一个组合恒等式

周坚*

本文将证明如下等式对$g \geq 1$成立：

$$\sum_{k=1}^{g} \frac{(-1)^k}{k!}(2g+1+k) \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=g \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \binom{2g+k}{2m_1+1,\ldots,2m_k+1} = (-1)^g 2^{2g}(g!)^2, \tag{1}$$

其中我们用了如下记号：若$n_1,\ldots,n_k$为非负整数, $n = n_1+\cdots+n_k$, 则

$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}. \tag{2}$$

证明. 记(1)式左边为LHS. 先用(2)式改写LHS为:

$$\mathrm{LHS} = \sum_{k=1}^{g}(-1)^k \prod_{j=1}^{2g+1}(k+j) \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=g \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \frac{1}{(2m_1+1)!}\cdots\frac{1}{(2m_k+1)!}.$$

为了前进，当先求出

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=g \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \frac{1}{(2m_1+1)!}\cdots\frac{1}{(2m_k+1)!}. \tag{3}$$

这启发我们使用级数及其乘积：令

$$f(z) = \sum_{m>0} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

则(3)式为级数$f(z)^k$的z^{2g+k}项的系数。注意到$f(z)$是一个在全复平面上解析的函数，事实上，

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) - z = \sinh z - z.$$

再回顾复变函数论中，一个Laurent级数所定义的亚纯函数

$$g(z) = \sum_{n\geq m} a_n z^n$$

*清华大学数学科学系基础数学研究所教授

的z^{-1}项的系数a_{-1}即$g(z)$在原点处的留数，所以我们可以将(3)式写成：

$$\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{1}{z^{2g+1+k}}f(z)^k. \tag{4}$$

故有

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS} &= \sum_{k=1}^{g}(-1)^k\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{1}{z^{2g+1+k}}f(z)^k\\ &= \mathrm{Res}_{z=0}\,\big(\sum_{k=1}^{g}(-1)^k\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\frac{1}{z^{2g+1+k}}f(z)^k\big).\end{aligned}$$

下一步自然是对k求和。如果没有那个$\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\frac{1}{z^{2g+1+k}}$，求和就很简单。为此我们注意到：

$$\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\frac{1}{z^{2g+1+k}}=-z\partial_w^{2g+1}w^{-k-1}|_{w=z},$$

此处∂_w为对w求导，所以我们得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{g}(-1)^k\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\frac{1}{z^{2g+1+k}}f(z)^k=-\sum_{k=1}^{g}(-1)^k z\partial_w^{2g+1}w^{-k-1}f(z)^k\Big|_{w=z}\\ =\;& -z\partial_w^{2g+1}\sum_{k=1}^{g}(-1)^k w^{-k-1}f(z)^k\Big|_{w=z}=z\partial_w^{2g+1}\frac{w^{-2}f(z)(1-(-1)^g w^{-g}f(z)^g)}{1+w^{-1}f(z)}\Big|_{w=z}\\ =\;& z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)}{w(w+f(z))}+(-1)^{g+1}\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}.\end{aligned}$$

走到这一步，有所收获：(1)式中的两重复杂的求和变没了, 只需证明：

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)}{w(w+f(z))}+(-1)^{g+1}\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}\right)=(-1)^g 2^{2g}(g!)^2. \tag{5}$$

先来求

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)}{w(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}\right).$$

直接对w求导显然不好。注意到$f(z)=(w+f(z))-w$我们有：

$$\frac{f(z)}{w(w+f(z))}=\frac{1}{w}-\frac{1}{w+f(z)},$$

此时对w求导极易：

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)}{w(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}\right) \\
= \;& \mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}(\frac{1}{w}-\frac{1}{w+f(z)})\Big|_{w=z}\right) \\
= \;& (2g+1)!\,\mathrm{Res}_{z=0}\left(z(\frac{1}{(w+f(z))^{2g+2}}-\frac{1}{w^{2g+2}})\Big|_{w=z}\right) \\
= \;& (2g+1)!\,\mathrm{Res}_{z=0}\,(\frac{z}{(z+f(z))^{2g+2}}-\frac{1}{z^{2g+1}}) \\
= \;& (2g+1)!\,\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{z}{(\sinh(z))^{2g+2}}.
\end{aligned}$$

此时已得到一个相对较熟悉的函数的留数计算问题。直接展开为Laurent级数不现实，但由于：

$$\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{z}{(\sinh(z))^{2g+2}}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{z}{\sinh^{2g+2}z}dz,$$

故尝试变量代换。令$u=\sinh z$。在$z=0$的一个小邻域内，此变换为一一对应，有逆映射$z=\operatorname{arcsinh}u$, 故$dz=(1+u^2)^{-1/2}du$。因而,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_z\frac{z}{\sinh^{2g+2}z}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_u\frac{1}{u^{2g+2}}\cdot\operatorname{arcsinh}u\cdot(1+u^2)^{-1/2}du.$$

此时我们只要将$\operatorname{arcsinh}u$和$(1+u^2)^{-1/2}$展开为幂级数, 得到乘积$\operatorname{arcsinh}u\cdot(1+u^2)^{-1/2}$的$u^{2g+1}$的系数即可。一个直接的做法是利用Newton的推广二项式展开公式：

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n, \tag{6}$$

此处,

$$\binom{a}{n}=\begin{cases}1, & n=0,\\ a(a-1)\cdots(a-n+1)/n!, & n>0,\end{cases}$$

我们得到：

$$(1+u^2)^{-1/2}=\sum_{g=0}^{\infty}\binom{-1/2}{g}u^{2g}.$$

两边对u积分:

$$\operatorname{arcsinh}(u)=\sum_{g=0}^{\infty}\binom{-1/2}{g}\frac{u^{2g+1}}{2g+1}.$$

这里用到：

$$\frac{d}{du}\operatorname{arcsinh} u = (1+u^2)^{-1/2}.$$

所以我们得到:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\oint_u \frac{1}{u^{2g+2}}\cdot \operatorname{arcsinh} u \cdot (1+u^2)^{-1/2} du \\
= & \frac{1}{2\pi i}\oint_u \frac{1}{u^{2g+2}} \sum_{g_1=0}^{\infty} \binom{-1/2}{g_1} u^{2g_1} \cdot \sum_{g_2=0}^{\infty} \frac{1}{2g_2+1}\binom{-1/2}{g_2} u^{2g_2+1} du \\
= & \sum_{g_1+g_2=g} \binom{-1/2}{g_1} \cdot \frac{1}{2g_2+1}\binom{-1/2}{g_2}.
\end{aligned}$$

这里又有难看的求和，结果不理想。可以尝试直接化简。这里给出另一个做法。令:

$$\operatorname{arcsinh} u \cdot (1+u^2)^{-1/2} = \sum_{g=0}^{\infty} a_g u^{2g+1}, \tag{7}$$

两边对u求导得:

$$\begin{aligned}
& \sum_{g=0}^{\infty}(2g+1)a_g u^{2g} = -u(1+u^2)^{-3/2}\cdot \operatorname{arcsinh} u + (1+u^2)^{-1} \\
= & (1+u^2)^{-1}(1-\sum_{g=0}^{\infty} a_g u^{2g+2}),
\end{aligned}$$

等价地,

$$1-\sum_{g=0}^{\infty} a_g u^{2g+2} = (1+u^2)\sum_{g=0}^{\infty}(2g+1)a_g u^{2g}.$$

比较两边的系数:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_{g+1} &= -\frac{2g+2}{2g+3}a_g, \quad g\geq 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

由此递归关系得到:

$$a_g = \frac{(-1)^g}{(2g+1)!}2^{2g}(g!)^2. \tag{9}$$

故已证明了

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_u \frac{1}{u^{2g+2}}\cdot \operatorname{arcsinh} u \cdot (1+u^2)^{-1/2} du = \frac{(-1)^g}{(2g+1)!}2^{2g}(g!)^2. \tag{10}$$

作为副产品我们也得到了等式:

$$\sum_{g_1+g_2=g}\binom{-1/2}{g_1}\cdot\frac{1}{2g_2+1}\binom{-1/2}{g_2}=\frac{(-1)^g}{(2g+1)!}2^{2g}(g!)^2.$$

(如上提到，可以直接化简证明此式。但上面的证明更有趣。)

为证明(5)此时只需证明:

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}\right)=0.$$

事实上, 我们将证明

$$\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}$$

在$z=0$处解析。我们用Leibnitz公式：

$$\frac{d^n}{dx^n}(\varphi(x)\cdot\psi(x))=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i}{dx^i}\varphi(x)\cdot\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}\psi(x), \tag{11}$$

得到：

$$\begin{aligned}
&\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}\\
=\;& f(z)^{g+1}\sum_{i=0}^{2g+1}\binom{2g+1}{i}\partial_w^i(\frac{1}{w^{g+1}})\cdot\partial_w^{2g+1-i}(\frac{1}{w+f(z)})\Big|_{w=z}\\
=\;& f(z)^{g+1}\sum_{i=0}^{2g+1}\binom{2g+1}{i}\cdot\frac{(-1)^i\prod_{j=1}^{i}(g+j)}{z^{g+1+i}}\cdot\frac{(-1)^{2g+1-i}(2g+1-i)!}{(z+f(z))^{2g+2-i}}\\
=\;& -(f(z)/z^3)^{g+1}\sum_{i=0}^{2g+1}\binom{2g+1}{i}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{i}(g+j)\cdot(2g+1-i)!}{(1+f(z)/z)^{2g+2-i}}.
\end{aligned}$$

由$f(z)$的定义知:

$$\begin{aligned}
1+f(z)/z&=1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\frac{z^5}{7!}+\cdots,\\
f(z)/z^3&=\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}+\cdots
\end{aligned}$$

在$z=0$处解析, 因而证明完成。

后记

1. 式(1)左边很复杂，右边很简单，这个等式自当有其精妙之处。我们没有寻求初等证明，而是以退为进，引进函数 $f(z)$，将问题化为留数问题。此无他，乃素常所喜之法也。余皆步步为营，水到渠成。用了几种常用的方法，与大家分享。

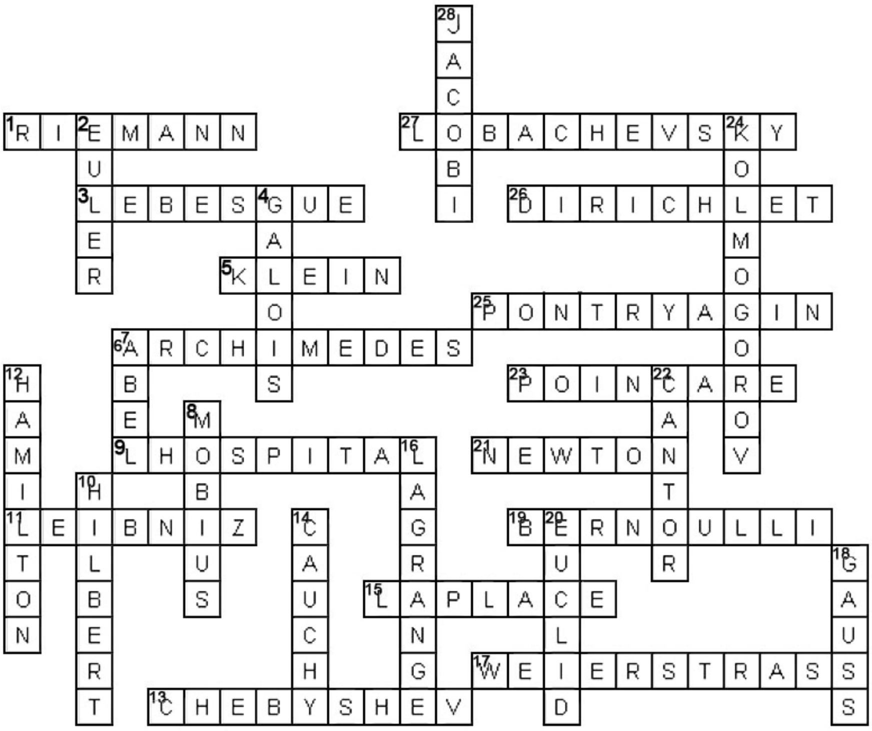
2. 上面没有解释如何发现这个等式的，这是更有趣的事情。事实上，我是在南开大学 bbs 的数学版上看到有人在问这个等式。我看出提问者是浙江大学研究代数几何中模空间上的相交理论的一位青年学者徐浩，就把以上证明告诉了他。他告诉我这个等式是模空间理论中一个猜想的特殊情形，Zagier 在一篇文章提到，但没有给出证明。他问了些搞组合的人没有得到证明，就在 bbs 上提问。

3. 为学大处着眼，小处着手，乃“眼高手低”之异解。良莠不分，有顿落下乘之患；取法先贤，免盲人瞎马之弊。沉迷技巧，难免坐井观天；好高骛远，终亦无所能为。拙文雕虫小技，不足为训，谨怀自娱娱人之意，慎戒自愚愚人之失。先哲云：“一切有为法，如梦幻泡影，如雾亦如电，应作如是观。”

****

Crossword 答案

（题目见上期）



注：“klein”在德语中意思是“小的”。