概率论感觉测试（二）

王子卓[1]

1、1000 枚硬币里有一个硬币两面都是国徽，其他的硬币都是一面是国徽，一面是数字。如果你从中选出了一个硬币，随机掷了 10 次，结果全部都是国徽，问这个硬币是那个两面都是国徽的概率大约有多大？

A. 99%

B. 90%

C. 75%

D. 50%

2、三国杀游戏里周泰的技能是当没有血的时候，可以从牌堆里抽取一张牌，如果和其前面的牌的数字都不同，则可以继续活着；否则就死了。假设牌堆里的牌是完全随机的一副扑克牌，问期望他大约一共要抽多少张牌才能死？

A. 3-4 张

B. 4-5 张

C. 5-6 张

D. 6-7 张

接上题，如果玩家可以给周泰增加一个技能，叫做重生。即在抽取第 k 张牌时如果这张牌和以前的牌数字相同，则周泰获得满血。但是玩家必须在使用角色前声明 k。如果你是玩家，你会声明 k 为多少？

A. 4

B. 5

C. 6

D. 其他

3、一位篮球运动员罚球 100 次。已知他前两个球罚中了一个。从第 3 个球开始，他罚每一个球的命中率为其前面所罚所有球的命中率，比如他前 50 个球罚中了 40 个，则下一个球的命中率为 80%。问以下哪种情况发生的可能性较大

A. 他最终罚中了 50-60 个球

B. 他最终罚中了 60-70 个球

C. 他最终罚中了 70-80 个球

[1] 数学系 03 级师兄,现就读于斯坦福大学

D. 以上 3 个可能性一样

4、接以前的收集硬币问题。 美国共有 50 种 25 分的硬币，在上次的题中，我们已经求过收集全他们所需要的大约次数（假设每种硬币出现的概率相同）。现在假设你已经收集了 80 枚硬币，你期望大约已经收集了多少种？
A. 30
B. 35
C. 40
D. 45

5、假设在一根长为 1 米的绳子上随机的分布着 5 只蚂蚁，他们的位置和初始的方向都是均匀随机的。从时刻 0 开始，他们朝着他们初始的方向以每分钟 1 米的速度开始爬，直到离开绳子或者碰到另外一只蚂蚁。当他们碰到另外一只蚂蚁时，两只蚂蚁会分别转向然后继续前进。问期望大约多少时间之后所有蚂蚁都将离开绳子?
A. 50 秒
B. 1 分钟
C. 2 分钟
D. 5 分钟

6、两个人玩一个硬币游戏。在游戏之前，第一个人选择一个长度为 3 的序列，比如说“国徽，国徽，数字”，在第一个人选择之后，另外一个人选择另外一个序列（必须是不同的）。 在两个人都选定序列之后游戏开始。两个人反复掷硬币，直到一个人所选择的序列出现为止。出现所选择此序列的人获胜。问先选择的人如果做出最正确的选择大约可以有多大的可能性获胜？
A. 30%
B. 50%
C. 70%
D. 90%

7、 假设有 100 个人排队买一个 5 块钱的电影票，其中 50 个人只有 5 块钱，50 个人只有 10 块钱。问电影院在整个过程中一直可以找开钱的可能性大约有多大？（注：这和在之前的测试中的台湾大选问题有一定的类似之处，但并不相同）
A. 1%
B. 2%

C. 5%
D. 10%

8. 假设你掷一枚硬币，问你期望需要掷大约多少次才能获得连续 10 个正面？
A. 100 次
B. 500 次
C. 1000 次
D. 2000 次

9. 赌场里有这样一个游戏：你掷一枚色子。在任意时刻，如果 6 从来没有出现，你可以选择获得你所掷出的总点数或者继续；若 6 出现，则游戏结束，你获得 0 块钱。（比如，你掷出了 2，3，5；则你可以选择立刻获得 10 块钱或继续，但是如果你下次掷出 6 你就什么都没有了，如果是其他你还可以继续）问这个游戏你的平均收益大概是多少（换句话说你愿意付多少钱去玩一次这样的游戏）？
A. $4
B. $6
C. $8
D. $10

10. 假设一个飞机上有 100 个座位。100 名乘客中第一名乘客喝醉了酒，就随机在飞机上找了一个座位坐下。其他的乘客如果自己的座位没有被占，则会坐在自己的座位上，否则也将在剩余的座位上随机的找一个座位。问最后一名乘客坐在自己座位上的概率有多大？
A. 50%
B. 10%
C. 5%
D. 1%

** About the resources of these problems, many of the problem in this set is from the book: *A Practical Guide to Quantitative Finance Interviews* by Xinfeng Zhou. They are frequently encountered in interviews for quantitative positions. So if you aim for those jobs, you would like to read it.

概率论感觉测试（二）答案

1.　Answer:D.这个问题是一个比较简单的问题，只需要用 Bayes 公式计算一下即可。 但是人们有时候感觉这个概率比实际中的大。类似的问题还出现在比如当你检测出来患有某种疾病的时候，假设检测错误的概率只有千分之一，但是如果那个患有那个疾病的人本身只有万分之一或者更少，则你实际得这种病的几率也要比 10% 要略少。另外的一个情况我在我的另外一篇校内日志 Do say love to her 中也提到了。总的来说，人们通常更多的关注到了事情的变化，而忽略了一些事物的本质。

2.　Answer:C.这个也没有什么算的技巧，只需要把各种情况列举一下即可得到大约需要 5.7 张牌。

Answer:B.与上题的计算方法一样，k 为 5 的时候最优，大约有 17%的可能性可以获得重生。

3.　Answer:D.这个题也许有人会认为他要么罚中很多球，要么罚中很少球，因为一旦开始罚中的多，则后面命中率会倾向于越来越高，反之亦然。但是实际上这名运动员最后罚中 1-99 个球的可能性都是相等的。简单的证明方法可以用数学归纳法。

4.　Answer:C.上次我们问过期望需要集多少个才可以集齐，答案大约是 200 个。实际上这个集的过程开始都是很快的，大约在 40 个的时候就用将近 30 种，在 80 个的时候有 40 种，而只有最后面几个需要很漫长的时间。这个公式是 N-N(N-1/N)^n，其中 N 是一共要收集的数目，n 为已收集的数目。

5.　Answer:A.从某种意义上来讲，这个题不能被认为是一道概率问题，因为其真正的难度不在于概率。似乎看起来这道题完全无法计算，因为你完全不知道每只蚂蚁的方向以及所处的位置，但是关键在于注意到当两只蚂蚁碰面时，虽然实际中他们互换了 方向，但是从运动的角度来讲，可以认为两只蚂蚁继续保持了前进但互换了代号。所以这个题相当于在 0-1 之间有 5 个随机数，问其中最大的期望是多少。这个数为 5/6， 所以答案为 A。

6.　Answer:A.也许有些人会对这个答案感到有些吃惊。先选的人居然如此吃亏。因为人们可能会认为，在这些序列中，有一个最优的序列，它出现的平均时间最早。这确实不错，但是序列之间不是独立的，也就是说如果 A 比 B 好，B 比 C 好，

并不一定能保证 A 比 C 好。比如第一个人选了“国徽，国徽，数字”这个序列，那我选择“数字，国徽，国徽”就可以保证在他这个序列出现之前的那 3 个情况中，我大约有 1/2 的概率可以获胜（也即在这个序列之前的那次硬币为数字即可）。这个题只能用 Markov 链去计算任何两个序列对抗时分别的获胜率，然后用博弈论的方法去求解。对于第一个人来说，最佳的选择可使他有 1/3 的概率获胜。

7. Answer:B.在上一系列的概率论感觉测试的题目中，我们问在整个过程中，某一方一直领先另一方的概率。这个题只要求一方（有 5 块钱的人）不落后另外一方（有 10 块钱的人）。这个的算法是需要用 brownian motion 的 reflection principle。实际上的比例为从 0 开始每一步为-1,1 运动最后停到-2 的路径数除以停到 0 的路径数，为 1/51。

8. Answer:D.在上一系列的概率论感觉测试中，我们说掷 n 次大概连续正面的数量为 log_2^n.现在问的是要获得一定量的正面，需要掷多少次。结果比较接近但是仍然不是很相同，准确的数字为 2^(k+1)-2，也就是 2046 次。简单的证明方法可以用数学归纳法。而比较推荐学过 martingale 的同学用 martingale 的方法证明：假设每一时刻有 1 个人来赌，如果正面，他的资金翻倍，否则就为 0；当连续出现 10 个正面的时候，所有来赌的人的钱为 2046。根据 Optional Stopping Theorem, 所需要时间的期望也是 2046。Martingale 方法的好处是可以计算达到任何序列所需要的时间。

9. Answer:B.这个题需要用动态规划进行计算。这种动态规划在任何管理和金融的应用中都非常常见。准确地值大约为$6.15。

10. Answer:A.这个题应该算比较经典的一道题目，但是并不能算是一道纯粹的概率题。这种类似于脑筋急转弯的题目需要人们能注意到一些简化的方法。思考的方法大约如下：对于第一名乘客，如果他恰好坐在自己的座位上，则最后一名乘客肯定也能坐在自己的座位上，如果他恰好坐在了最后一名乘客的作为上，那最后一名乘客无论如何也无法坐在自己的位子上，而这两个概率是相等的；对于其他情况，如果他坐了第 k 个乘客的座位，则从第 2 到第 k-1 个乘客，他们都会坐在自己的位子上，问题变相当于飞机一共有 101-k 个座位，第一个乘客（原来的第 k 个）随机选一个座位。这样递归下去可以得到不管有多少座位，以上的问题的概率都是 1/2。