有界线性算子逐点收敛的极限未必有界[1]

杜升华[2]

我们知道，定义在一个 Banach 空间上的有界线性算子序列逐点收敛的极限一定是有界线性算子，这是一致有界性原理（Banach-Steinhaus 定理）的简单推论。但是，这对不完备的赋范线性空间来说一般是不对的。下面给出一个反例：

令 $X=\{x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\in l_1 \mid \exists 0<\varepsilon<1 \, s.t. \, x_n=O(\varepsilon^n) \text{ as } n\to\infty\}$，首先验证$X$是线性空间。任取 $x=(x_1,\dots x_n,\dots)$，$y=(y_1,\dots,y_n,\dots)\in X$，设 $x_n=O(\varepsilon_1^n)$，$y_n=O(\varepsilon_2^n)$（$n\to\infty$），$0<\varepsilon_1\le\varepsilon_2<1$，任取 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，则 $\alpha x_n+\beta y_n=O(\varepsilon_2^n)$（$n\to\infty$），从而 $\alpha x+\beta y\in X$。采用 l_1 的诱导范数使X成为赋范线性空间。[3]

定义 $T_n: X\to X$ 为 $T_n(x)=(x_1,2x_2,\dots,nx_n,0,\dots,0,\dots)$，其中 $x=(x_1,\dots x_n,\dots)$。易见 $T_n\in B(X,X)$ 且 $\|T_n\|=n$。任取 $x=(x_1,\dots x_n,\dots)\in X$，设当 $n\ge N$ 时 $|x_n|\le C\varepsilon^n$。定义 $T(x)=(x_1,2x_2,\dots,nx_n,\dots)$，则 $nx_n=nO(\varepsilon^n)=O((\sqrt{\varepsilon})^n), \quad n\to\infty$，故 $T(x)\in X$。由此定义了一个线性算子 $T: X\to X$。当 $n\ge N$ 时，

$$\|T(x)-T_n(x)\|=\sum_{k=n+1}^{\infty}|kx_k|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}Ck\varepsilon^k\to 0, n\to\infty,$$

即在 l_1 范数意义下 $\lim_{n\to\infty}T_n(x)=T(x)$。

但 T 并不是有界线性算子。事实上，设 $e_k=(0,\dots,0,1,0,\dots)$ 为第 k 分量为 1、其余分量为 0 的向量，则 $e_k\in X$，$\dfrac{\|T(e_k)\|}{\|e_k\|}=k$。故 $T\notin B(X,X)$。

有界线性算子理论中（同时也是线性泛函分析中）另两个最重要的定理是闭图像定理和有界逆定理。同一致有界性原理一样，“Banach 空间”的条件对它们是必不可少的。从上面的反例中，我们可以清楚地看到这一点。

事实上，算子 T 是一个单满射，其逆映射 $T^{-1}: X\to X$ 定义为：

[1] 本文主体部分为作者在 2008 年春季学期泛函分析课学习过程中构造出的反例，选入本刊时添加了对闭图像定理、有界逆定理的讨论。为使低年级同学能够理解这个反例的意义，我们在文末附上有界线性算子理论中三个最重要的定理和一些相关概念的表述（假定读者已了解有关赋范线性空间的最基本的概念）。

[2]基数 53。

[3] 亦可将X取作有限序列全体组成的线性空间，即 $X=\{x=(x_1,\dots,x_n,0,\dots)\in l_1 \mid n\in\mathbf{N}\}$。

$T^{-1}(x)=\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\ldots,\frac{1}{n}x_n,\ldots\right)$，其中 $x=(x_1,\ldots x_n,\ldots)$。显然 $T^{-1}\in B(X,X)$ 且 $\|T^{-1}\|=1$，但 $T\notin B(X,X)$。此外，T 作为有界线性算子 T^{-1} 的逆，容易验证它是闭的。

附：三个重要定理和一些相关概念

有界逆定理：设 X，Y 为 Banach 空间，$A\in B(X,Y)$ 为单满射，则 $A^{-1}\in B(Y,X)$。

闭图像定理：设 X，Y 为 Banach 空间，$A:X\to Y$ 为闭映射，则 $A\in B(X,Y)$。

一致有界性原理（Banach-Steinhaus 定理）：设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范线性空间，$W\subset B(X,Y)$ 满足 $\sup\limits_{A\in W}\|A(x)\|<\infty,\quad \forall x\in X$，则 $\exists 0<M<\infty$ 使得 $\|A\|\le M,\quad \forall A\in W$。

有界线性算子及其范数：设 X，Y 为赋范线性空间，$A:X\to Y$ 为线性算子，若 $\sup\limits_{0\ne x\in X}\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}<\infty$，则称 A 为有界线性算子，并记其范数为 $\|A\|=\sup\limits_{0\ne x\in X}\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$。由 X 到 Y 的有界线性算子全体记为 $B(X,Y)$。

闭映射：设 X，Y 为赋范线性空间，D 为 X 的子空间，$A:D\to Y$ 为线性算子，若对于满足 $x_n\to x\in X,\quad A(x_n)\to y\in Y$ 的任意序列 $\{x_n\}\subset D$ 均有 $x\in D$ 且 $A(x)=y$，则称 A 为闭的线性算子。

****

数学家趣闻

▲ John Horton Conway (1937-)是个迷人且精力充沛的教师，上课时经常双手在空中挥舞，并不时像狮子一样吼叫以引起学生的注意。有时他在讲一个定理前会躺到讲台上，闭上眼睛，过几分钟后起来说：“这个定理实在太美妙了！我必须休息一会再讲。去年我讲这个定理的时候，由于上下跳动得太厉害，把裤子给裂开了。”

他总是走进教室，甩掉凉鞋，然后开始上课；他穿上凉鞋就意味着下课。

▲ Jacques Hadamard 去意大利 Bologna 开 1928 年国际数学家大会，其间要坐火车去一个地方。车厢里有很多人在聊天，他觉得十分累，就出了道困难的数学题，众人思考这道题，车厢里马上安静下来了，于是 Hadamard 就可以睡觉了。