorname{ord} P_\alpha = \alpha = \operatorname{ord} A$, 从而 $\operatorname{card} P_\alpha = \operatorname{card} A = \kappa$. 在某些集合论的书中, 基数甚至就被定义为等势与已知集合的最小序数.

如下结果将在后面反复用到.

定理5. *记 ω_1 为最小的不可数序数(由上面的讨论知其存在性), 则*

1° *若序数 $\alpha < \omega_1$, 则 α 至多可数;*

2° *若序数 $\alpha_n < \omega_1 (\forall n = 1, 2, \ldots)$, 则存在 $\beta < \omega_1$, 使得 $\alpha_n < \beta (\forall n = 1, 2, \ldots)$.*

证明. 对于 1° 由 ω_1 的取法即知; 对于 2°, 令

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{\alpha_n},$$

则由定理 4 可知 P 为可数个可数集的并, 故也是可数集, 从而 $P_{\omega_1} \setminus P \neq \varnothing$, 在其中取一个 β 即可. $\square$

最后, 由于后面构造的过程中牵扯到序数集, 需要使用超限归纳法, 我们也在这里给出其严格叙述. 超限归纳法是数学归纳法向比 $\mathbb{N}$ 更大的良序集合(例如基数或序数)的扩展, 它的证明其实并不需要选择公理(如其常常被误解的), 而如数学归纳法一样只需要良序集的性质，.

定理6 (超限归纳法)**.** *设 A 为一个良序集, $B \subseteq A$, 若 $A_x \subseteq B$ 就有 $x \in B$, 则 $B = A$.*

3 Borel 集的构造

我们首先构造一般的由 $\mathbb{R}$ 的任意包含空集的子集族 $\mathscr{F}_0$ 生成的 σ-代数. 对任意子集族 $\mathscr{F}$, 设 $\mathscr{F}^*$ 表示所有形如

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

的集合所构成的子集族, 其中的 A_n 满足要么 $A_n \in \mathscr{F}$, 要么 $A_n^c \in \mathscr{F}$. 设 ω_1 表示最小的不可数的序数, $\forall \alpha, 0 < \alpha < \omega_1$, 根据定理 4, 我们可用超限归纳法构造 $\mathscr{F}_\alpha$, 即构造

$$\mathscr{F}_\alpha = \left(\bigcup_{0 \leq \beta < \alpha} \mathscr{F}_\beta \right)^*.$$

命题3. *$\forall \alpha, 0 \leq \alpha < \omega_1$, $\mathscr{F}_\alpha$ 如上定义, 令*

$$\mathscr{F} = \bigcup_{0 \leq \beta < \omega_1} \mathscr{F}_\alpha,$$

则 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}_0$ 生成的 $\mathbb{R}$ 的 σ-代数.

证明. 证明分为几条, 逐一验证定义:

1° $\mathscr{F}_0 \in \mathscr{F}$.

2° 由于 $\varnothing \in \mathscr{F}_0$, 可知

$$\mathbb{R} \in \mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}.$$

3° 若 $A \in \mathscr{F}$, 则必存在 $0 \leq \alpha < \omega_1$, 使得 $A \in \mathscr{F}_\alpha$, 从而 $\forall \beta, \alpha < \beta < \omega_1$(由定理 5, 这样的 β 总是存在的),

$$A^c \in (\mathscr{F}_\alpha)^* \subseteq \mathscr{F}_\beta \subseteq \mathscr{F}.$$

4° 设可数个集合 $A_n \in \mathscr{F}$, 则 $\forall n, \exists 0 \leq \alpha_n < \omega_1$, 使得 $A_n \in \mathscr{F}_{\alpha_n}$, 根据定理 5, 有 $\beta < \omega_1$, 使得 $\forall n, \alpha_n < \beta$, 于是

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\alpha_n} \right)^* \subseteq \mathscr{F}_\beta \subseteq \mathscr{F}.$$

由此即知 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}_0$ 生成的 $\mathbb{R}$ 的 σ-代数. □

下边我们考虑 $\mathscr{F}_0$ 为所有 $\mathbb{R}$ 上所有开集构成的子集族, 根据命题 3, 此时构造的 $\mathscr{F}$ 即为 Borel 集全体 $\mathscr{B}$.

定理7. $\boxed{\operatorname{card}\mathscr{B}=\aleph}$, *即 Borel 集全体有连续统基数.*

证明. 首先我们使用超限归纳法, 证明 $\forall\alpha, 0\le\alpha<\omega_1$, $\operatorname{card}\mathscr{F}_\alpha\le\aleph$.

1° 对于 $\alpha=0$, 由于 $\mathbb{R}$ 上的开集均为至多可列个开区间的并, 而 $\mathbb{R}$ 上开区间全体的基数为 $\aleph\cdot\aleph=\aleph$(命题 2-4°), 从而(命题 1-5°)

$$\operatorname{card}\mathscr{F}_0\le\aleph\cdot\aleph_0=\aleph.$$

2° 假设 $\forall\beta, 0\le\beta<\alpha$, 都有 $\operatorname{card}\mathscr{F}_\beta\le\aleph$, 则

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{0\le\beta<\alpha}\mathscr{F}_\beta\right)\le\aleph\cdot\aleph_0=\aleph,$$

从而(命题 2-6°)

$$\operatorname{card}\mathscr{F}_\alpha=\operatorname{card}\left(\bigcup_{0\le\beta<\alpha}\mathscr{F}_\beta\right)^*\le\aleph^{\aleph_0}=\aleph.$$

从而由超限归纳法证得 $\forall\alpha, 0\le\alpha<\omega_1$, $\operatorname{card}\mathscr{F}_\alpha\le\aleph$.

设 $\aleph_1$ 为 ω_1 对应的基数, 则由 $\aleph_1\le\aleph$ 及命题 2-4° 最终得到

$$\operatorname{card}\mathscr{B}=\operatorname{card}\bigcup_{0\le\beta<\omega_1}\mathscr{F}_\alpha\le\aleph\cdot\aleph_1=\aleph.$$

另一方面, 显然 $\operatorname{card}\mathscr{F}_0\ge\aleph$(例如考虑开区间族 $\{(-\infty,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$), 故 $\operatorname{card}\mathscr{B}\ge\aleph$, 由定理 2 即知 $\operatorname{card}\mathscr{B}=\aleph$. □

下面我们要转向我们的最初目标, 考虑 Borel 集和 Lebesuge 可测集之间的关系.

定理8. *设 Lebesgue 可测集全体记为 $\mathscr{L}$, 则* $\boxed{\operatorname{card}\mathscr{L}=2^{\aleph}}$.

证明. 设 C 为零测度的 Cantor 集, 则 $\operatorname{card}C=\aleph$, 且 C 的任一个子集均为可测集(零测集的子集), 故 $\operatorname{card}\mathscr{L}\ge2^{\aleph}$. 而另一方面 $\mathbb{R}$ 的子集全体的基数为 $2^{\aleph}$, 故 $\operatorname{card}\mathscr{L}\le2^{\aleph}$, 由定理 2 知 $\operatorname{card}\mathscr{L}=2^{\aleph}$. □

推论1. *存在 Lebesgue 可测的非 Borel 集.*

证明. 由定理 7, 8 及 1 即知. □

由基数的论证可以知道一个奇妙的事实: "**几乎所有的**" Lebesgue 可测集均非 Borel 集. 尽管构造出哪怕一个可测非 Borel 集都不是那么平凡的一件事.

参考文献

[1] V. A. Zorich 著; 蒋铎等译, *数学分析, 第一卷(第四版)*, 高等教育出版社, 北京, 2006.

[2] G. Klambauer 著; 陈冠初译, *实分析*, 湖南大学出版社, 长沙, 1986.

[3] 耿素云, 屈婉玲编, *集合论导引*, 北京大学出版社, 北京, 1990.

[4] 谢邦杰编著, *超穷数与超穷论法*, 吉林人民出版社, 长春, 1979.

[5] E. Hewitt, K. R. Stromberg 著; 孙广润译, *实分析与抽象分析*, 天津大学出版社, 天津, 1994.

[6] W. Rudin 著; 赵慈庚, 蒋铎译, *数学分析原理*, 机械工业出版社, 北京, 2004.

[7] T. Jech, *Set theory*, Academic Press, New York, 1978.

****

Mathematical Quotations

Oppenheimer, Julius Robert (1904 - 1967)

Today, it is not only that our kings do not know mathematics, but our philosophers do not know mathematics and – to go a step further – our mathematicians do not know mathematics.