三次数学危机中的问题猎手 *

杜升华

2007 年 11 月

关键词: **数学危机** **问题猎手**

摘 要

本文通过回顾历史上三次数学危机的产生和解决以及在此过程中杰出数学家发现问题、解决问题的途径，来阐释成为一个优秀的问题猎手对于数学工作者的意义。

伟大的法国数学家庞加莱 (H. Poincaré, 1854-1912) 曾说过："如果我们希望预知数学的将来，适当的途径是研究这门学科的历史和现状。" 对于数学系的学生和未来的数学工作者来说，了解数学史，尤其是历史上伟大的数学家如何发现和解决重大数学问题，是十分必要的。

数学的发展并非坦途。历史上，数学家们曾三次遇到令人困惑不解的难题，甚至引起整个数学界的震惊、混乱与反思，史称 "数学危机"。在这三次数学危机中，无论难题的提出者还是解决者，都是了不起的问题猎手，都极大地推动了数学的发展。

§1 第一次数学危机 — 无理数的发现

古希腊的毕达哥拉斯 (Pythagoras，约公元前 569– 前 500) 是数学史上一位有重要影响的数学家，他把 "证明" 这一基本数学思想引入了数学。他在意大利南部成立了一个有宗教色彩的秘密帮会，致力于数学与哲学的研究。这一学派被称为毕达哥拉斯学派。现在一般认为该学派发现了著名的毕达哥拉斯定理 (即勾股定理)：设 a 、 b 、 c 是一个直角三角形的三边长，其中 c 为斜边长，则 $a^2+b^2=c^2$ 。据传他们在发现了这一定理时无比欣喜，以至宰杀了一百头牛祭神庆贺。毕达哥拉斯学派笃信的基本信条是 "万物皆数"，这里他们所说的 "数" 指的仅仅是能够写成两个正整数之比的数，即有理数。这在几何上相当于说，对于任何两条给定的线段，总能找到某第三线段，以它为单位线段能将给定的两条线段划分为整数段。希腊人称这样两条给定线段为 "可公度量"，意即有公共的度量单位 [1] 。

可是该学派成员希帕苏斯 (Hipasus) 恰恰由这一学派最著名的定理得出了违背他们的信条的结论。考虑直角边长为 1 的等腰直角三角形，设其斜边长为 l ，根据毕达哥拉斯定

*本文是作者在选修课 科研思维方法 中写的期中论文。

理，有 $l^2=1^2+1^2=2$ 。容易证明这个 l 不可能写成两个正整数之比 [1] 。这种数的发现严重地冲击了毕达哥拉斯的信徒们的观念，因为它意味着正方形的对角线长与边长是不可公度的。是放弃“万物皆 (有理) 数”的基本信条，还是否认由他们最得意的定理导出的几何学事实，毕达哥拉斯学派面临两难的选择和信仰的危机，困惑、惊恐、不知所措，最终决定对外保守这个可怕的秘密。后来希帕苏斯还是把它透露出去了，结果按毕达哥拉斯学派的纪律，把希帕苏斯投入大海，葬身鱼腹 [2] ！

大约一个世纪后，欧多克斯 (Eudoxus，约公元前 408– 前 347) 提出新的比例理论 [2]，在几何上回避了两个量是否可公度的问题，从而在当时的认识水平上解决了第一次数学危机。至于这一问题的根本解决，则要归功于德国数学家戴德金 (J. W. R. Dedekind,1831–1916) 等人严格建立起来的无理数理论，那是 19 世纪后半叶的事情了。限于篇幅，这里不再介绍相关的理论。

§2　第二次数学危机 — 微积分的严密化

众所周知，牛顿 (I. Newton,1642–1727) 和莱布尼兹 (G. W. Leibniz,1646–1716) 创立了微积分，开启了高等数学的大门，这是数学史上一场意义深远的革命。自微积分创立以来，许多用初等方法难以计算的几何和物理问题被解决，相关的种种工程学科得到迅猛发展，社会生产力得以飞速提高。由于人类认识和改造自然的能力的增强，科学思想得以传播，旧的神学观念受到冲击，这自然引起保守势力的不满。从某种意义上说，微积分奠定了上述朝着资本主义方向迈进的新现象的基础，因而它受到某些神学家的责难就不难理解了。

英国哲学家和牧师伯克莱在 1734 年出版了一本小册子《分析学家，或致一位不信神的数学家》，点名道姓地攻击牛顿、莱布尼兹及其拥护者的微积分成果是诡辩 [3] 。事实上，牛顿和莱布尼兹创立的微积分，确实存在逻辑基础和推导过程不严密的问题，尤其“流数”、“无穷小量”等概念没有明确的定义，曾引起不少科学家善意的批评和建议。但伯克莱牧师的动机另当别论。

伯克莱在这本小册子里提出了后来以他的名字命名的著名悖论：“*在推导任意次幂的流数时，如果让增量消失，亦即让增量变成零，那么原来的关于增量存在的假设也就不能成立，而由这一假设引出的结果即借助于增量而得到的表达式却必须保留*，这种推理是站不住脚的。因为我们如果假设增量消失了，理所应当也就必须假设它们的比、它们的表达式以及由于假设其存在而导出的一切东西都必须随之消失。”接下来伯克莱说了些很难听的话：“这些消逝的量是什么呢？难道我们不能称它们为消逝的鬼魂吗？”“分明是诡辩，是招摇撞骗，把人们引入歧途。”⋯⋯

数学家们，牛顿和莱布尼兹的追随者们，自然对此展开反击。可是一方面数学家们忙于开拓微积分理论的广泛应用而无暇顾及基础理论，另一方面当时也无人能对极限、导数 (流数) 等基本概念作出严格的定义，在这场数学与神学、科学与宗教的辩论中伯

---

[1]假设存在正整数 p,q 使得 $l=\frac{p}{q}$ ，我们可以假定 p 与 q 是互素的，否则约分化简即可。于是 $lq=p$ ，两边平方得 $2q^2=p^2$ 。这表明 p 是偶数，可设 $p=2k$ ，则 $2q^2=4k^2$ ，即 $q^2=2k^2$ ，从而 q 也为偶数，这同 p 与 q 互素矛盾。

[2]收录在欧几里得 (Euclid，约公元前 330– 前 275) 著名的几何《原本》第五卷。

克莱似乎占了上风。这就是历史上骇人听闻的第二次数学危机。到了 19 世纪，如何巩固微积分的基础，巩固近代以来飞速发展的自然科学的基础，成为一个摆在数学家面前的重大问题。

数学史家贝尔以如下一个比喻来说明把严格性引进数学分析的重要意义 [4] ：“假定整个民族多少世纪以来一直是向谬误的神明顶礼膜拜，而突然间向他们揭示了他们的错误。在引进严格性之前，数学分析就是整整一座谬误之神的万神殿。在这方面，柯西与高斯和阿贝耳一起，是伟大的先驱者。”柯西 (O. L. Cauchy,1789–1857) 以严格化为目标，对许多基本概念作了明确的定义，并在此基础上重建和拓展了微积分的重要事实与定理。例如： [1]

变量 “依次取许多互不相同的值的量叫做变量。”

函数 “当变量之间这样联系起来的时候，即给定了这些变量中的一个值，就可以决定所有其他变量的值的时候，人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的，这时这个量就取名为自变量，而由这些自变量表示的其他量就叫做这个自变量的函数。”这个定义很接近于现代对函数的定义，突破了以往函数必须有解析表达式的限制。

极限 “当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差要多小就多小，那么最后这个定值就称为所有其他值的极限。”现代的中学教科书一般就是这样描述极限概念的。

导数与微分 柯西把导数明确定义为差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \Delta x = h$$

当 h 无限地趋向于零的极限 $f'(x)$ ，函数的微分则定义为 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 。而以往的数学家常常是取通过被伯克莱所指责的不严格运算得到的微分作为基本概念，再把导数作为“微分系数”而引入。

柯西的工作向分析的全面严格化迈出了关键的一步，引起科学界很大的轰动。但他的结果还只能算是比较严格，“无限趋向”、“要多小就多小”等语言仍只是直觉的描述。真正为微积分奠定严格基础的，是 19 世纪后半叶的“分析算术化”运动。德国数学家维尔斯特拉斯 (K. Weierstrass,1815–1897) 由于在这一运动中的伟大贡献而被视为“现代分析学之父”和德意志的民族英雄。可以毫不夸张地说，他是数学史上的英雄。

维尔斯特拉斯引入的关于极限的“ $\varepsilon-\delta$ 语言”，至今仍是大学教科书中函数极限概念的标准定义：设 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域 E 中的一个值， A 为一个实数。如果对于任意的正数 ε ，存在正数 δ ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta, x\in E$ 时， $|f(x)-A|<\varepsilon$ ，则称当 x（在 E 中）趋于 x_0 时， $f(x)$ 的极限是 A 。与此同时，维尔斯特拉斯、戴德金、康托尔（这个人我们很快就会提到）等人对实数集的结构给出了确切的刻画。至此，微积分的基础得到加固，第二次数学危机得到圆满的解决 [3] 。反科学的神学家们再也无法撼动建立在严

[3]当然，此后数学分析理论仍有很大发展。建立在集合论基础之上的实变函数论、泛函分析等学科的创立和发展被称为数学分析的第三次严格化。不过通常认为第二次严格化（即维尔斯特拉斯等人的那一次）已经把第二次数学危机解决了。

格化了的数学分析理论之上的自然科学成就的地位了。

§3 第三次数学危机 — 集合论与悖论

德国大数学家康托尔 (G. Cantor,1845-1918) 在研究实数理论的过程中，抽象出“集合”的概念，成为集合论的创始人。集合论的出现，特别是无限集合的出现，是数学思想史上的一次伟大革命。因为长期以来数学家一直只承认潜在的无穷而否认实在的无穷，即只把“无穷”看作某种没有尽头的变化趋势，而不承认“无穷”的事物作为一个固定实体而存在。集合论尽管从一开始就受到某些保守的数学家的反对，但它使人们对实数集结构的认识，乃至对整个世界中一切数学对象的认识，上升到了一个新的、更抽象的高度，并逐渐成为现代数学各个分支的理论基础。 19 、 20 世纪之交最伟大的数学家之一希尔伯特 (D. Hilbert, 1862–1943) 充满自信地说：“没有人能够把我们驱逐出康托尔为我们创造的乐园。” [4]

但是康托尔创立集合论时还来不及构建严密的公理体系，不加限制地讨论“实无穷”和“所有集合的集合”迟早会出问题。 1902 年，英国数理逻辑学家罗素 (Russell) 提出了下述著名的悖论：作集合

$$E = \{A : A \notin A\}$$

即 E 由这样的元素 A 组成， A 是一个集合，同时它不是自身的元素。问题是： E 是否属于 E ？容易看出，无论怎样回答都会引出矛盾 [4] 。这一悖论引起数学界极大的震惊，它使人们看到集合论的体系是不完善的，需要利用公理对所讨论的对象和研究的手段加以限制。有人甚至认为数学的基础由此发生动摇，于是称这一事件为第三次数学危机。

不久， 1908 年，德国数学家策墨罗 (E. F. F. Zermelo) 和弗伦克尔 (Fraenkel) 合作提出一套集合论的公理体系 [2] ，被称为 ZF 公理体系，对集合的构造作了限制。特别地，这里禁止谈“一切集合的集合”，这就避免了罗素悖论中那样的集合的出现。因篇幅所限，不再介绍该公理体系的详细内容。在经过策墨罗等人改造的公理集合论中，至今没有人发现任何悖论或矛盾出来。于是，在这个意义下，第三次数学危机基本解决。

§4 总结与思考

三次数学危机是数学史上的大事，它们促使人们创造新的观念，开拓新的理论，从而极大地促进了数学的发展。在这三场危机中，问题的提出者和解决者都是出色的问题猎手，他们发现问题或解决问题的敏锐眼光值得我们学习。

第一次数学危机的挑起者希帕苏斯毫无疑问是值得纪念的英雄。他勇于怀疑权威和教条，依靠理性思维作出新的发现，为此甚至牺牲了生命。第二次数学危机的挑起者伯克莱牧师不是数学家，而是数学家的敌人，他提出悖论的目的是驳倒牛顿、莱布尼兹创立的微积分和以此为基础的近代自然科学。但在客观上他的悖论促使数学家们寻求微积分的严格基础，从而推动了分析学的发展。至少他追求严格性的精神是值得我们学习的。

---

[4] 假如 E 属于 E ，那么根据 E 的定义，它不是自身的元素，即 $E \notin E$ ，矛盾；假如 E 不属于 E ，同样根据 E 的定义，推出它是自身的元素，即 $E \in E$ ，又是矛盾。

罗素悖论的提出者同样有追求严格性的挑剔眼光，他能从集合论的“乐园”中看出混乱与矛盾，引发整个数学理论的大厦来自基础的震荡 — 而罗素的目的和最终导致的结果恰恰是使这一基础变得更加坚实。总之，一个怀疑精神，一个严谨品质，是使这三位问题猎手有机会捕捉到巨大猎物的强有力武器。

问题的解决者同样伟大。柯西、维尔斯特拉斯、戴德金、康托尔、策墨罗……无一例外都熟知他所工作的这一领域面临什么样的困难，前人做过哪些工作，更重要的是，前人的工作有什么不尽人意的地方 — 也就是不严格的地方。法国数学家韦伊 (A. Weil,1906–1998) 有一句名言：“严格性对于数学家，就如道德之于人。”要成为一个数学家，就必须有穷根究底、不放过任何可能的错误的精神。数学就是在这种与问题和错误做斗争的不断严格化的过程中发展、成熟的。

当然，要捕获重要问题，更离不开自由的数学思想。让我们引用康托尔的一段话作为结束 [3]：“数学在其发展过程中应该是完全自由的，对数学研究设定任何多余的限制都只会随之带来更大的危险。数学的本质在于它的自由！……我宣布，我们的数学科学必须摆脱形而上学的桎梏，我们需要自由发展。”

参考文献

[1] 李文林， *数学史概论*，高等教育出版社， 2002 年 8 月第 2 版

[2] 王树禾， *数学思想史*，国防工业出版社， 2003 年 4 月第 1 版

[3] 王树禾， *数学演义*，科学出版社， 2004 年 10 月第 1 版

[4] E. T. Bell, *MAN OF MATHEMATICS*, 中译本 *数学精英 – 数学家的故事*

****

数学家趣闻

▲ Rota 曾讲了一个 Lefschetz 的故事, 关于他的课是如何难懂, 因为他经常语无伦次。这是几何课的开场白：”一个 Riemann 曲面是一定形式的 Hausdorff 空间。你们知道 Hausdorff 空间是什么吧？它也是紧的, 好了。我猜想它也是一个流形。你们当然知道流形是什么。现在让我给你们讲一个不那么平凡的定理 –Riemann-Roch 定理。”要知道第一节 Riemann 曲面的课如果这样进行的话，恐怕 Riemann 复生也未必可以听懂。：-）

▲ Hilbert（希尔伯特）曾有一个学生，给了他一篇论文来证明 Riemann（黎曼）猜想，尽管其中有个无法挽回的错误， Hilbert 还是被深深的吸引了。第二年，这个学生不知道怎么回事就死了， Hilbert 要求在葬礼上做一个演说。那天，风雨瑟瑟，这个学生的家属们哀不胜收。 Hilbert 开始致词，首先指出，这样的天才这么早离开我们实在是痛惜呀，众人同感，哭得越来越凶。接下来， Hilbert 说，尽管这个人的证明有错，但是如果按照这条路走，应该有可能证明 Riemann 猜想，再接下来， Hilbert 继续热烈的冒雨讲道：”事实上，让我们考虑一个单变量的复函数.....”众人皆倒。