$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ 是 e 的整数倍的新证明

王力*

编者按：本刊第一期《$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ 是 e 的整数倍的证明》一文刊出后，王力同学给出了一个只有短短几行的新证明。我们将其整理、刊登于此，以飨读者。这一方法充分显示了微积分的威力。

考虑微分算子 $D = z\frac{d}{dz}$，其定义为

$$Df(z) = zf'(z),$$

其中 $f(z)$ 是 z 的光滑函数。

易见 $Dz^n = nz^n$，从而 $D^k z^n = n^k z^n$。特别地，$n^k = D^k z^n|_{z=1}$。因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^k z^n}{n!}\bigg|_{z=1} = D^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\bigg|_{z=1} = D^k e^z|_{z=1}.$$

等式右边是 z 的整系数多项式与 e^z 之积在 $z=1$ 处的值，故为 e 的整数倍。

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{D^i z^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^i z^n}{n!}$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛，$i = 0, 1, \ldots, k$，所以上面将 D 与无穷求和号交换的操作是合理的。

****

数学笑话

谁没修养

A,B 俩数学教授为一事吵个不休。A 教授认为现在社会上的人都没有什么数学修养，即便是在学校中学过数学知识，离开学校后也忘了个干净。B 教授却不同意这观点。两人吵到中午，肚子饿了，就决定去餐馆吃饭。A 教授还有点小事，让 B 教授先去餐馆占位。

B 教授占了位子，突然计上心来，把服务员小姐叫来："等下我会问你一个问题，你就回答'x 的三次方除以三'。"

"x 的三次⋯⋯方除以三？"

"对，就这么答。"

A 教授到了，两人点好了饭菜，B 教授不经意地问了服务员小姐一句："您知道 x 平方的原函数吗？"

"x 的三次方除以三。" 服务员小姐回答得挺溜，刚想要回柜台，突然想了想刚才的话，又回头说："呃，先生，我觉得是不是还要再加个常数。"

---

*原基数 53 班同学，现已到法国巴黎高等师范学校学习。