方阵 AB 与 BA 的关系研究（一）

李奇芮[1]

一、 摘要

设 A、B 是两个同阶方阵，通常有 AB≠BA，但是，AB 与 BA 的特征多项式一定相等。受此现象启发，本文研究 AB 与 BA 之间有多大相似度。

符号说明：为行文方便，文中记方阵 A^k 的秩为 $r(A)^k$。

本文的研究主要有以下几方面的结论：

1、线性变换 AB 与线性变换 BA 具有相同的特征多项式。因而具有相同的特征根（重数计入）且有相同维数的根子空间。

2、线性变换 AB 与 BA 在相同非零特征根 λ 的根子空间上的限制相似。

3、AB 与 BA 的最小多项式最多相差一个因子 λ。

定义**幂秩函数** $f_A(k)=r(A)^k$。

定义**幂秩降速** $v_A(k)=f_A(k)-f_A(k+1)$。

4、AB 与 BA 相似当且仅当它们的幂秩函数相同。

5、幂秩降速 $v_A(k)$ 单调不增。

6、双重限制关系成立：

$$f_{AB}(k+1)\le\min\{f_{AB}(k),f_{BA}(k)\}$$

$$v_{AB}(k+1)\le\min\{v_{AB}(k),v_{BA}(k)\}$$

二、 正文

（一）引论

结论 1、如果 $f(x)$ 是一个没有 0 根的多项式，那么有如下结论：

$$null(f(AB))=null(f(BA))\qquad \det(f(AB))=\det(f(BA))$$

结论 2、弗洛比尼乌斯不等式：

$$r(AB)-r(ABC)\le r(B)-r(BC)$$

简单的证明：

现在我们来证明结论一。

---

[1] 基科 91

取$P=\begin{pmatrix} I & -B \\ & I \end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix} I & \\ A & I \end{pmatrix}$则有：$PQ\begin{pmatrix} I & \\ & I-AB \end{pmatrix}P^{-1}Q^{-1}=\begin{pmatrix} I-BA & \\ & I \end{pmatrix}$

于是我们有 $null(I\pm AB))=null(I\pm BA)$， $\det(I\pm AB))=\det(I\pm BA)$

首先，对任意方阵 A 和 B，有 $null(I\pm AB))=null(I\pm BA)$，因此：

$$null(f(AB))=null(cI+ABg(AB))=null(cI+Bg(AB)A)=null(cI+BAg(BA))$$
$$=null(f(BA))$$

其中 c≠0。第二个结论$\det(f(AB))=\det(f(BA))$证明如法炮制。对于弗洛比尼乌斯不等式，证明请参考《高等代数学》（张贤科，许甫华）112 页，这里不再赘述。

AB 与 BA 在非零根子空间上限制必相似，因为引论，设λ_0为其一非零的特征根，于是我们有，对任意的 k，$null(\lambda_0 I-AB)^k=null(\lambda_0 I-BA)^k$，这样就证明了 AB 和 BA 的形如$(\lambda-\lambda_0)^k$的初等因子完全相同，因而其在根子空间上的限制相似。

我们发现，引理在当 f(0)=0 的时候不一定成立，这样就说明 AB 与 BA 在 0 根子空间上的限制的方阵表示可能不相似，因此，AB 与 BA 在空间结构上的差异，全部反映在 0 根子空间内。

为了研究零根子空间内的结构，我们只需要研究 AB 和 BA 的幂秩关系，即$r(AB)^k$与$r(BA)^k$，若对任意的 k 满足$r(AB)^k=r(BA)^k$，则 AB 与 BA 相似。因此，AB 与 BA 在零根子空间上的差异全部反映在这两个秩的关系上。

（二）幂秩函数以及其性质

对一个 n 阶方阵 A，**我们定义非负整值函数**$f_A(k)=r(A)^k$，把这个函数叫做 A 的“**幂秩函数**”，k 的定义域为所有非负整数。

我们定义 A 的幂秩函数的一阶差分$v_A(k)=f_A(k)-f_A(k+1)$叫做 A 的**幂秩降速**。

我们有如下性质：

性质一、$v_A(k)$非负且单调不增。

这个性质文中称为“幂秩降减速性”。

证明：

由于 $r(A)^{k+1}=r(A\times A^{k})\le r(A)^{k}$ 因而 $v_{A}(k)=r(A)^{k}-r(A)^{k+1}\ge 0$，故 $v_{A}(k)$ 非负。

由弗洛比尼乌斯不等式，有 $r(A)^{k+1}-r(A)^{k+2}\le r(A)^{k}-r(A)^{k+1}$ 即 $v_{A}(k+1)\le v_{A}(k)$，于是 $v_{A}(k)$ 单调不增。证毕。

定义：设 $K=\{k\mid f_{A}(k)=f_{A}(k+1)\}$，取 t 为集合 K 中的最小元，那么我们把 t 的值叫做 A 的秩稳定点。而把这一点的取值 $f_{A}(t)$ 叫做 A 的秩稳定值。

定理 1：设 t 是方阵 A 的秩稳定点，那么对于任意的 s≥t，均有： $f_{A}(s)=f_{A}(t)$

证明：因为幂秩降减速性，对任意的 k≥t 由于 $0\le v_{A}(k)\le v_{A}(t)=0$，故有 $v_{A}(k)=0$，而 $f_{A}(t)-f_{A}(s)=\sum_{k=t}^{s-1}v_{A}(k)=0$，证毕。

定理二：设 t 是 A 的秩稳定点，则 t≤n

证明：反设 t>n，于是对任意的 k<n，一定有 $v_{A}(k)>0$ 即 $v_{A}(k)\ge 1$ 而如果这样，则 $r(A)^{n+1}=n-\sum_{k=0}^{n}v_{A}(k)\le n-(n+1)=-1$ 矛盾。

引理 1：A 的秩稳定值等于 A 的所有非零根子空间的维数之和。

证明：

只要说明 A^{n} 的秩等于 A 的所有非零根子空间的维数之和即可。

我们把 A 化成 Jordan 标准型，易知，特征非零的准素块都是满秩的，而特征为 0 的准素块一定是幂零方阵，所以，A^{n} 的秩等于 A^{n} 的所有准素块的秩的和，因为 A^{n} 的特征为 0 的准素块是 0 方阵，而特征非零的准素块是满秩的，所以 A^{n} 的秩等于所有特征非零准素块的阶数之和，从而等于 A 的所有非零根子空间的维数之和。

接下来我们来看 AB 与 BA 的幂秩关系。

注意，下文中，我们设 A 和 B 分别是 m×n 和 n×m 的矩阵。

（三）AB 与 BA 的幂秩以及其双重限制性

（**幂秩的双重限制性**）AB 与 BA 的幂秩函数和幂秩降速满足如下关系：

$$f_{AB}(k+1) \le \min\{f_{AB}(k), f_{BA}(k)\}$$
$$v_{AB}(k+1) \le \min\{v_{AB}(k), v_{BA}(k)\}$$

证明：因为$r(AB)^{k+1} = r(A(BA)^k B) \le r((BA)^k B) \le r(BA)^k$，则我们有：

$f_{AB}(k+1) \le \min\{f_{AB}(k), f_{BA}(k)\}$；

由弗洛比尼乌斯不等式，我们有

$$r(AB)^{k+1} - r(AB)^{k+2} = r(A(BA)^k B) - r(A(BA)^{k+1} B)$$
$$\le r((BA)^k B) - r((BA)^{k+1} B) \le r(BA)^k - r(BA)^{k+1}$$

于是$v_{AB}(k+1) \le \min\{v_{AB}(k), v_{BA}(k)\}$

我们看一些简单的推论：

AB 与 BA 有相同的秩稳定值。

因为 AB 与 BA 在非零根子空间上的限制相似，于是 AB 与 BA 做准素分解后，非零的准素块的阶数对应相等，按照前文的引理 1，AB 与 BA 有相同的秩稳定值。

AB 与 BA 的最小多项式最多只差一个因子λ

不妨设 AB 的最小多项式次数比 BA 的最小多项式次数高，设 AB 的最小多项式是$f(\lambda)$，BA 的最小多项式是$g(\lambda)$。

我们知道，AB 与 BA 在非零根子空间上的限制是相似的，于是其最小多项式的差异只能在因子λ上。

设 BA 的最小多项式λ因子的次数是 k，因此，BA 在 k 点便到达秩稳定点，则$v_{BA}(k) = 0$，由于幂秩的双重限制性，我们有$0 \le v_{AB}(k+1) \le v_{BA}(k) = 0$于是 AB 必然在 k+1 点到达秩稳定点。因此$f(\lambda) = \lambda g(\lambda)$。