

2010. 7

六字班毕业论文特刊



目录

Gauss曲率方程的blow-up性质	高挺然	1
随机过程的正则点与半椭圆方程的Fichera点	王竹海	30
A Canonical Dual Approach for Solving Quadratic Programs with Linear and a Quadratic Constraint.....	王子腾	47
权为一的模形式与Galois表示	阳恩林	63
Jones多项式及其范畴化.....	宗正宇	82
毕业感言	王竹海	97

Gauss曲率方程的blow-up性质

高挺然*

指导教师：李宇翔副教授

摘 要

本文考虑 \mathbb{R}^2 中有界区域 Ω 上的一系列Gauss曲率方程 $-\Delta u_k = V_k e^{u_k}$ 在条件 $\sup_k (\|V_k\|_{C^1(\Omega)} + \int_B e^{u_k}) < +\infty$ 下的收敛情况。利用该方程的 ϵ -正则性可知, 如果 u_k 的blow-up点集 S 非空, 则对任意的 $\Omega \subset\subset B \setminus S$, u_k 减去一个常数后在 Ω 上 C^1 收敛到Green函数 G , 它满足方程

$$-\Delta G = \sum_{p \in S} 8\pi \delta_p$$

此时, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} V_k e^{u_k} = \sum_{\Omega \cap S} 8\pi$$

该结果有鲜明的几何意义。熟悉偏微分方程领域里的一些常用技巧亦是本综合论文训练的重要目的。

关键词：Gauss曲率方程, blow-up分析, L^p 估计, ϵ -正则性

§1 引言

令 f 是Riemann流形 (Σ, g) 到 \mathbb{R}^n 的共形嵌入, 记 g_f 是 f 诱导的度量, 并设

$$g_f = e^{2u} g \tag{1-1}$$

则我们有Gauss曲率方程和平均曲率方程

$$\begin{aligned} -\Delta_g u &= K_f e^{2u} - K_g \\ \Delta_g f &= e^{2u} H_f, \end{aligned} \tag{1-2}$$

*基数61

其中 K_g 和 K_f 分别是度量 g 和 g_f 下的Gauss曲率, H_g 和 H_f 分别是度量 g 和 g_f 下的平均曲率。上述方程的每一个解将给出Riemann流形上的一个共形坐标系, 且在此坐标系下Gauss曲率为 K_f 。通过考察此方程, 我们可以利用Gauss曲率 K (以及平均曲率 H) 研究共形嵌入 f 的性质。比如, 我们经常需要考虑共形嵌入序列 f_k 的收敛, 使得在这一系列方程中的Gauss曲率和平均曲率收敛到预先给定的Gauss曲率和平均曲率。在这方面, Brezis[1], 李岩岩[2], 林长寿[3]等多名数学家及其合作者曾做出过许多深刻的结果。

在本文中, 我们只考虑Gauss曲率对 u 的影响。在(1-2)中, 作变换 $v = 2u$, 则易见

$$-\Delta_g v = -2\Delta_g u = 2K_f e^{2u} - 2K_g = 2K_f e^v - 2K_g$$

特别地, 当 g 为标准欧氏度量 $dx^2 + dy^2$ 时, $\Delta_g = \Delta$, $K_g = 0$, 记 $2K_f = V$, 于是(1-2)化为

$$-\Delta v = V e^v$$

所以我们只需要考察上述形式的方程。

本文考虑 \mathbb{R}^2 中有界区域 Ω 上的方程序列

$$-\Delta u_k = V_k(x) e^{u_k}, \quad x \in \Omega \subset \subset \mathbb{R}^2 \quad (1-3)$$

的blow-up性质。我们的工作将基于如下假设:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |V_k| e^{u_k} &< \Lambda_1 \quad \text{对任意 } k \in \mathbb{N} \text{ 成立} \\ \|V_k - V_0\|_{C^\infty(\Omega)} &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \\ 0 &< a < |V_0| < b < \infty, \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (1-4)$$

并且存在实数 $q \in (1, 2)$ 使得

$$r^{q-2} \int_{B_r(p)} |\nabla u_k|^q dx < \Lambda_2, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall p \in \Omega \quad (1-5)$$

条件(1-4)中第一式是 Ω 上的全Gauss曲率积分, 而第三式是一个结构性的假设, 目的是为了简化下面将要进行的分析。条件(1-5)的一个显著优点是它的左端在伸缩变化下保持不变, 具体地说, 如果令 $v_k(x) = u_k\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, 则 $\nabla v_k(x) = \frac{1}{\lambda} \nabla u_k\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, 因此我们有

$$\begin{aligned} (\lambda r)^{q-2} \int_{B_{\lambda r}(p)} |\nabla v_k(x)|^q dx &= (\lambda r)^{q-2} \cdot \frac{1}{\lambda^q} \int_{B_{\lambda r}(p)} \left| \nabla u_k\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right|^q dx \\ &= (\lambda r)^{q-2} \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^q} \int_{B_r(p)} |\nabla u_k(t)|^q dt = r^{q-2} \int_{B_r(p)} |\nabla u_k(t)|^q dt \end{aligned}$$

当我们考虑一般紧无边Riemann流形上的相应方程时, 条件(1-5)将自然地满足。进入下一章的分析之前, 我们的考虑暂时还不需要条件(1-5)。

前面已经提到, 我们希望考虑一个序列, 当Gauss曲率 V_k 光滑地收敛到某个已知的Gauss曲率 V_0 , 且曲面的面积(亦即 $\int e^u$)有界时, 方程的解序列的收敛情况。在比较一般的情况下, 解序列 $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 未必收敛, 这是因为我们只能从方程中得到 $\|\Delta u_k\|_{L^1}$ 有界, 这不足以得到 u_k 的 C^0 估计。但我们的方程有一个很好的性质: 可以找到一个足够小的正数 ϵ_0 , 当 $\int_B e^u < \epsilon_0$ 时, u_k 就有 C^0 估计。我们一般把这种性质称为 ϵ -正则性。对于满足 ϵ -正则性的方程序列, 我们往往可以建立一套完善的blow-up分析理论, 非常清晰给出 u_k 的收敛情况。

一般地, blow-up分析包含三个部分。

1. Blow-up点集和blow-up点附近的bubble

blow-up点集就是满足

$$A(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_r(p)} e^{u_k} > 0$$

的所有点 p 所成之集合。Blow-up点破坏了方程正则性, 在它们附近 u_k 不会收敛。但在在blow-up点 p 附近, 我们往往能找到一些序列 $x_k \rightarrow p$, $r_k \rightarrow 0$, 使得 $u_k(x_k + r_k x)$ 减去某个常数列后有很好的收敛性质, 它们所收敛到的极限一般被称为bubble。

具体到我们的方程, 我们可以考虑一个小区域 $B_\delta(p)$ 上的方程(1-3), 其中 $B_\delta(p) \cap S = \emptyset$ 。Gauss曲率方程的 ϵ -正则性将给我们提供 $B_\delta(p)$ 中的一个点列 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, 满足

$$u_k(x_k) = \sup_{B_\delta(p)} u_k \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad x_k \rightarrow p, \quad k \rightarrow \infty$$

首先, 根据极大值原理, 若在某个小邻域内恒有 $V_0 < 0$, 则 u_k 在此邻域内的最大值必在边界上取到, 从而在此邻域内部将不会有blow-up点。故在blow-up点 p 一定有 $V_0(p) > 0$ 。此时, 如果令

$$m_k = u_k(x_k), \quad r_k = e^{-\frac{m_k}{2}}$$

并考虑

$$v_k(x) = u_k(x_k + r_k x) - m_k$$

其中 v_k 的定义域为

$$\Omega_k = \{x : |x_k + r_k x - p| < \delta\}$$

则 v_k 将满足方程

$$-\Delta v_k = V_k(x_k + r_k x) e^{v_k}, \quad x \in \Omega_k$$

利用[1]的正则性结果以及[4]中的一个重要结果, 可知对任意的 $R > 0, u_k(x_k + r_k x) - m_k$ 在 $B_{Rr_k}(x_k)$ 上光滑收敛到一个函数

$$w = -2 \log \left(1 + \frac{V_0(p)}{8} |x - p|^2 \right)$$

它满足

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_0(p) e^w dx = 8\pi \quad (1-6)$$

2. 弱极限

由条件(1-5), u_k 减去一个合适的常数 c_k 后将在 $W^{1,q}(\Omega)$ 中弱收敛。进一步, 在 $B_\delta(p)$ 之外(更一般地, 在任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$ 上), 由Gauss曲率方程的 ϵ -正则性, 可以知道成立

$$u_k \rightharpoonup \infty, \quad k \rightarrow \infty$$

从而由Poincaré不等式和条件(1-5), 可以证明存在趋向于 ∞ 的常数 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, 使得 $u_k - c_k$ 在 Ω' 上光滑地收敛到一个Green函数。

3. 脖子

在blow-up分析中, 区域 $B_\delta \setminus B_{Rr_k}(p)$ 被称为脖子, 它往往是blowup分析中最困难的部分。一般而言, 我们很难弄清楚脖子的细节。但脖子的边界是清楚的, 所以我们需要采取一些技巧, 把对脖子的讨论转化为对脖子边界的讨论。我们这里借助于一个Pohozaev型恒等式, 可以计算出 $A(p) = 8\pi$, 并且通过证明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_\delta(x_k) \setminus B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k} dx = 0$$

将得到

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega'} V_k e^{u_k} dx = \sum_{p \in \Omega' \cap S} 8\pi. \quad (1-7)$$

上述这些结果都有非常直观的几何解释。

1. 由于方程(1-3)的右端是恒大于零的 L^1 函数, 故我们可以将其理解为 Ω 上的有限正Borel测度, 亦即某种能量分布。粗略地说, blow-up点集就是能量聚集的点, 其中的每个blow-up点就对应于这个测度的原子。整个blow-up分析的过程实际上指出, 只有在“能量聚集”的点上才会发生blow-up现象。

2. 由Gauss-Bonnet定理, 在一个二维球面 S^2 上应有

$$\int_{S^2} K dA = 2\pi\chi(S^2) = 4\pi$$

而在我们的情况下, $V = 2K$, 因此相应的积分应为 8π 。因此, 对于 S 中的点 p , $A(p) = 8\pi$ 事实上暗示, 在极限情形下blow-up点上就像是连接着一个二维球面一样, 而在blow-up点集之外曲面是平坦的; 而且每个blow-up点必然仅连接着一个二维球面, 不会出现几个球面连接在同一个blow-up点上的情形。因此我们将这个极限称为“bubble”, 它是对上述情形的一个形象的刻画。

3. (1-7)一般被称为能量恒等式, 它的几何意义是说在整个极限过程中能量守恒的, 所有能量最终聚集到blow-up点集上。

至此, 我们可以将本文的主要结果总结成以下定理。

定理1.1. $\forall k \in \mathbb{N}$, 设 u_k 是方程

$$-\Delta u_k = V_k(x)e^{u_k}, \quad x \in \Omega \subset \subset \mathbb{R}^2 \quad (1-8)$$

的解。另外设

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |V_k| e^{u_k} &< \Lambda_1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \|V_k - V_0\|_{C^\infty(\Omega)} &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \\ 0 &< a < V_0 < b < \infty, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (1-9)$$

并且存在实数 $q \in (1, 2)$ 使得

$$r^{q-2} \int_{B_r(p)} |\nabla u_k|^q dx < \Lambda_2, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall p \in \Omega \quad (1-10)$$

则有且仅有以下三种情形之一发生:

1. u_k 在 Ω 的任意紧子集上有界;
2. u_k 在 Ω 的任意紧子集上一致收敛到 $-\infty$;
3. 存在有限点集 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset \Omega$, 使得

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_r(a_i)} V_k e^{u_k} dx = 8\pi$$

此时, u_k 在任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$ 上一致收敛到 $-\infty$, 而且存在常数列 $c_k \rightarrow -\infty$, 使得 $u_k - c_k$ 在 $W^{1,q}(\Omega)$ 中弱收敛、在任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$ 上一致收敛到 *Green* 函数 G , G 满足方程

$$-\Delta G = \sum_{i=1}^m 8\pi \delta_{a_i}$$

且对任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega'} V_k e^{u_k} dx = \sum_{p \in S \cap \Omega'} 8\pi$$

这一定理的原始版本的表述形式最早出现在[1]中。

§2 Gauss曲率方程的 ϵ -正则性

§2.1 方程 $-\Delta u = f \in L^1(\Omega)$ 的正则性

设 Ω 为 \mathbb{R}^n 上的开集。当方程

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega$$

的右端 $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ 时, 利用Calderon-Zygmund分解和Marcinkiewicz插值, 我们有经典的 L^p 估计[5]

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} &\leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}), \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega \\ C &= C(n, p, \Omega, \Omega') \end{aligned}$$

但当 $f \in L^1(\Omega)$ 时, 一般得不到上述估计。对这种情形, [1]中给出了如下结果

引理2.1. 令 $f \in L^1(\Omega)$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是方程

$$-\Delta u = f \tag{2-11}$$

的弱解, 则对任意的 $\epsilon \in (0, 4\pi)$ 和 $q \in (1, 2)$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{(4\pi-\epsilon) \frac{|u|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} &< C(\Omega, \epsilon) \\ \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} &< C(\Omega, \epsilon) \|f\|_{L^1} \end{aligned} \tag{2-12}$$

Proof. 我们应用Struwe[6]的办法。令

$$u_t = \max\{0, \min\{u, t\}\}$$

则有

$$\int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx = \int_{\Omega} f u_t$$

所以

$$\int_{0 \leq u \leq t} |\nabla u|^2 \leq t \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

令 u_t^* 是 u_t 的重排。设 $|B_R| = |\Omega|$, $|B_\rho| = |\{u \geq t\}|$, 则

$$u_t^*|_{B_\rho} = t, \quad u_t^*|_{\partial B_R} = 0$$

由于 $1 \leq p < \infty$ 时,

$$u \in W_0^{1,p}(B_R) \Leftrightarrow u \in W^{1,p} \text{ 且在 } \partial B_R \text{ 上 } Tu = 0 \text{ (} T \text{ 为迹算子)}$$

故有

$$\inf_{u \in W_0^{1,2}(B_R), u|_{B_\rho} = t} \int_{B_R \setminus B_\rho} |\nabla u|^2 dx = \inf_{v \in W^{1,2}(B_R), v|_{\partial B_R} = 0, v|_{\partial B_\rho} = t} \int_{B_R \setminus B_\rho} |\nabla v|^2 dx$$

但为人所熟知的事实是, 通过对

$$\int_{B_R \setminus B_\rho} |\nabla v|^2 dx$$

做变分, 可知这个极小值必然在 $\Delta v = 0$ 时取到。利用区域 $B_R \setminus B_\rho$ 上满足特定边值条件的调和函数的唯一性, 可设极小值在

$$w = A \log r + B$$

处取到, 其中 A, B 的值可用边值条件唯一确定。直接计算可知

$$A = \frac{t}{\log \rho - \log R}$$

$$B = -\frac{t \log R}{\log \rho - \log R}$$

此时有

$$w = \frac{t \log r}{\log \rho - \log R} - \frac{t \log R}{\log \rho - \log R}$$

$$\nabla w = \frac{t}{\log \rho - \log R} \cdot \frac{1}{r^2} (x_1, x_2)$$

故达到的极小值应为

$$\int_{B_R \setminus B_\rho} |\nabla w|^2 dx = \frac{t^2}{(\log R - \log \rho)^2} \int_0^\pi \int_\rho^R \frac{1}{r^2} \cdot r dr d\theta$$

$$= 2\pi \frac{(\log R - \log \rho) t^2}{(\log R - \log \rho)^2} = 2\pi \frac{t^2}{\log R - \log \rho}$$

所以

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{t^2}{\log R - \log \rho} &= \inf_{v \in W^{1,2}(B_R), v|_{\partial B_R}=0, v|_{\partial B_\rho}=t} \int_{B_R \setminus B_\rho} |\nabla v|^2 dx \\ &\leq \int_{B_R \setminus B_\rho} |\nabla u^*|^2 \leq \int_{0 \leq u \leq t} |\nabla u|^2 \leq t \|f\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

而这等价于

$$\left| \frac{R}{\rho} \right| \geq e^{\frac{2\pi t}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}$$

故有

$$|\{u \geq t\}| = \pi |\rho|^2 \leq |\Omega| e^{\frac{4\pi}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} t}$$

由此我们得到如下估计

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{(4\pi-\epsilon) \frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k \leq u \leq k+1} e^{(4\pi-\epsilon) \frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k \leq u} e^{(4\pi-\epsilon) \frac{k+1}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\{u \geq k\}| e^{(4\pi-\epsilon) \frac{k+1}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} \tag{2-13} \\ &\leq |\Omega| \sum_{k=0}^{\infty} e^{4\pi \frac{-k}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} \cdot e^{(4\pi-\epsilon) \frac{k+1}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} \\ &= |\Omega| e^{\frac{4\pi}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-\epsilon(k+1)}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} < C(\Omega, \epsilon) \end{aligned}$$

类似地, 对方程

$$-\Delta(-u) = -f$$

重复上面的步骤, 可得估计

$$\int_{\Omega} e^{(4\pi-\epsilon) \frac{u^-}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx < C(\Omega, \epsilon) \tag{2-14}$$

通过对函数 e^x 的级数展开式中各项使用三角不等式, 可以知道

$$e^{(4\pi-\epsilon) \frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} + e^{(4\pi-\epsilon) \frac{u^-}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} \geq e^{(4\pi-\epsilon) \frac{|u|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}$$

因此(2-13)和(2-14)给出

$$\int_{\Omega} e^{(4\pi-\epsilon) \frac{|u|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx \leq \int_{\Omega} e^{(4\pi-\epsilon) \frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx + \int_{\Omega} e^{(4\pi-\epsilon) \frac{u^-}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx < C(\Omega, \epsilon) \tag{2-15}$$

这就证明了(2-12)的第一式。

为了估计 $\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}$ ，我们分别估计 $\|\nabla u^+\|_{L^q(\Omega)}$ 和 $\|\nabla u^-\|_{L^q(\Omega)}$ 。由Young不等式

$$\begin{aligned}
|\nabla u^+|^q &= \frac{|\nabla u^+|^q}{[(1+u^+)(1+2u^+)]^{\frac{q}{2}}} \cdot [(1+u^+)(1+2u^+)]^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2/q} \left(\frac{|\nabla u^+|^q}{[(1+u^+)(1+2u^+)]^{\frac{2}{q}}} \right)^{\frac{q}{2}} + \left(1 - \frac{1}{2/q} \right) \left([(1+u^+)(1+2u^+)]^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{2}{2-q}} \\
&\leq C \left[\frac{|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)} + ((1+u^+)(1+2u^+))^{\frac{2}{2-q} \cdot \frac{q}{2}} \right] \\
&= C \left[\frac{|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)} + ((1+u^+)(1+2u^+))^{\frac{q}{2-q}} \right]
\end{aligned} \tag{2-16}$$

我们需要分别估计上式右端的两项在 Ω 上的积分。第二项的积分是容易控制的，因为我们已经证明了对任意的 $\epsilon > 0$ 有

$$\int_{\Omega} e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx < C(\Omega, \epsilon)$$

由于 $\epsilon > 0$ ， $q \in (0, 1)$ ，故 $\mu = \frac{(4\pi-\epsilon)(2-q)}{q\|f\|_{L^1(\Omega)}} \geq 0$ ，因此

$$e^{\mu u^+} \geq 1 + \mu u^+ + \frac{\mu^2}{2}(u^+)^2$$

进而可以得到估计

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} ((1+u^+)(1+2u^+))^{\frac{q}{2-q}} dx &= \int_{\Omega} (1 + 3u^+ + 2(u^+)^2)^{\frac{q}{2-q}} dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(e^{\mu u^+} + \frac{3}{\mu} e^{\mu u^+} + \frac{4}{\mu^2} e^{\mu u^+} \right)^{\frac{q}{2-q}} dx \\
&= \left(1 + \frac{3}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right)^{\frac{q}{q-2}} \int_{\Omega} (e^{\mu u^+})^{\frac{q}{2-q}} dx \\
&= C(\epsilon) \int_{\Omega} e^{\frac{(4\pi-\epsilon)(2-q)}{q\|f\|_{L^1(\Omega)}} \cdot \frac{q}{2-q} u^+} dx \\
&= C(\epsilon) \int_{\Omega} e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} dx \\
&< C(\Omega, \epsilon)
\end{aligned} \tag{2-17}$$

为控制第一项，只要在(2-11)两边同乘上 $\log \frac{1+2u^+}{1+u^+}$ ，并注意到

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)} dx &= \int_{\Omega} \frac{(2+2u^+-1-2u^+)|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)} dx = \int_{\Omega} \frac{2|\nabla u^+|^2}{1+2u^+} dx - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u^+|^2}{1+u^+} dx \\
&= - \int_{\partial\Omega} \nabla u^+ \cdot \log(1+2u^+) + \int_{\Omega} \nabla u^+ \cdot \nabla \log(1+2u^+) \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \nabla u^+ \cdot \log(1+u^+) - \int_{\Omega} \nabla u^+ \cdot \nabla \log(1+u^+) \\
&= \int_{\Omega} (-\Delta u) \cdot \log(1+2u^+) - \int_{\Omega} (-\Delta u) \cdot \log(1+u^+) \\
&= \int_{\Omega} (-\Delta u) \cdot \log \frac{1+2u^+}{1+u^+} \\
&= \int_{\Omega} f \cdot \log \frac{1+2u^+}{1+u^+} \\
&= \int_{\Omega} f \cdot \left(\log 2 - \frac{1}{1+u^+} \right) \\
&\leq \log 2 \cdot \int_{\Omega} f \\
&\leq \log 2 \cdot \|f\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2-18}$$

对(2-16)式两端在 Ω 上积分，并利用(2-18)和(2-17)，就得到

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u^+|^q dx &\leq C \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)} + ((1+u^+)(1+2u^+))^{\frac{q}{2-q}} \right] dx \\
&< C \log 2 \cdot \|f\|_{L^1(\Omega)} + C \cdot C(\Omega, \epsilon) < C(\Omega, \epsilon)
\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^q dx < C(\Omega, \epsilon) \tag{2-19}$$

故由三角不等式立知

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u^+|^q dx + \int_{\Omega} |\nabla u^-|^q dx < C(\Omega, \epsilon)$$

这就证明了(2-12)的第二式。 \square

注记2.1. 事实上上述的结论对弱方程

$$-(a_{ij}u_i)_j = f$$

也成立，其中

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$$

引理2.1的估计带给我们两条推论。

推论2.1. 令 $f \in L^1(\Omega)$, 则对任意的 $q \in (1, 2)$, 方程(2-11)在 $W_0^{1,q}(\Omega)$ 中的解存在且唯一。

Proof. 唯一性由区域上调和函数的唯一性立得, 故只需证明存在性。取一列 $f_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ 趋向 f :

$$\|f_k - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

令 u_k 满足方程

$$-\Delta u_k = f_k, \quad u_k|_{\partial\Omega} = 0$$

则对任意的 $\epsilon \in (0, 4\pi)$, Poincaré 不等式和引理2.1给出

$$\|u_k - u_m\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C(\Omega, \epsilon) \|f_k - f_m\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

所以 $\{u_k\}$ 是 $W_0^{1,q}(\Omega)$ 中 Cauchy 列, 它收敛到方程(2-11)的解 $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ 。 \square

推论2.2. 令 $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$, $q \in (1, 2)$ 。设 $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ 满足方程(2-11), 则 $u \geq 0$, a.e. $x \in \Omega$ 。

Proof. 令 $f^A = \min\{f, A\}$, 则 $0 \leq f^A \leq A$, $f^A \in L^\infty(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ 。利用 L^p 估计 ($p = 3$) 及 Sobolev 嵌入 $W^{2,3}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega)$, 可得 $u^A \in C^1(\Omega)$ 满足方程

$$-\Delta u^A = f^A$$

令 $A \rightarrow +\infty$, f^A 逐点单调收敛到 f , 于是单调收敛定理和引理2.1使得

$$\|u^A - u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow \infty$$

但由极大值原理知 $u^A \geq 0$, $\forall x \in \Omega$, $\forall A \geq 0$ 。故 $u \geq 0$, a.e. $x \in \Omega$ 。 \square

§2.2 Gauss 曲率方程的 ϵ -正则性

对 Gauss 曲率方程 $-\Delta u = V e^u$ 运用引理2.1, 我们可以得到如下非常重要的 ϵ -正则性。

定理2.1. 记 B 为 \mathbb{R}^2 中的单位圆盘。若 u 满足方程

$$-\Delta u = V e^u, \quad x \in B \tag{2-20}$$

其中

$$|V| < b < \infty, \quad x \in B \tag{2-21}$$

则对任意的 $q \in (1, 2)$, 存在 $\epsilon_0 > 0$, 当

$$\int_B e^u dx < \epsilon_0 \quad (2-22)$$

时, 我们有

$$\|\nabla u\|_{W^{1, \frac{2q}{2-q}}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C(\epsilon_0, b) (1 + \|\nabla u\|_{L^q(B)}) \quad (2-23)$$

Proof. 令 v 满足方程

$$-\Delta v = V e^u$$

$$v|_{\partial B} = 0$$

则由定理条件以及引理2.1可知, 对任意 $0 < \epsilon_1 < 4\pi$, 我们有

$$\int_B e^{\frac{4\pi - \epsilon_1}{\|V e^u\|_{L^1(B)}} |v|} dx < C(\epsilon_1)$$

固定这个 ϵ_1 , 取 $\epsilon_0 = \frac{4\pi - \epsilon_1}{b} \cdot \frac{2-q}{2q}$, 则当

$$\int_B e^u dx < \epsilon_0 \quad (2-24)$$

时, 由Hölder不等式得

$$\int_B e^{\frac{2q}{2-q} |v|} dx = \int_B e^{\frac{4\pi - \epsilon_1}{b\epsilon_0} |v|} dx \leq \int_B e^{\frac{4\pi - \epsilon_1}{\|V e^u\|_{L^1(B)}} |v|} dx < C \quad (2-25)$$

由不等式

$$e^{|v|} \geq 1 + |v|$$

以及 $q \in (1, 2)$ 时

$$\frac{2q}{q-1} > q > 1$$

可得一系列估计

$$\int_B |v| dx < C(\epsilon_0, b), \quad \int_B |v|^q dx < C(\epsilon_0, b), \quad \int_B |v|^{\frac{2q}{2-q}} dx < C(\epsilon_0, b)$$

由于我们有方程

$$-\Delta(u - v) = 0$$

故由调和函数的平均值性质, 对任意的 $x \in B_{\frac{3}{4}}$

$$u(x) - v(x) = \frac{1}{|B_{\frac{1}{4}}|} \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} (u - v) dx$$

但由Jensen不等式

$$\int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} u dx \leq \log \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} e^u dx < \log \epsilon_0$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} (u - v) dx &\leq \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} |u - v| dx \\ &\leq \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} |u| dx + \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} |v| dx < C(\epsilon_0, b) \end{aligned}$$

于是前面的平均值性质给出

$$\forall x \in B_{\frac{3}{4}} \quad u(x) - v(x) < C(\epsilon_0, b)$$

所以我们有

$$\int_{B_{\frac{3}{4}}} e^{\frac{2q}{2-q}u} dx = \int_{B_{\frac{3}{4}}} e^{\frac{2q}{2-q}v} e^{\frac{2q}{2-q}(u-v)} dx < C(\epsilon_0, b)$$

在 $B_{\frac{3}{4}}$ 上应用 L^p 估计($p = \frac{2q}{2-q}$)以及Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式, 立得

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - \bar{u})\|_{W^{1, \frac{2q}{2-q}}(B_{\frac{1}{2}})} &\leq C \left(\left(\int_{B_{\frac{3}{4}}} e^{\frac{2q}{2-q}u} dx \right)^{\frac{2-q}{2q}} + \left(\int_{B_{\frac{3}{4}}} |u - \bar{u}|^{\frac{2q}{2-q}} dx \right)^{\frac{2-q}{2q}} \right) \\ &\leq C(\epsilon_0, b) \left(1 + \|u - \bar{u}\|_{W^{1, q}(B_{\frac{3}{4}})} \right) \\ &\leq C(\epsilon_0, b) \left(1 + \|\nabla u\|_{L^q(B_{\frac{3}{4}})} \right) \end{aligned}$$

□

由Morrey不等式, 上述定理有以下直接的推论:

推论2.3. 在与定理2.1相同的条件下, 我们有

$$\|\nabla u\|_{C^{0, \alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C(\epsilon_0, b)(1 + \|\nabla u\|_{L^q(B)}) \quad (2-26)$$

对某实数 $0 < \alpha < 1$ 成立。

注记2.2. 注意到在定理2.1的证明中我们构造性地给出了 ϵ_0 的形式。事实上, 为使关键的(2-25)成立, 由Hölder不等式可知只要 $\frac{2q}{2-q} \leq \frac{4\pi - \epsilon_1}{b\epsilon_0}$ 成立即可。由于 $\epsilon_1 \in (0, 4\pi)$, $q \in (1, 2)$, 我们自然地 ϵ_0 的取值有一个估计

$$0 < \epsilon_0 < \frac{2\pi}{b}$$

§3 方程 $-\Delta u_k = V_k e^{u_k}$ 的blow-up分析

本章我们在假设(3-28)和(3-29)下考虑方程(1-3)的解的blow-up性质。

§3.1 Blow-up点集及其基本性质

§3.1.1 Blow-up点集

下面我们考虑(1-3)。对任意 B 中的点 p , 定义

$$A(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_r(p)} V_k e^{u_k} dx$$

一列方程 $-\Delta u_k = V_k e^{u_k}$ ($k \in \mathbb{N}$)的blow-up点集 S 定义为

$$S = \{p \in B : A(p) > 0\}$$

事实上, $A(p)$ 可以被理解为某种“质量”。精确地说, 由于 $\{V_k e^{u_k}\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中有界, 故它在弱*拓扑下存在一个子列收敛到某个有限带符号测度 μ 。在blow-up点集中的任意点 p 上, 有 $\mu(\{p\}) \geq A(p) > 0$, 亦即 p 是 μ 的原子。

§3.1.2 一个下界估计: 最简单的blow-up分析

首先假设 V_k 在 $C^\infty(\Omega)$ 中的极限 V_0 具有正的下界。在这种情形, §2.2中的 ϵ -正则性立即给出 $A(p)$ 的一个正的下界:

定理3.1. $\forall k \in \mathbb{N}$, 设 u_k 是方程

$$-\Delta u_k = V_k(x) e^{u_k}, \quad x \in \Omega \subset \subset \mathbb{R}^2 \quad (3-27)$$

的解。另外设

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |V_k| e^{u_k} &< \Lambda_1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \|V_k - V_0\|_{C^\infty(\Omega)} &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \\ 0 &< a < V_0 < b < \infty, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (3-28)$$

并且存在实数 $q \in (1, 2)$ 使得

$$r^{q-2} \int_{B_r(p)} |\nabla u_k|^q dx < \Lambda_2, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall p \in \Omega \quad (3-29)$$

若 $p \in S$, 则 $A(p) \geq a\epsilon_0$, 其中 ϵ_0 如定理2.1所述。

Proof. 若不然, 设 $A(p) < a\epsilon_0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得对足够大的 k 恒有

$$a \int_{B_\delta(p)} e^{u_k} < \int_{B_\delta(p)} V_k e^{u_k} < a\epsilon_0$$

因此

$$\int_{B_\delta(p)} e^{u_k} < \epsilon_0$$

此时由推论2.3和条件3-29可知

$$\|\nabla u_k\|_{C^{0,\alpha}\left(B_{\frac{\delta}{2}}(p)\right)} < C(\epsilon_0, b)(1 + \|\nabla u\|_{L^q(B_\delta(p))}) < C(\epsilon_0, b)(1 + C\|V_k e^{u_k}\|_{L^1(B_\delta(p))}) < C(\epsilon_0, b)$$

所以由Newton-Leibniz公式可知

$$\operatorname{osc}_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k < C(\epsilon_0, b) \quad (3-30)$$

我们断言, 此时对足够大的 k 必有

$$\sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k < C < \infty \quad (3-31)$$

其中 C 为某正常数。从而

$$A(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_r(p)} V_k e^{u_k} dx \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} V_k e^C dx \leq b e^C \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\pi \delta^2}{4} = 0$$

与 $A(p) > 0$ 矛盾。

为证明断言(3-31), 首先注意到Jensen不等式给出

$$\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k dx \leq \log \int_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} e^{u_k} dx < C(\epsilon_0) \quad (3-32)$$

若

$$\sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty \quad (3-33)$$

则由(3-30), 我们亦有

$$\inf_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty \quad (3-34)$$

从而

$$\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k dx \geq \frac{\pi \delta^2}{4} \cdot \inf_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty \quad (3-35)$$

与(3-32)矛盾。这就完成了证明。 \square

注记3.1. 在上述证明中, 实际上我们指出了如下事实: 若 $p \in S$, 则对足够小的 δ , 必有

$$\sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty$$

而不论 V_0 是否有正的下界。这就是 “blow-up” 字面上的意思。

注记3.2. 正如引言所说, 若 $V_0 \neq 0$ 且 $p \in S \neq \emptyset$, 则必有 $V_0(p) > 0$ 。事实上, 若 $V_0(p) < 0$, 由于 V_k 光滑收敛到 V_0 , 必存在 p 的小邻域 Ω_1 , 使得在 Ω_1 上对一切足够大的 k 均有 $V_k < 0$ 。固定这个 Ω_1 , 将所有的方程 (3-27) 限制到 Ω_1 上加以考虑。由于 $V_k \in C^\infty(\Omega_1)$, 根据标准的椭圆方程的正则性估计, 我们可以得到 $u_k \in C^\infty(\Omega)$, 而且对任意的 k , 成立有

$$\sup_{\Omega_1} u_k = \sup_{\partial\Omega_1} u_k$$

但我们知道函数列 $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的极大值点列 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 在 $k \rightarrow \infty$ 时趋向于 p , 因此对充分大的 k , u_k 的最大值将在 Ω_1 的内部达到。因此由强极大值原理, 可以得知对足够大的 $k \in \mathbb{N}$, 在 Ω_1 上恒有 $u_k = \text{const}$ 。但现在我们假设 $V_0(p) < 0$, 在 Ω_1 上对一切足够大的 k 均有 $V_k < 0$, 因此方程 (3-27) 在 Ω_1 上将无法被满足。

注记3.3. 在 $V_0(p) = 0$ 的情形, 我们没有第二章中建立的 ϵ -正则性, 考虑 u_k 的收敛情况将遇到更大的困难。因此本章中的大部分技巧都建立在 $V_0(0) > 0$ 的假设下。对 $V_0(p) = 0$ 的情形, 目前相关的工作也非常少, 本文不予讨论。

推论3.1. 在定理 3.1 的条件下, S 是孤立点集。

Proof. 这由定理 3.1 和 $\int_{\Omega} |V_k| e^{u_k} < \Lambda_1$ 立即可得。 □

推论3.2. 在定理 3.1 的条件下, S 是有限点集。

Proof. 这是因为 $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^2$ 。 □

§3.2 Blow-up 点附近的 bubble 和下界的改进

在上一节中我们建立了 $A(p)$ 的一个下界估计 $A(p) \geq a\epsilon_0$ 。根据第一章最后的注记, 我们大概可以看到这个下界有多大:

$$0 < a\epsilon_0 < \frac{a}{b} 2\pi < 2\pi$$

下面我们通过分析 blow-up 点附近的 bubble 来将这个下界提升至 8π 。

定理3.2. 在与定理 3.1 相同的条件下, 我们有

$$A(p) \geq 8\pi$$

我们将这个定理的证明分为四步。

引理3.1. 在与定理3.1相同的条件下, 对 S 中的任意点 p , 存在一列点 $x_k \rightarrow p, k \rightarrow \infty$ 使得 $u_k(x_k) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ 。

Proof. 设 $p \in S$, 由 S 中点的孤立性, 可取 $\delta > 0$, 使得 $B_\delta(p) \cap S = \{p\}$ 。由注记3.2, 必有 $\sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \rightarrow +\infty$ 。令

$$u_k(x_k) = \sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k$$

并设 $x_0 \in \overline{B_{\frac{\delta}{2}}(p)}$ 使得 $x_k \rightarrow x_0, k \rightarrow \infty$ 。我们断言必有 $x_0 = p$ 。若不然, 则存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $B_{\delta_1}(x_0) \cap S = \emptyset$ 。由于 $A(x_0) = 0$, 可以找到 $\delta_2 > 0$, 满足 $\delta_2 < \delta_1$, 且类似于我们在定理3.1中的断言(3-31), 对足够大的 k 有

$$\sup_{B_{\frac{\delta_1}{2}}(x_0)} u_k < C < \infty$$

特别地, $u_k(x_k) < C$ 对足够大的 k 成立, 与 $u_k(x_k) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ 矛盾。 \square

下面我们令

$$m_k = u_k(x_k), \quad r_k = e^{-\frac{m_k}{2}}$$

易见

$$\begin{aligned} m_k &\rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty \\ r_k &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

再令

$$v_k(x) = u_k(x_k + r_k x) - m_k$$

其中 v_k 的定义域为

$$\Omega_k = \{x : |x_k + r_k x - p| < \delta\}$$

由于 $r_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, 故 Ω_k 单调上升地趋于 \mathbb{R}^2 。易知在 Ω_k 上有

$$\begin{aligned} v_k &\leq 0, \quad \forall x \in \Omega_k \\ v_k(0) &= \sup_{\Omega_k} v_k = 0 \end{aligned}$$

v_k 满足方程

$$\begin{aligned} -\Delta v_k(x) &= r_k^2 \cdot (-\Delta u_k(x_k + r_k x)) \\ &= V_k(x_k + r_k x) e^{u_k(x_k + r_k x)} \cdot e^{-m_k} = V_k(x_k + r_k x) e^{v_k(x)} \end{aligned}$$

亦即

$$-\Delta v_k = V_k(x_k + r_k x)e^{v_k}, \quad x \in \Omega_k \quad (3-36)$$

对任意固定的 $R > 0$, 由于 $\Omega_k \nearrow \mathbb{R}^2$, 故对一切足够大的 k , 我们可以将方程(3-36)全部限制到 B_R 上加以考虑。

引理3.2.

$$\|v_k\|_{L^\infty(B_R)} \leq C(R) \quad (3-37)$$

其中 $C(R)$ 是某仅依赖于 R 的正常数。

Proof. 令 v'_k 满足

$$\begin{aligned} -\Delta v'_k &= V_k(x_k + r_k x)e^{v_k}, \quad x \in B_{2R} \\ v'_k|_{\partial B_{2R}} &= 0 \end{aligned}$$

v'_k 的存在性由推论2.1保证。在与定理3.1相同的条件下, $V_k e^{v_k} \in L^1(B_{2R})$, $V_k e^{v_k} \geq 0$, 故由推论2.2, $v'_k \geq 0$, a.e. $x \in B_{2R}$ 。因此由(2-12)的第一式可知必有

$$\|v'_k\|_{L^\infty(B_{2R})} \leq C(R) \quad (3-38)$$

注意到

$$\Delta(-v_k + v'_k) = 0, \quad x \in B_{2R}$$

因此, 重复定理2.1的证明的前半部分, 可知

$$|-v_k + v'_k| < C < \infty, \quad x \in B_R$$

由此可知, (3-38)蕴含着(3-37)。 □

从上面构造的 L^∞ 有界序列中抽取一个光滑收敛子列的技术是常用的。我们将其写入下面的引理。

引理3.3. 存在 $\{v_k\}$ 的一个子列光滑收敛到某函数 w 。 w 满足方程

$$-\Delta w = V_0(p)e^w \quad (3-39)$$

且

$$w(0) = \sup_{B_R} w = 0 \quad (3-40)$$

Proof. 对任意的实数 $1 < p < \infty$, 引理3.2指出 $V_k e^{v_k} \in L^p(B_R)$ 。由 L^p 估计, 可知序列 $\{v_k\}$ 在 $W^{2,p}(B_R)$ 中有界。由于 $p > 1$ 时 $W^{2,p}(B_R)$ 是自反的, 故存在 $\{v_k\}$ 的一个子列 (不妨仍记为 $\{v_k\}$) 在 $W^{2,p}(B_R)$ 中弱收敛于某函数 w 。

注意到方程(3-36)右端含有 v_k , 故我们可以对(3-36)两端求各种二阶广义导数, 然后再次使用 L^p 估计, 推知 $\{v_k\}$ 在 $W^{4,p}(B_R)$ 中有界。重复这一过程, 我们知道事实上对任意的整数 $m > 0$, $\{v_k\}$ 在 $W^{m,p}(B_R)$ 中有界。由经典的Sobolev嵌入定理 (例如[7]§5.6.3, Theorem 6), $\{v_k\}$ 在 $C^\infty(B_R)$ 中有界。特别地, $\{v_k\}$ 在 B_R 上是一致有界和等度连续的, 因此由Arzelà-Ascoli定理可知存在 $\{v_k\}$ 的一个子列 (不妨仍记为 $\{v_k\}$) 在 B_R 上一致收敛。由强收敛和弱收敛同时成立时极限的唯一性, 这个一致收敛的极限必为 w 。类似地, 对 $\{v_k\}$ 的各阶导数分别使用Arzelà-Ascoli定理, 可知 v_k 实际上是光滑地收敛到 w 的。由此我们可以在方程(3-36)两端取极限, 进而得到(3-39)和(3-40)。 \square

最后我们来完成定理3.2的证明。

定理3.2的证明. 由上述诸引理, 我们有

$$\int_{B_R} V_0(p) e^w dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_R} V_k(x_k + r_k x) e^{v_k} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{Rr_k}(x_k)} e^{-m_k} V_k(x) e^{u_k} dx < C \quad (3-41)$$

其中用到 $m_k \rightarrow +\infty$ 以及 $\int_{\Omega_k} |V_k| e^{u_k} < \Lambda_1$ 。由此可见, 常数 C 与 R 无关。在(3-41)两端同时令 $R \rightarrow \infty$ 并利用 $V_0(p) > a > 0$, 我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^w dx \leq C < +\infty \quad (3-42)$$

[4]利用活动平面法证明了在条件(3-42)下方程(3-39)有唯一解

$$w = -2 \log \left(1 + \frac{V_0(p)}{8} |x - p|^2 \right)$$

且它满足

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^w dx = \frac{8\pi}{V_0(p)} \quad (3-43)$$

注意到, 对任意固定的 $r > 0$, 由于

$$r_k \rightarrow 0, \quad x_k \rightarrow p, \quad k \rightarrow \infty$$

故对一切足够大的 k 总能有 $B_{Rr_k}(x_k) \subset B_r(p)$ 。因此

$$\begin{aligned}
A(p) &= \lim_{R \rightarrow \infty} A(p) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r(p)} V_k e^{u_k} dx \\
&\geq \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k} dx \\
&\geq \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k - m_k} dx \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{v_k} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} V_0(p) e^w dx = 8\pi
\end{aligned}$$

其中用到 $e^{-m_k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ 以及(3-43)。至此我们证明了 $A(p) \geq 8\pi$ 。 \square

注记3.4. 在(3-41)中, 通过一个极限过程, 对足够大的 k 我们可以将任何 B_R 压缩到 Ω_k 中。这里 R 的任意性使得我们可以对 R 取极限, 进而得到(3-42)。

§3.3 u_k 在 $\Omega \setminus S$ 上的收敛

经过上一节对blow-up点集的讨论, 我们可以完整地刻画 u_k 在 Ω 上的收敛情况。当 $p \notin S$ 时, 对任意的 $\epsilon > 0$, 我们可以找到 $\delta > 0$, 使得当 k 足够大时, 总有

$$\int_{B_\delta(p)} V_k e^{u_k} dx < \epsilon_0 \quad (3-44)$$

同定理3.1中的(3-30)和(3-31), 我们有

$$\operatorname{osc}_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k < C < \infty, \quad \sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k < C$$

所以, 对任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$, 应用紧覆盖可得

$$\operatorname{osc}_{\Omega'} u_k < C(\Omega, \Omega'), \quad \sup_{\Omega'} u_k < C(\Omega, \Omega')$$

以下我们讨论两种可能性, 并指出 u_k 在 $\Omega \setminus S$ 上的收敛不会有其他的情况。

§3.3.1 情形一: 存在 $x_0 \in \Omega \setminus S$, 使得 $u_k(x_0) \rightarrow -\infty$

此时, 由

$$\operatorname{osc}_{\Omega'} u_k < C(\Omega, \Omega')$$

可知, 在任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 上

$$u_k \rightrightarrows -\infty, \quad k \rightarrow \infty$$

取 $\delta > 0$, 使得 $B_\delta(x_0) \cap S = \emptyset$ 。令 $\bar{u}_k = \frac{1}{|B_\delta(x_0)|} \int_{B_\delta(x_0)} u_k dx$ 。我们有

$$\begin{aligned} |u_k(x_0) - \bar{u}_k| &= \left| \frac{1}{|B_\delta(x_0)|} \int_{B_\delta(x_0)} (u_k(x_0) - u_k) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|B_\delta(x_0)|} \int_{B_\delta(x_0)} |u_k(x_0) - u_k| dx \\ &\leq \operatorname{osc}_{B_\delta(x_0)} u_k < C(\Omega, \Omega') < \infty \end{aligned}$$

由Poincaré不等式以及估计(3-29), 我们有

$$\|u_k - u_k(x_0)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C + \|u_k - \bar{u}_k\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C'(1 + \|\nabla u_k\|_{L^q(\Omega)}) < C''$$

因此我们可以设

$$u_k - u_k(x_0) \rightharpoonup G, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{in} \quad W^{1,q}(\Omega)$$

对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 用一个“approximation identity”式的手段, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla u_k \nabla \varphi dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} V_k e^{u_k} \varphi dx = \sum_{p \in S} A(p) \varphi(p)$$

其中我们用到之前的结论: 在任意 $\Omega' \subset \subset \Omega \setminus S$ 上, $u_k \rightrightarrows -\infty$, $k \rightarrow \infty$, 因此在 S 之外上述积分收敛到0。因此, 我们找到的 G 类似于Green函数, 在分布意义下满足下面的方程

$$-\Delta G = \sum_{p \in S} A(p) \delta_p$$

对任意固定的 $\Omega' \subset \subset \Omega \setminus S$, 由于 $\operatorname{osc}_{\Omega'} u_k < C(\Omega, \Omega')$, 故有 $\|u_k - u_k(x_0)\|_{L^\infty(\Omega')} < C(\Omega, \Omega')$, 因而 $e^{u_k} = e^{u_k - u_k(x_0) + u_k(x_0)}$ 在任意的 L^p 中有界。类似于引理3.3的手段, 可以知道函数列 $\{u_k - u_k(x_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ 实际上在任意 $\Omega' \subset \subset \Omega$ 中光滑地收敛到 G 。

§3.3.2 情形二: 存在点 $x_0 \in \Omega \setminus S$, 使得 $u_k(x_0) > -M$

在这种情形下, 对任意的 $\Omega' \subset \subset \Omega$, 类似于情形一的讨论, 我们知道:

1. $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega')} < C$;
2. u_k 在 $W^{1,q}(\Omega)$ 中弱收敛到一个函数 u_0 满足方程

$$-\Delta u_0 = V_0 e^{u_0} + \sum_{p \in S} A(p) \delta_p$$

且 u_k 在 Ω' 上光滑收敛到 u_0 。

下面我们证明, 此时必有 $S = \emptyset$, 从而 u_k 在 Ω 上内闭光滑收敛到 u_0 。

若不然, 取 $p \in S$, 由 S 中点的孤立性, 可取 $\delta > 0$ 使得 $B_\delta(p) \cap S = \{p\}$ 。令 v 满足方程

$$\begin{aligned} -\Delta v &= V_0 e^{u_0} \\ v|_{\partial B_\delta(p)} &= 0 \end{aligned}$$

由推论2.2, $v \geq 0$ 。在 $B_\delta(p)$ 上我们有

$$-\Delta(u_0 - v) = A(p)\delta_p$$

因此

$$-\Delta \left(u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| \right) = 0, \quad x \in B_\delta(p) \quad (3-45)$$

我们知道, 当 $p < 2$ 时, $\log |x - p| \in W^{2,p}(B_\delta(p))$ 。现在 $q \in (1, 2)$, 因此对方程(3-45)用 L^q 估计即知

$$u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| \in W^{2,q}(B_\delta(p))$$

而由条件(3-29)和估计(2-12)的第二式, 我们有

$$\|\nabla(u_0 - v)\|_{L^q(B_\delta(p))} \leq \|\nabla u_0\|_{L^q(B_\delta(p))} + \|\nabla v\|_{L^q(B_\delta(p))} < +\infty$$

故

$$\left\| \nabla \left(u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| \right) \right\|_{L^q(B_\delta(p))} \leq \|\nabla(u_0 - v)\|_{L^q(B_\delta(p))} + \left| \frac{A(p)}{2\pi} \right| \|\nabla(\log |x - p|)\|_{L^q(B_\delta(p))} < \infty$$

因此, 我们可以对方程(3-45)两端同时求一阶广义导数后再做一次 L^q 估计, 从而得到

$$\nabla \left(u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| \right) \in W^{2,q}(B_\delta(p))$$

故

$$u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| \in W^{3,q}(B_\delta(p))$$

根据 $q \in (1, 2)$, 我们有 Sobolev 嵌入 $W^{3,q}(B_\delta(p)) \hookrightarrow C^1(B_\delta(p))$, 因此

$$u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| = O(1), \quad B_\delta(p) \ni x \rightarrow p \quad (3-46)$$

这样我们就有

$$\begin{aligned}
\int_{B_\delta(p)} e^{u_0} dx &= \int_{B_\delta(p)} e^{u_0-v} e^v dx \geq \int_{B_\delta(p)} e^{u_0-v} dx \\
&\geq C \int_{B_\delta(p)} \exp\left(\log|x-p|^{-\frac{A(p)}{2\pi}}\right) dx \\
&= C \int_{B_\delta(p)} \frac{1}{|x-p|^{\frac{A(p)}{2\pi}}} dx \\
&\geq C \int_{B_\delta(p)} \frac{1}{|x-p|^{\frac{8\pi}{2\pi}}} dx \\
&= C \int_{B_\delta(p)} \frac{1}{|x-p|^4} dx = +\infty
\end{aligned} \tag{3-47}$$

其中用到定理3.2的结论 $A(p) \geq 8\pi$ ，以及 $e^v \geq 1$ （因为 $v \geq 0$ ）。然而，另一方面，由Fatou引理易知

$$\int_{B_\delta(p)} V_0 e^{u_0} dx < \Lambda_1$$

这与(3-47)矛盾。这样，我们就说明了在情形二下必有 $S = \emptyset$ 。此时 u_k 在 Ω 上内闭光滑收敛到 u_0 。

§4 Blow-up点集的进一步刻画

§4.1 一个Pohozaev型恒等式

Pohozaev型恒等式是椭圆方程中常用的工具。本章我们将主要使用如下的Pohozaev型恒等式。

引理4.1. 记 B 为 \mathbb{R}^2 中的单位圆盘。若 $u \in C^2(B)$ 是方程

$$-\Delta u = V e^u, \quad x \in B \tag{4-48}$$

的解，则对任意的实数 $\rho \in (0, 1)$ ，在 B 中成立恒等式

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta + 4 \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 \Big|_{r=\rho} d\theta - 2 \int_0^{2\pi} V e^u \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta + \int_{B_\rho} 2 \frac{\partial V}{\partial r} r e^u dx \tag{4-49}$$

Proof. 由方程(4-48)我们有

$$\int_{B_\rho} -r \frac{\partial u}{\partial r} \Delta u dx = \int_{B_\rho} V e^u \frac{\partial u}{\partial r} r dx \tag{4-50}$$

一方面, 由Green公式可知

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} -r \frac{\partial u}{\partial r} \Delta u dx &= \int_{B_\rho} \nabla \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \nabla u dx - \int_{\partial B_\rho} r \frac{\partial u}{\partial r} (\nabla u \cdot \gamma) dS \\
&= \int_{B_\rho} \frac{\partial u}{\partial r} \nabla r \cdot \nabla u dx + \int_{B_\rho} r \frac{\partial \nabla u}{\partial r} \cdot \nabla u dx - \int_{\partial B_\rho} r \frac{\partial u}{\partial r} (\nabla u \cdot \gamma) dS \\
&= \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_\rho} r \frac{\partial \nabla u}{\partial r} \cdot \nabla u dx - \int_{\partial B_\rho} r \frac{\partial u}{\partial r} (\nabla u \cdot \gamma) dS
\end{aligned}$$

其中, 球面的单位外法向 γ 可写为

$$\gamma = \left(\frac{x^1}{r}, \frac{x^2}{r} \right) = \nabla r$$

在极坐标变换下, 恒有

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \sum \frac{\partial u}{\partial x^i} \cdot r \frac{\partial x^i}{\partial r} = \sum \frac{\partial u}{\partial x^i} x^i$$

而通过分部积分可知

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} r \frac{\partial \nabla u}{\partial r} \cdot \nabla u dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \frac{1}{2} r^2 \frac{\partial |\nabla u|^2}{\partial r} dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^\rho r |\nabla u|^2 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta - \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dx
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} -r \frac{\partial u}{\partial r} \Delta u dx &= \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dx + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta - \int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial B_\rho} r \frac{\partial u}{\partial r} \left(\sum \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{x^i}{r} \right) dS \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta - \int_{\partial B_\rho} r \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta - \int_{\partial B_\rho} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dS \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta
\end{aligned} \tag{4-51}$$

另一方面, 同样借助于分部积分, 注意到

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} V e^u \frac{\partial u}{\partial r} r dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\rho V \frac{\partial e^u}{\partial r} r^2 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} V e^u \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta - \int_{B_\rho} 2V e^u dx - \int_{B_\rho} \frac{\partial V}{\partial r} r e^u dx \\
&= \int_0^{2\pi} V e^u \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta + \int_{B_\rho} 2\Delta u dx - \int_{B_\rho} \frac{\partial V}{\partial r} r e^u dx
\end{aligned}$$

其中, 由散度定理可以算得

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} \Delta u dx &= \int_{B_\rho} \nabla \cdot (\nabla u) dx = \int_{\partial B_\rho} \nabla u \cdot \gamma dS \\
&= \int_{\partial B_\rho} \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \rho d\theta
\end{aligned}$$

代入前一式即可得到

$$\int_{B_\rho} V e^u \frac{\partial u}{\partial r} r dx = \int_0^{2\pi} V e^u \Big|_{r=\rho} \rho^2 d\theta + \int_0^{2\pi} 2 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \rho d\theta - \int_{B_\rho} \frac{\partial V}{\partial r} r e^u dx \quad (4-52)$$

最后注意到

$$\left| \nabla u \right|^2 \Big|_{r=\rho} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r=\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \Big|_{r=\rho} \quad (4-53)$$

将(4-51)和(4-52)代入(4-50), 并利用(4-53), 我们就完成了证明. \square

§4.2 $A(p) = 8\pi$

定理4.1. 在假设(1-4)和(1-5)下, 若 $V_0(p) > a > 0$, 则我们有

$$A(p) = 8\pi$$

Proof. 不失一般性, 假设 S 仅含一点 p . 设 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 如引理3.1所述.

对固定的 $\delta > 0$, 在 $B_\delta(x_k)$ 上应用Pohozaev型恒等式(4-49), 我们得到

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{2\pi} \left(\rho \frac{\partial u_k}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \right)^2 d\theta + 4 \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial u_k}{\partial r} \Big|_{r=\rho} d\theta \right)_{\rho=\delta} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \theta} \right)^2 \Big|_{r=\rho=\delta} d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \rho^2 e^{u_k} V_k \Big|_{r=\rho=\delta} d\theta \\
&\quad + O \left(2\delta \left\| \frac{\partial V_k}{\partial r} \right\|_{L^\infty(B_\delta(x_k))} \right) \int_{B_\delta} e^{u_k} dx
\end{aligned} \quad (4-54)$$

其中根据我们的假定, V_k 在 $B_\delta(x_k)$ 上光滑收敛到 V_0 , 故

$$\left\| \frac{\partial V_k}{\partial r} \right\|_{L^\infty(B_\delta(x_k))} < \infty$$

因此

$$O\left(2\delta \left\| \frac{\partial V_k}{\partial r} \right\|_{L^\infty(B_\delta(x_k))}\right) = O(\delta)$$

由之前§§3.3.1和§§3.3.2的讨论, 我们知道若 $S \neq \emptyset$, 则必存在 $x_0 \in \Omega \setminus S$, 使得 $u_k(x_0) \rightarrow -\infty$, $k \rightarrow \infty$ 。此时在任意的 $\Omega' \subset \subset \Omega$ 上成立有

$$u_k \rightrightarrows -\infty, \quad k \rightarrow \infty$$

因此, 重复§§3.3.1中的证明, 我们知道存在一列实数 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, 满足

$$c_k \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow \infty$$

使得 $u_k - c_k$ 光滑地收敛到某个Green函数 G 满足

$$-\Delta G = A(p)\delta_p$$

因此我们有

$$-\Delta \left(u_k - c_k + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| \right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (4-55)$$

由于 c_k 是常数, 因此我们可以利用条件(3-29)和

$$\text{当 } p < 2 \text{ 时 } \log |x - p| \in W^{2,p}(B_\delta(p))$$

这一事实对方程

$$-\Delta \left(G + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| \right) = 0, \quad x \in B_\delta(p)$$

以及对其两端同时求一阶广义导数后得到的方程做 L^q 估计。类似于§§3.3.2中使用Sobolev嵌入定理的手段 (事实上这个嵌入在§§3.3.1的情形下亦能成立), 我们得到

$$G + \frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| \in W^{3,q}(B_\delta(p)) \hookrightarrow C^1(B_\delta(p))$$

因此, 我们可以得到比(3-46)更具体的展开式

$$u_k - c_k \rightarrow G = -\frac{A(p)}{2\pi} \log |x - p| + \Theta(p) + \sum_{i=1,2} a_i (x^i - p^i) + O(|x - p|^2), \quad k \rightarrow \infty, x \rightarrow p$$

其中 $c_k \rightarrow -\infty$, $\Theta(p), a^i (i = 1, 2)$ 均为常数。至此, 一方面我们有

$$\left(\int_0^{2\pi} \left(\rho \frac{\partial u_k}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \right)^2 d\theta + 4 \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial u_k}{\partial r} \Big|_{r=\rho} d\theta \right)_{\rho=\delta} = \left(-\frac{A(p)}{2\pi} \right)^2 - 4 \cdot \frac{A(p)}{2\pi} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0$$

另一方面, 首先借助于极坐标变换的表达式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_k}{\partial \theta} \right|^2 \Big|_{r=\rho=\delta} d\theta &= \int_0^{2\pi} (-a_1 \delta \sin \theta + a_2 \delta \cos \theta)^2 d\theta + O(\delta) \\ &= O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

其次由条件 $\int_{\Omega} |V_k| e^{u_k} < \Lambda_1$, 我们知道

$$\int_0^{2\pi} \rho^2 e^{u_k} V_k \Big|_{r=\rho=\delta} d\theta = \delta^2 \int_0^{2\pi} e^{u_k} V_k \Big|_{r=\rho=\delta} d\theta = O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0$$

此外由于 $V_0 > a > 0$, 故条件 $\int_{\Omega} |V_k| e^{u_k} < \Lambda_1$ 蕴含着对足够大的 k 有

$$\int_{\Omega} e^{u_k} < C < \infty$$

从而

$$O \left(2\delta \left\| \frac{\partial V_k}{\partial r} \right\|_{L^\infty(B_\delta(x_k))} \right) \int_{B_\delta} e^{u_k} dx = O(\delta) \int_{B_\delta} e^{u_k} dx = O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0$$

因此, 将上面分析的各项代入(4-54), 我们得到

$$\left(-\frac{A(p)}{2\pi} \right)^2 - 4 \cdot \frac{A(p)}{2\pi} = O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 我们就得到 $A(p) = 8\pi$ 。 □

有了这个定理, 我们就可以对 $S \neq \emptyset$ 情形下函数列 $\{u_k\}$ 的收敛有更详尽的刻画。

推论4.1. 在定理4.1的假设下, 对任意的 $\Omega' \subset \subset \Omega$, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega'} V_k e^{u_k} dx = \sum_{p \in \Omega' \cap S} 8\pi.$$

Proof. 我们知道, 因为 $S \neq \emptyset$, 此时只能发生§§3.3.1中的情形。设 $p \in S$, 取 δ_0 足够小使得 $B_{\delta_0}(p) \cap S = \{p\}$ 。由§§3.3.1中的讨论, 我们可以取 $x_k \rightarrow p$, $r_k \rightarrow 0$, 使得

$$u_k(x_k + r_k x) - u_k(x_k) \rightarrow w = -2 \log \left(1 + \frac{V_0(p)}{8} |x - p|^2 \right), \quad k \rightarrow \infty$$

其中函数 $u_k(x_k + r_k x)$ 的定义域 Ω_k 单调上升地趋于 \mathbb{R}^2 。同时, 我们还知道存在 $c_k \rightarrow -\infty$, 使得对任意的 $\delta < \delta_0$, $\{u_k - c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 在 $B_{\delta_0}(p) \setminus B_\delta(p)$ 上光滑收敛到Green函数 G , G 在分布意义下满足方程

$$-\Delta G = 8\pi\delta_p, \quad x \in B_{\delta_0}(p)$$

在定理4.1的证明中, 我们已经看到, 可以设

$$G = -4 \log |x - p| + \Theta(p) + a_i (x^i - p^i) + O(|x - p|^2)$$

因为

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} V_0(p) e^w dx = 8\pi$$

和

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{\delta_0}(x_k) \setminus B_\delta(x_k)} V_k e^{u_k} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{c_k} \int_{B_{\delta_0}(x_k) \setminus B_\delta(x_k)} V_k e^{u_k - c_k} dx = 0$$

并且当 $k \rightarrow \infty$ 时有 $B_{\delta_0}(x_k) \rightarrow B_{\delta_0}(p)$, 我们只需要证明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_\delta(x_k) \setminus B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k} dx = 0 \quad (4-56)$$

事实上, 由于

$$\int_{B_\delta(x_0) \setminus B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k} dx = - \int_{B_\delta(x_k) \setminus B_{Rr_k}(x_k)} \Delta u_k dx = - \int_{\partial B_\delta(x_k)} \frac{\partial u_k}{\partial r} dS + \int_{\partial B_{Rr_k}(x_k)} \frac{\partial u_k}{\partial r} dS$$

因而当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 我们有

$$- \int_{\partial B_\delta(x_k)} \frac{\partial u_k}{\partial r} dS \longrightarrow - \int_{\partial B_\delta(p)} \frac{\partial G}{\partial r} dS = \int_0^{2\pi} \int_{r=\delta} \frac{4}{r} \cdot r dr d\theta = 8\pi + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0$$

同时

$$\int_{\partial B_{Rr_k}(x_k)} \frac{\partial u_k}{\partial r} dS \longrightarrow \int_{\partial B_R} \frac{\partial w}{\partial r} dS = \int_0^{2\pi} \frac{-4 \frac{V_0(p)}{8} R^2}{1 + \frac{V_0(p)}{8} R^2} d\theta = -8\pi \frac{\frac{V_0(p)}{8} R^2}{1 + \frac{V_0(p)}{8} R^2}$$

故

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_\delta(x_k) \setminus B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k} dx = 8\pi - 8\pi = 0$$

这就完成了证明。 □

参考文献

- [1] H. Brezis and F. Merle. Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\delta u = v(x)e^u$ in two dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(8):1223–1253.
- [2] Y. Li and I. Shafrir. Blow-up analysis for solutions of $-\delta u = ve^u$ in dimension two. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(4):1255–1270, 1994.
- [3] C.C. Chen and C.S. Lin. Topological degree for a mean field equation on riemann surfaces. (English summary) *Comm. Pure Appl. Math*, 56(12):1667–1727, 2003.
- [4] W. Chen and C. Li. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. *Duke Math. J.*, 63(3):615–622, 1991.
- [5] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [6] M. Struwe. Positive solutions of critical semilinear elliptic equations on non-contractible planar domains. *J. Eur. Math. Soc.*, 2(4):329–388, 2000.
- [7] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

随机过程的正则点与半椭圆方程的 Fichera 点

王竹海¹

指导教师：雍稳安教授

摘 要

随机微分方程理论在偏微分方程中的应用中，区域边界对某个 Ito 扩散（这一 Ito 扩散常常是由某个半椭圆微分算子所决定的随机微分方程的解）的正则点这一概念被引入。一般来说，正则点（从这儿开始，为了方便，所有的“正则点”即表示“对于给定区域和给定的半椭圆微分算子所定义的 Ito 扩散的正则点”）的判定需要根据具体的情况遵循其引入的步骤，并直接验证定义。也就是说，在一般的情形，正则点的判定并没有跳过求解 Ito 扩散过程这一困难的步骤。

本文受到偏微分方程理论中 Fichera 定理的启发，在作出某些合理假设的基础上，对有界凸区域光滑边界上的点的正则性判定提出并证明了一个定理，即在上述情形下，Fichera 点都是正则点

关键词：随机过程的正则点；Fichera 点

第 1 章 引言

1.1 问题的提出

在将随机微分方程理论应用到偏微分方程中的时候，对于一个给定的区域和给定的半椭圆微分算子（更准确地说是由这个算子所定义的一个 Ito diffusion），有“正则点”（regular points）的概念。其详细引入过程如下。

给定一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ，一个半椭圆微分算子 $L \in C^2(W)$ （其中 $W \supset \bar{\Omega}$ 是开集，微分算子具有形式 $L = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ）。“半椭圆”的定义即：矩阵

¹ 基数 62

$a(x) = (a_{ij}(x))_{m \times m}$ 是对称的, 即 $\forall i, j = 1, 2, 3 \dots m, a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$, 并且该矩阵为非负定的, 即其所有的特征值非负。我们进一步假设 $b(x) = (b_i(x))^T$ 为 Lipchitz 连续的。可以对矩阵 $a(x)$ 求平方根, 即可以找到 $\sigma(x) = (\sigma_j^i(x))_{m \times m}$, 使得 $\frac{1}{2} \sigma \sigma^T = a$ 。由于 (a_{ij}) 的光滑性, 我们可以要求 $(\sigma_j^i)_{m \times m}$ 是 Lipchitz 连续的 (参见 Avner Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications, Volume 1, 第 131 页, Remark 1)。

对于给定的一个 $x_0 \in \partial\Omega$ 我们立刻得到一个从此出发的 Ito diffusion $\{X_t\}$, 使得其特征算子是 L 的扩展, 具体来说, 其满足 $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$ 且 $X_0 = x_0$ (其存在性由 $\sigma(x), b(x)$ 的 Lipchitz 连续性保证, 相关定理和证明参见 Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, 第 289 页)。从这里开始, 如果不特别指出, 文章所提到的概率测度和期望均是在 m 维布朗运动 B_t 所诱导的概率空间上相应的概率测度和期望。

这样, 我们对任何一个边界点可以得到 $\tau_\Omega = \inf \{t > 0; X_t \notin \Omega\}$ 。由此, 可以对给定的区域和算子 (或者 Ito diffusion) 定义正则点的概念。

定义 如果 $x_0 \in \partial\Omega$ 满足 $P(\tau_\Omega = 0) = 1$, 那么我们称这一边界点 x_0 为区域 Ω 关于 $\{X_t\}$ 的正则点 (regular points)。

用形象的语言来说, 正则点意味着从这点出发的 $\{X_t\}$ 一定会立即从给定的区域逃逸出去。另外, 需要补充说明的是, 事实上, 经过证明, 我们可以发现 $P(\tau_\Omega = 0)$ 可以取的值只能是 0 和 1。也就是说我们有如下的引理 (详细证明和完整的表述参见 Bernt Øksendal, Stochastic Differential Equations 第 121-123 页)。

引理 1 $\forall x_0, P(\tau_\Omega = 0) = 1$ 或 $P(\tau_\Omega = 0) = 0$ 。

这一引理的重要性在于在我们判别某个边界点是不是正则点时, 我们并不需要严格判别上述概率是否是 1, 我们只需要判别上述概率是不是大于 0。这将给后文中的定理证明带来很大的方便。

还需要说明的是, 正则点在随机微分方程理论在偏微分方程中的应用这一领域是十分重要的。举例来说, 我们有如下的定理。

定理 1 在以上所有假设的基础上, 我们进一步假设算子 L 是一致椭圆的, 即矩阵 $a(x)$ 所有的特征值关于 x 一致地大于某一个固定的正数。 Φ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的有界连续函数。我们令 $u(x) = E^{x_0}(\Phi(X_{\tau_\Omega}))$ 。则

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \text{ in } \Omega$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega}} u(x) = \Phi(y), \forall y \in \partial\Omega, y \text{ regular}$$

这个定理说明如果我们不关心边界的情形，那么一致椭圆的偏微分方程的解可以有很简洁的随机表达形式。值得注意的是：一方面，在表达形式中，我们发现，只要知道了边界函数在正则点的值，解就被唯一地确定了；另一方面，在偏微分方程领域，我们常常关心的恰恰是边界的情形，在这里同样也恰恰是正则点的问题。

令人遗憾的是，至今为止，如果不加更多的假设，对于一般给定的边界和 Ito diffusion（即使是如同上述步骤给出的有一些好的性质的 Ito diffusion），要判断边界上的点是不是正则点，并没有简便的判别方法，只能根据具体情况，作类似其引入过程的计算，并根据定义来判断。而其中求解出 Ito 扩散这一步骤往往是困难的，有时候甚至是不能求出显式表达的。这就直接造成了验证定义的巨大麻烦。那么，我们可以退而求其次，如果加上了某些比较合理的假设之后，是否可以有一个比较直接和方便的判别方法呢？这就是本文所需要关注和讨论的问题。在我查阅了一些文献之后，似乎这样的结论也是几乎没有的，只在一些相关书籍的笔记中有一维情形的简单讨论之类的零碎的结论，这些结论几乎都是平凡的。

1.2 一个有益的观察

正则点引入的过程和其应用，尤其是定理 1 使我们联想到偏微分方程理论中的 Fichera 定理。其具体的表述如下。

定理 2 (Fichera) 在 1.1 内容的基础上（仅仅要求算子是半椭圆的），假设 $\partial\Omega$ 是光滑的，有单位内法向量 (n_1, n_2, \dots, n_m) ，据此可将 $\partial\Omega$ 分为四部分： $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 。其中 Γ_3 是 $\partial\Omega$ 的非特征部分，即

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) n_i n_j > 0, x \in \Gamma_3$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) n_i n_j = 0, x \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

定义 Fichera 函数

$$F(x) = \sum_i (b_i(x) - \sum_j \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}) n_i$$

并定义 $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ 如下:

$$F(x) \begin{cases} = 0, x \in \Gamma_0, \\ > 0, x \in \Gamma_1, \\ < 0, x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

则下述定解问题存在唯一解

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), x \in \Omega$$

$$u(x) = g(x), x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

暂且不考虑定理 1 和定理 2 对于微分算子椭圆性的不同要求, 以及定理 2 中对区域边界光滑性的要求, 我们可以明显地发现, 定理 1 中的正则点和定理 2 中的 $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ 内的点(即所谓的 Fichera 点)上的函数的边界值都决定了函数在区域内部的值。这一相似点, 启发我们在作出一些合理的假设之后, 尝试用定理 2 中对边界的划分方法解决 1.1 所提出的正则点的判定问题。

第 2 章 主要定理及证明

以下阐述本文的主要定理和相关注记推论, 并给出具体的证明。

定理 3 给定一个有界凸区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\partial\Omega$ 是光滑的, 有单位内法向量 (n_1, n_2, \dots, n_m) 。给定一个半椭圆微分算子 $L \in C^2(W)$ (其中 $W \supset \bar{\Omega}$ 是开集, 微分算子具有形式 $L = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$), 进一步假设满足 $\frac{1}{2} \sigma \sigma^T = a$ 的 $\sigma \in C^2(W)$ 。

则定理 2 中所划分出的 Fichera 点($\Gamma_2 \cup \Gamma_3$)都是正则点(regular points)。

注记 1 事实上, 对区域的有界性要求只是为了满足证明过程中所出现的函数都是有界的, 所以如果在具体的问题中, 证明过程中函数的有界性都得到满足, 那么对于区域的有界性要求可以去掉。另外, 在证明的过程中, 多次使用了相应函数的有界性, 并多次使用了有界收敛定理, 由于定理条件中的假设, 相关的条件都可以得到满足, 故在具体的证明过程中不再赘述。而对于区域边界的整体光滑性

要求也不是必须的，如果边界只有一部分是光滑的，那么我们取其边界的光滑部分，对这部分边界作类似定理 2 中的划分，由于定理 3 的证明只需要局部的光滑，故定理 3 的结论仍然成立。

注记 2 正如 1.1 中所述，理论上讲，对于 σ 光滑性，我们只可以要求 Lipchitz 连续。但是在实际的问题中，我们也会常常遇到 σ 能够满足定理条件假设的情形。所以，定理条件中的假设可以认为是合理的。

推论 1 如果定理 1 添加定理 3 中的假设，那么 $\partial\Omega$ 上所有的点都是正则点。

推论 1 的证明：由微分算子的一致椭圆性立即可得。

定理 3 的证明：

步骤一（正则点的充分条件）：

$$\tau_{\Omega} = \inf \{t > 0; X_t \notin \Omega\}$$

其中 $\{X_t\}$ 满足

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ dX_t &= \mathbf{b}(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \end{aligned} \quad (1)$$

事实上，由于 Ω 是凸集， $\partial\Omega$ 是光滑的，有单位内法向量 (n_1, n_2, \dots, n_m) ，故

$$\sum_i n_i (X_t^i - x_0^i) < 0 \Rightarrow X_t \notin \Omega$$

从而以下条件可以是正则点的充分条件：

$$\text{存在 } T > 0, 0 < N < 1, \text{ 使得任意 } 0 < t < T, \text{ 有 } P(\sum_i n_i (X_t^i - x_0^i) < 0) > N \quad (2)$$

其简要证明是： $P(X_t \notin \Omega) \geq P(\sum_i n_i (X_t^i - x_0^i) < 0) > N$

对于足够大的 n 有 $P(X_{1/n} \notin \Omega) > N$ ，从而 $P(\tau_{\Omega} > 1/n) < 1 - N$

$$\{\omega; \tau_{\Omega}(\omega) > 0\} = \bigcup_n \{\omega; \tau_{\Omega}(\omega) > 1/n\}$$

等式右端是不减的集列，故 $P(\tau_{\Omega} > 0) < 1 - N$

由引理 1，可得 $P(\tau_{\Omega} > 0) = 0$ ，从而有 $P(\tau_{\Omega} = 0) = 1$ ，即 x_0 为正则点。

步骤二（Ito 公式的运用，展开与估计）：

式(1)的分量形式即

$$dX_t^i = b_i(X_t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_j^i(X_t)dB_t^j, \forall i \quad (1')$$

式(1')的积分形式即

$$X_t^i = x_0 + \int_0^t b^i(X_s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^m \sigma_j^i(X_s)dB_s^j \quad (1'')$$

由于 $\sigma_j^i \in C^2(W)$, 故可对其使用 Ito 公式, 可得

$$d\sigma_j^i(X_t) = \sum_k \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(X_t)dX_t^k + \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q}(X_t)dX_t^p dX_t^q \quad (3)$$

由(1')和 $dt dt = dB_t dB_t = dt$, 可得

$$dX_t^p dX_t^q = 2a_{pq}(X_t)dt$$

和(1')一起带入(3)可得

$$d\sigma_j^i(X_t) = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q}(X_t)a_{pq}(X_t)dt + \sum_k \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(X_t) b_k(X_t)dt + \sum_{k,l} \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(X_t)\sigma_l^k(X_t)dB_t^l$$

其积分形式是

$$\begin{aligned} \sigma_j^i(X_s) &= \sigma_j^i(x_0) + \int_0^s \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q}(X_\tau)a_{pq}(X_\tau)d\tau + \int_0^s \sum_k \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(X_\tau) b_k(X_\tau)d\tau + \\ &\quad \int_0^s \sum_{k,l} \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(X_\tau)\sigma_l^k(X_\tau)dB_\tau^l \end{aligned} \quad (3')$$

将(3')带入(1'')有 $X_t^i = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$ (1''')

其中 $I_1 = x_0^i$ $I_2 = \int_0^t b_i(X_s)ds$ $I_3 = \sum_j \int_0^t \sigma_j^i(x_0)dB_s^j$

$$I_4 = \sum_{j,p,q} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q}(X_\tau)a_{pq}(X_\tau)d\tau dB_s^j$$

$$I_5 = \sum_{j,k} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(X_\tau)b_k(X_\tau)d\tau dB_s^j$$

$$I_6 = \sum_{j,k,l} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(X_\tau)\sigma_l^k(X_\tau)dB_\tau^l dB_s^j$$

以下将依次对需要估计的项进行估计

估计 I_2 : b_i 有界, 由有界收敛定理可得

$$\lim_{t \rightarrow 0} E^{x_0} \left(\left(\frac{\int_0^t b_i(X_s)ds}{t} - b_i(x_0) \right)^2 \right) = 0$$

$$\forall \lambda_1, \exists t_1, \text{ s. t. } \forall 0 < t < t_1, \forall \varepsilon_1 > 0, P \left(\left| \int_0^t b_i(X_s)ds - b_i(x_0)t \right| > \varepsilon_1 t \right) < \frac{\lambda_1}{\varepsilon_1^2} \quad (e1)$$

估计 I_4 :同(e1)有

$$\begin{aligned}
& \forall \lambda_2, \exists t_2, s. t. \forall 0 < s < t_2, \forall \varepsilon_2 > 0, \\
& P\left(\left|\sum_{p,q} \int_0^s \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(X_\tau) d\tau - s \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0)\right| > \varepsilon_2 s\right) < \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2^2} \\
& \forall 0 < t < t_2 \quad E^{x_0} \left(\left(I_4 - \sum_{j,p,q} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) d\tau dB_s^j \right)^2 \right) \\
& \leq E^{x_0} \left(m \sum_j \left(\int_0^t \left(\sum_{p,q} \int_0^s \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(X_\tau) d\tau - s \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) \right) dB_s^j \right)^2 \right) \\
& = m \sum_j E^{x_0} \left(\left(\int_0^t \left(\sum_{p,q} \int_0^s \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(X_\tau) d\tau - s \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) \right) dB_s^j \right)^2 \right) \\
& = m \sum_j E^{x_0} \left(\int_0^t \left(\sum_{p,q} \int_0^s \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(X_\tau) d\tau - s \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) \right)^2 ds \right) \\
& \leq m \sum_j \int_0^t (M_1 s^2 \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2^2} + \varepsilon_2^2 s^2) ds \leq m^2 (M_1 \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2^2} + \varepsilon_2^2) \frac{1}{3} t^3
\end{aligned}$$

其中 M_1 为 $\frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}$ 的界。我们取 $\varepsilon_2 = 1$ ，可得

$$E^{x_0} \left(\left(I_4 - \sum_{j,p,q} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) d\tau dB_s^j \right)^2 \right) \leq m^2 (M_1 \lambda_2 + 1) \frac{1}{3} t^3$$

又

$$\begin{aligned}
& E^{x_0} \left(\left(\sum_{j,p,q} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) d\tau dB_s^j \right)^2 \right) = \\
& \left(\sum_{j,p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) \right)^2 E^{x_0} \left(\left(\int_0^t s dB_s \right)^2 \right) = \left(\sum_{j,p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) \right)^2 \frac{1}{3} t^3 = M_1' \frac{1}{3} t^3 \\
& \text{其中 } M_1' = \left(\sum_{j,p,q} \frac{\partial^2 \sigma_j^i}{\partial x_p \partial x_q} a_{pq}(x_0) \right)^2 \text{ 为常数。}
\end{aligned}$$

故有

$$\forall \eta > 0, P(|I_4| > \eta t) \leq \frac{m^2(M_1\lambda_2+1)+M'_1}{\eta^2} \frac{1}{3} t \quad (\text{e2})$$

估计 I_5

同(e2)有

$$\forall \lambda_3 > 0, \exists t_3 > 0, s. t. \forall 0 < t < t_3, \xi > 0, P(|I_5| > \xi t) < \frac{m^2(M_2\lambda_3+1)+M'_2}{\xi^2} \frac{1}{3} t \quad (\text{e3})$$

估计 I_6

同样由等距定理有

$$\begin{aligned} & E^{x_0} \left(\frac{1}{s} \left(\sum_{k,l} \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \sigma_l^k(X_\tau) dB_\tau^l - \sum_{k,l} \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \sigma_l^k(x_0) B_s^l \right) \right)^2 \\ & \leq E^{x_0} \left(m \sum_l \left(\sum_k \int_0^s \frac{\frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \sigma_l^k(X_\tau) - \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \sigma_l^k(x_0)}{\sqrt{s}} dB_\tau^l \right) \right)^2 \\ & = m \sum_l E^{x_0} \left(\frac{1}{s} \int_0^s \left(\frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \sigma_l^k(X_\tau) - \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \sigma_l^k(x_0) \right)^2 d\tau \right) \rightarrow 0, s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \forall \lambda_4 > 0, \exists t_4 > 0, s. t. \forall 0 < s < t_4, \forall j, \\ & E^{x_0} \left(\frac{1}{s} \left(\sum_{k,l} \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \sigma_l^k(X_\tau) dB_\tau^l - \sum_{k,l} \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \sigma_l^k(x_0) B_s^l \right) \right)^2 < \lambda_4 \\ & \forall 0 < t < t_4, E^{x_0} \left(\left(I_6 - \sum_{j,k,l} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} (x_0) \sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \right)^2 \right) \leq m^2 \int_0^t \lambda_4 s ds \\ & = m^2 \lambda_4 \frac{t^2}{2} \\ & \forall \varphi > 0, P \left(\left| I_6 - \sum_{j,k,l} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} (x_0) \sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \right| > \varphi t \right) < \frac{m^2 \lambda_4}{2 \varphi^2} \quad (\text{e4}) \end{aligned}$$

综合以上估计(e1)(e2)(e3)(e4)易知:

$$\forall \phi > 0, P\left(\left|X_t^i - x_0 - b_i(x_0)t - \sum_j \sigma_j^i(x_0)B_t^j - \sum_{j,k,l} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0) \sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j\right| > \phi t\right) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$$

$$\forall \phi > 0, P\left(\left|\sum_i n_i(X_t^i - x_0^i) - \sum_i b_i(x_0)n_i t - \sum_{i,j} n_i \sigma_j^i(x_0)B_t^j - \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0) \sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j\right| > \phi t\right) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$$

上式即为步骤二的最终估计，设为(e)。这一估计说明， $\sum_i n_i(X_t^i - x_0^i)$ 可以用一个常数作某种意义上逼近，事实上，步骤三将分情况估计这一常数。

步骤三（分情形讨论）：

情形一： $x_0 \in \Gamma_3$, 即 $\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)n_i n_j > 0$

由

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)n_i n_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \sigma_k^i(x_0) \sigma_k^j(x_0) n_i n_j = \frac{1}{2} \sum_k \left(\sum_i n_i \sigma_k^i(x_0)\right)^2 > 0$$

故 $\exists j_0, s. t. \sum_i n_i \sigma_{j_0}^i(x_0) \neq 0$ 不妨假设 $\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0) \neq 0$

由

$$E^{x_0} \left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^1 \right)^2 \right) = \frac{1}{2} t^2, \forall t, j$$

有

$$E^{x_0} \left(\left(\sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0) \sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \right)^2 \right) = \left(\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0) \sigma_l^k(x_0) \right)^2 \frac{1}{2} t^2$$

$$= M_3 t^2$$

其中 $M_3 = \left(\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0) \sigma_l^k(x_0) \right)^2 / 2$ 为常数。故有， $\forall \psi > 0$,

$$P\left(\left|\sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0) \sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j\right| > \psi t\right) \leq \frac{M_3}{\psi^2}$$

另一方面, $\forall \psi, \phi > 0$,

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{i,j} n_i \sigma_j^i(x_0) B_t^j < -\left(\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i\right) t\right) \\ & \geq \prod_{j \neq 1} P\left(\sum_i n_i \sigma_j^i(x_0) B_t^j < 0\right) P\left(\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0) B_t^1 \right. \\ & \quad \left. < -\left(\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i\right) t\right) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{2} P(|B_t^1| \\ & \quad > \left|\frac{\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i}{\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0)} t\right|) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \left|\frac{\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i}{\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0)}\right| \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right) \end{aligned}$$

综合上述两个估计有

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{i,j} n_i \sigma_j^i(x_0) B_t^j + \sum_i b_i(x_0) n_i t + \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0) \sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \right. \\ & \quad \left. < -(\phi + 1)t\right) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \left|\frac{\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i}{\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0)}\right| \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right) - \frac{M_3}{\psi^2} \end{aligned}$$

固定 ϕ , 选择合适的 ψ , 可以使得 t 足够小时上述概率大于一个正常数。再结合步骤二中的最终估计(e), 可以发现, 当 t 足够小时,

$$P\left(\sum_i n_i (X_t^i - x_0^i) < -t\right) \geq \text{某个常数} > 0$$

这满足了步骤一中的充分条件(2), 从而此时 x_0 是正则点。

情形二: $x_0 \in \Gamma_2$, 即

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0) n_i n_j = 0, \sum_i (b_i(x_0) - \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x_0)) n_i < 0,$$

$$\text{令 } L = \sum_i (b_i(x_0) - \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x_0)) n_i < 0$$

由于

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0) n_i n_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \sigma_k^i(x_0) \sigma_k^j(x_0) n_i n_j = \frac{1}{2} \sum_k \left(\sum_i n_i \sigma_k^i(x_0) \right)^2 = 0$$

从而只能是

$$\forall j, \sum_i n_i \sigma_j^i(x_0) = 0$$

由此

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0) \sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \\ &= \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j - \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) \sigma_j^i(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \\ &= \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j - \sum_{i,j} n_i \sigma_j^i(x_0) \sum_{k,l} \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \\ &= \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \end{aligned}$$

步骤二的最终估计变成如下估计，设为(e')

$$\begin{aligned} & \forall \phi > 0, P\left(\left|\sum_i n_i (X_t^i - x_0^i) - \sum_i b_i(x_0) n_i t - \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j\right| > \phi t\right) \\ & \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k,j=1} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j = \sum_{i,k} n_i \sum_l \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) \int_0^t \int_0^s 1 dB_\tau^l dB_s^1 \\ &= - \sum_{i,k} n_i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}(x_0) t + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_j^k}{\partial x_k}(x_0) B_t^{j^2} \end{aligned}$$

设为式(4)。

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,k,j \neq l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j \\
&= \sum_{i,k,j > l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k,j < l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j \\
&= \sum_{i,k,j > l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k,j < l} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) \int_0^t \int_0^s 1 dB_\tau^l dB_s^j \\
&= \sum_{i,k,j > l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k,j < l} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) B_t^l B_t^j \\
&\quad - \sum_{i,k,j < l} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) \int_0^t \int_0^s 1 dB_\tau^j dB_s^l \\
&= \sum_{i,k,j < l} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) B_t^l B_t^j + \sum_{i,k,j > l} n_i \int_0^t \int_0^s \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k} \right) (x_0) dB_\tau^l dB_s^j
\end{aligned}$$

设为式(5)。

$$\begin{aligned}
& \forall \omega, E \left(\left(\sum_{i,k,j > l} n_i \int_0^t \int_0^s \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k} \right) (x_0) dB_\tau^l dB_s^j \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^j| < \omega \sqrt{t}, \forall j \right) \\
&= \sum_{j > l} E \left(\left(\sum_{i,k} n_i \int_0^t \int_0^s \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k} \right) (x_0) dB_\tau^l dB_s^j \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^j| < \omega \sqrt{t}, \forall j \right) \\
&= \sum_{j > l} E \left(\left(\sum_{i,k} n_i \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k} \right) (x_0) \int_0^t \int_0^s 1 dB_\tau^l dB_s^j \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^j| < \omega \sqrt{t}, \forall j \right) \\
&= \sum_{j > l} \left(\sum_{i,k} n_i \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k} \right) (x_0) \right)^2 E \left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2 \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^{1,2}| < \omega \sqrt{t} \right) \\
&\leq \sum_{j > l} \left(\sum_{i,k} n_i \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k} \right) (x_0) \right)^2 \omega^2 t^2
\end{aligned}$$

(上式的最后一步用到了 $E \left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2 \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^{1,2}| < \omega \sqrt{t} \right) \leq \omega^2 t^2$ ，其证明

过程见附录 B 这里不再赘述)

帶入式(5)有

$$\forall \omega, E \left(\left(\sum_{i,k,j \neq 1} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^j| < \omega \sqrt{t}, \forall j \right) \leq M_4 \omega^2 t^2$$

进而有

$$\begin{aligned} & \forall \omega, E \left(\left(\sum_{i,k,j \neq 1} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_j^k}{\partial x_k} (x_0) B_t^{j^2} \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^j| < \omega \sqrt{t}, \forall j \right) \\ & \leq M_4' \omega^2 t^2 \\ & \forall \omega, \theta, P \left(\left| \left(\sum_{i,k,j \neq 1} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_j^k}{\partial x_k} (x_0) B_t^{j^2} \right) \right| > \theta t \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^j| < \omega \sqrt{t}, \forall j \right) \\ & \leq M_4' \omega^2 / \theta^2 \end{aligned}$$

$P(\max_{0 \leq s \leq t} |B_s| < \omega \sqrt{t}) > 0$ 大于零且与 t 无关 (证明过程见附录 B), 不妨设为 $f(\omega)$,

结合上式有

$$\begin{aligned} & P \left(\left| \left(\sum_{i,k,j \neq 1} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_j^k}{\partial x_k} (x_0) B_t^{j^2} \right) \right| < \theta t \right) \\ & \geq f^m(\omega) (1 - M_4' \omega^2 / \theta^2) \end{aligned}$$

由式(4)有

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k,j \neq 1} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_j^k}{\partial x_k} (x_0) B_t^{j^2} \\ & = \sum_{i,k,j,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k} n_i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} (x_0) t \end{aligned}$$

故立即有

$$\begin{aligned} & P(| \sum_{i,k,j,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} (x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k} n_i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} (x_0) t | < \theta t) \\ & \geq f^m(\omega) (1 - M_4' \omega^2 / \theta^2) \end{aligned}$$

设为式(6)

由 L 的定义有

$$\begin{aligned} & \sum_i b_i(x_0)n_i t + \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j \\ &= \sum_{i,k,j,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k} n_i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}(x_0)t + Lt \end{aligned}$$

代入式(6)并取 $\theta = -L/2$, 可得

$$P\left(\sum_i b_i(x_0)n_i t + \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j < Lt/2\right) \geq \frac{1}{2} f^m\left(\frac{-L}{2} \sqrt{\frac{1}{2M_4'}}\right)$$

作与情形一相似的讨论可知 x_0 也是正则点。

证毕。

注记 3 定理 3 的意义在于, 一方面, 对于定理所提出的假设下的情形, 给出了正则点的一个充分的判定条件; 一方面, 证明了正则点和 Fichera 点的联系(当然产生这种联系的机制, 有待我进一步的思考和研究)。

注记 4 在定理 3 中, 即使增加了一些假设, 我仍然不能对边界上剩下的点(即 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 内的点)作出判别。不能判别前者的原因在于需要更精细的划分(比如需要加入 a_{ij} 的二阶导数作划分); 而不能判别后者的原因在于没有找到合适的估计方法, 定理证明中适用于情形二(即 Γ_2)的方法并不适用于 Γ_1 。我倾向于认为 Γ_1 中的点都不是正则点。但这些猜测需要以后作进一步的探索和研究。

第 3 章 算例

在本章中, 我们将对具体的例子, 先用 1.1 中验证定义的方法找出边界上的正则点, 再应用定理 3 的结论进行计算。

算例 取 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, 微分算子 $Lf(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; (t, x) \in \mathbb{R}^2$

要求 $\partial\Omega$ 上的正则点。

计算:

本例中

$$b = (1 \ 0)^T \ a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

取

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

遵循 1.1 中的步骤

求解

$$dX_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

可得

$$X_t = \begin{pmatrix} t \\ B_t + x_0 \end{pmatrix}$$

从而 $\partial\Omega$ 上除去 $\{0\} \times (0,1)$ 剩下的部分都是正则点， $\{0\} \times (0,1)$ 上的点都是不正则的。

如果考虑应用定理 3，由注记 1，我们只能考虑 $\partial\Omega \setminus \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ 这些光滑的边界点。

不难验证，

$$(0,1) \times \{0,1\} \in \Gamma^3, \{0\} \times (0,1) \in \Gamma^1, \{1\} \times (0,1) \in \Gamma^2$$

故我们可以得出结论 $(0,1) \times \{0,1\} \cup \{1\} \times (0,1)$ 上的点都是正则点。

算例的说明：上述算例一方面，反映了定理 3 对于处理某些问题时计算上的方便和快捷；一方面，正如注记 3 所说，反映了定理 3 并不能保证找出所有的正则点。

参考文献

- [1] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Second Edition. New York: Springer Science + Business Media, Inc, 1988, 1991.
- [2] Avner Friedman. Stochastic Differential Equations and Applications, Volume 1. New York: Academic Press, Inc, 1975
- [3] Bernt Øksendal. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.

附录 两个补充证明

补充证明一：

$$E \left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2 \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^{1,2}| < \omega \sqrt{t} \right) \leq \omega^2 t^2$$

简要证明：

$$\begin{aligned} & E \left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2 \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^{1,2}| < \omega \sqrt{t} \right) \\ &= E \left(\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i B_{t_i}^1 (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) \right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^{1,2}| < \omega \sqrt{t} \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i E \left((B_{t_i}^1)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^1| < \omega \sqrt{t} \right) E \left((B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^2| < \omega \sqrt{t} \right) \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{p \neq q} E \left(B_{t_p}^1 B_{t_q}^1 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^1| < \omega \sqrt{t} \right) E \left((B_{t_{p+1}}^2 - B_{t_p}^2)(B_{t_{q+1}}^2 - B_{t_q}^2) \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^2| \right. \\ &\quad \left. < \omega \sqrt{t} \right) \end{aligned}$$

由 B_t 的性质易得

$$E \left((B_{t_i}^1)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^1| < \omega \sqrt{t} \right) < \omega^2 t$$

$$E \left((B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^2| < \omega \sqrt{t} \right) < (t_{i+1} - t_i)$$

$$E \left(B_{t_p}^1 B_{t_q}^1 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^1| < \omega \sqrt{t} \right) \geq 0$$

$$E \left((B_{t_{p+1}}^2 - B_{t_p}^2)(B_{t_{q+1}}^2 - B_{t_q}^2) \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^2| < \omega \sqrt{t} \right) \leq 0$$

从而有

$$E\left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2\right)^2 \middle| \max_{0 \leq s \leq t} |B_s^{1,2}| < \omega\sqrt{t}\right) \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_1 \omega^2 t(t_{i+1} - t_i) = \omega^2 t^2$$

补充证明二：

$$P(\max_{0 \leq s \leq t} |B_s| < \omega\sqrt{t}) > 0 \text{ 且与 } t \text{ 无关}$$

简要证明：

$$P\left(\max_{0 \leq s \leq t} |B_s| < \omega\sqrt{t}\right) = P\left(\max_{0 \leq s \leq t} |B_s/\sqrt{t}| < \omega\right)$$

定义随机过程 $\{C_l\}$ ， $0 \leq l \leq 1$ ： $C_l = B_{lt}/\sqrt{t}$ ，其分布密度函数为

$$g(l, y) = (2\pi l)^{-1/2} e^{-y^2/2l}$$

与 t 无关（事实上 $\{C_l\}$ 就是 $\{B_s\}$ ， $0 \leq s \leq 1$ ）。

$$\text{从而 } P(\max_{0 \leq s \leq t} |B_s| < \omega\sqrt{t}) = P(\max_{0 \leq l \leq 1} |C_l| < \omega) > 0$$

与 t 无关。

A Canonical Dual Approach for Solving Quadratic Programs with Linear and a Quadratic Constraint

王子腾*

Supervisor: 邢文训教授

摘 要

In this article, we apply the canonical dual approach to solve the quadratic program with a quadratic constraint and linear constraints. we form the canonical dual problem under the dual Slater condition. The relationship between dual variables and primal solutions are investigated. Then we design a computational method to produce a sequence that converges to the dual optimal solutions. Strong duality will hold under some sufficient conditions. Examples are also presented.

Keywords: quadratic programming, canonical duality, global optimization

§1 Introduction

We study the quadratic program with a quadratic and linear constraints (\mathcal{P}) of the following form:

$$\begin{aligned} \nu = \min \quad & P(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + f^T x \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2}x^T Bx \leq \mu, \\ & Ax \leq b, \end{aligned} \tag{1-1}$$

where x is an $n \times 1$ vector, Q an $n \times n$ symmetric matrix, f an $n \times 1$ vector, B an $n \times n$ symmetric matrix, μ a constant, A an $m \times n$ matrix, and b an $m \times 1$ vector. We assume the feasible domain of (\mathcal{P}) is not empty.

*Class 62, Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University

In general, the problem (\mathcal{P}) is NP-hard. [1] In other words, it is impossible to be solved generally in polynomial time, unless $P=NP$. The problem (\mathcal{P}) is a subclass of the quadratically constrained quadratic programs (\mathcal{QCQP}):

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + f^T x \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2}x^T B_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & Ax \leq b. \end{aligned} \tag{1-2}$$

with $m=1$, i.e., there is only one quadratic constraint.

(\mathcal{QCQP}) is a well-studied problem in the global optimization literature with many applications, frequently arising from Euclidean distance geometry. [2] Many special subclasses of (\mathcal{QCQP}) have been studied, some of which are closely related to the problem (\mathcal{P}) here.

For instance, if there is no quadratic constraint, the problem (\mathcal{P}) becomes the linearly constrained quadratic program. It is generally NP-hard and a canonical dual iterate scheme has been developed to produce a sequence of point that converges to a KKT solution. [3] Another example is the quadratic program with one quadratic constraint but no linear constraints, i.e., $A = 0$ in (\mathcal{P}) . This program can be solved by SDP relaxations. [4] Meanwhile, a canonical dual method has been proposed and can find the global minimizer. [5]

The problem (\mathcal{P}) can also be regarded as generalization of the trust region subproblem [6]:

$$\begin{aligned} \nu = \min \quad & P(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + f^T x \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2}x^T Bx \leq \mu, \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{1-3}$$

where B is positive semidefinite. Here we make no assumptions about B except it is symmetric.

Recently, Gao [7][8] pioneered a canonical duality theory for nonconvex programming problems. The primal-dual relationship provides new insights to generating near-optimal solutions when the corresponding canonical dual problem is solved. Fang et al [9] [10] adopted this approach to tackle the 0-1 quadratic programming and sum-of-quadratic-ratios problems, Wang et al [11] further extended the approach for handling multi-integer quadratic programming problems. Their computational results showed that the approach could be computationally efficient, but much more theoretical analysis is needed. The details of the canonical duality theory can be referred to [7][8][5].

In this article, we try to apply the canonical dual approach to solve the problem (\mathcal{P}) . The article is organized as follows. In chapter 2 we form the canonical dual problem and prove the convexity of it. The relationship between dual variables and primal solutions are revealed in chapter 3. A computational method is designed in chapter 4 to produce a sequence that converges to the dual optimal solutions. Then in the following chapter 5 we make further discussions about strong duality and sufficient conditions. Examples are presented in chapter 6 and conclusions can be found in chapter 7.

§2 The Canonical Dual Problem

In this chapter we form the canonical dual problem that can provide a lower bound for ν . We begin with the Lagrangian function associated with (\mathcal{P}) :

$$L(x, \lambda, \sigma) = \frac{1}{2}x^T(\lambda B + Q)x + (f + A^T\sigma)^T x - \mu\lambda - b^T\sigma, \quad (2-4)$$

where $\lambda \geq 0$ and $\sigma \geq 0$.

The key idea of the canonical duality theory [7][8] is to find all stationery points $x(\lambda, \sigma)$ of $L(x, \lambda, \sigma)$ such that $\frac{\partial L(x, \lambda, \sigma)}{\partial x} = 0$, with the assumption $\lambda B + Q$ is invertible. Then the relationship between $x(\lambda, \sigma)$ and (λ, σ) is given by

$$x(\lambda, \sigma) = -(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T\sigma). \quad (2-5)$$

Substituting it to $L(x, \lambda, \sigma)$, we have the canonical dual function $P^d(\lambda, \sigma)$:

$$P^d(\lambda, \sigma) = -\frac{1}{2}(f + A^T\sigma)^T(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T\sigma) - \mu\lambda - b^T\sigma. \quad (2-6)$$

In general, $P^d(\lambda, \sigma)$ is an “over-estimator” of the Lagrangian dual $l(\lambda, \sigma) := \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \sigma)$. However, the two dual functions $P^d(\lambda, \sigma)$ and $l(\lambda, \sigma)$ coincide on the set $\{\lambda \geq 0 | \lambda B + Q \succ 0\}$.

Before we move on, we need an assumption here. Define $S_\lambda^+ = \{\lambda \geq 0 | \lambda B + Q \succ 0\}$. We assume that S_λ^+ is not empty, i.e., $\exists \lambda'$ satisfying $\lambda' \geq 0$ and $\lambda' B + Q \succ 0$. Under this assumption, the set S_λ^+ is actually a convex interval with non-empty interior. [5] We denote $\text{int}S_\lambda^+$ as (λ_1, λ_2) . Note this assumption is in fact dual Slater condition.

Denote $S_\sigma^+ = \{\sigma | \sigma \geq 0\}$, and $\mathcal{F} = S_\lambda^+ \times S_\sigma^+$. Now we form the canonical dual problem (\mathcal{P}^d):

$$\begin{aligned} \nu^d = \sup \quad & P^d(\lambda, \sigma) \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \geq 0, \\ & \lambda B + Q \succ 0, \\ & \sigma \geq 0. \end{aligned} \tag{2-7}$$

Now we establish

Lemma 2.1. (*Weak Duality*) $\nu^d \leq \nu$.

Proof On \mathcal{F} ,

$$\begin{aligned} P^d(\lambda, \sigma) &= L(x(\lambda, \sigma), \lambda, \sigma) \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \sigma) \\ &\leq \min_{\frac{1}{2}x^T Bx \leq \mu, Ax \leq b} L(x, \lambda, \sigma) \\ &\leq \min_{\frac{1}{2}x^T Bx \leq \mu, Ax \leq b} P(x) = \nu. \end{aligned}$$

Then $\nu^d \leq \nu$. \square

Lemma 2.1 implies that the optimal value of (\mathcal{P}^d) serves as a lower bound for the primal optimal value. The following lemma shows that the canonical dual problem (\mathcal{P}^d) is a convex optimization problem with a concave objective function and a convex domain.

Lemma 2.2. $P^d(\lambda, \sigma)$ is a continuous concave function over $\text{int}\mathcal{F}$.

Proof Obviously, $P^d(\lambda, \sigma)$ is continuous over $\text{int}\mathcal{F}$.

For any $(\lambda, \sigma) \in \text{int}\mathcal{F}$, simple computations show:

$$\frac{\partial P^d(\lambda, \sigma)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}(f + A^T \sigma)^T (\lambda B + Q)^{-1} B (\lambda B + Q)^{-1} (f + A^T \sigma) - \mu, \tag{2-8}$$

$$\frac{\partial P^d(\lambda, \sigma)}{\partial \sigma} = -A(\lambda B + Q)^{-1} (f + A^T \sigma) - b, \tag{2-9}$$

$$\frac{\partial^2 P^d(\lambda, \sigma)}{\partial \sigma \partial \lambda} = \left(\frac{\partial^2 P^d(\lambda, \sigma)}{\partial \lambda \partial \sigma} \right)^T = A(\lambda B + Q)^{-1} B(\lambda B + Q)^{-1} (f + A^T \sigma), \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial^2 P^d(\lambda, \sigma)}{\partial \lambda^2} = -(f + A^T \sigma)^T (\lambda B + Q)^{-1} B(\lambda B + Q)^{-1} B(\lambda B + Q)^{-1} (f + A^T \sigma), \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial^2 P^d(\lambda, \sigma)}{\partial \sigma^2} = -A(\lambda B + Q)^{-1} A^T, \quad (2-12)$$

Then the Hessian matrix of $P^d(\lambda, \sigma)$ is

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 P^d(\lambda, \sigma)}{\partial (\lambda, \sigma)^2} \\ = & -[B(\lambda B + Q)^{-1} (f + A^T \sigma), A^T]^T (\lambda B + Q)^{-1} [B(\lambda B + Q)^{-1} (f + A^T \sigma), A^T] \quad (2-13) \\ \preceq & 0. \end{aligned}$$

This completes the proof. \square

So we may solve the dual problem (\mathcal{P}^d) to obtain useful information about the lower bound of ν , and the primal solution x due to the relationship (2-5). We present the relationship in details in the next chapter.

§3 Primal-Dual Relationship

As we assume at the beginning of this paper, the primal problem has a non-empty feasible domain. Therefore the supremum of (\mathcal{P}^d) is finite, i.e. $\nu^d < +\infty$.

We first consider a subproblem that will appear in the following lemma and chapter ???. For any fixed $\lambda \in \text{int}S_\lambda^+$, the relaxed canonical dual problem (\mathcal{RP}^d) is defined as follows.

$$\begin{aligned} \max \quad & RP^d(\sigma) = P^d(\lambda, \sigma) \\ \text{s.t.} \quad & \sigma \geq 0. \end{aligned} \quad (3-14)$$

Noting that the primal problem is feasible, we know $\nu < +\infty$. Hence (\mathcal{RP}^d) is bounded above and has a feasible point $\sigma = 0$. This implies that (\mathcal{RP}^d) has a finite maximizer. Denote the maximizer by $\sigma(\lambda)$.

Lemma 3.1. Suppose ν^d occurs at $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})$ and $\bar{\sigma}$ is finite. For every sequence $\{\lambda^k\}$ such that $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = \bar{\lambda}$, we assume that the corresponding sequence $\{\sigma^k\} = \{\sigma(\lambda^k)\}$ satisfies $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^k = \bar{\sigma}$. Then we have three kinds of cases depending on where $\bar{\lambda}$ lies:

(i) If $\bar{\lambda} \in \text{int}S_\lambda^+$, then

$$\bar{x} = -(\bar{\lambda}B + Q)^{-1}(f + A^T\bar{\sigma}),$$

satisfies

$$\frac{1}{2}\bar{x}^T B \bar{x} - \mu = 0,$$

$$\nu^d = \frac{1}{2}(f + A^T\bar{\sigma})^T \bar{x} - \mu\bar{\lambda} - b^T\bar{\sigma},$$

(ii) If $\bar{\lambda}$ is the left boundary λ_1 of S_λ^+ , then

$$\bar{x}_1 := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} [-(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T\sigma(\lambda))]$$

and

$$\Delta_1 := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} \frac{\partial P^d(\lambda, \bar{\sigma})}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\bar{x}_1^T B \bar{x}_1 - \mu \leq 0$$

exist.

$$\nu^d = \frac{1}{2}(f + A^T\bar{\sigma})^T \bar{x}_1 - \mu\lambda_1 - b^T\bar{\sigma},$$

(iii) If $\bar{\lambda}$ is the right boundary λ_2 of S_λ^+ , then

$$\bar{x}_2 := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2^-} [-(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T\sigma(\lambda))]$$

and

$$\Delta_2 := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2^-} \frac{\partial P^d(\lambda, \bar{\sigma})}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\bar{x}_2^T B \bar{x}_2 - \mu \geq 0$$

exist.

$$\nu^d = \frac{1}{2}(f + A^T \bar{\sigma})^T \bar{x}_2 - \mu \lambda_2 - b^T \bar{\sigma},$$

Moreover, if $\lambda_2 = \infty$, we have

$$\mu = 0, \Delta_2 = 0.$$

Proof In case (i), if $\bar{\lambda} \in \text{int}S_\lambda^+$, $(\bar{\lambda}B + Q)$ is invertible and $\bar{\lambda}$ is a stationary point of $P^d(\lambda, \bar{\sigma})$. Then $\frac{\partial P^d(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})}{\partial \lambda} = 0$, which implies $\frac{1}{2}\bar{x}^T B \bar{x} - \mu = 0$, where $\bar{x} = -(\bar{\lambda}B + Q)^{-1}(f + A^T \bar{\sigma})$.

Direct computation shows that

$$\nu^d = \frac{1}{2}(f + A^T \bar{\sigma})^T \bar{x} - \mu \bar{\lambda} - b^T \bar{\sigma}.$$

Now we turn to case (ii).

Recall that $(\lambda'B + Q) \succ 0$. Then there exists an orthogonal matrix M_1 s.t. $M_1^T(\lambda'B + Q)M_1 = I$. There is also an orthogonal matrix M_2 s.t. $M_2^T M_1^T B M_1 M_2 = H$, where $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ is diagonal. Let $M = M_1 M_2$, then for any $\lambda \in S_\lambda^+$,

$$M^T(\lambda B + Q)M = M^T[(\lambda - \lambda')B + \lambda'B + Q]M = I + (\lambda - \lambda')H,$$

Denote $D = I + (\lambda - \lambda')H = \text{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda))$, where $d_i(\lambda) = 1 + (\lambda - \lambda')h_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. It follows that

$$(\lambda B + Q)^{-1} = M D^{-1} M^T,$$

where $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}(\lambda), d_2^{-1}(\lambda), \dots, d_n^{-1}(\lambda))$, and $d_i^{-1}(\lambda) = \frac{1}{1 + (\lambda - \lambda')h_i}, i = 1, 2, \dots, n$. Then,

$$P^d(\lambda, \sigma(\lambda)) = -\frac{1}{2}(f + A^T \sigma(\lambda))^T M D^{-1} M^T (f + A^T \sigma(\lambda)) - \mu \lambda - b^T \sigma(\lambda). \quad (3-15)$$

The function $d_i^{-1}(\lambda)$ is monotone with a lower bound 0 on $\text{int}S_\lambda^+$. When $\lambda \rightarrow \lambda_1^+$, $d_i^{-1}(\lambda)$ must tend to a finite positive number or $+\infty$. If $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} d_i^{-1}(\lambda) = +\infty$, the corresponding $[M^T(f + A^T \sigma(\lambda))]_i$ must tend to 0 since $\nu^d > -\infty$, where $[M^T(f + A^T \sigma(\lambda))]_i$ is the i th component of $[M^T(f + A^T \sigma(\lambda))]$.

Therefore, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} d_i^{-1}(\lambda)[M^T(f + A^T \sigma(\lambda))]_i$ exists for all $i = 1, 2, \dots, n$. We define

$$\bar{x}_1 := M \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} D^{-1}(\lambda)[M^T(f + A^T \sigma(\lambda))] = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} [-(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T \sigma(\lambda))].$$

Consequently, the following limit exists.

$$\Delta_1 := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} \frac{\partial P^d(\lambda, \bar{\sigma})}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \bar{x}_1^T B \bar{x}_1 - \mu \leq 0.$$

Direct computation shows

$$\nu^d = \frac{1}{2} (f + A^T \bar{\sigma})^T \bar{x}_1 - \mu \lambda_1 - b^T \bar{\sigma}.$$

Finally, we come to the case (iii). Note that λ_2 may be $+\infty$. If λ_2 is finite, existence of the limits can be proved by similar argument for case (ii).

If $\lambda_2 = +\infty$, we note B is necessarily positive semidefinite. So $h_i \geq 0$ for all $i = 1, 2, \dots, n$. Then

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} d_i^{-1}(\lambda)[M^T(f + A^T \sigma(\lambda))]_i = \begin{cases} 0, & \text{if } h_i > 0, \\ [M^T(f + A^T \sigma(\lambda))]_i, & \text{if } h_i = 0. \end{cases} \quad (3-16)$$

So it follows that

$$\bar{x}_2 := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [-(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T \sigma(\lambda))]$$

and

$$\Delta_2 := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\partial P^d(\lambda, \bar{\sigma})}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \bar{x}_2^T B \bar{x}_2 - \mu \geq 0$$

exist. By $\nu^d = \frac{1}{2} (f + A^T \bar{\sigma})^T \bar{x}_2 - \mu \lambda_2 - b^T \bar{\sigma}$, only when $\mu = 0$ can $-\infty < \nu^d < +\infty$ occur at $\lambda_2 = +\infty$. And $\Delta_2 = 0$ can be shown by computation:

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\partial P^d(\lambda, \sigma(\lambda))}{\partial \lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f + A^T \sigma(\lambda))^T (\lambda B + Q)^{-1} B (\lambda B + Q)^{-1} (f + A^T \sigma(\lambda)) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} [M^T(f + A^T \sigma(\lambda))]^T [M^T(\lambda B + Q)M]^{-1} M^T B M [M^T(\lambda B + Q)M]^{-1} [M^T(f + A^T \sigma(\lambda))] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} [M^T(f + A^T \sigma(\lambda))]^T \text{diag}\left(\frac{h_1}{[1+(\lambda-\lambda')h_1]^2}, \frac{h_2}{[1+(\lambda-\lambda')h_2]^2}, \dots, \frac{h_n}{[1+(\lambda-\lambda')h_n]^2}\right) [M^T(f + A^T \sigma(\lambda))] \\ &= 0 \end{aligned}$$

The proof is now completed. \square

§4 A Computational Method

In this chapter we propose a numerical computational method to produce a sequence $\{(\lambda^k, \sigma^k)\}$ that will have a convergent subsequence if $\{\sigma^k\}$ is bounded. The supremum of the canonical dual problem (\mathcal{P}^d) occurs at the limit point $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})$.

§4.1 Compute (λ_1, λ_2)

The first challenge we are facing is how to compute $S_\lambda^+ = (\lambda_1, \lambda_2)$.

λ_1 is easy to decide. Actually, λ_1 is the optimal value of the following semi-definite program.

$$\begin{aligned} \min \quad & s \\ \text{s.t.} \quad & s \geq 0 \\ & sB + Q \succeq 0 \end{aligned} \tag{4-17}$$

λ_2 is also not difficult to compute. If $B \succeq 0$, λ_2 is simply $+\infty$. Otherwise, λ_2 is the optimal value of the following SDP

$$\begin{aligned} \max \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & t \geq 0 \\ & tB + Q \succeq 0 \end{aligned} \tag{4-18}$$

Hence, $S_\lambda^+ = (\lambda_1, \lambda_2)$.

§4.2 Compute $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})$

§4.2.1 The Subproblem (\mathcal{RP}^d)

Recall the subproblem (\mathcal{RP}^d) .

$$\begin{aligned} \max \quad & RP^d(\sigma) = P^d(\lambda, \sigma) \\ \text{s.t.} \quad & \sigma \geq 0. \end{aligned} \tag{4-19}$$

KKT conditions are satisfied by its finite maximizer $\sigma\lambda$:

$$\sigma(\lambda) \geq 0 \quad (4-20)$$

$$\tau(\lambda) \geq 0 \quad (4-21)$$

$$\tau(\lambda)^T \sigma(\lambda) = 0 \quad (4-22)$$

$$\tau(\lambda) + \nabla R P^d(\sigma) = 0. \quad (4-23)$$

Recall that $\nabla R P^d(\sigma) = \frac{\partial P^d(\lambda, \sigma)}{\partial \sigma} = -A(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T \sigma) - b$. Denote $x(\lambda) = -(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T \sigma(\lambda))$. The KKT conditions can be reexpressed by

$$\sigma(\lambda) \geq 0 \quad (4-24)$$

$$b - Ax(\lambda) \geq 0 \quad (4-25)$$

$$\sigma(\lambda)^T (b - Ax(\lambda)) = 0 \quad (4-26)$$

$$x(\lambda) = -(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T \sigma(\lambda)). \quad (4-27)$$

Lemma 4.1. *If $\bar{\lambda}$ is where ν^d occurs, and also suppose a sequence $\{\lambda^k\}$ satisfies $\lambda^k \rightarrow \bar{\lambda}$, when $\lambda^k \rightarrow \infty$. Denote $\sigma^k = \sigma(\lambda^k)$. If $\{\sigma^k\}$ is bounded, denote the limit point of any convergent subsequence as $\bar{\sigma}$, then $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})$ is where ν^d lies.*

Proof We extend the domain where $P^d(\lambda, \sigma)$ is defined to its boundary. Since $P^d(\lambda, \sigma)$ is continuous on $\text{int}\mathcal{F}$, we let $P^d(\lambda_1, \sigma) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} P^d(\lambda, \sigma)$ and $P^d(\lambda_2, \sigma) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2^-} P^d(\lambda, \sigma)$, if $\lambda_2 < +\infty$.

For convenience, We still use $\{(\lambda^k, \sigma^k)\}$ to denote the convergent subsequence. We just need to show that $\bar{\sigma}$ is the optimal solution of the relaxed problem (\mathcal{RP}^d) with λ fixed as $\bar{\lambda}$. This is implied by the KKT conditions. Since (λ^k, σ^k) satisfy

$$\sigma^k \geq 0 \quad (4-28)$$

$$b - Ax(\lambda^k) \geq 0 \quad (4-29)$$

$$(\sigma^k)^T (b - Ax(\lambda^k)) = 0 \quad (4-30)$$

$$x(\lambda^k) = -(\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T \sigma^k). \quad (4-31)$$

Let $k \rightarrow \infty$. Noting $\lambda^k \rightarrow \bar{\lambda}$, $\sigma^k \rightarrow \bar{\sigma}$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} x(\lambda^k)$ exists due to Lemma 3.1. It holds that

$$\bar{\sigma} \geq 0 \quad (4-32)$$

$$b - Ax(\bar{\lambda}) \geq 0 \quad (4-33)$$

$$\bar{\sigma}^T(b - Ax(\bar{\lambda})) = 0 \quad (4-34)$$

$$x(\bar{\lambda}) = \lim_{k \rightarrow \infty} -(\lambda^k B + Q)^{-1}(f + A^T \bar{\sigma}). \quad (4-35)$$

These are the KKT conditions for the relaxed problem (\mathcal{RP}^d) with $\bar{\lambda}$. The proof is completed. \square

§4.2.2 An Iterate Scheme

We basically use dichotomy on λ to find $\bar{\lambda}$. At every step for λ , the corresponding $\bar{\sigma}$ is determined by solving (\mathcal{RP}^d) .

If $\lambda_2 < +\infty$, we just apply dichotomy to the finite interval $(a_1, a_2) = (\lambda_1, \lambda_2)$. If $\lambda_2 = +\infty$, however, we have to decide the interval (a_1, a_2) where $\bar{\lambda}$ lies, or to the contrast, make sure that $\bar{\lambda} = +\infty$ if the interval can not be found.

As for solving (\mathcal{RP}^d) , we use the disciplined convex programming solver **cvx**[12].

The numerical iterate scheme (NIS) is as follows.

STEP 0 Set $tol = 1 \times 10^{-4}$, $k = 0$, $flag = 0$. Let $a_1 = \lambda_1$.

STEP 1 If $\lambda_2 < +\infty$, let $a_2 = \lambda_2$, $flag = 1$. If $\lambda_2 = +\infty$, let $a_2 = 10a_1 + 10$.

STEP 2 Let $\lambda^k = (a_1 + a_2)/2$. Solve $(\mathcal{RP}^d(\lambda^k))$ to find the corresponding $\sigma^k = \sigma(\lambda^k)$. Compute $\delta^k = \frac{\partial P^d(\lambda^k, \sigma^k)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}(f + A^T \sigma^k)^T (\lambda^k B + Q)^{-1} B (\lambda^k B + Q)^{-1} (f + A^T \sigma^k) - \mu$.

STEP 3 If $|\delta^k| < tol$, go to STEP 5. If $\delta^k > tol$ and $flag = 0$, set $a_2 = 2a_2$ and $a_1 = \lambda^k$. If $\delta^k > tol$ and $flag = 1$, set $a_1 = \lambda^k$. If $\delta^k < tol$, set $a_2 = \lambda^k$, and let $flag = 1$.

STEP 4 If $|a_2 - a_1| < tol$, go to STEP 5. Otherwise, let $k = k + 1$ and go to STEP 2.

STEP 5 $\bar{\lambda} = \lambda^k$, $\bar{\sigma} = \sigma^k$. Stop.

Note if the procedures above do not stop, we know $\bar{\lambda} = +\infty$. $\bar{\sigma}$ can be chosen as the limit point of any convergent subsequence.

Numerically, we have the dual optimal solution $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})$ now. Further properties of it will bring results about strong duality.

§5 Strong Duality and Sufficient Conditions

We follow the results before to discuss on what occasions we can obtain a global minimizer of the primal problem (\mathcal{P}) .

Theorem 5.1. *(Sufficient conditions for strong duality) Suppose ν^d is finite, and the supremum occurs at $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})$ such that $\bar{\sigma}$ is finite.*

- (i) *If $\bar{\lambda} \in \text{int}S_\lambda^+$, $\bar{x} = -(\bar{\lambda}B + Q)^{-1}(f + A^T\bar{\sigma})$ is a global minimizer.*
- (ii) *If $\bar{\lambda}$ is the left boundary λ_1 of S_λ^+ , \bar{x}_1 is a feasible solution of (\mathcal{P}) ,*

$$P(\bar{x}_1) - \nu^d = -\lambda_1\Delta_1.$$

Then either $\lambda_1 = 0$ or $\Delta_1 = 0$ assures \bar{x}_1 is a global minimizer.

- (iii) *If $\bar{\lambda}$ is the right boundary λ_2 of S_λ^+ ,*

- *If $\lambda_2 = \infty$, \bar{x}_2 is a global minimizer of (\mathcal{P}) .*
- *If $\lambda_2 < \infty$, \bar{x}_2 is a feasible solution only when $\Delta_2 = 0$. And when it holds, \bar{x} is a global minimizer.*

- (iv) *(Boundarification Technique) In the remaining cases, ($\lambda_1 > 0$, $\Delta_1 < 0$ or $\lambda_2 < \infty$, $\Delta_2 > 0$), if there exists \tilde{x} s.t. $(\lambda_i B + Q)\tilde{x} = 0$ and $A\tilde{x} = 0$, we can construct a global minimizer by the “boundarification technique”. Specifically,*

$$x^* = \bar{x}_i + \alpha\tilde{x},$$

where α satisfies

$$\alpha^2 \tilde{x}^T B \tilde{x} + 2\alpha \bar{x}^T B \tilde{x} + \bar{x}^T B \bar{x} - 2\mu = 0.$$

Proof First, we consider the case (i). From Lemma 3.1 we know $\bar{x} = -(\bar{\lambda}B + Q)^{-1}(f + A^T\bar{\sigma})$ satisfies $\frac{1}{2}\bar{x}^T B \bar{x} = \mu$. The proof in Lemma 4.1 implies $A\bar{x} - b \leq 0$, then \bar{x} is a feasible solution of (\mathcal{P}) . Further computation shows $P(\bar{x}) = P^d(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})$. This implies strong duality holds, and \bar{x} is a global minimizer.

Then we work on the case (ii). Similar proof to that in the case (i) can perform here and \bar{x} is then a feasible solution of the primal problem (\mathcal{P}) . Furthermore, the duality gap

$P(\bar{x}_1) - \nu^d = -\lambda_1 \Delta_1$. If $\lambda_1 = 0$ or $\Delta_1 = 0$, the duality gap vanishes, and \bar{x}_1 is a global minimizer of the primal problem (\mathcal{P}).

As for the case (iii), similar argument reveals the strong duality when either $\lambda_2 = \infty, \mu = 0$ or $\Delta_2 = 0$ is satisfied.

Finally, we come to the remaining two cases.

When $\bar{\lambda} = \lambda_1 > 0$, we have $\lambda_1 B + Q \succeq 0$ and $\lambda B + Q \succ 0$ for $\lambda \in \text{int} S_\lambda^+$. Suppose that there is \tilde{x} s.t. $(\lambda_1 B + Q)\tilde{x} = 0$ and $A\tilde{x} = 0$. Then $\tilde{x}^T(\lambda B + Q)\tilde{x} > 0$ and $\tilde{x}^T(\lambda_1 B + Q)\tilde{x} = 0$. Hence $(\lambda - \lambda_1)\tilde{x}^T B \tilde{x} > 0$, and then $\tilde{x}^T B \tilde{x} > 0$. Now consider the following quadratic equation of α :

$$\alpha^2 \tilde{x}^T B \tilde{x} + 2\alpha \bar{x}_1^T B \tilde{x} + \bar{x}_1^T B \bar{x}_1 - 2\mu = 0. \quad (5-36)$$

Compute

$$\Delta = 4(\bar{x}_1^T B \tilde{x})^2 - 4\tilde{x}^T B \tilde{x}(\bar{x}_1^T B \bar{x}_1 - 2\mu) > 0.$$

So there is α_0 satisfying 5-36. Denote $x^* = \bar{x}_1 + \alpha_0 \tilde{x}$. Then

$$\frac{1}{2} x^{*T} B x^* - \mu = \frac{1}{2} [\bar{x}_1^T B \bar{x}_1 + 2\alpha_0 \bar{x}_1^T B \tilde{x} + \alpha_0^2 \tilde{x}^T B \tilde{x} - 2\mu] = 0 \quad (5-37)$$

and

$$Ax^* - b = A(\bar{x}_1 + \alpha_0 \tilde{x}) - b = A\bar{x}_1 - b \leq 0. \quad (5-38)$$

So x^* is a feasible solution of the primal problem (\mathcal{P}).

And

$$(f + A^T \bar{\sigma})^T \tilde{x} = -[(\lambda_1 B + Q)\bar{x}_1]^T \tilde{x} = \bar{x}_1^T (\lambda_1 B + Q) \tilde{x} = 0.$$

$$\bar{\sigma}^T (Ax^* - b) = \bar{\sigma}^T (A\bar{x}_1 - b) = 0.$$

Compute

$$\begin{aligned}
P(x^*) &= \frac{1}{2}x^{*T}Qx^* + f^T x^* \\
&= \frac{1}{2}x^{*T}Qx^* + f^T x^* + \lambda_1\left(\frac{1}{2}x^{*T}Bx^* - \mu\right) + \bar{\sigma}^T(Ax^* - b) \\
&= \frac{1}{2}x^{*T}(\lambda_1 B + Q)x^* + (f + A^T \bar{\sigma})^T x^* - \mu\lambda_1 - b^T \bar{\sigma} \\
&= \frac{1}{2}(f + A^T \bar{\sigma})^T \bar{x} - \mu\lambda_1 - b^T \bar{\sigma} \\
&= \nu^d.
\end{aligned}$$

Therefore, x^* is a global minimizer.

When $\lambda_2 < \infty, \Delta_2 > 0$, the proof is similar. \square

We see the strong duality can not always hold. This can be expected since the primal problem (\mathcal{P}) is in general NP-hard. Some examples will show various kinds of instances.

§6 Examples

Example 6.1. $Q = [1, 0; 0, 1]; f = [1; 1]; A = [-1, -1; -1, 1; 1, 0]; b = [2; 2; 2]; B = [1, 0; 0, 1]; \mu = 1.5$.

In this example, we see Q and B are both semi-definite. Thus the primal problem is a convex program. More specifically, it is a second order cone program. $S_\lambda^+ = (\lambda_1, \lambda_2) = [0, +\infty)$. The dual optimal solution is $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma}) = (0, 0, 0, 0)^T$. Then $\bar{x} = -(\bar{\lambda}B + Q)^{-1}(f + A^T \bar{\sigma}) = (-1, -1)^T$. Moreover, $P(\bar{x}) = -1$ and $\nu^d = -1$. Hence \bar{x} is a global minimizer of the primal problem, which is also shown from Theorem 5.1 since $\lambda_1 = 0$.

Example 6.2. $Q = [1, 0; 0, -1]; A = [1, 1; -1, 1; 0, -1]; b = [1; 1; 5]; f = [-1; -1]; B = [1, 0; 0, 1]; \mu = 10$.

Now we see Q is indefinite, while B is still semi-definite. In fact, the quadratic constraint is redundant and the feasible domain is the polyhedral corresponding with the linear constraints. This also indicates that to some degree we may deal with a linearly constrained quadratic program by adding a redundant ball constraint.

$S_\lambda^+ = (\lambda_1, \lambda_2) = [1, +\infty)$. $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma}) = (1, 1, 0, 0)^T$. Then $\bar{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} (\lambda B + Q)^{-1}(f + A^T \bar{\sigma}) = (0, 1)^T$. Theorem 5.1 shows strong duality fails to hold since $\bar{\lambda} = \lambda_1 = 1 > 0$ and $\Delta_1 = -9.5 < 0$. In fact, simple computational result is $P(\bar{x}) - \nu^d = 9.5 > 0$. Unfortunately, the “boundarification technique” is not valid since the required nonzero \tilde{x} does not exist.

Example 6.3. $Q = [1, 0; 0, -1]; A = [1, 1; -1, 1; 0, -1]; b = [1; 1; 5]; f = [-1; -1]; B = [1, 0; 0, 1]; \mu = 0.4$.

This example is almost the same as Example 6.2 except $\mu = 0.4$. Note the quadratic constraint is no longer redundant now. And the solution in Example 6.2 $x = (0, 1)^T$ is not feasible here.

We still have $S_\lambda^+ = (\lambda_1, \lambda_2) = [1, +\infty)$. But the dual optimal solution turns out that $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma}) = (1.2905, 0.7417, 0, 0)^T$. Then the corresponding $\bar{x} = (0.1127, 0.8872)^T$. \bar{x} is a global minimizer since $\bar{\lambda} \in \text{int}S_\lambda^+$.

Example 6.4. $Q = [1, 0; 0, -1]; A = [1, 1; -1, 1; 0, -1]; b = [1; 1; 5]; f = [-1; -1]; B = [-0.1, 0; 0, 1]; \mu = 0$.

Note that now Q and B are both indefinite. Follow the procedures in section 4.1 we compute $S_\lambda^+ = (\lambda_1, \lambda_2) = (1, 10)$. The dual optimal solution is $(\bar{\lambda}, \bar{\sigma}) = (3.1709, 0.4805, 0, 0)^T$. Since $\bar{\lambda} \in \text{int}S_\lambda^+$, the corresponding $\bar{x} = (0.7597, 0.2403)^T$ is the global minimizer of the primal problem.

§7 Conclusions

In this article, we form the canonical dual problem (\mathcal{P}^d) of the quadratic program (\mathcal{P}) by applying the canonical duality theory. Under the dual Slater condition in S_λ^+ , we propose an iterate scheme that may produce the dual optimal solution. Moreover, we show that the strong duality holds for some kinds of instances. As to the remaining ones, fortunately, if some extra conditions are satisfied, the strong duality can still hold by the “boundarification technique”.

The approach provides a potential way to solve the subproblem $(CDP)_k$ in [3]. We may search for a better $\bar{\lambda}$ by directly solving $(CDP)_k$. Even the LCQP itself may be dealt with by adding a redundant quadratic constraint, which transforms LCQP to the problem in this article.

This is only the initial work on the program (\mathcal{P}) . There are several further questions. A more efficient algorithm is worth developing. Precise analysis of the instances that strong duality does not hold is promising and valuable. Finally, we hope to extend the canonical dual approach to quadratic programs with multiple quadratic constraints and general (\mathcal{QCQP}) .

参考文献

- [1] P. M. Pardalos and S. A. Vavasis. Quadratic programming with one negative eigenvalue is np-hard. *Journal of Global Optimization*, 1(1):15–22, 1991.
- [2] M. Kurt Anstreicher. Semidefinite programming versus the reformulation-linearization technique for nonconvex quadratically constrained quadratic programming. *Journal of Global Optimization*, 43:471–484.
- [3] Wenxun Xing, Shu-Cherng Fang, Reuy-Lin Sheu and Ziteng Wang. A canonical dual approach for solving linearly constrained quadratic programs. *Working paper, Tsinghua University*, 2009.
- [4] Arkadi Nemirovski. *Lectures on Modern Convex Optimization*.
- [5] Wenxun Xing, Shu-Cherng Fang, David Yang Gao, Reuy-Lin Sheu and Liping Zhang. Canonical dual solutions to the quadratic programming over a quadratic constraint. *Working paper, Tsinghua University*, 2009.
- [6] Ronald J. Stern and Henry Wolkowicz. Indefinite trust region subproblems and nonsymmetric eigenvalue perturbations. *SIAM J. Optimization*, 5(2):286–313, 1995.
- [7] David Y. Gao. Canonical dual transformation method and generalized triality theory in nonsmooth global optimization. *Journal of Global Optimization*, 17, 2000.
- [8] David Y. Gao. Canonical duality theory and solutions to constrained nonconvex quadratic programming. *Journal of Global Optimization*, 29(4):377–399, 2004.
- [9] Shu-Cherng Fang, David Y. Gao, Reuy-Lin Sheu and Soon-Yi Wu. Canonical dual approach to solving 0-1 quadratic programming problems. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 4, 2008.
- [10] Shu-Cherng Fang, David Y. Gao, Reuy-Lin Sheu and Wenxun Xing. Global optimization for a class of fractional programming problems. *Journal of Global Optimization*, 45(3):337–353, 2009.
- [11] Zhenbo Wang, Shu-Cherng Fang, David Y. Gao and Wenxun Xing. Global extremal conditions for multi-integer quadratic programming. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 4, 2008.
- [12] Michael Grant and Stephen Boyd. **cvx** *User's Guide for cvx version 1.21 (build 781)*.

权为一的模形式与Galois表示

阳恩林*

指导教师：印林生教授

摘 要

本文主要目的是介绍模形式与Galois表示。历史上有三个关于模形式与Galois表示的重要猜想，其中之一为Serre猜想，2009年C.Khare彻底解决了Serre猜想。第二章中我们将介绍模形式的概念及其性质，以及引入Artin L函数、Artin导子、Galois表示等概念，最后叙述Serre猜想并给出若干推论。第三章中我们给出Deligne-Serre猜想的证明，这个证明属于Deligne-Serre。

关键词：Galois表示；新形式；单项域；拟分圆域；导子；提升； η 级数； θ 级数

§1 引言

§1.1 一系列猜想

设 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ，其中 $\overline{\mathbb{Q}}$ 为 \mathbb{Q} 的某个代数闭包，我们将 $G_{\mathbb{Q}}$ 看为投射有限群（profinite group）。我们将考察 $G_{\mathbb{Q}}$ 的如下三种（连续）表示：

- (a) $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ ， n 维复表示，其中复数域 \mathbb{C} 考虑为离散拓扑。
- (b) $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_n(\overline{\mathbb{F}_p})$ ，其中 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 为 p 阶有限域 \mathbb{F} 的代数闭包，将 $GL_n(\overline{\mathbb{F}_p})$ 看成离散拓扑群。
- (c) $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_n(K)$ ，其中 K 为 \mathbb{Q}_p 的有限扩张，并将其看成 p -adic拓扑群。

给定嵌入 $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ ，我们将复共轭运算 c 限制到 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上，从而 c 可看成 $G_{\mathbb{Q}}$ 中的元素。注意 c 是一个两阶元。我们称上述三种表示是奇表示如果 $\det(\rho(c)) = -1$ 。对应于上面三种表示，有三个著名的猜想：

*基数63

- (a) Artin-Langlands: 如果 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ 是不可约连续奇表示, 则 ρ 可由权为1的新形式提升而来(我们将在后面给出新形式与提升的精确概念)。
- (b) Serre: 如果 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_n(\overline{\mathbb{F}_p})$ 是不可约连续奇表示, 设 ρ 的Serre权为 $k(\rho)$, Serre导子为 $N(\rho)$ 。则 ρ 可由权为 $k(\rho)$, $\Gamma_1(N(\rho))$ 上的新形式提升而来。
- (c) Fontaine-Mazur: 假设奇表示 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_n(\mathcal{O}_K)$ 绝对不可约, 只在有限个素点处分歧, 并且 $\rho|_{D_p}$ 半稳定。其中 \mathcal{O}_K 为 K 的整环, K/\mathbb{Q} 为有限扩张。假设 $\rho|_{D_p}$ 具有Hodge-Tate权 $(a, b) (a \geq b)$, 则 $\rho \otimes \chi_p^{-b}$ 可由权为 $a - b + 1$ 的新形式提升而来。

我们知道从猜想(b)可以推出猜想(a)与(c), 而猜想(c)也可以得到猜想(b)。而Serre猜想已经于2009年被Chandrashekhara Khare与Jean-Pierre Wintenberger所证明 [1, 2], 从而上面三个猜想都是正确的。

上面这些猜想是说, 给定一个新形式, 便能给出Galois表示, 反之, 满足一定条件的Galois表示就给出了一新形式。新形式与Galois表示之间的这种对应, 使得, 我们在考虑Galois表示时, 可以借用模形式的研究方法, 以及在考虑模形式问题时, 可借用Galois表示中的方法。更加广泛的猜想是Langlands猜想。

§1.2 工作介绍

Serre 在文[3]、[4]中提出了Serre猜想, 并详细的考察了 $G_{\mathbb{Q}}$ 的2维复表示与权为1的模形式的关系。本文的第一个目的是在Serre猜想被解决情况大背景下, 重新考察Serre的工作, 并给出某些命题的推广。对于两维复Galois表示 (Artin表示) ρ 而言, 有三个重要的量:

- (a) 表示 ρ 所给出的Artin L 函数 $L(s, \rho)$ 。
- (b) 表示 ρ 的Artin导子。
- (c) ρ 所对应的新形式。

Deligne-Serre定理是说, 给定一个新形式 $f = \sum a_n q^n \in S_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$, 便有一个Artin表示 ρ 与之对应, 并且成立:

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\rho(\text{Frob}_p)) &= a_p \\ \det(\rho(\text{Frob}_p)) &= \epsilon(p) \end{aligned}$$

Weil-Langlands定理则断言, 给定一个Artin表示, 便能给出一个新形式, 且这个新形式所对应的L函数与该表示的Artin L函数一致。我们在第三章中将给出Deligne-Serre的证明。

在第四章中, 我们利用Tate的方法先给出2维Artin L函数的一个积分表达式(或换成新形式的语言, 给出了新形式所对应L函数的积分表达)。接着, 利用Serre关于分歧群的结论, 计算得到了拟分圆域 $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{u_{pq}})$ (p 奇) 不可约表示的导子, 以及给出了 $p=2$ 时导子在素点2处的一个估计。利用结论 $M_0(\Gamma_1(N)) = \mathbb{C}$, 我们给出了一个模形式何时为乘积 η 级数的简单刻画。最后我们引入了单项域的概念, 并给出了单项域一些性质与不变量猜想。

§2 知识回顾

§2.1 模形式、Hecke算子、新形式

§2.1.1 模形式的定义

令 $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$ 为上半平面,

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Γ 通过如下方式作用在 \mathcal{H} 上:

$$\sigma z = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ 其中 } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, z \in \mathcal{H}.$$

很容易验证上述作用为一个群作用, 也即有 $1z = z$, 以及对所有的 $\sigma, \tau \in \Gamma$, $\sigma(\tau z) = (\sigma\tau)z$ 。很自然的, 上述作用诱导出了 Γ 对定义于 \mathcal{H} 上函数的一个作用: 设 k 是一个整数, f 是 \mathcal{H} 上的函数, 定义

$$f|_k \sigma(z) = (cz + d)^{-k} f(\sigma z) = (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right), \sigma \text{ 同上}.$$

为方便, 我们定义 $j(\sigma, z) = (cz + d)^{-1}$ 。我们称 Γ_1 是 Γ 的同余子群, 如果 Γ_1 是 Γ 的子群, 且 $|\Gamma : \Gamma_1| < \infty$, 后者也等价于说存在正整数 N 使得 $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1$ 。下面这两个同余子群是比较常见的:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma; c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma; a \equiv b \equiv 1 \pmod{N}, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

下面我们正式给出同余子群上模形式的定义 [5]。

定义2.1. 设 N 是大于1的整数, $\epsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ 是Dirichlet特征, 我们将其延拓为 \mathbb{Z} 上的特征, 也即当 $(n, N) \neq 1$ 时, 令 $\epsilon(n) = 0$ 。注意, 在本文中, 我们都将这样看待Dirichlet特征。我们用 R_d 表示 Γ 中位置 $(2, 2)$ 处元素为 d 的任一矩阵, 并令 $\epsilon(R_d) := \epsilon(d)$ 。我们称函数 f 是 $\Gamma_0(N)$ 上型为 (k, ϵ) 的模形式, 如果:

(1) f 在 \mathcal{H} 上全纯。

(2) 对所有整数 d , $f|_k R_d = \epsilon(d)f$ 。

(3) f 在尖点处全纯。

类似得可以定义任一同余子群上的模形式, 参见[5]。

我们来解释条件(3): 如果 f 满足条件(1), 则 $f(z+1) = f(z)$, 从而 f 有如下的傅里叶展开:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

我们称 f 在无穷远点全纯, 如果对所有 $n < 0$, $a_n = 0$ 。称 f 在无穷远点消失, 如果对所有的 $n \leq 0$, $a_n = 0$ 。如果对所有的 $\sigma \in \Gamma$, $f|_k \sigma$ 在无穷远点出全纯, 则称 f 在尖点处全纯。同理可定义 f 在尖点处消失。如果 f 在所有尖点处消失, 则称 f 为尖(点)形式。我们用 $M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 表示 $\Gamma_0(N)$ 上型为 (k, ϵ) 的模形式所形成的 \mathbb{C} 向量空间, 用 $S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 表示 $\Gamma_0(N)$ 上型为 (k, ϵ) 的尖点形式所形成的 \mathbb{C} 向量空间。

注记2.1. 由于 $-I \in \Gamma_0(N)$, 所以 $(-1)^{-k}f = f|_k(-I) = \epsilon(-1)f$ 。假如 $\epsilon(-1) \neq (-1)^k$, 则推出 $M_k(\Gamma_0(N), \epsilon) = 0$ 。于是我们总假定 $\epsilon(-1) = (-1)^k$ 。

注记2.2. $M_k(\Gamma_0(N), \epsilon) \in M_k(\Gamma_1(N), 1)$

§2.1.2 Hecke算子及其性质

设 p 是一个素数, $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$, 定义Hecke算子 T_p 如下:

$$f|_k T_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{np} q^n + \epsilon(p)p^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{np}.$$

注意, 当 $p|N$ 时, $\epsilon(p) = 0$, 此时有 $f|_k T_p = \sum_{n \geq 0} a_{np} q^n$ 。

定理2.1. 如果 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$, 则 $f|_k T_p \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 。如果 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$, 则 $f|_k T_p \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 。

Proof. 对素数 p , 令 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ 。考虑陪集分解 $\Gamma_1(N)\alpha\Gamma_1(N) = \cup_j \Gamma_1(N)\beta_j$ 。由[6]第五章可知:

$$f|_k T_p = \sum_j f|_k \beta_j. \quad (2-1)$$

由于 $\Gamma_1(N)$ 是 $\Gamma_0(N)$ 的正规子群, 对任何 $\gamma \in \Gamma_0(N)$, 成立: $\Gamma_1(N)\alpha\Gamma_1(N) = \cup_j \Gamma_1(N)\gamma\beta_j\gamma^{-1}$ 。于是 $(f|_k T_k)|_k \gamma = (\sum_j f|_k \beta_j)|_k \gamma = (\sum_j f|_k \gamma\beta_j\gamma^{-1})|_k \gamma = \sum_j f|_k \beta_j = f|_k T_k$ 。所以 $f|_k T_p \in M(\Gamma_0(N), k, \epsilon)$ 。当 f 为尖点形式时, 从 T_p 的定义容易看出 $f|_k T_p$ 依然为尖点形式。 \square

§2.1.3 新形式、本原形式

设 $\epsilon: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ 是Dirichlet特征, 选取最小的整数 $Cond(\epsilon)$, 使得对所有的整数 n 成立 $\epsilon(n \bmod N) = \epsilon(n \bmod Cond(\epsilon))$, 一般地有 $Cond(\epsilon)|N$, 我们称 $Cond(\epsilon)$ 为 ϵ 的导子。我们将 $S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 中由

$$\bigcup_M \bigcup_n \{f(nz); f(z) \in S(\Gamma_0(M), k, \epsilon)\}$$

张成的子空间记为 $S^1(\Gamma_0(N), k, \epsilon)$, 这里 M 遍历所有满足 $Cond(\epsilon)|M$ 、 $M|N$ 、 $M \neq N$ 的正整数, 而 n 遍历 $\frac{N}{M}$ 的因子。我们称 $S^1(\Gamma_0(N), k, \epsilon)$ 中模形式为旧形式。为了定义新形式, 我们还需要引入Petersson内积。对任意 $f, g \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon) \subset S_k(\Gamma_1(N))$, 定义内积如下:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\mu(\Gamma_1(N))} \int_F f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}, \mu(\Gamma_1(N)) = \int_F \frac{dx dy}{y^2}, F = \Gamma_1(N) \backslash \mathcal{H}.$$

我们把 $S^1(\Gamma_0(N), k, \epsilon)$ 关于Petersson内积在 $S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 中的正交补记为 $S^0(\Gamma_0(N), k, \epsilon)$ 。并称 $S^0(\Gamma_0(N), k, \epsilon)$ 为新形式空间。我们称 $S^0(\Gamma_0(N), k, \epsilon)$ 中非零元素 $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ 为特征形, 如果对所有素数 p , 存在复数 λ_p , 使得 $f|_k T_p = \lambda_p f$ 。事实上我们可以证明 $\lambda_p = a_1^{-1} a_p$ 。由于

$$\lambda_p f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_p a_n q^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} q^n + \epsilon(p) p^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{np},$$

对比系数便得到

$$\lambda_p a_n = \begin{cases} a_{np} + \epsilon(p) p^{k-1} a_{n/p}, & p|n, \\ a_{np}, & p \nmid n. \end{cases} \quad (2-2a)$$

$$(2-2b)$$

在(2-2b)中取 $n = 1$, 便得到 $\lambda_p = a_1^{-1} a_p$ 。如果特征形 f 满足 $a_1 = 1$, 则称 f 为本原特征形或本原尖点形式或新形式(newform)。在这种情况下, 式子(2-2b)是说 a_n 是积性

的, 也即当 $(n, m) = 1$ 时, $a_{nm} = a_n a_m$ 。式子 (2-2a) 可以化为:

$$a_{p^{m+1}} = a_p a_{p^m} - \epsilon(p) p^{k-1} a_{p^{m-1}}.$$

特别的, 当 $p \mid N$ 时, $a_{p^m} = (a_p)^m$ 。上面这些式子说明, 当 f 为本原形式时, f 傅里叶展开式中的系数由素数项系数决定。

注记2.3. 读者应该注意, 在有些书籍中, 新形式仅仅指新形式空间中的一个元素。

§2.1.4 函数方程

设 χ 是 Dirichlet 特征, $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 。定义:

$$\begin{aligned} L(s, \chi, f) &= \sum_{n \geq 1} a_n \chi(n) n^{-s}, \\ \Lambda(s, \chi, f) &= (2 \text{Cond}(\chi)^{-1} \pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, \chi, f), \\ L(s, \chi, f) &= \sum_{n \geq 1} a_n \chi(n) n^{-s}, \\ \Lambda(s, f) &= (2\pi\sqrt{N})^{-s} \Gamma(s) L(s, f). \end{aligned}$$

我们知道 $L(s, \chi, f)$ 与 $L(s, f)$ 具有函数方程, 且可以解析延拓到整个复平面。如果 f 还是本原尖点形式, 则由式子 (2-2a)、(2-2b) 很容易证明:

$$L(s, f) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + \epsilon(p) p^{k-1-2s})^{-1}.$$

令 $\bar{f} = \sum \overline{a_n} q^n$, $f_1 = N^{-k/2} z^{-k} f(\frac{1}{Nz})$, 可以证明 [7] f_1 是 $S(\Gamma_0(N), k, \bar{\epsilon})$ 中特征形, 进一步, 存在复数 c 使得 $f_1 = cf$, 且满足函数方程 $\Lambda(s, f) = ci^k \Lambda(s, \bar{f})$ 。

§2.2 Frobenius 置换, Artin 导子, 非交换 Artin-L 函数

§2.2.1 Frobenius 置换

设 E/K 是数域的 Galois 扩张, $G = \text{Gal}(E/K)$ 。设 \mathfrak{p} 是 K 的有限素点, 且 E/K 在 \mathfrak{p} 处非分歧。取 E 中在 \mathfrak{p} 之上的素点 \mathfrak{q} 。则在 G 中存在唯一元 $\text{Frob}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}}$ 使得 $\text{Frob}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}}(x) \equiv x^{N(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{q}}$, 其中 $N(\mathfrak{p}) = \#(\mathcal{O}_K)/\mathfrak{p}$, \mathcal{O}_K 为数域 K 的整环。容易证明对所有的 $\sigma \in G$, $\text{Frob}_{\mathfrak{p}, \sigma(\mathfrak{q})} = \sigma(\text{Frob}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}})\sigma^{-1}$ 。从而 $\text{Frob}_{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}}$ 在 G 中所处的共轭类与 \mathfrak{q} 的选取无关。我们将这个共轭类记为 $\text{Frob}_{\mathfrak{p}}$, 称之为 E/K 在 \mathfrak{p} 处的 Frobenius 置换。

§2.2.2 Artin 导子及其性质

关于这一小节, 请读者参见 [8]。依然采用 §2.2.1 中记号。设 E/K 是数域的 Galois 扩张, $G = \text{Gal}(E/K)$ 。

对 E 的任一素除子 \mathfrak{q} , 定义分解群 $D_{\mathfrak{q}} = \{\sigma \in G; \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}$ 。当 \mathfrak{q} 为无限素除子时, $D_{\mathfrak{q}}$ 的阶为1或2。经典的结论是 $D_{\mathfrak{q}} = \text{Gal}(E_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}})$, 其中 $E_{\mathfrak{q}}$ 为 E 关于 \mathfrak{q} 的完备化, $K_{\mathfrak{p}}$ 为 K 关于 \mathfrak{p} 的完备化, 而 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}_K$ 。惯性群 $I_{\mathfrak{q}}$ 被定义为自然态射 $D_{\mathfrak{q}} \rightarrow \text{Gal}(\overline{E}/\overline{K})$ 的核, 其中 $\overline{E} = \mathcal{O}_E/\mathfrak{q}$, $\overline{K} = \mathcal{O}_E/\mathfrak{p}$ 。我们还需要 i 次分歧群的概念。对任意的整数 $i \geq -1$, 定义 i 次分歧群如下:

$$G_{\mathfrak{q},i} = \{s \in D_{\mathfrak{q}}; \nu_{E,\mathfrak{q}}(s(a) - a) \geq i + 1, \forall a \in \mathcal{O}_{E_{\mathfrak{q}}}\},$$

其中 $\nu_{E,\mathfrak{q}}$ 为 $E_{\mathfrak{q}}$ 关于 \mathfrak{q} 的赋值。容易知道 $G_{\mathfrak{q},-1} = D_{\mathfrak{q}}$, $G_{\mathfrak{q},0}$ 为惯性群 $I_{\mathfrak{q}}$, 且对充分大的 i , $G_{\mathfrak{q},i} = \{1\}$ 。

假设 (ρ, V) 为 G 的复表示, $\chi = \text{Trace}(\rho)$ 为其特征标。定义:

$$n(\chi, \mathfrak{p}) := n(\rho, \mathfrak{p}) := \sum_{i \geq 0} \frac{|G_{\mathfrak{q},i}|}{|G_{\mathfrak{q},0}|} (\chi(1) - \chi(G_{\mathfrak{q},i})),$$

其中 $\chi(G_{\mathfrak{q},i}) = |G_{\mathfrak{q},i}|^{-1} \sum_{s \in G_{\mathfrak{q},i}} \chi(s)$ 。注意上式定义与 \mathfrak{q} 的选取无关。Artin证明了 $n(\chi, \mathfrak{p})$ 为一个整数。特别地, 当 E/K 在 \mathfrak{p} 处非分歧时, $n(\chi, \mathfrak{p}) = 0$, 而当 E/K 在 \mathfrak{p} 处弱分歧时 (即 $G_{\mathfrak{q},1} = \{1\}$), $n(\chi, \mathfrak{p}) = |\chi(1) - \chi(G_{\mathfrak{q},0})|$ 。

定理2.2. 表示 ρ 的Artin导子被定义为 $\text{Cond}(\chi) := \text{Cond}(\rho) := \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{n(\chi, \mathfrak{p})}$ 。它有如下三个基本性质:

- (a) 对 G 的任意两个表示 $\rho_1(\chi_1)$ 与 $\rho_2(\chi_2)$, $\text{Cond}(\chi_1 + \chi_2) = \text{Cond}(\chi_1)\text{Cond}(\chi_2)$ 。
- (b) 设 H 是 G 的商群, χ' 是 H 的某个特征标, χ 为 χ' 的提升, 则 $\text{Cond}(\chi) = \text{Cond}(\chi')$ 。
- (c) 设 H 为 G 的子群, H 所对应的中间域为 F 。设 χ 为 H 的特征标, $\chi^* = \text{Ind}_H^G(\chi)$, 则

$$\text{Cond}(\chi^*) = |\text{Disc}(F/K)^{\chi(1)}| \cdot \text{Norm}_{F/K}(\text{Cond}(\chi)),$$

其中 $\text{Norm}_{F/K}$ 为范映射, $\text{Disc}(F/K)$ 为域扩张的判别式。

Proof. 参见Serre的书籍“Corps locaux”第四章[8]。我们将在后面用到这些性质, 故摘录在这儿。□

§2.2.3 非交换Artin-L函数及其性质

设 E/K 是数域的Galois扩张, $G = \text{Gal}(E/K)$ 。设 \mathfrak{p} 是 K 的有限素点, \mathfrak{q} 是 E 中在 \mathfrak{p} 之上的素理想。考虑 G 的 n 维复表示 $\rho: G \rightarrow \text{GL}_n(V), \chi = \text{Trace}(\rho)$ 。令 $V^{I_{\mathfrak{q}}} := \{v \in V; \forall \sigma \in I_{\mathfrak{q}}, \rho(\sigma)v = v\}$ 。定义Artin-L函数如下:

$$L(s, \chi) := L(s, \rho) := \prod_{\mathfrak{p}: \text{有限素点}} \det_{V^{I_{\mathfrak{q}}}}(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} \rho(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}))^{-1}, \text{Re}(s) > 1,$$

其中 $N(\mathfrak{p}) = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}|$ 。与Artin导子相对应，Artin-L函数有下面三个性质：

- (a) 对 G 的任意两个表示 $\rho_1(\chi_1)$ 与 $\rho_2(\chi_2)$ ， $L(s, \chi_1 + \chi_2) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$ 。
- (b) 设 H 是 G 的商群， χ' 是 H 的某个特征标， χ 为 χ' 的提升，则 $L(s, \chi) = L(s, \chi')$ 。
- (c) 设 H 为 G 的子群， H 所对应的中间域为 F 。设 χ 为 H 的特征标， $\chi^* = \text{Ind}_H^G(\chi)$ ，则 $L(s, \chi^*) = L(s, \chi)$ 。

关于Artin-L函数在无穷素点处因子的定义请参见文献[9]中J.Martinet的文章“Character theory and Artin L-functions”。

Artin猜想是说：当 χ 不包含单位特征标时， $L(s, \chi)$ 可解析延拓为整个复平面上的全纯函数。Artin猜想对维数为一的特征标是正确的，这可由Hecke理论可知！再由§2.2.3(a)可知，对一维特征标的线性组合，Artin猜想依然成立。事实上，对于二维不可约奇特征标，Artin猜想也是对的，参见下一小节！Brauer证明了 $L(s, \chi)$ 具有亚纯延拓性，Langlands与Tunnel证明了当二维表示 ρ 的像为可解群时，Artin猜想成立。Langlands还有个更强的猜想：存在 $GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 的尖 (cuspidal) 自守表示 π 使得 $L(s, \rho) = L(s, \pi)$ 。Godement-Jacquet已证明 $L(s, \pi)$ 可解析延拓了整个复平面，从而Langlands猜想意味中Artin猜想。

§2.2.4 Galois表示、Serre权、Serre导子

所谓Galois表示，指的是Galois群（特别是 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ）的连续表示，包括复表示，模 p 表示以及 p -adic表示。称 $G_{\mathbb{Q}}$ 的表示 ρ 为奇表示，如果 $\det(\rho(c)) = -1$ ，其中 c 为复共轭（此时，我们固定一个嵌入 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$ ）。称Galois表示 ρ 在 p 处非分歧，如果 $\rho|_{I_p}$ 平凡。

定义2.2. (a) 如果 $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ 为二维、不可约、连续、奇表示，则称 ρ 为Artin表示。另外，我们称Artin表示具有Artin权1。

(b) 如果 $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 为2维连续、不可约、奇表示，则称 ρ 为Serre表示，其中 \mathbb{F}_p 为 p 元有限域。Serre表示有两个重要的指标，即Serre权 $k(\rho)$ 与Serre导子 $N(\rho)$ 。Serre导子 $N(\rho)$ 被定义为Artin导子 $\text{Cond}(\rho)$ 中与 p 互素的那一部分。定义Serre权需要较长的篇幅，这里略去，请读者参见文献[3]。

我们称Artin表示的Artin导子以及Serre表示Serre导子简称为该表示的导子。而将Artin权与Serre权简称为表示的权。

给定新形式 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ ，考虑它的 q 展开： $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ ，其中 $a_1 = 1$ 。对 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的每一个素点 λ ，固定一个嵌入 $\iota_{\lambda}: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ ，则存在一个连续且不可约的半单表示 $\rho_{f, \lambda}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ 满足：

1. $\rho_{f,\lambda}$ 在 Np 之外非分歧，也即对所有的素数 l ， $\rho_{f,\lambda}$ 在 l 处非分歧，其中 p 是 λ 的剩余类域特征。
2. 对所有的 $l \nmid Np$ ， $\text{Trace}(\rho_{f,\lambda}(\text{Frob}_l)) = \iota_\lambda(a_q)$ 。
3. 对所有的 $l \nmid Np$ ， $\det(\rho_{f,\lambda}(\text{Frob}_l)) = \chi_l^{k-1} \iota_\lambda(\epsilon(l))$ 。其中 χ_l 为 l 分圆域特征。

上述结论，当 $k = 2$ 时由Eichler与Shimura所解决，而 $k > 2$ 时由Deligne所解决， $k = 1$ 的情形由Deligne与Serre解决 [4]。我们称一个Galois表示 ρ 由模形式（新形式）提升而来，是指，存在一个新形式 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ ，使得 $\rho \cong \rho_{f,\lambda}$ 。反过来，给定一个满足一定条件的Galois表示，有三个主要的猜想，这在文章开头已经说及。最重要的是，2009年C.Khare与J-P.Wintenberger 彻底解决了Serre猜想 [1, 2]，也即有：

定理2.3 (Serre's conjecture). 设 \mathbb{F} 为有限域，如果表示 $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{F})$ 连续，奇，且绝对不可约，则 ρ 可由 $S_{k(\rho)}(\Gamma_1(N(\rho)))$ 中新形式提升而来。

下面这个定理是文章[4]的主定理，也即权 $k = 1$ 时的情形。

定理2.4 (Deligne-Serre定理). 设整数 $N \geq 1$ ， ϵ 是模 N 的Dirichlet奇特征（即 $\epsilon(-1) = -1$ ）。再选取非零模形式 $f \in M_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 。假定对所有的素数 $p \nmid N$ ， $f|_1 T_p = a_p f$ 。则存在一个在 N 之外非分歧的表示 $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ ，使得对所有的素数 $p \nmid N$ ：

$$\text{Trace}(\rho(\text{Frob}_p)) = a_p, \det(\rho(\text{Frob}_p)) = \epsilon(p).$$

上述表示不可约当且仅当 f 是尖点形式。另外如果 $f = \sum_{n=1} a_n q^n$ 是新形式，则 $\text{Cond}(\rho) = N$ ， $L(s, \rho) = \sum_{n=1} a_n n^{-s}$ 。由于新形式所对应的 L 函数可以解析延拓到整个复平面，从而 $L(s, \rho)$ 也可以解析延拓到整个复平面。

Proof. 这个定理的证明过于复杂，我们将其单独放到第三章。 □

注记2.4. 当2.4中的表示可约时， f 为Eisenstein模形式。

下面这个定理比文[4]中的Weil-Langlands定理更强，它是Deligne-Serre定理的逆。

定理2.5 (强Weil-Langlands定理). 假定 $\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ 为不可约奇表示。设Artin- L 函数有傅里叶展开： $L(s, \rho) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ 。令 $N = \text{Cond}(\rho)$ ， $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ ， $\epsilon = \det(\rho)$ ，则 $f \in S_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 为新形式，且 ρ 由 f 提升而来。

Proof. 事实上，我们只需要证明对 $G_{\mathbb{Q}}$ 的所有一维表示 χ ， $L(s, \rho \otimes \chi)$ 全纯即可。当 $\rho \otimes \chi$ 可约时，命题成立。当 $\rho \otimes \chi$ 不可约时，由于 $\rho \otimes \chi$ 依然为奇特征，由推论2.1，命题得证！ □

下面我们来看Serre猜想以及Deligne-Serre带来的一些推论，第一个是关于Artin猜想的。

推论2.1. 当 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ 为两维线性不可约奇表示时， $L(s, \rho)$ 全纯，也即此中情况下，Artin猜想成立。

Proof. 由[1]推论10.2可知，存在正整数 N ，使得 ρ 可由 $S_1(\Gamma_1(N))$ 中某个新形式 f 提升而来，再由定理2.4可知，存在奇不可约表示 $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ ，使得 $\rho \cong \rho_f$ 且 $L(s, \rho) = L(s, \rho_f) = L(s, f)$ ，但 $L(s, f)$ 全纯，故 $L(s, \rho)$ 也全纯！ \square

Serre猜想告诉我们，如果新形式具有什么样的性质，则相应的，奇不可约表示也具有相对应的表示（还有更广泛的Langlands函子猜想）。比如：

推论2.2. 设 ρ_1, ρ_2 是 $G_{\mathbb{Q}}$ 的两维线性不可约奇表示，且 $\det(\rho_1) = \det(\rho_2)$ 。如果对所有素数 $p \nmid \text{Cond}(\rho_1)\text{Cond}(\rho_2)$ ， $\text{Trace}(\rho_1(\text{Frob}_p)) = \text{Trace}(\rho_2(\text{Frob}_p))$ ，则 $\rho_1 \cong \rho_2$ 。特别地 $\text{Cond}(\rho_1) = \text{Cond}(\rho_2)$ 。

Proof. 我们只需注意到，对于两个新形式，如果它们的傅里叶展式中除了有限项外，其它素数项的系数相等，则这两个新形式相等。然后再利用定理2.4即可。 \square

然而，如果利用Cebotarev-density定理，我们可以得到一个比上述推论强一点的结论 [4]：

推论2.3. 设 X 是一些素数构成的集合，且密度为1， ρ_1, ρ_2 是 $G_{\mathbb{Q}}$ 的连续半单表示。假定对所有 $p \in X$ ， ρ_1 与 ρ_2 非分歧且 $\det(1 - \rho_1(\text{Frob}_p)T) = \det(1 - \rho_2(\text{Frob}_p)T)$ ，则 $\rho_1 \cong \rho_2$ 。

Proof. X 的密度为1，是指 $\delta(X) := \lim_{s \rightarrow 1} \sup_{s > 1} \frac{\sum_{p \in X} p^{-s}}{-\log(s-1)} = 1$ 。一个群的半单表示由它的特征多项式唯一决定（同构意义下）。从而我们只要证明 ρ_1 与 ρ_2 的特征多项式一样就可。注意到连续性条件，我们可以选取一个充分大的域扩张 K/\mathbb{Q} ， $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 使得 ρ_1 与 ρ_2 可以通过 G 进行分解。对任意的 $\sigma \in G$ ，考虑它在 G 中的共轭类 $[\sigma]$ 。由Cebotarev-density定理， $\delta(A) = \frac{|[\sigma]|}{|G|}$ ，其中 $A = \{p \text{ 素数}; p \text{ 非分歧, 且 } \text{Frob}_p = [\sigma]\}$ 。由于 X 具有密度1，从而可知 $X \cap A \neq \emptyset$ ，故存在 $p \in X$ 使得 $\text{Frob}_p = [\sigma]$ 。所以：

$$\begin{aligned} \det(1 - \rho_1(\sigma)T) &= \det(1 - \rho_1(\text{Frob}_p)T) \\ &= \det(1 - \rho_2(\text{Frob}_p)T) \\ &= \det(1 - \rho_2(\sigma)T) \end{aligned}$$

命题得证。 \square

注记2.5. 我们可以抽象出一条原则：假如命题 A 只与某个Galois群 G 中共轭元有关，且如果对所有Frobenius置换 A 成立，则 A 是真命题。那么如果 X 密度为1，使得对 X 中所有元 A 真，则 A 对 G 中所有元都真。

事实上，Serre有比前面两个推论更强的结果 [9]：

定理2.6. 设 ρ_1, ρ_2 是 $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的两个Artin表示（或同时为Serre表示）。设它们的导子都为 N ，权为 k 且 $\epsilon = \det(\rho_1) = \det(\rho_2)$ 。令 P 为 N 的素因子集， $A(N, \epsilon) = N \prod_{p \in P} p^{\epsilon_p}$ ，其中：

$$e_p = \begin{cases} 2, & p \nmid N, \\ 0, & p^2 | N, \text{ 且 } \epsilon \text{ 可通过模 } N/p \text{ 定义。} \\ 1, & \text{其它情形。} \end{cases} \quad \begin{matrix} (2-3) \\ (2-3') \\ (2-3'') \end{matrix}$$

如果对所有满足

$$l \notin P \text{ 且 } l \leq \frac{1}{12} A \prod_{p \in P} (1 + p^{-1})$$

的素数 l ， $\text{Trace}(\rho_1(\text{Frob}_l)) = \text{Trace}(\rho_2(\text{Frob}_l))$ ，则 $\rho_1 \cong \rho_2$ 。

Proof. 由Serre猜想，存在新形式 $f_i = \sum_{i \geq 1} a_n^i q^n, i = 1, 2$ ，使得对所有素数 $p \nmid N$ ， $\text{Trace}(\rho_i(\text{Frob}_p)) = a_p^i$ 。令 $g = f_1 - f_2 = \sum b_n q^n$ ， $g^* = \sum_{(n, N)=1} b_n q^n = \sum_n b_n^* q^n$ 。由[[7], p.287]可知， $g^* \in S_k(\Gamma_0(A), \epsilon)$ ，且由假设：

$$\forall n \leq \frac{1}{12} A \prod_{p \in P} (1 + p^{-1}), b_n^* = 0. \quad (2-4)$$

设 ϵ 的阶为 r ，则 $(g^*)^r \in S_k(\Gamma_0(A))$ ，且在无穷远点的阶至少为 $\frac{r}{12} |\Gamma : \Gamma_0(A)| + r$ ，从而 $(g^*)^r = 0$ 。命题得证。□

下面这个推论表明，Hecke算子 T_p 在 $M_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 上的特征值落在半径为2的圆中，参见文献[4]。

推论2.4. 假设 $f \in M_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$ ，且对所有 $p \nmid N, f|_1 T_p = a_p f$ 。则 $|a_p| \leq 2$ 。

Proof. 由Deligne-Serre定理，存在表示 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ 使得 $a_p = \text{Trace}(\rho(\text{Frob}_p))$ 。由于 $\rho(G_{\mathbb{Q}})$ 为有限群，所以 $\rho(\text{Frob}_p)$ 为有限阶元，从而它的特征值的绝对值为1。而 a_p 为 $\rho(\text{Frob}_p)$ 的两个特征值之和，故有 $|a_p| \leq 2$ 。□

注记2.6. Serre还证明了，存在密度大于零的素数集 X_N ，使得所有 $p \in X_N$ ，成立 $p \equiv 1 \pmod N$ 且对所有的 $g \in M_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$ ， $g|T_p = 2g$ 。

§3 Deligne-Serre定理的证明

这一章，我们的目的是证明定理2.4，这个证明属于Deligne-Serre[4]。

§3.1 证明的第一部分

我们先证明该定理的后半部分。即证明，如果 $f = \sum a_n q^n \in M_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 是新形式，则 $\text{Cond}(\rho) = N$ 以及 $L(s, \rho) = L(s, f)$ 。我们需要如下两个引理：

引理3.1. 假设 $f = \sum a_n q^n \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 是新形式，对素数 $p|N$ 成立：

(a) 如果 $p^2|N$ 且 ϵ 可通过模 N/p 定义，则 $a_p = 0$ 。

(b) 如果 $p^2 \nmid N$ 且 ϵ 可通过模 N/p 定义，则 $|a_p| = p^{\frac{p-2}{2}}$ 。

(c) 如果 $p^2 \nmid N$ 且 ϵ 不能通过模 N/p 定义，则 $|a_p| = p^{\frac{p-1}{2}}$ 。

特别地，当 $k = 1$ 时，总有 $a_p < p^{-1/2}$ 。

Proof. 见[7]，或参见文献[10]第275页定理3。 □

引理3.2. 令 $G(s) = A^s \prod_p G_p(s)$, $H(s) = A^s \prod_p H_p(s)$ 为有限 *Euler* 积且满足 $G(1-s) = \omega H(s)$ ，其中 $\omega \in \mathbb{C}^*$ 。如果 p 因子 G_p , H_p 是有限多个 $(1 - \alpha_p^{(i)} p^{-s})^\pm$ 的乘积， $|\alpha_p^{(i)}| < p^{\frac{1}{2}}$ 。则 $A = 1$ 且 $G_p = H_p = 1$ 。

Proof. 如果 $H_p \neq 1$ ，则 H 有无穷多个零点：

$$\frac{\log(\alpha_p^{(i)}) + 2\pi i n}{\log p}, n \in \mathbb{Z}. \quad (3-5)$$

由假定条件 $|\alpha_p^{(i)}| < p^{\frac{1}{2}}$ ，对任何 i 与 j ， $\alpha_p^{(i)} \neq p/\alpha_p^{(j)}$ 。但由函数方程可知，3-5中这些点都是 $G(1-s)$ 的零点，于是存在 i 与 j 使得

$$\frac{\log(\alpha_p^{(i)}) + 2\pi i n}{\log p} = 1 - \frac{\log(\alpha_p^{(j)}) + 2\pi i m}{\log p}. \quad (3-6)$$

所以 $\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(j)} = p$ ，矛盾。 □

回到Deligne-Serre定理，令 $\tilde{f} = \sum \bar{a}_n q^n$ 。由 ([7], page296) 可知，存在常数 $\lambda \neq 0$ 使得 $f(-\frac{1}{Nz}) = \lambda z \tilde{f}$ ，且经过简单的计算可知：

$$(-2\pi i)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \int_0^{i\infty} f(z) z^{s-1} dz. \quad (3-7)$$

进一步, 令 $\Psi_f(s) = N^{\frac{s}{2}}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s, f)$, $\tilde{\Psi}_f(s) = \Psi_{\bar{f}}(s)$, 则

$$\Psi_f(1-s) = \mu \tilde{\Psi}_f(s), \mu = \frac{i\lambda}{\sqrt{N}} \quad (3-8)$$

对于 $L(s, \rho)$ 而言, 它也满足类似的方程。事实上令 $M = \text{Cond}(\rho)$, $\zeta(s, \rho) = M^{\frac{s}{2}}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s, \rho)$, 则有:

$$\zeta(1-s, \rho) = \nu \zeta(s, \bar{\rho}), \nu \in \mathbb{C}^*. \quad (3-9)$$

注意到当 $p \nmid N$ 时, $L(s, f)$ 与 $L(s, \rho)$ 的 p 局部因子是相同的。设 $A = \sqrt{\frac{N}{M}}$, $H(s) = A^s \frac{\Psi_f(s)}{\zeta(s, \rho)}$, $G(s) = A^s \frac{\tilde{\Psi}_f(s)}{\zeta(s, \bar{\rho})}$ 。令 $\Psi_f(s)$ 的 p 局部因子为 $1 - a_p p^{-s}$, $\zeta(s, \rho)$ 的 p 局部因子为 $(1 - b_p p^{-s})(1 - c_p p^{-s})$, 则 $H(s)$ 的 p 局部因子为 $H_p(s) = \frac{1 - a_p p^{-s}}{(1 - b_p p^{-s})(1 - c_p p^{-s})}$ 。由前面的函数方程可知, $H(1-s) = \frac{\mu}{\nu} G(s)$ 。从而由引理3.2, 我们只需要证明 a_p 、 b_p 、 c_p 以及它们的共轭的绝对值小于 $p^{1/2}$ 。引理3.1表明 $|a_p| < p^{1/2}$, 而对于 b_p 与 c_p 而言, 它们要么为零要么为单位根 (因为 ρ 为连续表示)。从而我们证明了 Deligne-Serre 定理的后半部分。

§3.2 证明的第二部分

在这一部分, 我们需要下面这个结论 (参见[4]): 设 $f = \sum a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$, σ 为 \mathbb{C} 的自同构, 令 $f^\sigma = \sum \sigma(a_n) q^n$ 。则

- (a) $f^\sigma \in S_k(\Gamma_0(N), \sigma(\epsilon))$ 。
- (b) 如果系数 a_n 都是代数的, 则它们的分母有界。
- (c) 存在有限扩张 K/\mathbb{Q} , 使得 Hecke 算子 T_p 在空间 $S_k(\Gamma_0(N), \sigma(\epsilon))$ 上的所有特征值包含在 \mathcal{O}_K 中。

我们也可以用 Galois 表示的语言叙述上面的结论: 给定两维 Artin 表示 ρ , 则对所有的素数 p , $\text{Trace}(\rho(\text{Frob}_p))$ 为代数数, 且它们的分母有界, 集合

$$\cup_\rho \cup_p \{\text{Trace}(\rho(\text{Frob}_p))\}$$

包含在某个代数整环中, 其中 ρ 遍历导子为 N 的两维 Artin 表示, p 遍历所有素数。对于 Serre 表示也有类似的结论。

§3.2.1 Rankin 的结果

引理3.3. 设非零元 $f \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$, 且对所有 $p \nmid N$, $f|_k T_p = a_p f$ 。则对所有 $\text{Re}(s) > k$, $\sum_{p \nmid N} |a_p|^2 p^{-s}$ 收敛且成立:

$$\sum_{p \nmid N} |a_p|^2 p^{-s} \leq \log\left(\frac{1}{s-k}\right) + O(1), s \rightarrow k. \quad (3-10)$$

Proof. 由第二章, 我们可以假定 f 是新形式, 则 $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ 。对 $p \nmid N$, 取 $GL_2(\mathbb{C})$ 中元 φ_p 使得 $\text{Trace}(\varphi_p) = a_p$, $\det(\varphi_p) = \epsilon(p)p^{k-1}$ 。于是:

$$L(s, f) = \prod_{p|N} (1 - a_p p^{-s})^{-1} \prod_{p \nmid N} \det(1 - \varphi_p p^{-s})^{-1}. \quad (3-11)$$

令 $L(s) = \prod_{p \nmid N} \det(1 - \varphi_p \otimes \bar{\varphi}_p p^{-s})^{-1}$, 由 ([7], page 312) 可知道:

$$\begin{aligned} L(s) &= \prod_{p \nmid N} [(1 - \lambda_p \bar{\lambda}_p)(\lambda_p \bar{\mu}_p)(\mu_p \bar{\lambda}_p)(\mu_p \bar{\mu}_p)]^{-1} \\ &= H(s) \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-s}, \end{aligned}$$

其中 λ_p, μ_p 是 φ_p 的特征值, 而 $H(s) = \prod_{p|N} (1 - p^{-2s+2k-2})(1 - |a_p|^2 p^{-s})$ 。由引理 3.1 可知, 对 $p|N$, $|a_p| < \sqrt{p}$, 所以 $H(s)$ 在 $\text{Re}(s) \geq k$ 上全纯且没有零点。另外, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-s}$ 在 $\text{Re}(s) > k$ 上收敛, 而 $\zeta(2s - 2k + 2)$ 能亚纯延拓到整个复平面且只在 $s = k$ 处有单极点。故 $L(s)$ 在整个复平面上亚纯, 在 $\text{Re}(s) \geq k$ 上全纯且只在 $s = k$ 处有单极点, 在 $\text{Re}(s) > k$ 上 $L(s) \neq 0$ 。令:

$$g_m(s) = \sum_{p \nmid N} |\text{Trace}(\varphi_p^m)|^2 \frac{p^{-ms}}{m}, g(s) = \sum_{m \geq 1} g_m(s). \quad (3-12)$$

g 是 Dirichlet 级数且系数非负, 对充分大的 s , 可证明它等于 $\log L(s)$ 。事实上,

$$\begin{aligned} \log L(s) &= \sum_{p \nmid N} (\log(1 - \lambda_p \bar{\lambda}_p p^{-s}) + \dots) \\ &= \sum_{p \nmid N} \sum_{m \geq 1} \frac{(\lambda_p \bar{\lambda}_p p^{-s})^m}{m} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{p \nmid N} |\text{Trace}(\varphi_p^m)|^2 \frac{p^{-ms}}{m} \\ &= \sum_{m \geq 1} g_m(s). \end{aligned}$$

由于对 $s > k$, $L(s) \neq 0$ 全纯, 由 Landau 定理 $g(s)$ 在 $\text{Re}(s) > k$ 上全纯。因 $L(s)$ 在 $s = k$ 处有单极点, 所以 $g(s) = \log(\frac{1}{s-k}) + O(1)$, $s \rightarrow k$ 。显然 $g_1(s) \leq g(s)$, 从而证明了 $\sum_{p \nmid N} |a_p|^2 p^{-s} \leq \log(\frac{1}{s-k}) + O(1)$, $s \rightarrow k$ 。□

设 P 是所有素数构成的集合, 对 P 的子集 X , 定义 (super) 密度如下:

$$\text{dens.sup}(X) = \limsup_{s \rightarrow 1} \sup_{s > 1} \frac{\sum_{p \in X} p^{-s}}{-\log(s-1)}, \quad (3-13)$$

则 $0 \leq \text{dens.sup}(X) \leq 1$ 。

引理3.4. 在引理3.3的条件下, 取 $k = 1$ 。则对任何 $\eta > 0$, 存在子集 $X_\eta \subset P$ 与有限子集 $Y_\eta \subset \mathbb{C}$, 使得

$$\text{dens.sup}(X_\eta) \leq \eta \text{ 且对所有 } p \notin X_\eta, a_p \in Y_\eta. \quad (3-14)$$

Proof. 由这一节开头部分, 可假定 a_p 是有限扩域 K/\mathbb{Q} 中整元。对 $c \geq 0$, 令 $Y(c) = \{a \in \mathcal{O}_K; \text{对所有嵌入 } \sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}, |\sigma(a)|^2 \leq c\}$, 容易知 $Y(c)$ 是有限集。再令 $X(c) = \{p \in P; a_p \notin Y(c)\}$ 。由于对所有 σ , $\sigma(a)$ 依然是 T_p 的特征值, 利用引理3.3得到:

$$\sum_{\sigma} \sum |\sigma(a_p)|^2 p^{-s} \leq |K : \mathbb{Q}| \log\left(\frac{1}{s-1}\right), s \rightarrow 1. \quad (3-15)$$

如果 $p \in X(c)$, 则 $\sum_{\sigma} |\sigma(a_p)|^2 \geq c$, 故:

$$c \sum_{p \in X(c)} p^{-s} \leq |K : \mathbb{Q}| \log\left(\frac{1}{s-1}\right), s \rightarrow 1. \quad (3-16)$$

也即 $\text{dens.sup}(X(c)) \leq \frac{|K:\mathbb{Q}|}{c}$ 。取充分大的 c 即可得证引理。 \square

§3.2.2 $GL_2(F_l)$ 的子群

定义3.1. (a) 设 l 是素数, 令 $F_l = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ 。 η 与 M 是正数, 我们称 $GL_2(F_l)$ 的子群 G 具有型 (η, M) , 如果 G 中存在子集 H , 使得 $(1-\eta)|G| \leq |H|$, 且 $\{\det(1-hT); h \in H\}$ 至多有 M 个元素。我们用 $|A|$ 表示集合 A 中元素个数。

(b) 称群 G 是半单的, 如果存在一个半单的代表 $G \rightarrow GL_2(F_l)$ 。

引理3.5. 令 $\eta < \frac{1}{2}$, $M > 0$ 。则存在常数 $A = A(\eta, M)$ 使得对任何素数 l 以及 $GL_2(F_l)$ 的任一 (η, M) 型半单子群 G , 成立 $|G| \leq A$ 。

Proof. 设 G 是 $GL_2(F_l)$ 的半单子群, 则它满足以下条件中的一个 ([11], 性质15, 16):

- (1) $SL_2(F_l) \subset G$ 。
- (2) G 包含在 $GL_2(F_l)$ 的某个Cartan子群 T 。
- (3) G 包含在 $GL_2(F_l)$ 的某个Cartan子群 T 的正规化子里, 但不包含在 T 中。
- (4) G 在 $PGL_2(F_l) = GL_2(F_l)/F_l^*$ 中的像同构于 A_4 、 S_4 或 A_5 。

我们分上述四种情况讨论问题:

情形(1): 令 $r = |G : SL_2(F_l)|$, 则 $|G| = rl(l^2 - 1)$ 。 $GL_2(F_l)$ 中具有给定特征多项式的元素个数只有 $l^2 + l$ 、 l^2 、 $l^2 - 1$ 这三种可能, 它们分别对应于该特征多项式在 F_l 中有 2、1、0 个根。因此, 如果 G 为 (η, M) 型子群, 则:

$$(1 - \eta)rl(l^2 - 1) = (1 - \eta)|G| \leq |H| \leq M(l^2 + 1). \quad (3-17)$$

从而有 $|G| \leq \frac{M(1+l^2)}{1-\eta}$ 且 $l \leq 1 + \frac{M}{1-\eta}$ 。

情形(2): T 中具有给定特征多项式的元素个数至多为 2。从而 $|G| \leq \frac{2M}{1-\eta}$ 。

情形(3): $G_1 = G \cap T$ 在 G 中指数为 2。从而, 如果 G 具有型 (η, M) , 则 G_1 具有型 $(2\eta, M)$ 。再由情形二可知 $|G| \leq \frac{4M}{1-\eta}$ 。

情形(4): 对于这种情况有 $|G| \leq \frac{120M}{1-\eta}$ 。

□

§3.2.3 表示的约化

设 $K \subset \mathbb{C}$ 是代数数域。 \mathfrak{p} 是 K 的有限素点, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} := \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}$, $m_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想。令 $k_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/m_{\mathfrak{p}}$, $p = \text{char}(k_{\mathfrak{p}})$ 。我们将记号 $\text{mod } m_{\mathfrak{p}}$ 简写为 $\text{mod } \mathfrak{p}$ 。我们称 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 是 \mathfrak{p} 整的, 如果它的傅里叶展开式系数属于 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 。假定 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 是 \mathfrak{p} 整的, 我们称它是 $T_l \text{ mod } \mathfrak{p}$ 的特征向量且具有特征值 $a_l \in k_{\mathfrak{p}}$, 如果 $f|_k T_l \equiv a_l \text{ (mod } \mathfrak{p})$ 。

引理3.6. 设 $K \subset \mathbb{C}$ 是代数数域。 \mathfrak{p} 是 K 的有限素点。设 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 是 \mathfrak{p} 整的, 且 $f \text{ mod } \mathfrak{p}$ 不等于零。假如对所有的素数 $l \nmid Np$, $f|_k T_l \equiv a_l \text{ (mod } \mathfrak{p})$, $a_l \in k_{\mathfrak{p}}$ 。取 k_f 是包含所有 a_l 以及 $\epsilon(l)$ 的 $k_{\mathfrak{p}}$ 之子域。则存在半单表示 $\rho : G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GL_2(k_f)$ 使得 ρ 在 Np 之外非分歧, 且对所有素数 $l \nmid Np$, $\text{Trace}(\rho(\text{Frob}_l)) = a_l$, $\det(\rho(\text{Frob}_l)) \equiv \epsilon(l)p^{k-1} \text{ (mod } \mathfrak{p})$

§3.2.4 构造非分歧表示

我们回忆模形式的一个性质: 对 $f \in M_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$, 我们总可以将它写成 $f = \sum a_i f_i(d_i z) + E(z)$ 的形式。其中 E 是 Eisenstein 级数, $f_i \in S_k(\Gamma_0(N_i), \epsilon)$ 是新形式, $d_i N_i \mid N$ 且 ϵ 可通过模 N_i 定义。于是由表示的性质, 在证明 Deligne-Serre 定理时, 我们总可以假定 f 是一个 Eisenstein 级数或者新形式。对于 f 为 Eisenstein 级数的情形, Hecke 在“Mathematische Werke”中已经证明, 存在 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ 的特征 χ_1 、 χ_2 使得:

$$\chi_1 \chi_2 = \epsilon, \quad a_p = \chi_1(p) + \chi_2(p) \quad \forall p \nmid N. \quad (3-18)$$

通过类域论, 我们将 χ_1, χ_2 看成 $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的一维表示。于是取 $\rho = \chi_1 \oplus \chi_2$ 即可。下面的证明中, 我们假定 f 是一个新形式。由这节开头所论述的结论, 总可以选取有限Galois扩张 K/\mathbb{Q} 使得所有 $a_p, \epsilon(p)$ 是 \mathcal{O}_K 中元。令 $L = \{\text{素数 } l; l \text{ 在 } K \text{ 中完全分裂}\}$ 。对所有 $l \in L$, 取 K 中位于 l 之上的素点 λ_l 。由引理3.6, 存在半单表示 $\rho_l: G \rightarrow GL_2(F_l)$, 使得 ρ_l 在 Nl 之外分歧, 且对所有 $p \nmid Nl$, $\det(1 - \rho(\text{Frob}_p)T) \equiv 1 - a_pT + \epsilon(p)T^2 \pmod{\lambda_l}$ 。令 G_l 为 $\rho(G)$ 在 $GL_2(F_l)$ 中的约化。

引理3.7. 对所有 $\eta > 0$, 存在常数 M , 使得对所有 $l \in L$, G_l 是 (η, M) 型子群。

由引理3.4, 存在素数集 P 的子集 X_η , 使得 $\text{dens.sup}(X_\eta) \leq \eta$ 且 $\{a_p; p \nmid X_\eta\}$ 是有限集。取 $\mathfrak{U} = \{1 - a_pT + \epsilon(p); p \notin X_\eta\}$, $M = \#\mathfrak{U}$ 。我们断言: 对所有 $l \in L$, G_l 是 (η, M) 型子群。事实上, 取 H_l 为 $\rho_l(\text{Frob}_p)$ ($p \notin X_\eta$) 及其共轭所构成的子集。由Cebotare密度定理, $|H_l| \geq (1 - \eta)|G_l|$ 。另一方面, 如果 $h \in H_l$, $\det(1 - hT)$ 是 \mathfrak{U} 中某个元的约化, 从而 $\{\det(1 - hT); h \in H_l\}$ 至多有 M 个元素。引理3.7得证。结合引理3.7以及引理3.6我们得到:

引理3.8. 存在常数 A , 使得对所有 $l \in L$, $|G_l| \leq A$ 。

选取 A 满足引理3.8, 适当的扩大 K , 使得 K 中包含所有的 n ($n \leq A$)次单位根。令 $Y = \{(1 - aT)(1 - bT); a, b \text{ 是 } n \text{ 次单位根}, n \leq A\}$ 。如果 $p \nmid N$, 则对所有 $l \in L$, $l \neq p$, 由 $\det(1 - \rho(\text{Frob}_p)T) \equiv 1 - a_pT + \epsilon(p)T^2 \pmod{\lambda_l}$ 以及 $|G_l| \leq A$, 必存在 $R(T) \in Y$ 使得:

$$1 - a_pT + \epsilon(p)T^2 \equiv R(T) \pmod{\lambda_l}. \quad (3-19)$$

由于 Y 是有限集, 必存在某个 $R(T)$ 使得上述同余关系对无限多个 l 都成立, 所以 $1 - a_pT + \epsilon(p)T^2 = R(T)$ 。令

$$L' = \{l \in L; l > A \text{ 且对所有 } R, S \in Y, \text{ 如果 } R \neq S, \text{ 则 } R - S \pmod{\lambda_l} \text{ 不为零}\}. \quad (3-20)$$

$L - L'$ 是有限集, 所以 L' 是无限集。令 $l \in L'$, 则 G_l 的阶与 l 互素。一个经典的结论是, 表示 $G_l \rightarrow GL_2(F_l)$ 可由表示 $G_l \rightarrow GL_2(\mathcal{O}_{\lambda_l})$ 约化而来, 其中 $\mathcal{O}_{\lambda_l} := \mathcal{O}_{K_{\lambda_l}}$ 。通过复合自然同态 $G \rightarrow G_l$ 得到表示 $\rho: G \rightarrow GL_2(\mathcal{O}_{\lambda_l})$ 。由构造可知, ρ 在 Nl 之外非分歧。对所有的 $p \nmid Nl$, $\rho(\text{Frob}_p)$ 的特征值是阶小于等于 A 的单位根, 所以 $\det(1 - \rho(\text{Frob}_p)T) \in Y$ 。由于 $\det(1 - \rho(\text{Frob}_p)T) \equiv 1 - a_pT + \epsilon(p)T^2 \pmod{\lambda_l}$, $1 - a_pT + \epsilon(p)T^2 \in Y$, 我们得到 $\det(1 - \rho(\text{Frob}_p)T) = 1 - a_pT + \epsilon(p)T^2$ 。将 l 换为 L' 中任意素数 l' , 可得到满足相同性质的表示 $\rho': G \rightarrow GL_2(\mathcal{O}_{\lambda_{l'}})$ 。从而对任何素数 $p \nmid Nll'$, $\det(1 - \rho(\text{Frob}_p)T) = \det(1 - \rho'(\text{Frob}_p)T)$ 。由推论2.3可知 ρ 与 ρ' 作为 G 的复表示是同构的。故 ρ 在 N 外非分歧, 且对所有 $p \nmid N$, $\det(1 - \rho(\text{Frob}_p)T) = 1 - a_pT + \epsilon(p)T^2$ 。

§3.2.5 最后一步

这一小节证明, 当 f 是新形式时, 上一小节构造的表示 ρ 是不可约的。假定 ρ 可约, 则 $\rho = \chi_1 \oplus \chi_2$, 其中 χ_1, χ_2 是在 N 之外非分歧的一维表示, 它们满足:

$$\chi_1 \chi_2 = \epsilon, a_p = \chi_1(p) + \chi_2(p) \quad \forall p \nmid N. \quad (3-21)$$

于是 $\sum |a_p|^2 p^{-s} = 2 \sum p^{-s} + \sum \chi_1(p) \bar{\chi}_2(p) p^{-s} + \sum \bar{\chi}_1(p) \chi_2(p) p^{-s}$ 。令 $s \rightarrow 1$, 有 $\sum p^{-s} = \log(\frac{1}{s-1}) + O(1)$ 。由于 ϵ 为奇表示, 从而 $\chi_1 \bar{\chi}_2 \neq 1$, 所以:

$$\begin{aligned} \sum \chi_1(p) \bar{\chi}_2(p) p^{-s} &= O(1) \\ \sum \bar{\chi}_1(p) \chi_2(p) p^{-s} &= O(1) \end{aligned}$$

事实上, 令 $\chi = \chi_1 \chi_2$, $f_\chi(s) = \sum \chi_1(p) \bar{\chi}_2(p) p^{-s}$, $H(s, \chi) = \prod (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$ 。类似于引理3.1中的计算, 可得到 $\log H(s, \chi) = f_\chi(s) + F_\chi(s)$, 其中 $F_\chi(s) = \sum_{p, n \geq 2} \frac{\chi(p)^n}{p^{ns}}$ 。但我们知道, $|F_\chi(s)| \leq \sum_{p, n \geq 2} \frac{1}{p^{ns}} \leq \sum_p \frac{1}{p^s(p^s-1)} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 1$ 。由经典的Dirichlet L级数理论, 当 $\chi \neq 1$ 时, $H(1, \chi) \neq 0$ 。所以 $\sum \chi_1(p) \bar{\chi}_2(p) p^{-s} = O(1)$ 。于是 $\sum |a_p|^2 p^{-s} = 2 \log \frac{1}{s-1} + O(1)$, $s \rightarrow 1$, 这与引理3.1矛盾。故 ρ 不可约。

§3.3 证明过程中得到的重要结果

总结证明的第一部分, 我们不难得到如下重要的结果:

定理3.1. 设有两个L级数 $H(s) = \prod_p H_p(p^{-s})$, $G(s) = \prod_p G_p(p^{-s})$, 其中 $H_p(t)$ 与 $G_p(t)$ 是多项式。如果成立:

- (a) 存在无零点和无极点的函数 $h(s)$ 与 $g(s)$, 使得 $H(1-s) = h(s)H(s)$, $G(1-s) = g(s)G(s)$ 。
- (b) 存在由素数构成的集合 M , 使得对所有 $p \notin M$, $H_p = G_p$ 。
- (c) 对所有的素数 $p \in M$, $H_p(t)$ 与 $G_p(t)$ 的根的绝对值 $< \sqrt{p}$ 。

则 $H = G$ 。

Proof. 假设 $H \neq G$, 令 $L = \frac{H(s)}{G(s)}$, 则 $L(1-s) = c(s)L(s)$, 其中 $C = \frac{h(s)}{g(s)}$ 。类似引理3.2, 可证明 $L = 1$ 。□

定理3.2. 对于 $M_1(\Gamma_0(N), \epsilon)$ 中本原的Eisenstein级数 $f = \sum a_n q^n$, 成立:

$$\sum_{p \nmid N} |a_p|^2 p^{-s} = 2 \log \frac{1}{s-1} + O(1), s \rightarrow 1. \quad (3-22)$$

Proof. 由Hecke “Mathematische Werke” 可知: 对于本原的Eisenstein级数, 它所对应的表示是即约的。利用“最后一部分”中的证明即可得证上述定理。□

参考文献

- [1] Chandrashekhara Khare and Jean-Pierre Wintenberger. Serre's modularity conjecture(i). *Invent.Math.*, 178(3):485–504, 2009.
- [2] Chandrashekhara Khare and Jean-Pierre Wintenberger. Serre's modularity conjecture(ii). *Invent.Math.*, 178(3):505–586, 2009.
- [3] Jean-Pierre Serre. Sur les representations modulaires de degre 2 de $\text{gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{q})$. *DUKE MATHEMATICAL JOURNAL*, 54(1):179–229, 1987.
- [4] Pierre Deligne and Jean-Pierre Serre. Formes modulaires de poids 1. *ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.*, 7(4):507–530, 1974.
- [5] Toshitsune Miyake. *Modular Forms*. Springer, New York, 1th edition, 1989.
- [6] Fred Diamond and Jerry Shurman. *A First Course in Modular Forms*. Springer-Verlag, New York, 1th edition, 2004.
- [7] Wen-Ching Winnie Li. Newforms and functional equations. *Math.Ann.*, (212):285–315, 1975.
- [8] Jean-Pierre Serre. *Corps Locaux*. Hermann, Paris, 2th edition, 1968.
- [9] A . Frohlich. *Algebraic Number Fields(L-functions and Galois properties)*. Academic Press, London, 1th edition, 1977.
- [10] 陆洪文 and 李云峰. 模形式讲义. 北京大学出版社, 北京, 1998.
- [11] Jean-Pierre Serre. Proprietes galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Invent.Math.*, 15(4):259–331, 1972.

Jones多项式及其范畴化

宗正宇*

指导教师：周坚教授

摘 要

在本文中，我们首先介绍一下历史上一些重要的多项式类型的扭结不变量，使我们了解扭结理论的发展过程。之后，我们重点介绍Khovanov的文章 [1]，概述这篇文章中构造的上同调类型的扭结不变量。我们还将指出，这种上同调群比Jones多项式更为精细。之后，我们会讨论文章 [1] 中的构造与拓扑量子场论之间的关系。最后，我们将证明在一定的限制条件下，文章 [1] 中所涉及的代数 A 是唯一的。

关键词：范畴化；Jones多项式；拓扑量子场论

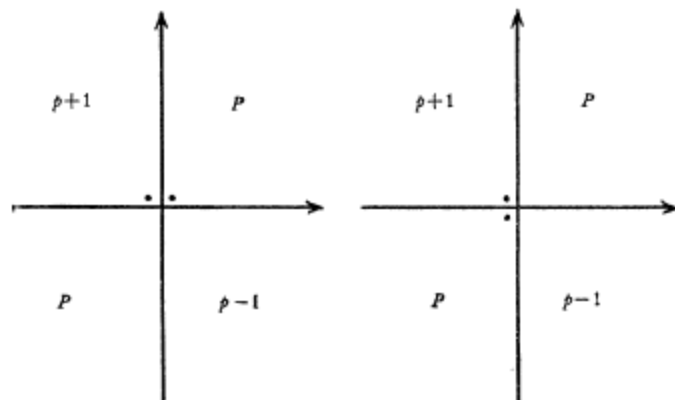
§1 引言

扭结理论来源于非常直观的想法，从人类学会用绳子系扣开始，人们就在与扭结打交道。而扭结理论就是用数学的方法来研究扭结。扭结理论的基本问题就是给扭结分类，也就是区分不同的扭结。要做到这一点，就要找到扭结的拓扑不变量。在1928年，J.W. Alexander在文章 [2] 中构造了扭结的Alexander多项式，使得扭结理论取得了重大突破。Alexander多项式是扭结理论中第一个比较有效地多项式类型的不变量，而在这之前，人们研究扭结的方法主要是计算扭结在 R^3 中的补空间的基本群。

§1.1 Alexander多项式

关于这一节的内容，参见J.W. Alexander的文章 [2]。我们现在来简要介绍一下在文章 [2] 中，作者是如何构造Alexander多项式的。作者将 R^3 中的定向扭结投影到平面上，得到一个平面图，并且这个平面图是一般位置的，即无三重交点、相切点和尖点。这样，对于平面图上的每一个交点，与它相邻的有四个区域。其中，沿着较低

*基数63



的分支的左侧的两个区域被画上两个点。此外，每个区域都被赋予了一个整数，并且满足对于每个交点，一三象限的整数相同（记为 p ），第二象限为 $p+1$ ，第四象限为 $p-1$ （如图所示）。每个区域被赋整数称为这个区域的指标。

如果一个平面图有 v 个交点 $c_i \quad i = 1, 2, \dots, v$ ，则由多面体的欧拉定理，它必有 $v+2$ 个区域 $r_j \quad j = 0, 2, \dots, v+1$ 。对于一个交点 c_i ，我们设与之相邻的四个区域为 r_j, r_k, r_l 和 r_m 。并且它们的顺序满足逆时针方向，而且 r_j, r_k 属于被画了点的两个区域。这样一来，对于每个交点 c_i ，我们将它对应一个线性方程：

$$c_i(r) = xr_j - xr_k + r_l - r_m = 0$$

这 v 个方程都被称为这个图的方程。如果我们将这些方程的系数组成一个矩阵 M ，那么这个矩阵将有 v 行、 $v+2$ 列。我们有下面的定理：

定理 对于矩阵 M ，如果去掉它的两列得到一个方阵 M_0 ，并且去掉的两列对应的区域的指标为两个相邻的整数 p 和 $p+1$ ，那么 M_0 的行列式在相差一个形如 $\pm x^n$ 的因子的意义下是独立于去掉的两行的选取的。

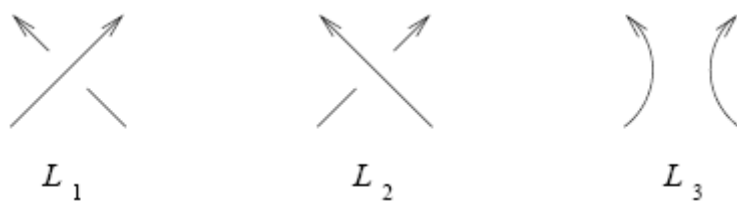
令 $\pm \Delta_{pq}(x) = \pm \Delta_{qp}(x)$ 表示矩阵 M_{pq} 的行列式，其中 M_{pq} 为将 M 去掉任意两个指标分别为 p 和 q 的列而得到的矩阵。现在，我们将 $\Delta_{r(r+1)}(x)$ 除以一个形如 $\pm x^n$ 的因子，使得所得到的表达式 $\Delta(x)$ 的最低次项是一个正的常数。那么，我们将有下面的定理：

定理 多项式 $\Delta(x)$ 是扭结的拓扑不变量。

$\Delta(x)$ 被称为扭结的Alexander多项式。

§1.2 Conway多项式

现在，我们来讨论Conway多项式，它是一个比Alexander多项式更加精细化的扭



结不变量。关于这一节的内容，参见J.H.Conway的文章 [3] 以及L.H.Kauffman的书 [4]。Conway多项式是由以下的三条公理来确定的：

公理1 每一个定向的扭结或者连杆 K ，对应一个多项式 $\nabla_K(z) \in \mathbb{Z}[z]$ 。并且等价的扭结和连杆对应相同的多项式： $K \sim K' \Rightarrow \nabla_K = \nabla_{K'}$ 。

公理2 如果 $K \sim 0$ (0表示平凡扭结)，则 $\nabla_K(z) = 1$ 。

公理3 如果三个扭结 L_1, L_2, L_3 在某个交点附近的区别如下图所示，那么则有 $\nabla_{L_1}(z) - \nabla_{L_2}(z) = z \nabla_{L_3}(z)$

公理3有时也被称为交换恒等式。我们有下面的基本定理：

定理 以上的三条公理是协调的。

这样一来，Conway多项式就是一个扭结的拓扑不变量。下面，我们来看一看Conway多项式的一些基本性质，这些性质对于具体的计算是很有用的。

命题 如果 L 是一个分裂的连杆，则 $\nabla_L(z) = 0$ 。（一个连杆被称为分裂的，如果它的平面图可以被分成两个非空的部分，使得它们分别处在两个不相交的邻域当中。）

定义 令 L 为任意的一个扭结或连杆。定义 $C(L)$ 为

$$C(L) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } L \text{ 只有一个分支} \\ 0 & \text{如果 } L \text{ 有多于一个的分支} \end{cases}$$

这样一来， $C(L)$ 是 L 的不变量，并且它区分了扭结和连杆。

命题 设 a_0, a_1 分别为 K 的Conway多项式中1和 z 前的系数, 则有

$$(1) \quad a_0(K) = C(K) \quad \text{对于所有的扭结或连环} K.$$

$$(2) \quad a_1(K) = \begin{cases} lk(K) & \text{如果} K \text{ 有两个分支} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

这里, $lk(K)$ 表示 K 的连环数。

§1.3 Jones多项式

Jones多项式的出现是纽结理论的又一个重大突破, 它能够有效地区分很多不同类型的扭结。有关这一节的内容, 参见V.F.R.Jones的文章 [5]。

Jones多项式最早是由分析特定的有限维von Neumann代数 A_n 得到的, 其中 A_n 由恒等1和投射 e_1, \dots, e_n 生成。它们满足下面的关系:

- (1) $e_i^2 = e_i, e_i^* = e_i$
- (2) $e_i e_{i \pm 1} e_i = t/(1+t)^2 e_i$
- (3) $e_i e_j = e_j e_i$ if $|i - j| \geq 2$.

这里 t 是一个复数。人们已经证明, 如果对于任意大的 n 这样的投射均存在, 那么 t 就一定是一个实数或者是 $e^{\pm 2\pi i/k}$ 的形式, 其中 $k = 3, 4, 5, \dots$ 。当 t 是这些数的时候, 对于每个 n 均存在代数 A_n 以及一个迹映射 $\text{tr}: A_n \rightarrow \mathbb{C}$, 其中 tr 完全由规范化条件 $\text{tr}(1)=1$ 确定, 并且满足

- (4) $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$,
- (5) $\text{tr}(w e_{n+1}) = t/(1+t)^2 \text{tr}(w)$ if w is in A_n ,
- (6) $\text{tr}(a^* a) > 0$ if $a \neq 0$.

如果令 $g_i = \sqrt{t}(t e_i - (1 - e_i))$, 那么我们可以得到 B_n 的表示 r_t , 其中 r_t 将 s_i 映到 g_i , B_n 是 n -弦辫子群。

定义 如果 L 是一个驯服的连环, 则对于任意满足 $b^\wedge = L$ 的 (b, n) ($b \in B_n$), 定义 $V_L(t)$ 为

$$V_L(t) = (-(t+1)/\sqrt{t})^{n-1} \text{tr}(r_t(b))$$

我们有下列的基本定理:

定理 $V_L(t)$ 是一个扭结不变量。

$V_L(t)$ 被称为 L 的Jones多项式，下面是它的一些重要性质：

定理 $V_{L^\sim}(t) = V_L(1/t)$ 。

定理 $V_{L_1 \# L_2} = V_{L_1} V_{L_2}$ 。

定理 $1/t V_{L_-} - t V_{L_+} = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t}) V_L$ 。

§2 Jones多项式的范畴化

在这一章中，我们重点介绍Khovanov的文章 [1]，之后讨论这篇文章的结果与拓扑量子场论之间的关系。

§2.1 Khovanov的结果

M.Khovanov在他的文章 [1] 中，定义了扭结的上同调群并证明了这个上同调群是扭结的拓扑不变量。这个上同调类型的扭结不变量包含了比Jones多项式更多的信息，特别地，由这些上同调群可以得出扭结的Jones多项式。现在我们就来讨论这篇文章的内容。

令 $R = \mathbb{Z}[c]$ 为 \mathbb{Z} 上的多项式环。在 R 上引入一个分次： $\deg(1)=0$, $\deg(c)=2$ ，从而 R 成为一个分次环。以 $R\text{-mod}_0$ 表示分次 R -模范畴，这是个Abel范畴。现在，设 $M = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M_j$ 是一个有限生成的分次 R -模，定义它的分次Euler示性数 $\hat{\chi}(M)$ 为

$$\hat{\chi}(M) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{Q}}(M_j \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) q^j$$

下面，我们来定义一个 R 上的代数 A 。设 A 是一个秩为2的自由 R -模，其生成元为 $\mathbf{1}$ 和 X ，并且定义分次 $\deg(\mathbf{1})=1$, $\deg(X)=-1$ 。 A 的交换代数结构由下面的式子确定：

$$\mathbf{1}X = X\mathbf{1} = X, X^2 = 0.$$

从而 $\mathbf{1}$ 为 A 的乘法单位元。定义单位映射 $\iota: R \rightarrow A$ ，其中 $\iota(1) = \mathbf{1}$ 。下面，我们定义 A 中的余交换运算 Δ ，使 A 成为一个余交换代数：

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes X + X \otimes \mathbf{1} + cX \otimes X, \quad \Delta(X) = X \otimes X$$

再定义余单位运算

$$\epsilon(\mathbf{1}) = -c, \quad \epsilon(X) = 1.$$

由以上的定义容易验证等式 $\Delta \circ m = (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)$ 成立，其中 m 为乘法。

命题1 每一个结构映射 $\iota, m, \epsilon, \Delta$ 都使分次的，并且

$$\deg(\iota) = 1, \quad \deg(m) = -1, \quad \deg(\epsilon) = 1, \quad \deg(\Delta) = -1.$$

命题2 我们有 R -模的直和分解

$$A \otimes A = (A \otimes \mathbf{1}) \oplus \Delta(A)$$

现在，我们将 A 中的结构映射对应到拓扑量子场论中的六种基本的曲面。令 \mathcal{M} 表示一个范畴， \mathcal{M} 中的对象为闭的一维流形，态射为由下图中的六种基本曲面生成的配边。从而，我们可以定义一个从 \mathcal{M} 到 $R\text{-mod}_0$ 的函子 F

$$F(\bar{n}) = A^{\otimes n}, \quad F(S_2^1) = m, \quad F(S_1^2) = \Delta, \quad F(S_0^1) = \iota,$$

$$F(S_1^0) = \epsilon, \quad F(S_2^2) = \text{Perm}, \quad F(S_1^1) = \text{Id}.$$

其中， \bar{n} 表示 n 个圆周的不交并， $\text{Perm}: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ ， $\text{Perm}(u \otimes v) = v \otimes u$ ， Id 为恒等映射。

由 A 的交换代数和余交换代数结构，以及等式 $\Delta \circ m = (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)$ 可知， F 的定义是合理的。我们有下面的命题：

命题3 对于每个曲面 $S \in \text{Mor}(\mathcal{M})$ ，映射 $F(S)$ 的次数等于 S 的Euler示性数。

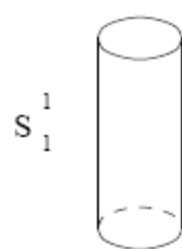
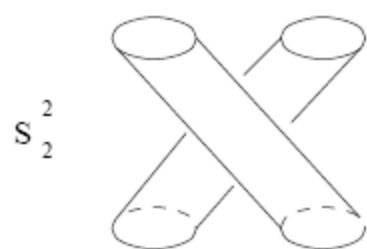
下面，我们来介绍立方的概念。

定义1 设 \mathcal{I} 是一个有限集， \mathcal{B} 是一个范畴。一个取值在 \mathcal{B} 中的交换 \mathcal{I} -立方 V 是指对每个 \mathcal{I} 的子集 \mathcal{L} ，指定一个对象 $V(\mathcal{L}) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ ，对每个 $a \notin \mathcal{L}$ 指定态射

$$\xi_a^V(\mathcal{L}) : V(\mathcal{L}) \rightarrow V(\mathcal{L}a)$$

并且满足对于 \mathcal{I} 中任意的两个元素 $a \neq b$ ，如果 a, b 不属于 \mathcal{L} ，则有等式

$$\xi_b^V(\mathcal{L}a)\xi_a^V(\mathcal{L}) = \xi_a^V(\mathcal{L}b)\xi_b^V(\mathcal{L}).$$



给定了两个 \mathcal{B} 上的 \mathcal{I} -立方 V, W ，一个 \mathcal{I} -立方映射 $\psi : V \rightarrow W$ 指的是对于每个 \mathcal{I} 的子集 \mathcal{L} 给定一个态射 $\psi(\mathcal{L}) : V(\mathcal{L}) \rightarrow W(\mathcal{L})$ 使得对每个 $a \notin \mathcal{L}$ ，均有 $\xi_a^W(\mathcal{L})\psi(\mathcal{L}) = \psi(\mathcal{L}a)\xi_a^V(\mathcal{L})$

对于一个有限集 \mathcal{I} 及 $a \in \mathcal{I}$ ，令 $\mathcal{I} = \mathcal{J} \sqcup a$ 。按以下方式定义 \mathcal{J} -立方 $V_a(*0), V_a(*1)$ ：

$$V_a(*0)(\mathcal{L}) = V(\mathcal{L}), \quad V_a(*1)(\mathcal{L}) = V(\mathcal{L}a)$$

$V_a(*0), V_a(*1)$ 的结构映射由 V 的结构映射所决定。结构映射 ξ_a^V 定义了一个 \mathcal{J} -立方映射 $V_a(*0) \rightarrow V_a(*1)$ 。从而 \mathcal{I} -立方与 \mathcal{J} -立方的映射是一一对应的。

定义2 设 \mathcal{I} 是一个有限集， \mathcal{B} 是一个范畴。一个取值在 \mathcal{B} 中的反交换 \mathcal{I} -立方 V 是指对每个 \mathcal{I} 的子集 \mathcal{L} ，指定一个对象 $V(\mathcal{L}) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ ，对每个 $a \notin \mathcal{L}$ 指定态射

$$\xi_a^V(\mathcal{L}) : V(\mathcal{L}) \rightarrow V(\mathcal{L}a)$$

并且满足对于 \mathcal{I} 中任意的两个元素 $a \neq b$ ，如果 a, b 不属于 \mathcal{L} ，则有等式

$$\xi_b^V(\mathcal{L}a)\xi_a^V(\mathcal{L}) + \xi_a^V(\mathcal{L}b)\xi_b^V(\mathcal{L}) = 0.$$

在Khovanov的这篇文章中，作者固定了一个 $R\text{-mod}_0$ 上的反交换 \mathcal{I} -立方 $E_{\mathcal{I}}$ 。之后，我们将用 $E_{\mathcal{I}}$ 与交换 \mathcal{I} -立方做张量积，从而得到反交换的 \mathcal{I} -立方。

令 \mathcal{B} 是一个Abel范畴， V 是 \mathcal{B} 上的一个反交换 \mathcal{I} -立方。我们定义 \mathcal{B} 上的复形 $\overline{C}(V) = (\overline{C}^i(V), d^i)$ 为：

$$\overline{C}^i(V) = \bigoplus_{\mathcal{L} \in \mathcal{I}, |\mathcal{L}|=i} V(\mathcal{L})$$

微分 $d^i : \overline{C}^i(V) \rightarrow \overline{C}^{i+1}(V)$ 的定义为：对每个 $x \in V(\mathcal{L}), |\mathcal{L}|=i$

$$d^i(x) = \sum_{a \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{L}} \xi_a^V(\mathcal{L})x.$$

我们有下面的命题

命题4 令 \mathcal{B} 是一个Abel范畴， V 是 \mathcal{B} 上的一个反交换 \mathcal{I} -立方。如果对于某个 $a \in \mathcal{I}$ 以及任意的 $\mathcal{L} \subset \mathcal{I} \setminus a$ ，映射 $\xi_a^V(\mathcal{L})$ 是同构，那么复形 $\overline{C}(V)$ 是非循环的。

命题5 设 V 是一个 $R\text{-mod}_0$ 上的交换 \mathcal{I} -立方，如果对某个 $a \in \mathcal{I}$ ， $\xi_a^V : V_a(*0) \rightarrow V_a(*1)$ 是一个同构，则复形 $\overline{C}(V \otimes E_{\mathcal{I}})$ 是非循环的。

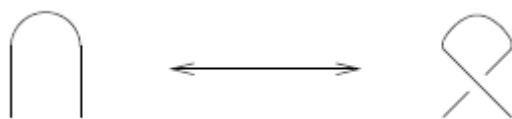


图 1 增加或去除左旋



图 2 增加或去除右旋

命题6 我们有复形的典则分解

$$\overline{C}(V \oplus W) = \overline{C}(V) \oplus \overline{C}(W)$$

这里 V 和 W 是一个Abel范畴上的反交换 \mathcal{I} -立方。

对于一个连杆 L ，我们可以将它以一般位置投影到一个平面上，得到一个平面图 D 。我们有下面的重要命题：

命题7 如果两个平面图 D_1 和 D_2 代表同痕的定向连杆，则 D_1 可以通过重复以下四种移动转化为 D_2 ：1、增加或去除左旋，2、增加或去除右旋，3、相切移动，4、三重点移动。

固定一个定向连杆 L 以及它的平面图 D 。设 \mathcal{I} 是 D 的二重点的集合并且设 $|\mathcal{I}| = n$ 。给定 D 的一个二重点，它有两种消去方法：0-消去和1-消去（见下图）。从而 D 有 2^n 种消去方法。对于每个 $\mathcal{L} \subset \mathcal{I}$ 与之对应一种 D 的消去方法：属于 \mathcal{L} 中的点做1-消去，而

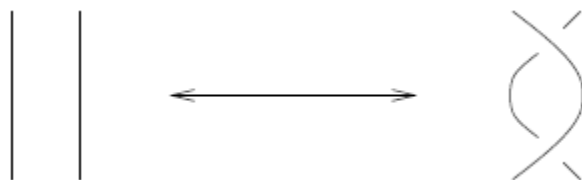
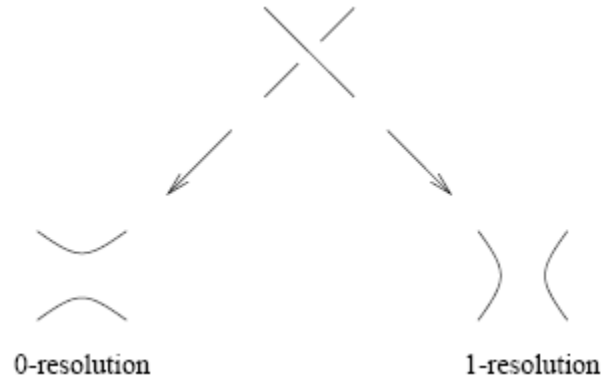


图 3 相切移动



图 4 三重点移动



不属于 \mathcal{L} 的点做0-消去，得到的平面图记作 $D(\mathcal{L})$ 。我们定义一个 \mathcal{I} -立方 V_D ：

$$V_D(\mathcal{L}) = F(D(\mathcal{L}))\{-|\mathcal{L}|\}$$

对于平面图 $D(\mathcal{L})$ 和 $D(\mathcal{L}a)$ ，它们只在 a 的一个邻域 U 内不同，所以我们可以用之前介绍的6种基本曲面中的 S_1^2 或 S_2^2 将它们在 U 中相连接。而在 a 的邻域 U 外，用 $(D(\mathcal{L}) \setminus U) \times [0, 1]$ 将它们连接。设得到的这个曲面为 S ，定义结构映射 $\xi_a^V(\mathcal{L})$ 为 $F(S)$ 。从而我们有下面的命题：

命题8 V_D 是 $R\text{-mod}_0$ 上的交换 \mathcal{I} -立方。

现在，我们定义 $\overline{C}(D) = \overline{C}(V_D \otimes E_{\mathcal{I}})$ 。我们设 x_D 为 D 中形如下图的双重点的个数 y_D 为 D 中形如下图的双重点的个数 并且定义





$$C(D) = \overline{C}(D)[x(D)]\{2x(D) - y(D)\}$$

令 $H^i(D)$ 为 $C(D)$ 的第 i 个上同调群，它是一个有限生成的分次 R -模。下面的定理是文章 [1] 中的主定理：

定理1 设 D 是一个定向连杆 L 的平面图，则对每个 $i \in \mathbb{Z}$ ， $H^i(D)$ 的同构类是 L 的不变量。

定理1的证明方法是分别讨论在命题7中讨论的四种基本移动下 $H^i(D)$ 是 L 的不变量，从而由命题7知定理1正确。记 $H^i(L)$ 为 $H^i(D)$ 的同构类。下面的命题证明了 $H^i(L)$ 给出了比 L 的 Jones 多项式更多的信息。

命题9 对于一个定向连杆 L ，

$$K(L) = (1 - q^2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \widehat{\chi}(H^i(D))$$

其中 $K(L)$ 为 L 的 Kauffman 括号。

事实上，令 $V(L)$ 表示 L 的 Jones 多项式，则

$$V(L)_{\sqrt{t}=-q} = \frac{K(L)}{q + q^{-1}}$$

所以 L 的所有上同调群 $H^i(L)$ 决定了它的 Jones 多项式。

§2.2 与拓扑量子场论的关系

在这一节中，我们简要介绍一下拓扑量子场论的基本概念，之后说明 Jones 多项式的范畴化与与拓扑量子场论的关系。有关这一节的内容，参见 [6] 和 [7]。我们首先给出拓扑量子场论的定义。

定义1 固定一个域 k ，一个 n 维的拓扑量子场论指的是一个法则 Z ，它将每个紧的定向的 $n-1$ 维流形 Σ 对应到一个 k -向量空间 $Z(\Sigma)$ ，将每个定向的 n 维配边 $M : \Sigma_0 \Rightarrow$

Σ_1 对应到从 $Z(\Sigma_1)$ 到 $Z(\Sigma_2)$ 的线性映射 $Z(M)$ 。并且 Z 满足下面的五条公理：

A1: 两个等价的配边要有相同的像：

$$M_1 \cong M_2 \Rightarrow Z(M_1) = Z(M_2)$$

A2: 圆柱 $\Sigma \times I$ 对应到 $Z(\Sigma)$ 的恒等映射。

A3: 给定了配边的分解 $M = M_1 M_2$ 则有

$$Z(M) = Z(M_1)Z(M_2)$$

A4: 如果 $\Sigma = \Sigma' \amalg \Sigma''$ 则有 $Z(\Sigma) = Z(\Sigma') \otimes Z(\Sigma'')$ 。如果 $M : \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma_1$ 是 $M' : \Sigma'_0 \Rightarrow \Sigma'_1$ 和 $M'' : \Sigma''_0 \Rightarrow \Sigma''_1$ 的不交并，则有 $Z(M) = Z(M') \otimes Z(M'')$ 。

A5: 如果 $\Sigma = \emptyset$ 则 $Z(\Sigma) = k$ 。

在拓扑量子场论的定义当中，前三条公理实际上是在说 Z 是一个函子。为此，我们来用范畴的观点来给出拓扑量子场论的定义，在这个观点下我们可以更加清晰地看出文章 [1] 与拓扑量子场论的关系。

令 \mathbf{nCob} 表示一个范畴，它的对象是 $n-1$ 维流形，态射是 n 维配边在微分同胚意义下的同构类的集合。那么， $(\mathbf{nCob}, \amalg, \emptyset)$ 是一个对称的独异范畴。同样，以 $Vect_k$ 表示 k -向量空间范畴，则 $(Vect_k, \otimes, k)$ 也是一个对称的独异范畴。从而拓扑量子场论可以定义如下：

定义1' 一个 n 维的拓扑量子场论指的是一个从 $(\mathbf{nCob}, \amalg, \emptyset)$ 到 $(Vect_k, \otimes, k)$ 的对称的独异函子 Z 。

有了这个定义，我们可以看出，文章 [1] 中定义的函子 F 实际上给出了一个2维的拓扑量子场论的类似物。只是在文章 [1] 中， A 是一个环上的代数，而不是一个域上的向量空间，但是这篇文章的思想与拓扑量子场论是密切相关的。

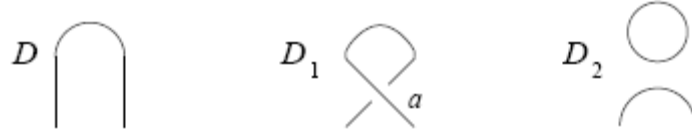


图 5

§2.3 一个新结果

在这一节中，将给出一个由我和朱光宇同学共同研究出的一个结果。这个结果在一定的条件下确定了文章 [1] 中的代数 A 的唯一性。本节的符号与 [1] 中的符号一致。

在文章 [1] 中，如果令交换环 $R = \mathbb{Z}[c]$ 中的 $c = 0$ ，这篇文章中的结果依然成立。在文章 [1] 的第七章中就应用 $c = 0$ 时的结果给出了一些应用。此时 A 是一个 \mathbb{Z} 上的代数。现在，如果将 \mathbb{Z} 换成一个域 k ，那么 [1] 中的结果仍成立，并且此时 F 给出了一个域 k 上的 2 维拓扑量子场论。下面的定理是本节的主定理：

定理1 固定一个域 k ，设 A 是 k 上的分次代数（规定 k 中非零元素的次数均为 0），如果 A 使得 [1] 中的定理 1 成立，那么 A 的结构是唯一的。

我们分几个步骤来证明这个定理。首先，我们来证明下面的引理。

引理1 A 作为 k -向量空间的维数等于 2。

证明：设 A 的维数为 n 。将 [1] 中的定理 1 应用于平面图 D 是一个圆周的情况。此时，考虑 [1] 的 5.1 节中左旋的情况(如下图) 此时， $V_{D_1}(*0) \cong V_{D_2} \cong A \otimes A$, $V_{D_1}(*1) \cong V_D\{-1\} \cong A\{-1\}$, $\iota_a(V_D) = \mathbf{1} \otimes A$ 。作为 k -向量空间，令 $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus W$ ，则

$$V_{D_1} = V' \oplus V''$$

其中

$$V'(*0) = W, \quad V'(*1) = 0, \quad V''(*0) = \iota_a(V_D), \quad V''(*1) = V_{D_1}(*1)$$

由 [1] 中的命题 12 可知，复形 $\overline{C}(V'' \otimes E_{\mathcal{I}'})$ 是非循环的，其中 $\mathcal{I}' = \{a\}$ 。由于

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{\mathcal{I}'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{\mathcal{I}'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{\mathcal{I}'})$$

并且

$$\overline{C}(V' \otimes E_{\mathcal{I}'}) = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow W \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$$

$$\overline{C}(V_D \otimes E_{\mathcal{I}})\{1\} = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$$

其中 $\mathcal{I} = \emptyset$ 。所以由 [1] 中的定理1知必有 $W \cong A$ ，特别地 $\dim W = \dim A = n$ 。另一方面，由于 $V_{D_2} \cong A \otimes A$ 并且 $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus W$ ，所以 $\dim W = n^2 - n$ 。所以必有 $n = 2$ 。（ $n = 0$ 的情况是没有意义的。）

定理1的证明：首先取出 A 中的单位元 $\mathbf{1}$ 及另一个齐次元 X ，使得 $A = k\mathbf{1} \oplus kX$ 。若要使 [1] 中的定理1成立，[1] 中的关于结构映射的次数的命题1必须成立。所以有 $\deg m = -1$ ，其中 m 为乘法。所以由 $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$ 知及 $\deg m = -1$ 知， $\mathbf{1}$ 为齐次元且 $\deg(\mathbf{1}) = 1$ 。由于 $\deg \epsilon = 1$ ，而 k 中非零元素的次数均为0，所以只有 $\epsilon(\mathbf{1}) = 0$ 。由余代数的定义

$$(\epsilon \otimes \text{Id}) \circ \Delta = \text{Id}$$

所以 $\epsilon(X)$ 一定不为0。所以由 $\deg \epsilon = 1$ 知 $\deg X = -1$ 。再由 $\deg m = -1$ 知， $X^2 = 0$ 。

通过将 X 乘以一个适当的常数，我们不妨设 $\epsilon(X) = 1$ 。（否则，以 $\frac{X}{\epsilon(X)}$ 代替 X 。）由于 $\deg \Delta = -1$ ，所以

$$\Delta(X) = aX \otimes X$$

其中 a 是一个常数。再由 $(\epsilon \otimes \text{Id}) \circ \Delta = \text{Id}$ 知 $a = 1$ 。

由于 $\deg \Delta = -1$ ，所以

$$\Delta(\mathbf{1}) = a\mathbf{1} \otimes X + bX \otimes \mathbf{1}$$

由余交换性知 $a = b$ 。最后，如果要使 [1] 中函子 F 的定义是合理的，就必须有等式 $\Delta \circ m = (m \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta)$ 成立。将这个等式两边作用上 $X \otimes \mathbf{1}$ 可知， $a = 1$ 。至此，定理1证毕。

参考文献

- [1] M. Khovanov. A categorification of the jones polynomial. *Duke Mathematical Journal*, 101(3):359–426, 2000.
- [2] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30:275–306, 1928.
- [3] J. H. Conway. An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties. *Computational Problems in Abstract Algebra*, pages 329–358, 1970.
- [4] L. H. Kauffman. *On Knots*. Princeton University Press, Princeton, 1987.
- [5] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots and links via von neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12:103–111, 1985.

- [6] M. Atiyah. *The Geometry and Physics of Knots*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [7] J. Kock. *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

毕业感言

基数 62 王竹海

这篇毕业感言和毕业是没有太多的关系的，只是在我即将离开清华数学系的时候，想与师弟师妹们分享这四年学习数学的一些感受，和由此产生的一些想法；我希望，我的这些感受或者想法，能够给你们一些帮助，如果和你的想法不一样，它至少告诉你们某种观点的存在，事实的真相也有这样一种可能性。

作为《荷思》的本科生读者，你大概属于以下两种人之一：对数学很感兴趣，而且决心好好学习数学；对数学感兴趣，但是只打算读完数学本科就转专业。

对于第一种情形，我想谈谈，在我看来，应该学习数学。很幸运的是，我们身边有很多大牛；他们通常有很好的数学天分，有很好的反应能力和思辨能力。但这往往给我们一个命题：他们数学学得很好，是因为他们是天才。而我对这一命题的修正是：他们数学学得很好，是因为他们有很好的数学天分，并且很好地驾驭了自己的数学才能。具体来说，他们通常足够聪明，并且和常人相比更勤奋、更专注、更有毅力和恒心。其中，我们更应该关注和学习的是后者，这个世界上，即使是我们当中，聪明的人是不少的，但是足够勤奋、专注和有恒心的人很少；并且，可悲的是，在聪明的人之中，具有这些优良品质的凤毛麟角。而如果具备了这些品质，你往往会不自觉地变得聪明一些，因为你充分利用了自己的潜力。其次，我觉得，与别人的交流是很重要的。就我自身而言，在办《荷思》杂志的过程中，我参与了审稿，常常和其他编委和投稿人讨论稿件；在平时的学习中，我也常常和一些同学讨论彼此学习的内容。在这些过程中，我学到了很多新的知识，并对很多学过的知识有了新的认识。事实上，在这些交流之中，我们会理清很多模糊的关系，从别人的思维中获取一些新的角度。

对于第二种情形，我希望这些看上去比较难的数学没有给你带来太多的烦恼。曾经有人问我“我只是想学习一些基本的数学知识，为将来转去 xx 专业打打数学基础。但是，我现在学不会这些数学，怎么办？”这些烦恼大概是不应该有的，既然你不会把数学作为你的终生职业，你就不需要学习太专太深的数学，你也可以不对自己的数学学习提出太高的要求。换个角度来看，你比较的对象大概常常是第一种人之中的佼佼者；和这些爱好数学而且付出了很多心血的人比较，或许，你本来就没有理由学得更好。无论如何，我可以肯定的是，认真学习数学四年，你的收获同样会很大；因为它带给你的，除了一个坚实的数学基础和严谨的数学思维，更有面对困难的坚持和信心。系主任肖杰老师曾经对我们说过一段话，大意是：如果你们不学习数学，去学习别的专业，你们去干别的事情，也会有很好的前途。这样看来，你们可以抛开那些烦恼，也不必有什么各种各样对数学、对自己的抱怨。

最后，我想说的是，希望你们每一天都充实和愉快，希望《荷思》能够伴随你走过大学生涯，走向精彩的未来。

主办：清华大学 数学科学系 《荷思》编辑部

编委：王竹海 王子腾 苏桃 毛天一 张端阳 费腾

排版：王子腾

联系本刊：THUmath@googlegroups.com



但它具有某些永恒的性质。
我们所做的事可能是渺小的，

——「英」U.I. 哈代

清华大学
数学科学系

