

漫谈微分几何

丘成桐

编者按：本文是丘成桐教授 1991 年 12 月 7 日在中国台湾东海大学的演讲。文中阐述了做学问所需要的态度。这篇演讲既涉及志向、兴趣之“虚”，更谈到勤奋、选题等“实”，具有相当程度的指导意义和参考价值。我们在此将此文刊出，希望可以引起读者的一些思考。文中黑体为编者所加。

今天很高兴能够在各位面前讲讲我做学问的经验，可以供大家参考一下。我讲“如何学好微分几何”的题目，主要是想跟大家讲讲有关于从前我做学问的态度，因为我是做几何的，所以我就讲做微分几何。很明显的，大部分的同学不会选几何，不过没有关系，其实就是讲讲我做学问的态度。

首先，讲讲我从前的一些经验。我从前在香港长大，在香港念中学、大学，然后到美国念研究所，所以至少在前一半跟大家的经验应该差不了太远，不过是时代有点不同。我在多年前念数学，你们现在念数学，看法上已经有许多不相同，事实上我也不太了解你们现在的想法。不过基本上，我们都是中国文化出生的，所以我想仍有一部分共同的地方。基本上我们是要讲怎么做科学研究，也就是纯科学的研究，我们要看的是我们的志向是怎样的。

假如我们想做一个好的科学家，当然我讲的是怎么做一个好的数学家。先说我自己的经验，我从前在香港培正中学念中学的时候，就开始对数学有兴趣。当然还有一些其它的课程，我对数学有兴趣，一方面是受到我家庭的影响，我父亲是做哲学的，所以对于念数学一直都相当鼓励，到了中学以后，我父亲去世了。不过也因此对于自然科学有很浓厚的兴趣。另一方面受老师的影响也很大。我想很重要的当我们开始要做一个学问，尤其是你真的要做一个出色的科学家，跟你的兴趣和你一开始所立下的志向有很大的关系。就是说，开始的时候你期望能够做到什么。**假如说开始的时候你根本不想做一个好的科学家，那么你就永远也不可能做一个好的科学家。**从前有位大学老师跟我讲说：“假如你不买马票，你永远也中不了。”倒不是说我鼓励你们去买马票，是说假如你不准备做好的科学家，就永远也做不了一个好的科学家。

不过是不是讲，你想做一个好的科学家，你就可以做个好的科学家呢？当然不是，你还要有很多其它的因素在里面，**我想第一点是要你将做人的目标先决定。**我在国外二十多年了，也教了不少的学生，有些在世界上算是很出名，但有些不是太行。从这方面来讲，比较好的学生和不好的学生我可以晓得不同的经验。我想好的学生大部分一开始就决定他要做到什么程度的科学家，从很早就可以看得出来，因为有了志向以后，才晓得怎么去用功、怎么去花时间在上面。这看起

来倒是老生常谈，因为你从小学、中学到大学，大概很多老师都跟你讲同样的意见，可能你听多了都觉得没有什么意思，但是事实上这是成功的第一个因素。

我的一位老师跟我讲，你要决定以后你想做什么，讲明了，不是为名就是为利。当时我很惊讶，老师为什么讲这一句话。我们不能否定大部分的想法不是为名就是为利，同时这个想法也推动了不少科学的研究。不过我们也晓得，单是为名为利不可能将科学达到最高峰的研究，我们一定要对这个科学有浓厚的兴趣。我们应当晓得，做科学，我们有一个很纯正的想法，就是对真理的追寻，在真理的背后有一个很漂亮的境界在里面，我们到了一个境界以后，对我们追求学问的人来讲，是无法抗拒的，就算是没有名没有利，我们也希望能够将这个真理搞清楚。举例来讲，如果你喜欢下棋的话，有时你会晓得下到一半的时候，结局会是怎样，你非为名也非为利，当然可以讲说你是为了好胜，但是有时候你总是想追求，想晓得怎么解决这个问题。在科学上来讲我们要追求的是比这个高的境界。

我为什么讲为名为利这个事实呢？举例来讲，我们这几年在哈佛大学里教了几个在大学里念数学念得很好的学生，可是到了毕业的时候，我晓得他们明明对数学有很大的兴趣，但是他们选取了完全不同的途径，他们有些人宁愿选取做生意或是到银行里面做事。我并不反对你们去做生意、赚大钱，我失望的缘故是因为这些学生明明是对做学问兴趣特别大，但是他们没有办法去抗拒赚钱的引诱而放弃了继续做学问的前途，有些人甚至过了几年赚了钱，又想重新再做学问，**但问题是无论你资质有多好，一般来讲你将做学问的机会放弃以后，再想重新做起将会遇到许多困难。**并不是说不可能，也曾有这种情形发生过，但是真正能够达到情形，几乎是绝无仅有，做学问是不能中断的。

我遇见过很多朋友，有些甚至是很有名的数学家，他们有些人会讲我现在一方面做行政的工作，一方面可以做学问，可是事实上，这是没有办法可以达到两者兼顾的情形。我们晓得做学问几乎是全心全意的工作，当对证明追寻的时候，很难说受到其它外界的打扰，仍能够达到很高的成功的。以我的经验来讲，在想问题的时候，晚上睡觉也在想这个问题，躺在床上也在想，早上起床第一件事就是想这个问题。我并不是讲你们也要这样子，我是希望你们在遇到一个问题要解决的时候，你要全力以赴，不可能在中间慢慢想一点而在其它也可以花点功夫，这样精神不集中的态度是不可能做好学问的。

我想对大家做个建议，假如你想做个真正的好科学家的话，就不能够再往回走，假如你想做生意，那干脆一开始就不要想这个问题，并不是你要做个好的教员就要照我刚才讲的，要花这么多功夫，倒是要念好科学这是很重要的，所以这是第一点，立志很重要。

第二点我要讲的，我在国外多年，遇见过许多很出名的数学家，甚至许多有名的物理学家我也见过许多。**在我认为并没有一个是真正的像一般报纸上所讲的是天才，在我所亲身认识的大科学家，都是经过很大的努力，才能够达到他所达到的成就。**我的学生问我：“为什么你做的比我好？”，我说很简单，我比你用功。我在办公室或是在家里边，我天天在想问题，你们在外面玩，而我花了功

夫在解决想了很久的问题，我总比你不想、不花时间成就大一点。你可能去听个大科学家或大数学家演讲，你会觉得漂亮得不得了，怎么一个人能够讲得这么好！这个人是个天才！可是你有没有想到，他在后面准备花了多少时间想这个问题？

大概你们听过最出名的科学家费因曼，《费因曼物理》漂亮得不得了，所有出名的物理学家都这么讲，去听的人不是学生，都是老师或物理学家。费因曼在准备费因曼物理的时候是什么事都不做，就只有脑子在花功夫，整天在想这个问题，跟许多学生不停的在谈这个问题。费因曼是个有名的天才，可是他准备这个研究也花了许多不同的功夫。

我想很多出名的科学家在有所表现出不同的时候，你会觉得他是天才，事实上他用在后面的功夫都是很不少的。有许多很聪明很厉害的人可能是研究生甚至是教授，往往你给他一个问题，他可以很快给你一个答案，同时是很不错的一个答案。可是很多这样出色的学生或是教授，过了很久以后，你总会觉得他没有做出很好的成绩出来。问题是，你解决的问题太容易了；没有再花很多精神去考虑这个问题。尤其在我们中国人最缺乏的，就是在做中学生或是大学生的时候，没有将一个问题从头到尾仔细考虑清楚，并没有真正的全部了解，这是个很重要的问题。从一个很小的问题，我们可以引发很多不同而且有意思的问题。思考要自己训练，不单是在联考或在大学的时候，老师出个题目，你考了一百分就完了，假如这样的话，你很容易就满足你自己，你不觉得问题有什么意思。

往往出名的研究是在很平凡的问题里面，不停的思考所找出来的，很多人因为很快将问题解决了，便不愿再想下去，所以不能够再启发新的东西。科学的研究，不是解决人家已经晓得的问题。当一个科学家问一个好的问题的时候，即是成功的一半。因为科学的推动是从不断的找寻新的问题，新的方向出来的，解决从前的问题虽是个重要的推动方向，可是我们还要找出新的方向，而不单是解决从前的问题。

我们知道在物理上解决问题的时候，往往大的或出名的公式是将前面固定的理论推翻，而找出新的路子。为什么大数学家或大物理学家能够做到这个地步呢？因为他们不断的问问题。有时候在一般人来讲很明显的问题，在出名的科学家看起来，就不见得很明显。为什么不明显呢？因为我们有不同层次的问题要一路考虑下去。问问题的能力是一个很重要的训练，并不是花很多功夫就可做到，我想在我们中国的小学、中学或大学里都没有很好的做到这一点，我想从小应该做到这一点的。

现在我们来看数学跟其它物理、化学或生物等实验科学有那些不同？物理或化学等科学是从一般实验、现象界所找的题目，最后再经过实验的证实，才能算是个成功的理论。理论物理学家可以发展很多不同漂亮的理论，但最后假如不能够在实验里做出来的话，对物理学家来讲就是一篇废话。数学家有个好处。就是说，我们做了学问，一方面大部分是从一般的科学里面产生给我们的，一方面可以当作文学作品来欣赏。我们的取材多采多姿，一方面是比较基本的，从自然界或物理上的基本粒子、广义相对论、重力场去拿出很多基本的大自然的问题。这

方面对近代几何学上的影响很大，另一方面可从比较没那么基本的理论里发生出来。所谓不基本，并不是说不重要。我们要了解到我们有些问题是从工业界来的，譬如说做飞机、做螺丝，甚至做流体变动的问题，都是可产生许多有趣的几何问题或是数学问题。例如说机械人手怎么去拿东西？这都可以看做是基本的几何问题，物理学家不一定有兴趣，可是数学家却有很大的兴趣。另外我们也可以对与实际问题不相近的问题产生兴趣，我们对一个图画得漂不漂亮，我们也可以在数学上研究。

几何在数学上的取材有三个不同方向：第一是从基本自然界里产生的问题。从基本粒子、重力场到电磁波基本上如何产生的种种重要几何问题，从表面上你看不出来为什么它跟几何有关，但事实上近代物理将很多这种基本场论的问题变成几何问题，对微分几何来讲有很大的贡献。第二是刚才所讲，工业界与古典力学出了很多很重要的几何问题。第三就是纯粹从美的观点来找问题。举例来讲，从数论里面找了许多很漂亮的问题，尤其是近十或二十年来，大部分重要的数论问题大多是用几何的方法来解决的，这是几何在数学上三个重要的取材方向。

我为什么讲取材的问题呢？因为很多中学生或大学生在念几何或是某些数学课程的时候，认为我们念那个学科就念那个学科就够了，而不要念其它的学问，这是个很错误的观念。因为数学里面每一门的学问都有密切关联的，不单是数学，其实所有的理论科学中间都有很密切的关系。例如我们刚刚所讲的，高能物理与数学的关系，或是化学甚至生物都跟数学有很大的关系，所以我想怎么学几何呢？第一点是当你决定好要做一个好的几何学家时，你一定要广泛的学不同的学问，基础要比较广，如微分方程、代数、物理学以及其它学科，至少在心理上有个准备，就是说这些学科将来是对你有帮助的。你听起来会觉得这是很困难的事情，你不可能学会这么多种不同的学问。这主要的分别就是你要有一个层次，你的专科是那一方面，就要多学一点，但不可忘掉其它的学科。有时在某个意义下，我们可以很惊讶的看到同一个学问、同一个命题，在两个不同的学科里面，可以以不同的方法出现，就是说以不同的方法证明。我想主要的原因是根本上这两个学科的分别并不是很大。

在几十年前有个出名的物理学家说数学有不可思议的力量。为什么数学能够在物理上有这么大的影响呢？因为从物理学家的看法，数学家只是在玩一些简单的符号，纯粹是在家里想一些自己的问题，与自然界的关系好像不大，其实这是个错误的想法。我们数学家研究的问题是很具体的，只是有不同的层次，所以有点不同而已。举例来说我们研究微分几何上一个最简单的图形——圆球，这圆球可以说是一个抽象的观念，我们也可以说它是自然界很具体的一部分。也就是说我们将所研究的圆球视为自然界的一部分，其实跟物理的现象差不了太远的。尤其在现代的高能物理里，我们研究基本粒子，尤其到了量子力学的观念以后，因为能量已经到了很高的地步，所以有很多根本没有办法做实验，所以基本上也是在家里或课堂里或办公室里用纸笔来算，这跟数学家想象的差不了太远。假如物理学家可以这么做，表示数学家也能够坐在家里面而对自然界达到某种程度的了

解。

为什么我要讲这些呢？这些与微分几何有什么关系呢？我要讲的是你在选题的时候，我们虽然有个自由度对于选题与自然界无关，但是我們也有一个限度在里面，**假如我们选的问题与现实相差太远，最后我们的命题会被淘汰掉。**在历史上出现很多不同的研究，过了十年、二十年后就完全被淘汰的。你看现在的图书馆里面有许多文章出现，不过再过个十年八年以后，我想大部分的文章是会被淘汰掉的，根本在整个数学历史上起不了任何作用。这是因为很多的文章实在没有解决问题，其次是对我们研究的对象没有产生任何效果。所以虽然我们数学界不用时间来作证明，可是我们有某种程度的测试。一般来讲，证的很好的数学，二十年或五十年内都可以看到它在现实里出现帮助。我们晓得在这个二十年以来，从前许多不重要的问题，在今日的工程上发生很大的影响。

举例来讲，从前在数论里对于质数的搜查这个问题，这完全是一个无聊的命题。就是说一个很大的数，你怎么将它因子分解得很快。近十多年来，在国防科学上这问题变成一个重要的命题，有许多国防科学家在做这方面的研究，所以说数学上的选题很重要。为什么因子分解很重要呢？表面上看来跟真正的用途好象没有什么关联，可是它是一个很自然的问题，一个很大的整数它怎么分解，很快地，表面上并不重要，但可以帮助我们了解质数的分布情形，所以我说选题是一个很重要的问题。我记得从前我们在做大学生的时候，花了很多功夫去念一些文章与参考书，有些对数学来讲是很无意义的，可是反过来说因为花了很多功夫，所以可以了解到有些问题比较重要，有些问题比较不重要，所以花的功夫并没有白费。

其次我们讲做一个学生应该是怎么一个看法。对于做数学或做微分几何来讲，我觉得研究的气氛很要紧，尤其在中国的环境里，好象是不太容易培养出这种气氛来。假如你旁边的朋友或同学跟你谈的都是其它的问题，譬如说股票涨了或跌了或其它问题，久而久之，你大概对于做学问也没有很大的兴趣，所以培养做学问的态度与你交的朋友、跟的老师的关系很大。如果你们时常讨论学术上的问题，你就不会觉得自己很孤单，能够激励你对数学上有更大的兴趣。假如你自暴自弃，就是说你认为自己不能够在数学上做研究，不能够在数学上达到贡献的话，你永远也达不到，而且同时也影响到你旁边的朋友，使得大家都不能向前走。我们晓得许多出名的数学家甚至在牢里也可以写一些出名的文章，倒不是你永远关在牢里就能做好的文章，是说人在最困难的时候也可以做研究。

除了气氛很重要外，你也需要得到先进的支持，从前我们念中学的时候，念了很多关于做学问的方法，从前觉得很好笑，以后念书念得多了以后就觉得这些很重要，事实上这些是很重要的经验。有句话说“学而不思则罔，思而不学则殆”，你单是学而不想是不行的，你单是想而不学也是不行的，这两句话看起来很简单，其实就是怎么分配你的学习跟思想，这是一个很微妙很重要的问题。一个人无论你多用功多天才，你假如不将前人做过的东西去体验去学习，是不可能做好的。这道理很简单，一个人的智能有限，我们不可能与前面十年、五年所有人做过的

加起来的智能相比，我们要靠前人的经验，要靠他们的启发，才能够向前迈进，虽然有人自夸的讲比他们加起来都行，我不相信这种情形，也没见过这种情形。所以出名的贡献如爱因斯坦、牛顿的贡献，也是在前人的成果方面再向前走一大步或一小步。所以学是一定要的，可是如果你学过这个东西以后而不去思考，不去消化，就算你可以考第一，考一百分，但是你不想是绝对没有用的。我们看过很多出名的天才，十二岁就拿到学士学位，甚至拿了很高分，可是往往我们看不出他以后的成就。为什么很多所谓的天才在以后的科学发展里没有任何的贡献？这是因为他们没有思考，**没有思考在科学上完全不会引起任何的波澜、任何的贡献，对于整个科学完全没有好处。**所以学了以后一定要思考，怎么分配你的学习跟思考就往往要有导师的帮忙或是同学的帮忙。所谓的帮忙并不是说老师跟你讲你应当这么做或应当怎么做，这样往往是没有很大的效果，所以我刚刚讲的气氛很重要。从人家用功的程度或是讲话的态度的启发，或是讲话的时候能够去听，追根出什么东西来，从它而得到很大的帮助。

从前我到柏克莱去念研究所时，我花了很多功夫去听很多不同的科目，有些人觉得很奇怪，为什么我会去听那些课？我觉得这些课对我有好处，过了几十年后我还是觉得有好处。有些课在我去听的当时可能不懂，可是听了还是觉得有好处，因为一个人的脑袋的想法并不是那么简单的，有时候某些东西当时可能不懂，可是慢慢的就能领悟很多东西。

我举例来讲，我做博士论文的时候，我刚好要用到群论的东西，当时我问过许多专家，但是都不懂，我突然想到从前在某一课上听过一个有关这方面的论文，我忘了当时讲什么课，但我记得大概在那里可以找这方面的文章，所以我花了2天的时间在图书馆，结果给我找到差不多是我所要的文章。假如当初不去听这门课的话，我完全没有这个机会，所以有时候听一门不懂的课，有很多不同的帮助，所以很多研究生我跟他们讲，你们去听课不一定要懂，你坐在那边总比不坐在那边好，你不坐在那边的话，你完全不可能知道有其它的方法。

我想最后还是你对整个学问有多大兴趣的问题，假如你对这个学问兴趣不大的话，你没办法长年累月的坐在图书馆，坐在办公厅里，或是坐在一个课堂上听课，所以你一定要先决定你对这学问的兴趣有多大，当然做研究还有许多其它方面比较复杂的原因，以后有机会我们再讲下去。我想现在你们在大学的阶段，最要紧的是决定以后你要做什么东西，其它的可能就容易做到了。