波动方程的一种极限问题

雍稳安*

考虑波动方程

$$\epsilon(u_{tt}-u_{xx})+au_t+bu_x=0, \qquad (x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,\infty), \tag{1}$$

的初值问题。其中$\epsilon>0$是一小参数，a和b是实常数。显然我们应该假定a和b不全为零。这个方程是一类奇异极限问题的典型例子，有着十分广泛的应用背景（见本文结尾部分）。

由于方程(1)依赖于ϵ, 其解自然也依赖于ϵ, 记为$u^\epsilon=u^\epsilon(x,t)$. 我们感兴趣的是当$\epsilon$趋于零时，解$u^\epsilon$的极限行为。即什么情况下极限存在？若存在，极限是什么？形式地看，若极限u^0存在，它（在分布意义下）满足如下方程

$$au_t^0+bu_x^0=0. \tag{2}$$

首先我们说明这个极限不总是存在的。事实上，$u^\epsilon=\epsilon(e^{-at/\epsilon}-1)$ 是方程(1)的解。当$a<0$时，对任意$t>0$, $\lim_{\epsilon\to 0}u^\epsilon(t)=+\infty$. 若$a=0$, 那么由假设$b\neq 0$，而

$$u^\epsilon=-\frac{bt^2}{2\epsilon}+x$$

是方程(1)的解。显然这时极限也不存在。下面我们总假设$a>0$. 另一方面，根据波动方程的有限传播速度性质，在三角形区域

$$\{(x,t):|x|\le 1-t, t\in(0,1]\}$$

中，解u^ϵ完全由方程和初值函数在区间$|x|\le 1$中的值来决定。这样，如极限u^0存在，它也应由这些决定。另一方面，若$|b/a|>1$, 由特征线法知道，u^0在上述三角形区域的某个子集内的值与其初值函数在区间$|x|\le 1$中的值无关！这些简单的讨论说明前述极限存在的一个必要条件是

$$|b|\le a. \tag{3}$$

*清华大学周培源应用数学研究中心

（学过数值分析的同学知道，这个条件与差分格式理论中著名的CFL条件之获得完全一样。）

本文的主要目的是说明条件（3）是前述极限存在的充分条件。由于$a > 0$, 我们不妨假定

$$a = 1.$$

由于

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t u_t(x,s)ds,$$

我们只须讨论u_t^ϵ和u_x^ϵ的极限行为。引入

$$v = u_x, \qquad w = u_t,$$

方程（1）转化为

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t - v_x &= -\tfrac{w+bv}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{4}$$

处理这样的线性常系数方程组之初值问题的一个方便工具是Fourier变换。回忆$u = u(x)$的Fourier变换为

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x)dx.$$

u是x的速降函数当且仅当$\hat{u} = \hat{u}(\xi)$是ξ的速降函数；由于Parseval恒等式，Fourier变换对所有平方可积函数u有定义；进而，u是x的平方可积函数当且仅当$\hat{u}$是ξ的平方可积函数。

在Fourier变换下，方程组（4）变成了

$$\begin{aligned} \hat{v}_t + i\xi\hat{w} &= 0, \\ \hat{w}_t + i\xi\hat{v} &= -\tfrac{\hat{w}+b\hat{v}}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{5}$$

从这个以ξ为参数的常微分方程组我们解出

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^\epsilon(\xi,t) \\ \hat{w}^\epsilon(\xi,t) \end{pmatrix} = e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon} \begin{pmatrix} \hat{v}^\epsilon(\xi,0) \\ \hat{w}^\epsilon(\xi,0) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -i\xi \\ -i\xi - b & -1 \end{pmatrix}.$$

为了说明条件（3）的充分性，我们先建立

命题1：对于每个$(t,\xi)\in(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon} \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{i\xi bt} & 0 \\ -be^{i\xi bt} & 0 \end{pmatrix}.$$

证明：设$\lambda_\pm=\lambda_\pm^\epsilon$是二阶矩阵$A(\epsilon\xi)$的两个特征值。那么它们解一元二次方程$\lambda^2+\lambda+\epsilon^2\xi^2-ib\epsilon\xi=0$，其表达式是

$$\lambda_\pm=\frac{-1\pm\sqrt{1+4i\epsilon\xi b-4\epsilon^2\xi^2}}{2}.$$

简单的计算说明

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lambda_+^\epsilon=0, \qquad \lim_{\epsilon\to 0}\lambda_-^\epsilon=-1, \qquad \lim_{\epsilon\to 0}\lambda_+^\epsilon/\epsilon=ib\xi. \tag{7}$$

另一方面，对于$\epsilon\xi\neq\pm 1/2$, $\lambda_+\neq\lambda_-$. 这时矩阵$A(\epsilon\xi)$有下列分解（若$\epsilon\xi\neq 0$）

$$A(\epsilon\xi)=\frac{i\xi\epsilon}{\lambda_+-\lambda_-}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon} & -\frac{\lambda_-}{i\xi\epsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_-}{i\xi\epsilon} & -1 \\ \frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon} & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon} &= \tfrac{i\xi\epsilon}{\lambda_+-\lambda_-}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon} & -\frac{\lambda_-}{i\xi\epsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t\lambda_+/\epsilon} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_-/\epsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_-}{i\xi\epsilon} & -1 \\ \frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\begin{pmatrix} \lambda_+e^{t\lambda_-/\epsilon}-\lambda_-e^{t\lambda_+/\epsilon} & i\xi\epsilon(e^{t\lambda_-/\epsilon}-e^{t\lambda_+/\epsilon}) \\ \frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon}\lambda_-(e^{t\lambda_+/\epsilon}-e^{t\lambda_-/\epsilon}) & \lambda_+e^{t\lambda_+/\epsilon}-\lambda_-e^{t\lambda_-/\epsilon} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

不难看出，这个表达式在$\epsilon\xi\to 0$时也成立。矩阵$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$的这个表达式和式（7）中的极限立即导致了命题的结论。注意$t>0$被用来说明$e^{t\lambda_-/\epsilon}\to 0$. 证毕

这个证明用到了$a=1>0$而非条件(3)，下一个命题本质性地用到条件(3).

命题2：在条件（3）下，矩阵$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$的$L^2$模有个与$t,\epsilon$和$\xi$都无关的上界。

证明：对于$|b|=a=1$的情形，$\lambda_+=i\xi\epsilon b, \lambda_-=-1-\lambda_+$. 这时我们可以利用$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$的前述表达式把其分解为

$$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}=\frac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\lambda_+-\lambda_-)e^{t\lambda_+/\epsilon} & i\xi\epsilon(e^{t\lambda_-/\epsilon}-e^{t\lambda_+/\epsilon}) \\ 0 & (\lambda_+-\lambda_-)e^{t\lambda_-/\epsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

由于

$$|\frac{i\xi\epsilon}{\lambda_+-\lambda_-}|=\frac{|i\xi\epsilon|}{|1+2i\xi\epsilon b|}=\frac{|\xi\epsilon|}{\sqrt{1+4\xi^2\epsilon^2}}<1/2,$$

$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$是一致有界的。

对于$|b| < a = 1$的情形，用$(b\hat{w}+\hat{v})$和$(\hat{w}+b\hat{v})$的复共轭分别乘常微分方程组（5）的第一、第二个的方程再求和并取实部，我们得到

$$\left(|\hat{v}|^2+|\hat{w}|^2+b(\hat{v}\bar{\hat{w}}+\bar{\hat{v}}\hat{w})\right)_t+\frac{2|\hat{w}+b\hat{v}|^2}{\epsilon}=0.$$

由于$|b(\hat{v}\bar{\hat{w}}+\bar{\hat{v}}\hat{w})| \le |b|(|\hat{v}|^2+|\hat{w}|^2)$, 积分上述等式我们得到

$$\begin{aligned}
& (1-|b|)(|\hat{v}(\xi,t)|^2+|\hat{w}(\xi,t)|^2) \\
\le\ & |\hat{v}(\xi,t)|^2+|\hat{w}(\xi,t)|^2+b(\hat{v}(\xi,t)\bar{\hat{w}}(\xi,t)+\bar{\hat{v}}(\xi,t)\hat{w}(\xi,t))+2\epsilon^{-1}\textstyle\int_0^t|\hat{w}+b\hat{v}|^2ds \\
=\ & |\hat{v}(\xi,0)|^2+|\hat{w}(\xi,0)|^2+b(\hat{v}(\xi,0)\bar{\hat{w}}(\xi,0)+\bar{\hat{v}}(\xi,0)\hat{w}(\xi,0)) \\
\le\ & (1+|b|)(|\hat{v}(\xi,0)|^2+|\hat{w}(\xi,0)|^2).
\end{aligned}$$

所以

$$|\hat{v}(\xi,t)|^2+|\hat{w}(\xi,t)|^2 \le \frac{1+|b|}{1-|b|}(|\hat{v}(\xi,0)|^2+|\hat{w}(\xi,0)|^2).$$

由于$\hat{v}(\xi,0)$和$\hat{w}(\xi,0)$的任意性，结合表达式（6）我们立即从这个结论看出

$$|e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}| \le \sqrt{\frac{1+|b|}{1-|b|}}.$$

证毕

注记1: 若$v(x,0)$和$w(x,0)$是平方可积（或速降）的，根据Fourier变换的性质$\hat{v}(\xi,0)$和$\hat{w}(\xi,0)$ 也是平方可积（或速降）的。由命题2，$\hat{v}^\epsilon(\xi,t)$和$\hat{w}^\epsilon(\xi,t)$关于ξ 是平方可积（或速降）的。这样它们关于ξ的Fourier逆变换$v^\epsilon(x,t)$和$w^\epsilon(x,t)$有定义并且是关于x平方可积（或速降）的。这个讨论简要地说明了一阶方程组（4）之初值问题的适定性。应该提到：固定$\epsilon>0$，方程组（4）之初值问题的适定性是不依赖于条件(3)的，因为可以证明矩阵$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$的$L^2$模有个与$\xi$无关的上界。有兴趣的同学可以试着证一下，这里不在赘述。

有了命题2和3，我们来说明条件（3）的充分性。我们假定方程组（4）的初值$v(x,0)$和$w(x,0)$是平方可积的。命题2说明对于任意$(t,\xi)\in(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$,

$$\lim_{\epsilon\to0}|(\hat{v}^\epsilon,\hat{w}^\epsilon)(\xi,t)-(e^{i\xi bt}\hat{v}(\xi,0),-be^{i\xi bt}\hat{v}(\xi,0))|^2 \longrightarrow 0.$$

记

$$(\hat{v}^0,\hat{w}^0)=(e^{i\xi bt},-be^{i\xi bt})\hat{v}(\xi,0).$$

经由Fourier逆变换得到的$v^0(x,t)$和$w^0(x,t)$显然满足$w^0(x,t)+bv^0(x,t)=0$. 进而，$v^0(x,t)$是方程(2)的解$(a=1)$! 命题3说明存在与t,ξ和ϵ都无关的常数C使得

$$\begin{aligned}
|(\hat{v}^\epsilon,\hat{w}^\epsilon)-(\hat{v}^0,\hat{w}^0)|^2 \le\ & 2|(\hat{v}^\epsilon,\hat{w}^\epsilon)|^2+2|(\hat{v}^0,\hat{w}^0)|^2 \\
\le\ & 2C|(\hat{v}(\xi,0),\hat{w}(\xi,0))|^2+2(1+b^2)|\hat{v}(\xi,0)|^2 \equiv g(\xi).
\end{aligned}$$

因为$v(x,0)$和$w(x,0)$关于x是平方可积的, 对于任意有限$T>0$, $g(\xi)$在$(t,\xi)\in(0,T)\times(-\infty,+\infty)$上可积。这样利用Parseval恒等式和Lebesgue 控制收敛定理我们得到

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|(v^\epsilon-v^0,w^\epsilon-w^0)(x,t)|^2dx \\ = & \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|(\hat{v}^\epsilon-\hat{v}^0,\hat{w}^\epsilon-\hat{w}^0)(\xi,t)|^2d\xi=0. \end{aligned}$$

至此我们已经说明了条件(3)的充分性。

注记2：这个收敛性结果是针对平方可积的初值函数的，它没有考虑解的初始层行为（注意方程(1)需要两个初值，而方程(2)只需要一个）。对于更正规的初值函数，类似的分析能建立更强的收敛性结果，初始层行为也能处理。这里不再赘述。

注记3：前面已经提到条件(3)与差分格式理论中CFL条件的相似性。在有些文献中条件(3)被称为Leray的separation条件（或称time-like条件），在有些文献中被称为Whitham的子特征条件，因为它说方程(2)的特征线把方程(1)的两条特征线分开了。

注记4：方程组（4）是一个带有零阶源项的一维一阶双曲偏微分方程组，其一般形式是

$$u_{kt}+\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{n}a_{jkl}(u_1,u_2,\cdots,u_n;x,t)u_{lx_j}=q_k(u_1,u_2,\cdots,u_n;x,t)/\epsilon, \tag{8}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_d), k=1,2,\cdots,n$. 这样的非线性偏微分方程组描述了自然界中大量的非平衡现象，典型的例子来源于局部非平衡气动力学、伴有化学反应的气动力学、辐射流体力学、神经科学、动力学理论（Boltzmann方程）、非线性关系、交通流动等众多不同的学科。对于这样一般的非线性奇异极限问题，已有若干系统的结果，特别条件(3)的各种推广形式已经找到。对于方程组(8)来说，这些推广形式中的有些类似于H定理对于Boltzmann方程，有些类似于非平衡热力学中的Onsager 倒易关系。关于这些的详细讨论，有兴趣的同学可以查阅下面两篇拙作:

1. Wen-An Yong, *Basic aspects of hyperbolic relaxation systems*, Freistühler, Heinrich (ed.) et al., Advances in the Theory of Shock Waves. Boston, MA: Birkhäuser. Prog. Nonlinear Differ. Eqns. Appl. **47** (2001), pp. 259–305.

2. Wen-An Yong, *An interesting class of partial differential equations*, J. Math. Phys. **49** (2008), 033503.