

制动器试验台的控制方法分析

顾实 马传捷 杨坤

编者按：本文是 2009 年中国大学生数学建模比赛一等奖论文，发表到本刊时作者作了删改。

[关键字]

制动器试验台 电惯量 预测控制 非参数模型

[摘要]

本文对电补偿制动器试验台的电流控制方法进行了分析和研究。

首先，我们在一些合理假设的简化下，通过题目的前三问，依据力学原理，建立了电流依赖于可观测量（瞬时转速或瞬时扭矩）的两个理论模型，并对其进行了讨论。

其次，我们建立了对给定控制方法的评价标准。在题目提及的能量误差大小 $\Delta E / E$ 的基础上，我们用角速度差绝对值积分占角速度绝对值积分的比率 r 作为另一个评价指标。因为我们模拟试验的原则是使试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致，而在这一方面，我们增加的指标显然更为合理。

再次，我们针对第三问中建立的两个理论模型分别给出了相应的控制方法并利用第四问中的数据进行模拟求解。我们提出的两个控制方法将 $\Delta E / E$ 从 $0.56363e-1$ 分别降低到 $0.28802e-2$ 和 $0.52545e-3$ ；新定义指标 r 从 $2.3974e-2$ 分别降到 $1.3309e-3$ 和 $4.9598e-4$ 。客观地说，这两个结果还是比较令人满意的。

但是我们并未满足，我们进一步对模型进行了分析和优化。我们在上述模型中加入了预测控制，有效地降低了两项指标值，并且在图像上也可以直观地看出来。其中 $\Delta E / E$ 进一步降到了 $0.64017e-6$ 和 $0.77265e-4$ ， r 值进一步降低到了 $3.6137e-6$ 和 $7.5810e-5$ 。

接着，我们从控制电流—时间曲线与制动扭矩—时间曲线保持一致性以及两个评价指标两个方面对上面提出的四个模型进行了比较分析，发现模型三和四具有比较大的优越性，尤其是模型三。

最后，我们对提出的模型进行了检验。我们利用计算机模拟出其他的扭矩—时间图进行多次试验，并特别考察模型控制方法对于异常点的响应情况，发现结果仍然很令人满意。

所以，总的来说，我们的模型简单，实用，效率高，稳定性好，具有一定的实践意义。

	$\Delta E / E$	r
模型一	0.28802e-2	1.3309e-3
模型二	0.52545e-3	4.9598e-4
模型三	0.64017e-6	3.6137e-6
模型四	0.77265e-4	7.5810e-5
题给控制	0.56363e-1	2.3974e-2

控制方法成果展示

§1 问题初探

§1.1 问题重述

在车辆设计阶段，为了检测汽车制动器的综合性能，我们通常是在专门的制动器试验台上进行模拟试验。模拟的原则是使试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。本题中将路试车辆指定车轮在制动时承受的载荷在车辆平动时具有的能量等效转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量，并将与此能量相应的转动惯量称为等效的转动惯量。为了使等效惯量尽可能精确，本题的做法是在机械惯量的基础上通过电扭矩进行补偿，即让电动机在一定规律的电流控制下参与工作，补偿由于机械惯量不足而缺少的能量。本文的主要目的在于建立电流依赖于可观测量的模型并给出实际可用的控制模型。

§1.2 模型假设

1. 假设路试时轮胎与地面的摩擦力为无穷大，因此轮胎与地面无滑动。
2. 假设试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比（本题中比例系数取为 $1.5 \text{ A/N}\cdot\text{m}$ ）。
3. 试验台工作时主轴的瞬时转速与瞬时扭矩是可观测的离散量。
4. 不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

§1.3 符号约定

轮子的滚动半径为 r

载荷为 G

采样时间间隔为 Δt

初转速为 n_0 ，末转速为 n_1

等效的转动惯量为 J_0

机械惯量为 J_1

电动机补偿的惯量为 J_2

基础惯量为 J_3

刹车控制器提供的扭矩为 M_1

电动机补偿的扭矩为 M_2

电动机补偿的能量为 E_e

电动机电流为 I

钢材密度为 ρ

观测时间为 t_i ，其中， $t_0 = 0$ ， $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ ， $i = 1, \dots, N$

驱动电流与其产生的扭矩的比例系数为 $k = 1.5 A / N \cdot m^{-1}$

§1.4 问题分析

本题主要是研究如何调控电流以解决制动器试验台进行模拟试验时电惯量补偿机械惯量不足的问题。

问题的第一问主要是通过将平动动能等效成相等的转动动能来求得整体的等效转动惯量，第二问主要是计算给定飞轮组所能组成的机械惯量和需要电动机进行补偿的电惯量的大小。这两问是为了后面电流调控模型的建立做准备。

问题的第三问要求给出在合理假设的简化下电流依赖于可观测量的模型，由于实际操作中并不能完美等效且不同量测量精度不同，所以电流依赖于可观测量的模型可能并不唯一，这需要通过比较和检验来确定。

问题的第四问给出了一种控制方案所得出的数据，要求对此评价。此题中的扭矩造

成我们不少困惑，未说明其是电动机扭矩和制动器扭矩之和还是仅仅制动器扭矩。我们假设该方法没有原则性问题，分别算出两种假设的图，认为应该是制动器扭矩，否则的话曲线将几乎完全在值的下方波动。题目要求计算能量差并进行评价，但是仅计算能量差并不完整，应该需要其他判定。

问题的第五问要求基于模型给出实际的调控电流的方法，利用离散的测量值对下一时间段的期望值进行估计并据此进行调整，依据不同测量值看似等效的模型其实结果可能会不同，建模时应予以考虑。第六问则需要对第五问给出的模型进行修正和改进，以得到调整误差更小的模型。

§2 模型准备

本题中，我们的制动器试验台是用机械惯量模拟和电惯量模拟相结合的方法模拟等效转动惯量。其中电惯量系统的主要目的在于补偿等效转动惯量和机械惯量之间的差值。所以在这一部分，我们主要是建立等效转动惯量、机械惯量和电动机补偿惯量的计算模型，为后面电惯量系统的预测控制模型建立做准备。

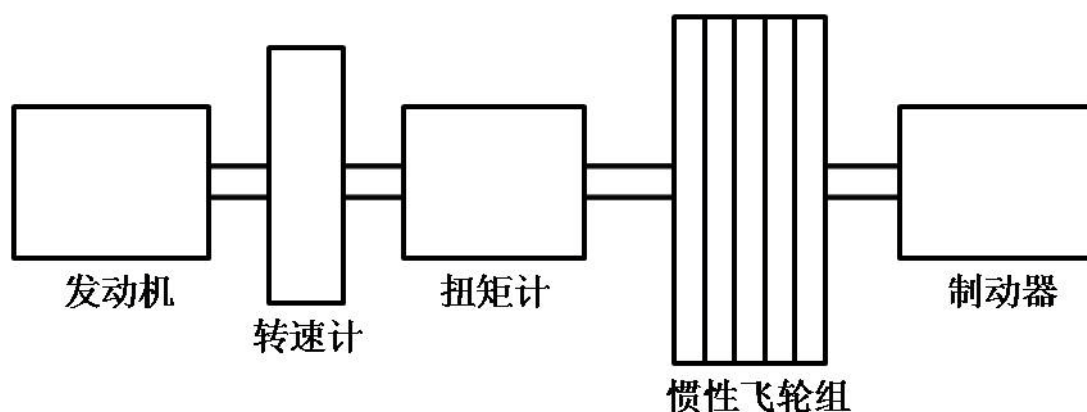


图1：制动器试验台示意图

§2.1 等效转动惯量

路试车辆的指定车轮在制动时承受载荷。我们将这个载荷在车辆平动时具有的能量（忽略车轮自身转动具有的能量）等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量，并将与此能量相应的转动惯量称为等效的转动惯量。

设车轮滚动半径为 r ，载荷为 G ，车速为 v ，车轮转速为 n ，转动角速度为 ω ，引

力常数为 g ，车的平动动能为 E_1 ，等效的转动动能为 E_2 ，则依据上面的等效思想可以得到以下关系式：

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \\ \omega = 2\pi n \\ v = rw \\ E_2 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 \\ E_1 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_0 = \frac{G}{g} r^2$$

第一问中，我们已知 $r = 0.286m$ ， $G = 6230N$ ，则等效的转动惯量 J_0 为

$$J_0 = \frac{G}{g} r^2 = 52kg \cdot m^2$$

§2.2 机械惯量和电动机补偿惯量

试验台的主轴等不可拆卸机构的惯量称为基础惯量。飞轮组由若干个环形钢制飞轮组成，使用时根据需选择几个飞轮固定到主轴上，这些飞轮的惯量之和再加上基础惯量称为机械惯量。

将飞轮等效为圆环，则其转动惯量公式为

$$J = \frac{1}{8} m(D^2 + d^2), \text{ 其中, } D, d \text{ 分别为内外径}$$

第二问中，我们已知环形钢制飞轮的外直径 $D_o = 1m$ ，内直径 $D_i = 0.2m$ ，三个飞轮厚度分别为 $d_1 = 0.0392m$ ， $d_2 = 0.0784m$ ， $d_3 = 0.1568m$ ，钢材密度 $\rho = 7810kg/m^3$ ，则三个飞轮的惯量分别为：

$$J_{m1} = 30kg \cdot m^2$$

$$J_{m2} = 60kg \cdot m^2$$

$$J_{m3} = 120kg \cdot m^2$$

设基础惯量为 J_3 ，则机械惯量的所有可能组合为

$$J_3 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i J_{mi}, \text{ 其中, } \varepsilon_i = 0, 1$$

将 $J_3 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 代入得到具体数值如下：

$$\begin{array}{lll} 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & 40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & 70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & 130 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & 160 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ 190 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & 220 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & \end{array}$$

又因为电动机补偿的能量相应的惯量的范围 $I_s = [-30, 30] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，所以电动机补偿的转动惯量

$$J_2 = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ or } -18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

§3 模型初建

由题目假设可知，在时刻 t ，电动机补偿的扭矩 $M_2 = \frac{I}{k}$ 。设此刻主轴的转动角速度为 ω ，转速为 n ，主轴边缘线速度为 v ，机械惯量为 J_1 ，电动机的补偿能量为 E_e 。考虑模型的物理关系，我们可以得到下面两个模型。

模型 1:

考虑能量关系，有如下方程：

$$\begin{cases} M_2 \omega dt = dE_e \\ E_e = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega^2 \\ M_2 = \frac{I}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(t) = 2\pi k(mr^2 - J_1) \frac{dn}{dt}, \text{ 其中 } n \text{ 为可观测量}$$

模型 2:

考虑动量关系，有如下方程：

$$\begin{cases} M_1 = J_0 \frac{d\omega}{dt} \\ M_2 = J_2 \frac{d\omega}{dt} \\ J_0 = J_1 + J_2 \\ M_2 = \frac{I}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(t) = kM_1(1 - \frac{J_1}{J_0}), \text{ 其中 } M_1 \text{ 为可观测量}$$

显然，对已正好完美等效的过程，以上两个模型是等价的。

第三问中，已知 $t_0 = 5s$ ， $v_0 = 50km/h$ ，且假设过程为匀减速，可算得

$$I = +174.8252A \text{ or } -262.2378A$$

其中， $I = +174.8252A$ 对应 $J_2 = 12kg \cdot m^2$ 的情况，"+"表示补偿为正，电流产生的扭矩阻碍减速过程； $I = -262.2378A$ 对应 $J_2 = -18kg \cdot m^2$ 的情况，"-"表示补偿为负，电流产生的扭矩促进减速过程。

§4 控制方法的评价

对于给定控制方法的评价，我们在这一部分提出了两个衡量指标：能量误差比例 η 和角速度差的绝对值积分比率 γ 。

首先，考虑到能量误差的大小是评价控制方法优劣的一个重要数量指标，我们可以用它作为控制方法的一个衡量指标。在本题中，能量误差是指所设计的路试时的制动器与相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差（通常不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差）。

第四问中，路试的等效转动惯量 $J_0 = 48kg \cdot m^2$ ，机械惯量 $J_1 = 35kg \cdot m^2$ ，主轴转速

初值 $n_0 = 514r/min$ ，末值 $n_1 = 257r/min$ 。时间间隔 $\Delta t = 10ms$ 。

设在它所给出的某种控制方法试验中扭矩做的功设为 W_1 ，则 $W_1 = \int_{t_b}^{t_e} M_1 \omega dt$ ，通过差分法可以得出试验台上制动器在制动过程中消耗的能量近似值为

$$W_1 = \sum_{i=1}^N M_1(t_i) \omega(t_i) \Delta t = 49291.94215J$$

另一方面，制动器在路试的减速过程中的动能损失为

$$\Delta E = \frac{1}{2} J_0 (\omega_0^2 - \omega_1^2) = 52216.50804J$$

考虑衡量指标

$$\eta = \frac{|W_1 - \Delta E|}{\Delta E}$$

代入数据有

$$\eta = 0.056$$

其次，考虑到我们模拟的原则是要使试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致，也就是说我们试验得到的速度—时间曲线应尽可能与实际路测时保持一致，我们就可以将实际路测时的转速—时间曲线与模拟试验中得到的曲线的一致性作为评价的另一个指标。其中，实际路测时的转速—时间曲线可以根据试验得到的扭矩—时间曲线及测得的初速度计算得出，两条曲线的一致性可以用对两条曲线差值的绝对值积分的大小来衡量。

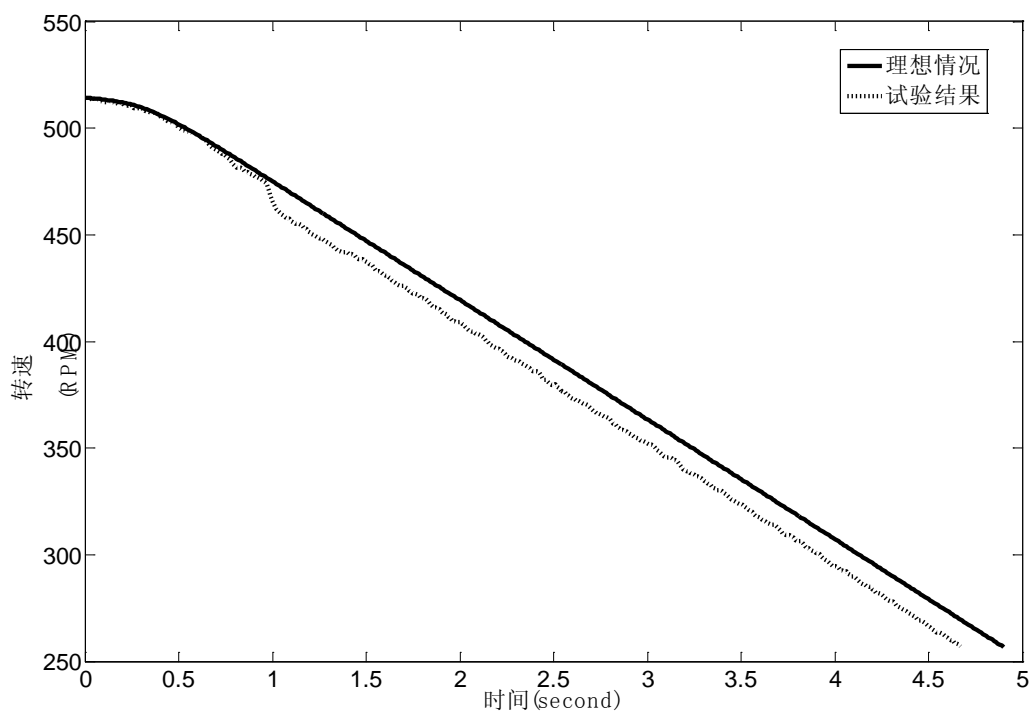
考虑衡量指标

$$\gamma = \frac{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_r(t) - \omega_o(t)| dt}{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_o(t)| dt}$$

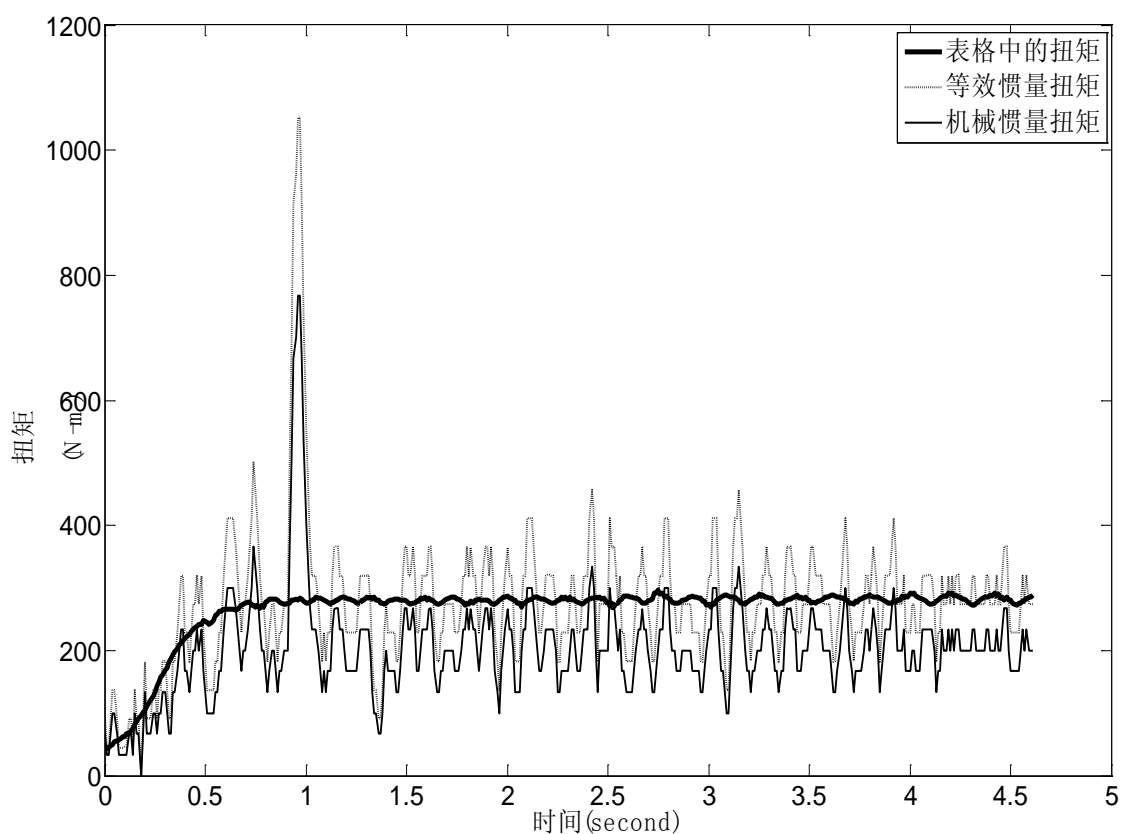
代入数据，有

$$\gamma = 0.024$$

通过分析按给定数据的扭矩计算出的 $\omega-t$ 和实际测的 $\omega-t$ 图，我们可以看出第四问中给出的控制方法的问题在于没有很好的自纠正性，一旦出现较大偏差，将会一直保持此偏差。尽管从本题数据看来，该控制方法没有进一步扩大误差，但是长期的稳定较大偏差产生的累积效果使得这个控制并不是很好。这一点可从下图明显地看出。



另外值得一提的是，在考虑题目第四问所提供用某种控制方法试验得到的数据时，我们对其中的扭矩产生了歧义——数据表中的扭矩是指主轴扭矩还是指制动扭矩？为了能够正确地判断，我们分别绘制出了表格中的扭矩—时间、机械惯量扭矩—时间、等效转动惯量—时间的曲线：



通过观察不难看出，等效转动惯量—时间曲线基本围绕着表格中的扭矩—时间曲线上下振荡，而机械惯量—时间曲线则与其有一个偏移。因此，我们认为数据表中给出的扭矩是指制动扭矩。

§5 电流控制方法建模

§5.1 扭矩与时间关系分析

一般情况下，由于制动器性能的复杂性，电动机驱动电流与时间之间的精确关系是很难得到的。但是为了合理地进行控制，我们需要对驱动电流随时间变化的关系有个大体判断，为此，我们考虑如下分析：实际路测中，由于人踩踏板的力量不是直接加到最大而且材料也有一定的动力学响应时间，所以整体来说，制动器提供的扭矩随时间变化方式应该是先随增大后趋于稳定值。考虑两种近似：

1. 认为先匀速增加后达到一个稳定值，则

$$M_1 = M_{10} + \lambda t + \frac{\lambda}{2} [Sgn(t - t_0) + 1](t_0 - t)$$

其中， M_{10} 是 M_1 的初始值， λ 是待定常数， $Sgn(x)$ 为符号函数。

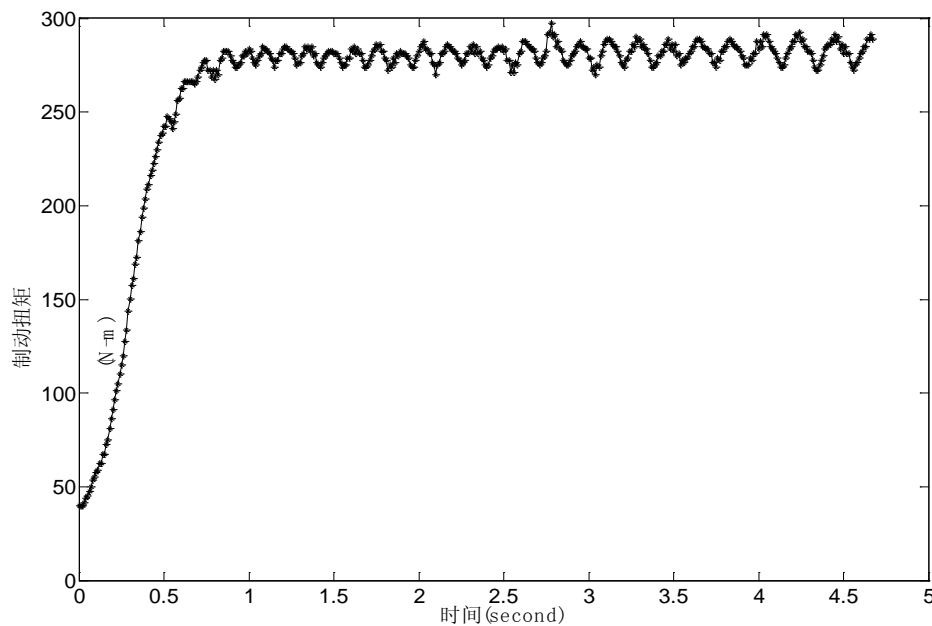
2. 认为增加的速度与当前值成线性关系，即

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} + \lambda M_1 &= M_0 \\ \Rightarrow M_1 &= M_{10} + \frac{M_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

其中， M_{10} 是 M_1 的初始值， λ 和 M_0 为待定常数。

可设 $\lambda_m = \frac{M_0}{\lambda}$ ，上式化成 $M_1 = M_{10} + \lambda_m (1 - e^{-\lambda t})$ 。

问题四中的“制动扭矩—时间图（ $M_1 - t$ 图）”如下所示：



由上图可以看出，制动扭矩上升到一定值后基本围绕一个值以基本稳定的振幅振荡。上升过程是由系统的反应迟滞导致的，振荡可能是由于系统的机械振荡引起的。此处关系分析的目的在于在控制过程中进行拟合以对未来期望值作出预判断，所以不必一开始就给出参数。另外，上升过程也可以用多项式进行拟合，但是对于不同的制动过程可能未必能够拟合得很好，因而仍需考虑非参数模型以使测试系统具有更高的适应性。

§5.2 模型一

设检测中测得的实际角速度为 ω_r ，角加速度为 α_r ，路测中的角速度即目标角速度为 ω_o ，角加速度即目标角加速度为 α_o ，则

$$\alpha_r = \frac{-M_1(t_{i-1}) + M_2(t_{i-1})}{J_1} \quad (1)$$

$$\omega_r(t_i) = \omega_r(t_{i-1}) + \alpha_r \cdot \Delta t \quad (2)$$

$$\alpha_o = -\frac{M_1(t_{i-1})}{J_0} \quad (3)$$

$$\omega_o(t_i) = \omega_o(t_{i-1}) + \alpha_o \cdot \Delta t \quad (4)$$

$$M_2(t_i) = \frac{\omega_o(t_i) - \omega_r(t_i)}{\Delta t} \cdot J_1 + M_1(t_{i-1}) \quad (5)$$

$$\Delta E_i = M_{i-1} \cdot \omega_r(t_{i-1}) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_r \cdot (\Delta t)^2 \quad (6)$$

实际控制中， J_0 和 J_1 已知， $M_1(t_i)$ 为可观测量。初始角速度 ω_0 已知，且末角速度 ω_1 也可以事先设定，所谓控制即是对 $M_2(t_i)$ 的控制（因为 $M_2(t) = I(t)/k$ ，而 k 为常数）。将作如下初始化：

$$M_2(t_0) = 0, \quad \omega_o(t_0) = \omega_0, \quad \omega_r(t_0) = \omega_0。$$

由于实际的减速方式我们并不知晓，所以我们需要对其做出判定，我们此处考虑的是非参数模型，即用前一个观测点处的加速度作为两个观测点之间的加速度，由于 Δt 很小，这种近似误差并不是很大（但是仍可改进，后文将有陈述）。在每个时刻 t_i ，我们利用前一阶段的观测数据和导出的 $M_2(t_{i-1})$ 计算出两次测量之间的加速度 α_r ，进一步算出 t_i 时刻的角速度。实际路测过程中，所加扭矩的承受者应该为整个等效惯量，所以由 (3) 式算出目标加速度 $\alpha_o(t_i)$ 并由 (5) 导出使测试减速方式趋近于实际过程所要求电动机补

偿的扭矩 $M_2(t_i)$ 。其控制原理流程图如图2所示：

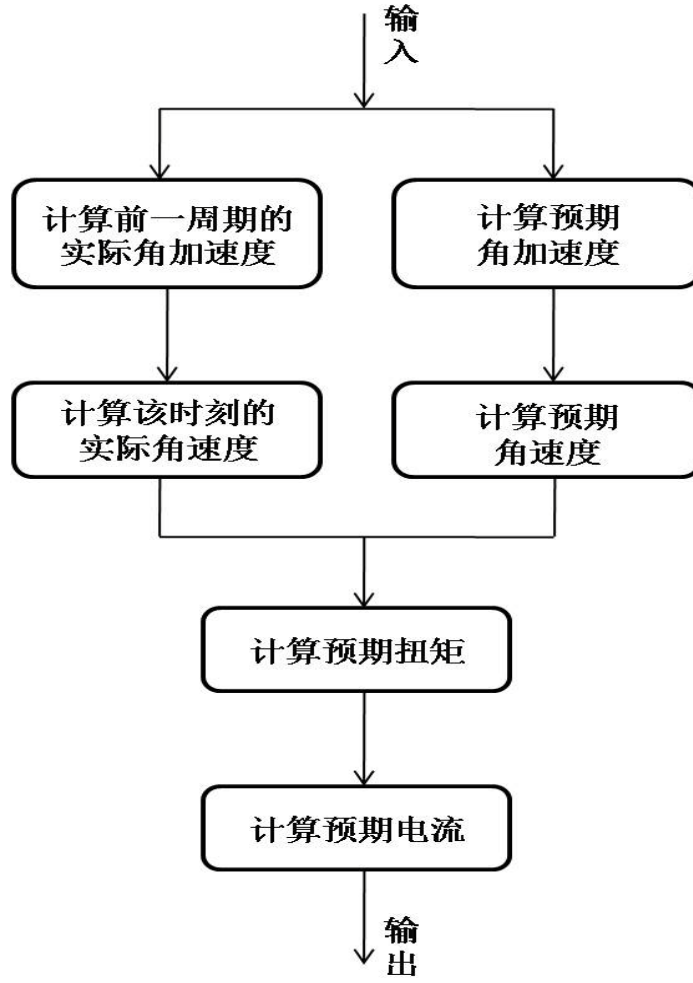


图2：电流控制原理流程图

实验中消耗的能量 $E_{test} = \sum_{i=1}^N \Delta E_i$

实际路测中消耗的能量 $E_{real} = \frac{1}{2} J_0 \cdot (\omega_s^2 - \omega_e^2)$

衡量指标为

$$\eta = \frac{|E_{test} - E_{real}|}{E_{real}}, \quad \gamma = \frac{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_r(t) - \omega_o(t)| dt}{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_o(t)| dt}$$

§5.3 模型二

根据公式

$$I(t) = kM_1(1 - \frac{J_1}{J_0})$$

进行单步调控，与模型 1 类似，在进行预测时我们只能用到前一阶段的测量值。

即离散过程中，我们使用下式进行调节：

$$I(t_i) = kM_1(t_{i-1})(1 - \frac{J_1}{J_0}) \quad (1)$$

同样地，做初始化：

$$M_1(t_0) = 0 \quad (2)$$

然后根据①式对每一步的电流值进行调节，评价方式与模型一相同。

§5.4 电流控制模型优化

§2.4 中提出的模型一和模型二仅仅考虑了尽可能减少每一步的误差，并不能消除之前积累的误差。为了克服这一缺点，我们将它们做了改进，得到了下面的两个优化模型：模型三和模型四。

§5.4.1 模型三

针对模型一，提出如下修改方案：

$$\alpha_r = \frac{-M_1(t_{i-1}) + M_2(t_{i-1})}{J_1} \quad (7)$$

$$\omega_r(t_i) = \omega_r(t_{i-1}) + \alpha_r \cdot \Delta t \quad (8)$$

$$\alpha_o = -\frac{M_1(t_{i-1})}{J_0} \quad (9)$$

$$\omega_o(t_i) = \omega_o(t_{i-1}) + \alpha_o \cdot \Delta t \quad (10)$$

$$M_2(t_i) = \left(\frac{\omega_o(t_i) - \omega_r(t_i)}{\Delta t} + \alpha_o \right) \cdot J_1 + M_1(t_{i-1}) \quad (11)$$

$$\Delta E_i = M_{i-1} \cdot \omega_r(t_{i-1}) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_r \cdot (\Delta t)^2 \quad (12)$$

其中，方程(7)---(10)与模型一相同，方程(11)对(5)作了修正，加上了 α_o ，实际上是考虑将数值调到下一次测量时的期望大小，这样可以降低由于滞后一个周期所造成的误差。其余计算同模型一：实验中消耗的能量 $E_{test} = \sum_{i=1}^N \Delta E_i$ ，实际路测中消耗的能量

$$E_{real} = \frac{1}{2} J_0 \cdot (\omega_s^2 - \omega_e^2), \text{ 衡量指标为}$$

$$\eta = \frac{|E_{test} - E_{real}|}{E_{real}}, \quad \gamma = \frac{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_r(t) - \omega_o(t)| dt}{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_o(t)| dt}$$

§5.4.2 模型四

模型二中由于使用 $M_1(t_{i-1})$ 逼近 $M_1(t_i)$ 是误差的主要来源。为了尽量减少这一误差，我们应该大概判断 $M_1(t)$ 随时间变化的关系。考虑用 $2M_1(t_{i-1}) - M_1(t_{i-2})$ 替代模型二中的 $M_1(t_{i-1})$ ，提出如下修改方案：

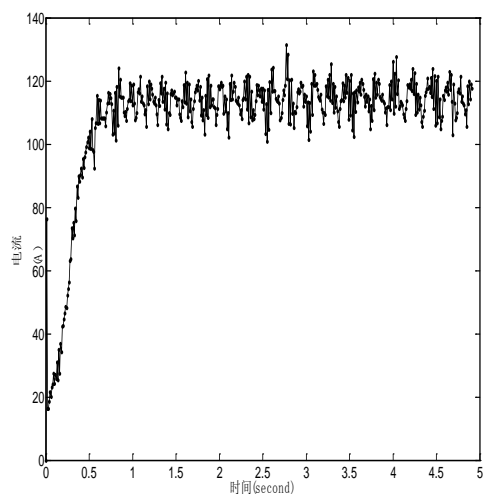
$$I(t_i) = k[2M_1(t_{i-1}) - M_1(t_{i-2})] \left(1 - \frac{J_1}{J_0}\right)$$

衡量指标与前相同。

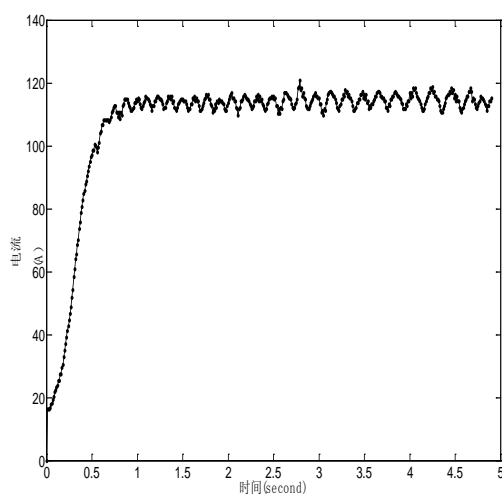
§6 模型比较

§6.1 四个模型的控制电流—时间图比较

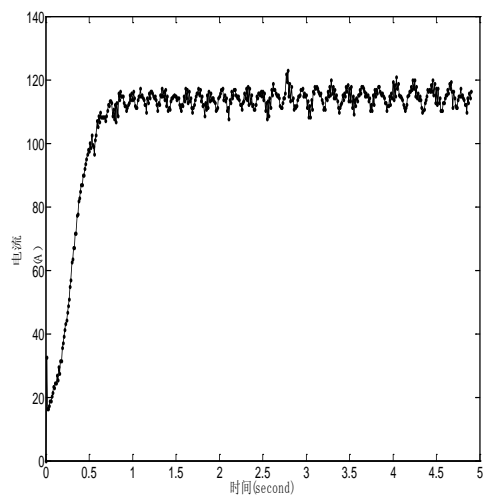
四个模型的控制电流—时间图（ $I-t$ 图）如下所示：



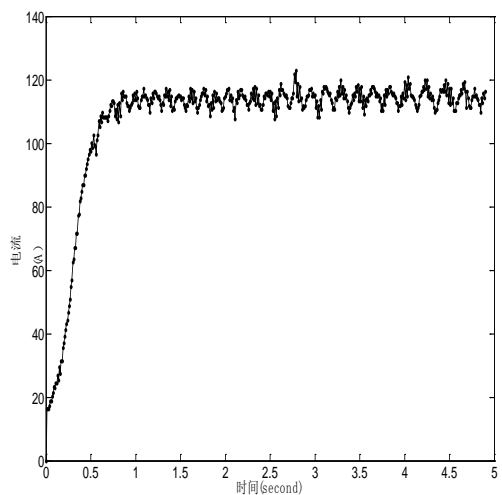
模型一



模型二



模型三



模型四

可以看出，四个模型的 $I-t$ 图都基本与 M_1-t 图保持一致，这表明我们的调节方法

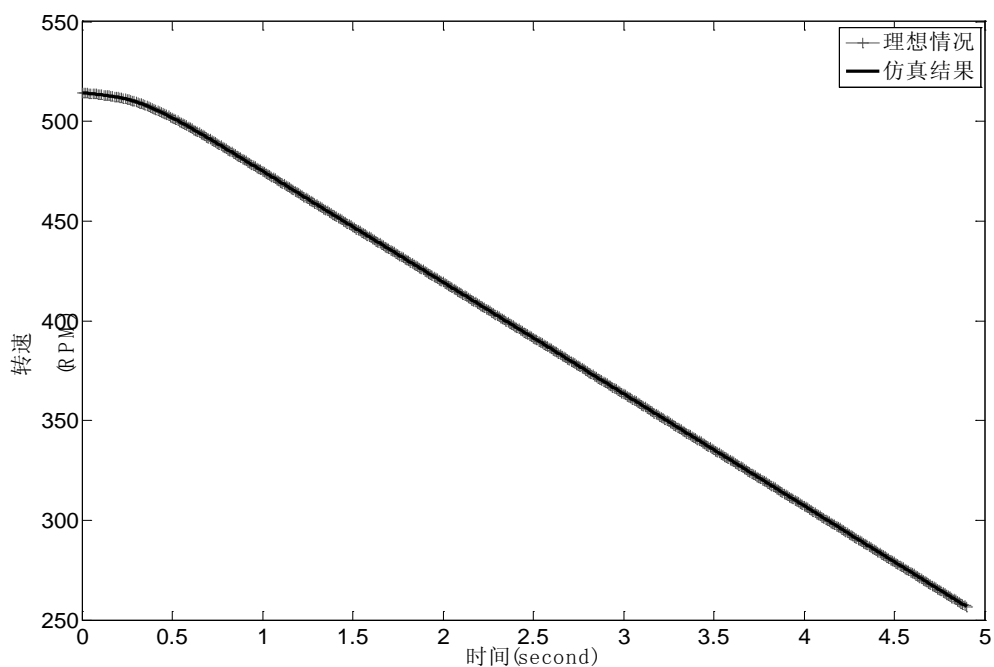
是比较成功的。模型一的图后期波动较 M_1-t 图与其他模型相比较，故而结果也会差一些。其余三个模型在后期波动过程中表现都还不错。

§6.2 四个模型的评价指标比较

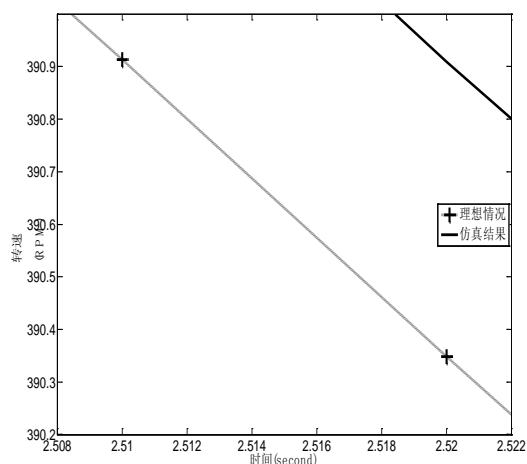
模型三、四分别是对模型一、二的改进。我们将第四题中的扭矩时间关系图看作是路测时实际关系，利用以上模型对其模拟。

考虑衡量指标 $\eta = \frac{|E_{test} - E_{real}|}{E_{real}}$ ，有如下结果：

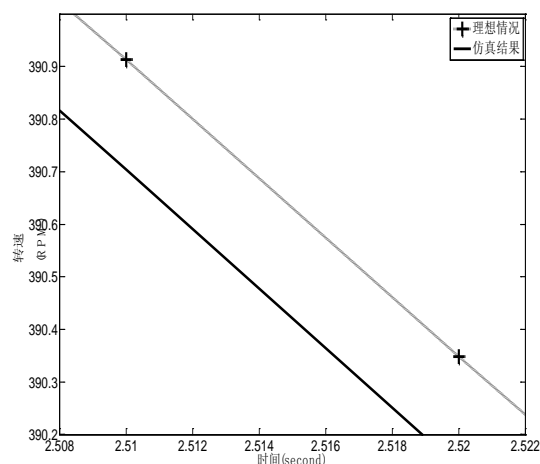
	E_{real}	E_{test}	$ \Delta E $	η
模型一	52267.91732	52418.45828	150.54096	0.28802e-2
模型二	52267.91732	52240.45296	27.46436	0.52545e-3
模型三	52267.91732	52267.88386	0.03346	0.64017e-6
模型四	52267.91732	52263.87882	4.03850	0.77265e-4
题给控制	52267.91732	49291.94215	2945.97517	0.56363e-1



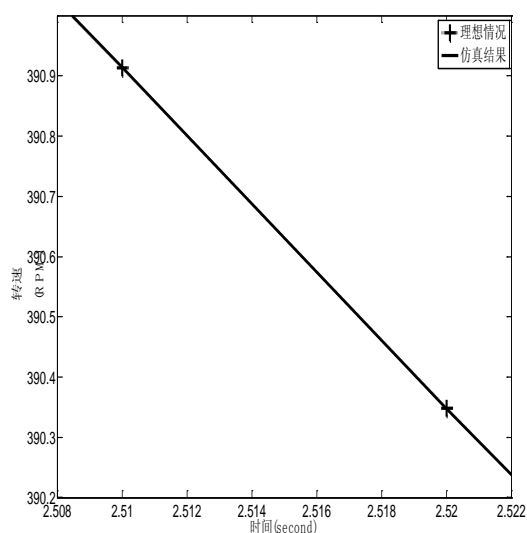
总的来说，四个模型模拟的结果都不错，画图时如果选取区间较大，四条曲线几乎无法区别，且都与实际曲线十分接近，基本如上图所示。所以，为了看出差别，我们将四条曲线在相同的较短区间内放大数倍后观察。以下选取 2.508s-2.522s 内各模拟曲线与实际曲线进行比较。



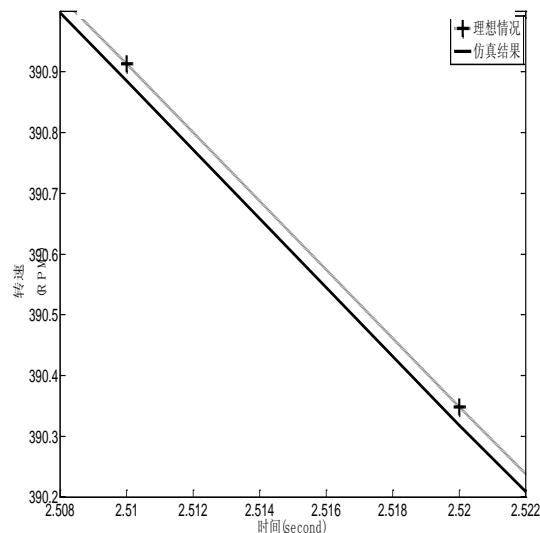
模型一



模型二

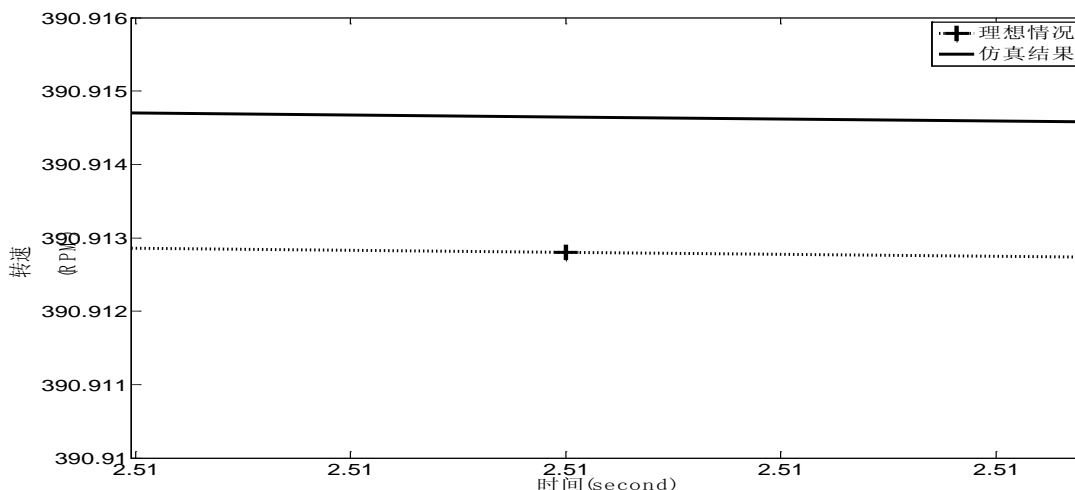


模型三



模型四

可以看出，模型三和模型四对模型一和模型二的修正效果还是很明显的，且模型三尤其卓越，在选定的区间内可以认为几乎无误差（忽略其他影响因素）。但是我们将其进一步放大后，发现其实还是可以看出有误差的，更精细的局部放大图如下所示：



考虑我们定义的另一个指标：

$$\gamma = \frac{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_r(t) - \omega_o(t)| dt}{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_o(t)| dt}$$

结果如下表所示：

	γ	减速时间/s	角位移/rad
模型一	1.3309e-3	4.900	202.3604
模型二	4.9598e-4	4.900	201.8224
模型三	3.6137e-6	4.900	201.7226
模型四	7.5810e-5	4.910	201.8073
题给控制	2.3974e-2	4.670	190.7970
理想值	\	4.910	201.8227

这进一步说明了建模的有效性并且大小顺序与能量指标相同。模型三和模型四控制结果都很好，但是差异不如能量指标反映得那么大，我们认为该指标在反应实际运动曲线相似程度上较能量指标更为优越。同时，通过比较角位移与理想值的差异也可以大体判断模型的优劣。

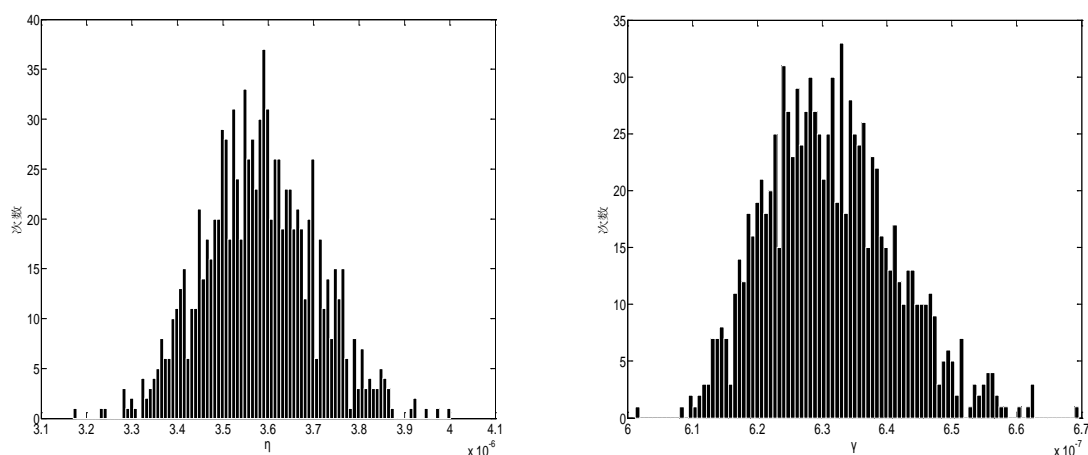
§6.2 四个模型比较分析小结

在这一部分，我们先对四个模型的控制电流—时间曲线进行了对比分析，发现它们基本上都和制动扭矩—时间曲线相一致，符合题目的相关假设和内在关系，其建立是成

功的。然后,我们依据§4 中制定的两个方法控制评价的衡量指标对四个模型进行了比较,发现作为模型一和模型二改进版的模型三和模型四确实具有比较大的优越性,尤其是模型三。

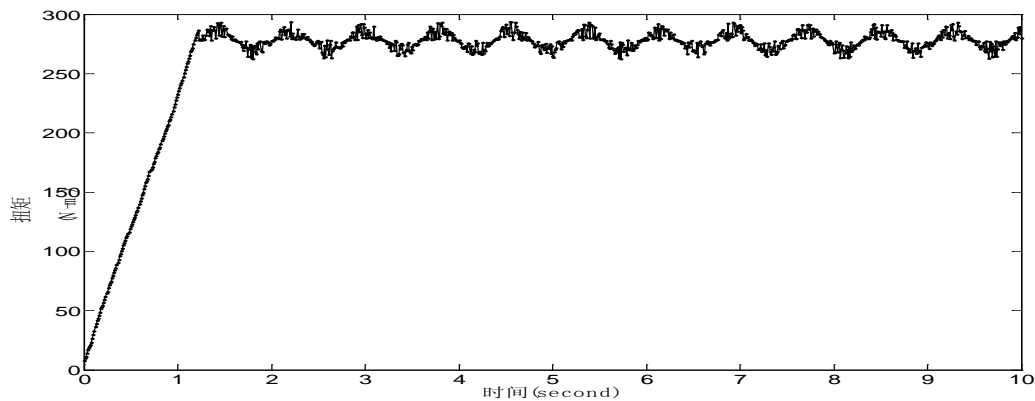
§7 模型检验

本题模型敏感性指的是结果对“扭矩—时间曲线”的依赖程度。我们首先使用无异常值的不同曲线进行模拟（重复 1000 次）以得到 η 和 γ 的分布图，如下图所示：



由以上图表可以看出，对于不同的曲线，我们的模拟结果还是很稳定的。当然，我们不排除会以极低概率出现数值较大的情况。例如当实际路测 $\omega-t$ 图在每个测量点持续呈“W”型变化时，对振荡的预测将会基本失效。事实上，我们在实际检验中也出现了这种情况，且较大的在 10^{-3} 左右。

（ M_1-t 曲线生成方式为先依照之前所述拟合模型进行构造，接着加上随机扰动使其更符合实际，下图为一示例：



)

接着，我们将数据中的某些值调整成异常值，然后进行模拟，可以看出，即使存在异常值，我们的模型也能在异常后迅速回归到正常数值。

综合以上两点，可以看出，本模型具有很好的稳健性。

数学家趣闻

▲一次 Princeton 举行的物理演讲，演讲者拿出一个幻灯片，上面极为分散地排列着一些实验数据，并且他试图说明这些数据在一条曲线上。von Neumann 大概很不感兴趣，低声抱怨道：“至少它们是在同一个平面上。”

▲L.V.Ahlfors 说下面这些话的时候，正是二战受封锁的时期。“Fields 奖章给了我一个很实在的好处，当被允许从芬兰去瑞典的时候，我想搭火车去见一下我的妻子，可是身上只有 10 元钱。我翻出了 Fields 奖章，把它拿到当铺当了 (!!!!)，从而有了足够的路费，我确信那是唯一一个在当铺呆过的 Fields 奖章。”

▲Hardy 每次坐船的时候，总是怕沉了。克服这个东西的一个方法是，每次不得不坐船航行的时候，他会给同事发个电报或者明信片什么的，说已经搞定了 Riemann 猜想回来之后会给细节的。他的逻辑是，上帝不会允许他被淹死，否则这又将是第二个类似于 Fermat 大定理的事情。