2009.12.
第04期

目录

名家演讲

人物与传记

研究探讨

趣味数学

清华数学人

从清末与日本明治维新到二次大战前后
数学人才培养之比较

丘成桐
哈佛大学

编者按：这是丘成桐先生 2009 年 12 月 17 日在清华大学数学科学中心成立典礼之后的演讲。演讲后，丘成桐先生又回答了在场学生提出的问题。我们把演讲和问答一并整理发表，以飨读者。文中章节标题与演讲幻灯片一致，编者一并加入。整理时，部分字句有改动。

一 序言

今天我要讲日本数学和中国数学的比较。我们先从西方数学开始。在牛顿（1642-1727）和莱布尼茨（1646-1716）发明微积分以后，西方数学产生了根本性的变化。在十八、十九世纪两百年间，欧洲人才辈出，产生了很多大数学家，著名的有欧拉、高斯等。一路算下去，出生在 1700 和 1900 之间的大数学家，我算了算，有七十多位。他们将数学和自然科学融合在一起，引进了新的观念，创造了新的学科。他们引进的工具——不但是数学上的工具，也在力学、在物理上面——深奥而有力，开创了近三百年来数学的主流。数学的发展更推进了科学的前沿，使之成为现代文化的支柱。举例来讲，Maxwell 方程就跟数学有密切关系，是由高斯、黎曼一路发展到麦克斯韦而最终成功的。

在这期间，东方的数学却反常的沉寂。无论中国、印度或者日本，在十七世纪到十九世纪这两百年间，更无一个数学家的成就可望上述诸大师之项背。其间道理，值得深思。数学乃是科学的基础，东方国家的数学不如西方，导致科学的成就不如西方，究竟是什么原因呢？这是两百多年来，很多思想家和中国的改革家也想要了解的一个大问题。

我今天想从最基本的历史事实来探查这个问题。我想先讨论一个很有趣的现象：在明治维新以前，除了江户时代的关孝和（Takakuzi Seki，1642-1708）创立行列式外，日本数学成就远远不如中国。中国在宋元以前的数学，虽然不能说领先世界，至少在世界上是可以比较的。但到了明清以后，中国数学比不上西方。到了十九世纪末，中国数学反不如日本，这是什么原因呢？在这里，我们试图用历史来解释这个现象。

二 十九世纪中国和日本接受西方数学的过程

1859 年，中国数学家李善兰（1811-1882，浙江海宁人）在上海和苏格兰传教士伟烈亚力（Alexander Wyle，1815-1889）翻译了由英国人 De Morgan（1806-1871）著作有 13 卷的《代数学》和美国人 Elias Loomis 著作有 18 卷的

《代微积拾级》，这本书是基本的微积分。他们也将欧几里得的《几何原本》全部翻译出来，在 1857 年出版，完成了明末徐光启（1562-1633）与利玛窦未竟之愿。值得注意的是，李善兰是数学家，传教士只是帮助理解英文。

在东方的近代数学发展史来说，前两本书有比较重要的意义。前一本书引进了近代代数，后一本书则引进了解析几何和微积分，《几何原本》在这一时期起的作用不如前两本。李善兰本人对三角函数、反三角函数和对数函数的幂级数表示有所认识，亦发现所谓尖锥体积术和费尔马小定理，可说是清末最杰出的数学家，但与欧陆大师的成就不能相比拟，因为他了解的东西在两百年前的欧洲已经被发现了。

此后英人傅兰雅（John Fryee，1839-1928）与中国人华蘅芳（1833-1902）于 1874 年在上海翻译了英人华里司（William Wallis，1768-1843）著的《代数术》25 卷和《微积溯源》8 卷，他翻译的书有《三角数理》12 卷和《决疑数学》10 卷——后者由英人 Galloway 和 Anderson 所著，是介绍古典概率论的重要著作——并于 1896 年出版。

这段时期的学者创造了中国以后通用的数学名词，也建造了一套很奇怪的符号系统（如积分的符号用禾字代替）。他们又用干支和天地人物对应英文的 26 个字母，用廿八宿对应希腊字母。这些符号的引进主要是为了适合中国国情，却也成为中国学者吸收西方数学的一个严重障碍。西方的符号对数学有很大的帮助。事实上，在元朝时，中国已接触到阿拉伯国家的数学，但没有吸收他们保存的希腊数学数据和他们的符号，这是一个憾事。

当时翻译的书籍使中国人接触到比较近代的基本数学。尤其是微积分的引进，更有其重要性。遗憾的是在中国洋务运动中占重要地位的京师同文馆（1861）未有将学习微积分作为重要项目。而福州船政学堂（1866）则聘请了法国人 L. Medord 授课，有比较先进的课程。在 1875 年福州船政学堂派学生到英法留学，尤其是到法国留学。举例来讲，大家都知道严复是洋务运动中很重要的人物，他在 1877 年到英国学习数学和自然科学，郑守箴和林振峰到法国得到巴黎高等师范的学士学位，但他们回国之后都没有做数学，而是做了官，对数学研究缺乏热情，未窥近代数学堂奥。

可是在同时代，日本数学在明治维新 1868 年以前虽有自身之创作，大致上深受中国和荷兰的影响。1862 年日本学者来华访问，带回李善兰等翻译的《代数学》和《代微积拾级》，并且广泛传播。他们迅即开始自己的翻译，除用中译本的公式和符号外，也利用西方的公式和符号，这是个很大的进步。我觉得一个很重要的事情是，明治天皇要求国民向全世界学习科学，他很重要的一个宣言是命令“和算废止，洋算专用”，“和算”就是日本的数学，“洋算”就是西方数学。他期望当时的国民要学西方。除了派留学生到欧美留学外，甚至有一段时间聘请三千个外国人到日本帮忙。日本政府花了很多钱来聘请这些外国人。日本和算学家如高久守静等虽然极力抵制西学，但政府坚持开放，西学还是迅速普及，实力很快就超过中国。

日本人冢本明毅在 1872 年完成《代数学》的日文译本，福田半则完成《代微积拾级》的日文译本，此外还有大村一秀和神田孝平。神田在 1865 年已经完

成《代微积拾级》的译本，还修改了中译本的错误，并加上荷兰（Dutch）文的公式和计算，他们将原来的文字解释得很清楚。日本人治学用心，由此可见一斑。此后日本人不但直接翻译英文和荷兰文的数学书，1880 年时，Fukuda Jikin 还有自己的著作，例如 Fukuda Jikin 在 1880 年完成《笔算微积入门》的著作。我想这是一个很重要的事情：不但是去学，而且开始有自己的著作。

日本早期数学受荷兰和中国影响，明治维新期间则受到英国影响，期间有两个启蒙的数学家，第一个是菊池大麓（Dairoku Kikuchi, 1855-1917），第二个是藤沢利喜太郎（Rikitaro Fujisawa, 1861-1933），他们都在日本帝国大学（Imperial University）的科学学院（The Science College）做教授，这间大学以后改名为东京大学（日本京都帝国大学要到 1897 年才成立）。

菊池在英国剑桥大学读几何学，他的父亲是在 Edo 时代的兰学家（Dutch Scholar），当时英国刚引进射影几何，他就学习几何学，并在班上一直保持第一名。根据他自己的传记，他和剑桥的同班同学虽然竞争剧烈，却彼此尊重。菊池在传记里说，他一生不能忘怀这种英国绅士的作风，就是虽然竞争，但是互相尊重。以后他回国做到教育部长，可以说位尊权重，影响了日本学者治学的风骨。我看到很多日本的大数学家，他们都是很有绅士的作风，我想跟这个传统有关。他在剑桥得到学士和硕士，在 1877 年回到日本，编作一个行政人员，成为日本第一个数学教授，日本的射影几何的传统应该是由他而起，以后中国数学家苏步青留日学习射影、微分几何，就是继承这个传统。菊池家学渊源，亲戚儿子都成为日本重要的学者，他在东京帝国大学做过理学院长（1881-1893）、校长（1898-1901），也做过教育部长（1901-1903）、京都帝大校长（1908-1912）、帝国学院（Academy）的院长。他对明治维新学术发展有极重要的贡献，他思想开放，甚至有一阵子用英文授课，这跟中国当时的学者有很不同的看法。

藤沢利喜太郎在 1877 年进入日本帝国大学学习数学和天文，正好也是菊池在帝大开始做教授那一年。他父亲也是兰学家，在菊池的指导下，他在东京大学学习了五年时间，然后到伦敦大学念书，数个月后再到德国柏林和法国的 Strassburg，也可以说是日本伟大的数学家。在柏林时，他师从库默尔（Kummer）、克罗内克（Kronecker）和魏尔斯特拉斯（Weierstrass），都是一代大师。在 1887 年他回到日本，开始将德国大学的做研究的风气带回日本。我们要晓得，在 19 世纪的时候，英国大学跟德国大学的作风是不一样的，它们相辅相成，以后整个美国大学的结构是吸收了德国大学的研究气氛跟英国大学 liberal arts 的作风。可是当时日本人既有到英国去，也有到德国去的。他精通椭圆函数论，写了十四篇文章，并在 1925 年成为日本参议员，他在 1932 年当选为日本的院士。菊池和藤沢利喜太郎除了对日本高等教育有重要贡献外，也对中学和女子教育有贡献，编写了多本教科书。

三 廿世纪初叶的日本和中国数学

a 日本数学

基本上来讲，19 世纪里，中国主要是李善兰做了一些工作，翻译了几本书。

可是日本人也开始学习，但这不是最重要的阶段。最重要的阶段是二十世纪初叶。

二十世纪初叶最重要的日本数学家有林鹤一（Tsuruichi Hayashi，1873-1935）和高木贞治（Teiji Takagi，1875-1960）。林鹤一创办了东北帝国大学的数学系，并用自己的收入创办了 Tohoku 数学杂志。但日本近代数学的奠基人应该是高木贞治，这也是所有日本数学家都同意的事情。他在农村长大，父亲为会计师。他在 1886 年进中学。他用的教科书有由 Todhunter 写的 Algebra for Beginners 和由 Wilson 写的 Geometry。到了 1891 年，他进入京都的第三高中，三年后他到东京帝大读数学。根据高木的自述，他在大学的书本为 Durègi 写的椭圆函数和 Salmon 写的代数曲线，他不知道这些书籍与射影几何息息相关。当时菊池当教育部长，每周只能花几个小时授课（但这也是值得钦佩的），因此由藤沢主管，用德国式的方法来教育学生。Fujisawa 传授 Kronecker 以代数学为中心的思想。高木从 Serret 写的 Algebra Superieure 书中学习阿贝尔方程，并且学习 H. Weber 刚完成的两本关于代数学的名著。从现在的观点来看，我们名校的大学生都没有能力也没有想过去学这些主要的代数学方面的书籍。到目前很多出名的代数学家还有兴趣去看 Weber 的这两本书，可见高木在 19 世纪末期念的书籍是很先进的。

1898 年，高木离开日本到德国柏林师从 Frobenius，当时 Fuchs 和 Schwarz 还健在，学习的内容虽然和日本相差不大，但与名师相处，气氛确是不同。

在 1900 年高木访问 Göttingen，见到了数学大师 Klein 和 Hilbert。欧洲年青的数学家大多聚集在此，讨论自己的创作。高木自叹日本数学不如此地远甚，相距有半个世纪之多。然而一年半以后，他大有进步，能感觉自如矣。可见学术气氛对培养学者的重要性。他师从 Hilbert，学习代数数论，印象深刻，他研究 Lemniscate 函数的 Complex multiplication。他在 1903 年完成博士论文，由东京大学授予博士学位（在 1900 年时东京大学已经聘请他为副教授）。

1901 年高木回到东京，将 Hilbert 在 Göttingen 领导研究的方法带回东京大学，他认为研讨会（Colloquia）这种观念对于科研至为重要，坚持数学系必需有自己的图书馆和喝茶讨论学问的地方。在 1904 年他被升等为教授，教学和研究并重，他的著作亦包括不少教科书，对日本数学发展有很深入的影响。

1914 年第一次世界大战，日本科学界与西方隔绝，他不以为苦，认为短期的学术封闭对他反而有很大的帮助，可以静下心来深入考虑 class field 理论。在这期间他发现 Hilbert 理论不足之处，在 1920 年 Strassburg 世界数学大会中，他发表了新的理论。两年后他的论文得到 Siegel 的赏识，建议 Artin 去研读，Artin 因此推导了最一般的互反律，完成了近代 class field 理论的伟大杰作。

高木的学生弥永昌吉（Shokichi Iyanaga）在东京帝国大学 1931 年毕业。他到过法德两国，跟随过 Artin，在 1942 年成为东京大学教授。他的学生众多，影响至巨。我们要晓得，这批学者不是普通的学者，而是伟大的学者。日本在三十年代以后六十年代以前著名的学者有如下几位：

东京大学毕业的有：吉田耕作（Kosaku Yoshida，1931），中山传司（Tadashi Nakayama，1935），伊藤清（Kiyoshi Ito，1938），岩堀永吉（Nagayoshi Iwahori，1948），小平邦彦（Kunihiko Kodaira，1949），加藤敏夫（Tosio Kato，1951），佐藤斡夫（Mikio Sato，1952），志村五郎（Goro Shimura，1952），铃木道雄

（Michio Suzuki，1952），谷山丰（Yutaka Taniyama，1953），玉河恒夫（Tsuneo Tamagawa，1954），佐竹一郎（Ichiro Satake，1950），伊原康隆（Yasutaka Ihara）

京都大学毕业的有：冈洁（Kiyoshi Oka，1924），秋月康夫（Yasuo Akizuki，1926），中野重雄（Shigeo Nakano），户田芦原（Hiroshi Toda），山口直哉（Naoya Yamaguchi），沟涸茂（Sigeru Mizohata），荒木不二洋（Fujihiro Araki），广中平佑（Heisuke Hironaka 硕士，1953），永田雅宜（Masayoshi Nagata 博士，1950）

名古屋大学毕业的有：角谷静夫（Shizuo Kakutani，1941），仓西正武（Masatake Kuranishi，1948），东谷五郎（Goro Azumaya，1949），森田纪一（Ki-iti Morita，1950）

东北大学毕业的有：洼田忠彦（Tadahiko Kubota，1915），茂雄佐佐木（Shigeo Sasaki，1935）

大阪大学毕业的有：村上真悟（Shingo Murakami），横田洋松（Yozo Matsushima，1942）

我想再强调一下：这批数学家不是普通有成就的数学家，而是伟大的数学家。

东大和京都大学的学者继承了高木开始的传统，与西方学者一同创造了二十世纪中叶数学宏大的基础，这些学者大都可以说是数学史上的巨人。其中小平邦彦和广中平佑都是 Fields medal 的得奖者，他们都在美国有相当长的一段时间，广中平佑在哈佛大学得到博士，九零年代后回国。小平邦彦则在 1967 年回国，他在美国有四位博士生，而在日本则有十三位之多，著名的有 K. Ueno, E. Horikawa, I. Nakamura, F. Sakai, Y. Miyaoka, T. Fujita, T. Katsura 等，奠定了日本代数几何的发展。

M. Sato 的学生有 T. Kawai, T. Miwa, M. Jimbo 和 M. Kashiwara，都是代数分析和可积系统的大师。Nagata 的学生有 S. Mori, S. Mukai, M. Maruyama。其中 Mori 更得到费尔兹奖。

b 中国数学

李善兰（1811-1882）和伟烈亚力翻译 Loomis 的微积分以后，数学发展不如日本，京师同文馆（1861 年创办）和福州船政学堂（1866 年创办）课程表都有微积分，但影响不大。

严复（1854-1921）毕业于福州船政学堂后到朴茨茅斯和格林威治海军专门学校读数学和工程，却未以数学名家。容闳（1828-1912）在 1871 年带领幼童赴美留学，以工程为主，回国后亦未能在数学和科技上发展所长。

甲午战争后，中国派遣大量留学生到日本留学，在 1901 年张之洞和刘坤一上书光绪皇帝：

"……切托日本文部参谋部陆军省代我筹计，酌批大中小学各种速成教法，以应急需。"

在 1906 年留日学生已达到八千人，同时又聘请大量日本教师到中国教学。冯祖荀大概是最早到日本念数学的留学生，他在 1904 年就读于京都帝国大学，他回国后，在 1913 年创办北京大学数学系。

在 1902 年周达到日本考察日本数学，访问日本数学家上野清和长泽亀之助，发表了"调查日本算学记"，记录了日本官校三年制理科大学的数学课程：

第一年:微分、积分、立体及平面解析几何，初筹算学、星学及最小二乘法、理论物理学初步，理论学演习、算学演习。

第二年：一般函数论及代数学、力学、算学演习、物理学实验。

第三年：一般函数论及椭圆函数论、高等几何学、代数学、高等微分方程论、高等解析杂论、力学、变分法、算学研究。

这些课程，除了没有包括二十世纪才出现的拓扑学外，其内容与当今名校的课程不遑多让，我想清华大学数学系的课程内容，基本上也差不了多少。中国当时大学还在萌芽阶段，更谈不上这样有深度的内容。

周达又从上野清交流中得知华蘅芳翻译代数术时不应删除习题。习题其实是所有课本中最重要的一部分，而当时他们翻译的时候以为习题不重要，删除了习题。周达的三子周炜良以后成为中国廿世纪最伟大的代数几何学家。

现在看来，全面学习日本不见得是当年洋务运动的一个明智选择，日本在十九世纪末，二十世纪之交期间的科学虽然大有进步，但与欧洲还有一大段距离。中国为了节省用费，舍远求近，固可理解，然而取法乎其中，鲜有得乎其上者。

紧接着中国开始派学生到美国，其中有胡敦复（1886-1978）和郑之蕃（1887-1963），其中郑之蕃是陈省身先生的岳父，前者在哈佛念书，后者在 Cornell 大学再到哈佛访问一年，但二人都没有拿到博士学位。他们两人先后（1911 和 1920 年）在清华大学任教，1927 年清华大学成立数学系时，郑之蕃任系主任。

在哈佛大学读书的学生亦有秦汾，曾任北京大学教授，1935 年创办中国数学会之发起人中有他们三人，胡敦复曾主持派送三批留美学生，共 180 人。

当时还有其他几个毕业于哈佛大学的学生，哈佛大学影响了中国早期的前沿数学，基本上培养了中国主要的五六个学者、教授。几位学者中，中国数学家真正开始拿博士的要涉及"庚子赔款"一事。

1909 年美国退回庚子赔款，成立中国教育文化基金，列强跟进后，中国留学欧美才开始有严谨的计划。严格的选拔使得留学生素质提高。哈佛大学仍然是当时中国留学生的主要留学对象，胡明复（1891-1927）是哈佛毕业的中国第一个数学博士，从事积分方程研究，跟随 Osgood 和 Bôcher，第二位在哈佛读书的中国数学博士是姜立夫（1890-1978），他跟随 Coolidge，念的是几何学。

俞大维（1897-1993），其后在政界声名远播，做到台湾的行政院长，也在哈佛哲学系跟随 Sheffer 和 Lewis 读数理逻辑，在 1922 年得到哲学系的博士学位。刘晋年（1904-1968）跟随 Birkhoff，在 1929 年得到博士学位；江泽涵（1902-1994）跟随 Morse 学习拓扑学，在 1930 年得到博士学位，他们以后回到国内影响很大。申又枨（1901-1978）跟随 Walsh 学习分析，在 1934 年得到博士学位。

芝加哥大学亦是中国留美学生的一个重要地点，其中杨武之（1896-1973）师从 Dickson 读数论，在 1926 年得到博士。孙光远跟随 Ernest Lane 读射影微分几何，在 1928 年获得博士。胡坤升跟随 Bliss 学分析，在 1932 年获得博士。此

外在芝加哥获得博士学位的还有曾远荣和黄汝琪，先后在 1933 和 1937 年得到博士学位。

除了哈佛和芝加哥两所大学外，中国留学生在美国获数学博士学位的有：

在二十年代有：孙荣（1921，Syracuse）、曾昭安（1925，Columbia）

三十年代则有：胡金昌（1932，加州大学）、刘叔廷（1930，密西根）、张鸿基（1933，密西根）、袁丕济（1933，密西根）、周西屏（1933，密西根）、沈青来（1935，密西根）

留法的博士有刘俊贤（1930）在里昂大学研究复函数、范会国（1930）在巴黎大学研究函数论、赵进义（1927）在里昂大学研究函数论。

留法诸人中最具影响力的是熊庆来，他 1926 年到清华任教，1928 年做系主任，在 1932 年到法国留学，在 1933 年获得法国国家理科博士学位后，在 1934 年回国继续任清华系主任。他著名的学生有杨乐和张广厚，奠定了中国复变函数的基础。

德法两国当时的数学领导全世界，Courant 在 Göttingen 大学带领了不少中国数学家，例如魏时珍（1925）、朱公谨（1927）、蒋硕民（1934），论文都在微分方程这个领域。

曾炯之（1898-1940）在哥廷根大学师事 Noether，在 1934 年得到博士，他的论文（曾氏定理）在数学上有重要贡献，程毓淮（1910-1995）亦在哥廷根得到博士，研究分析学。1935 年夏，吴大任到德国汉堡，与陈省身第三次同学，在布拉施克教授指导下做研究，1937 年回国。

留学日本的有陈建功（1882-1971）在东北大学师从藤原松三郎研究三角级数，在 1929 年获得博士。苏步青（1902-2003）在东北大学师从洼田忠彦学习射影微分几何，1931 年获得博士，回国后陈建功和苏步青先后任浙江大学数学系主任。我曾有一阵子很迷惑，为什么当时中国数学家到日本要到仙台而不到东京大学去学，因为很明显东京大学的学问是比仙台好的，我的一个朋友跟我讲是因为当时仙台比较开放，愿意接受外地学生，而东京大学则不是很容易进去。苏步青当时在复旦在浙江大学带领了中国一批主要的人才，其著名的学生有熊全治、谷超豪、胡和生。留日的还有李国平、杨永芳、余潜修、李文清等人。

总的来说，中国第一批得到博士学位的留学生大部分都回国服务，起了奠基性的作用。在代数方面有曾炯之，在数论方向有杨武之，在分析方面有熊庆来、陈建功、胡明复、朱公谨，在几何方面有姜立夫、孙光远、苏步青，在拓扑学方面有江泽涵。

江泽涵成为北京大学系主任，姜立夫在 1920 年创办南开大学数学系，孙光远成为中央大学系主任，陈建功成为浙江大学系主任，曾昭安成为武汉大学系主任。

通过他们的关系，中国还邀请到 Hadamard（对华罗庚先生影响很大）、Wiener、Blaschke、Sperner、G.D.Birkhoff、Osgood 等大数学家访华，对中国数学发展有极大影响力。在此以前，法国数学家 Painlevé 和英国数学家罗素在 1920 年和 1921 年间访问中国，但影响不如以上诸人，因为前面几位直接影响到华罗庚先生、陈省身先生以后的发展。

紧跟着的下一代数学家就有陈省身、华罗庚、周炜良等一代大师，他们的兴起意味着中国数学开始进入世界数学的舞台。许宝騄在 1935 年毕业于清华大学，成为中国统计学的创始人，他的工作在世界统计学界占有一席地位。在西南联大时，他们也培养了一批优秀的数学家，其中包括王宪忠、万哲先、严志达、钟开莱等人。冯康则在中央大学毕业，成为有限元计算法的创始人之一。

稍后浙江大学则有谷超豪、杨忠道、夏道行、胡和生、王元、石钟慈等。在中央研究院时，培养的杰出学生还有吴文俊等人。其中陈省身、华罗庚、许宝騄等都是清华的学生，也是我尊重的中国学者。陈省身在海外的学生有廖山涛、郑绍远等。华罗庚则在解放初年回国后，带领陆启铿、陈景润等诸多杰出学者，成为新中国数学的奠基者。

四 结语

与日本比较，中国近代数学的奠基可以说是缓慢而迟滞的，微积分的引进早于日本，而日本反而超前，我认为与日本政府在 1868 年明治维新公开要求百姓向西方全面学习有一定的关系。中国人在当时直到现在都不能忘怀“中学为体，西学为用”的信念，因此在追求真理的态度上始终不能全面以赴。我不否认中国数学有它的优点，可是我们在追求真理的时候不能够有任何的挂虑，应当全面以赴——我觉得中国大部分学者不能够全面以赴。

菊池等在除了学习数学以外，也将英国的绅士（gentleman）精神带回本国学术界，形成了良好的学者风度。我们的学者风度是不能够相比拟的，为了与数学完全无关的个人恩怨可以大打出手，不能够尊重对方的学问。高木贞治师从德国大师，成功地将 Göttingen 的数学研究和研究的方法传到东京大学，回国十五年后，他本人的研究亦臻世界一流。他在第一次世界大战完全封闭的情况下，基本上没有其他学者跟他讨论，依然保持对数学的热情并造就了世界一流的学问，非当时中国诸公可以比拟。事实上，中国留学生在一九三五年以前的论文能够传世的大概只有曾炯之的曾氏定理。不幸的是曾炯之回国后未受到重视，很早就去世了。

从菊池开始，留学生回日本国后得到政府重用，从基础数学做起，无论对中学对大学的教育都极为尽力。高木以一代大师之尊，竟然著作中学教科书十四本之多，以后伟大的数学家佐竹一郎也写了很多中学书，可见他们对中学教育的重视。我这几年来提倡高中生的竞赛，有很多数学家不屑一顾，认为我怎么会花时间去搞中学教育，我想这是一个错误的观点。日本数学到四十年代已经有多样开创性工作，与欧美诸国不遑多让了。有一点值得中国注意的：基本上所有日本的名学者在做副教授以前都到欧美访问一段时间，直接接触学问的最前沿。我接触过的日本数学大师有伊藤清，岩泽健吉，小平邦彦，加藤敏夫，志村五郎，佐竹一郎，广中平佑等，都是彬彬君子，谈吐言行都以学问为主题，弥足敬佩。

反观中国，早期学习西方，以应用科技为主，可缺乏对数学的热情，一直到一九二零年代，中国留学生还没有认识到当代最先进的数学。而在十九世纪来华的传教士，对数学认识不深。中国学者也没有寻根究底，始终没有接触到学问的

前沿。比如中国的很多翻译，像微积分，一方面翻译上有很多错误，一方面也没有翻译习题。可是日本学者在翻译以后还去找荷兰文和英文的原文,来比较，来考虑。中国学者在教育年轻学者方面也不如日本学者。

中国留学生在甲午战争后以留日为主，在庚子赔款早期则以美国为主。在二十世纪早期日美数学远不如德法，而中国留学生却以日美为主，可见当时留学政策未有把握到求学的最佳方向，幸而这些早期留学生学成后都回国服务，到四十年代中国数学已经奠基成功。

值得注意的是日本和美国数学的迅速兴起和他们的学习方法有密切的关系。美国数学基本上从 1920 年开始起步，这得益于大量引进人才，从而发展出了好的数学。美国大学一方面接受英国式的绅士教育，一方面又接受德国式研究大学的精神，在以研究为高尚目标的环境下，学者对学问投入浓厚的兴趣。

举例来说，中国 5、6 个留学生在哈佛留学的同时，哈佛的学生有 Whitney 和 Morse 研习拓扑，Morrey 和 Doob 研究方程学和概率论，他们都成为一代大师，但他们的中国同学回国后在数学上的造诣不逮他们远甚。这是什么原因呢？我觉得是那些中国学生对数学的兴趣不够大。

解放后在华罗庚教授带领下，中国数学在某些方向已开始进入国际水平。可是文化革命后则元气大伤。近三十年来在本国产生的数学研究难与西方相比，而留学生中杰出者远不如陈华周诸大师，又不愿全面回国。本国培养的博士生，素质好的有相当大部分放洋去国，造成今日数学界的困境。

十多年来，中国的名校容许学术抄袭、做假，甚至由某些校长或院士带领，学风荡然无存，莘莘学子，何由培养对学问的兴趣？很多留学生和院士自以为学问通神，斤斤计较个人之所得，求财问舍，考其实，则是对数学缺乏浓厚兴趣，与数学前沿相去甚远。由于志趣不同和权力斗争的原故，有学问的年青学者往往受到这些人的凌辱，或忍气吞声的在自己小范围里做学问，或者干脆放弃学术而从商。

很多人骂我尖锐，但是如果中国想在 5 年内 10 年内成为人才大国，而这种学风不改，是完全不可能的。所以中国数学要赶上世界水平，至少在清华大学，要保持学风的纯正。

然而中央已经决定对培养人才投入更大的经费，希望在公元 2020 年前成为人才大国，在经费充裕和年青一代得到重用的背景下，我深信中国学术环境会有大改变，很快就会迎头赶上最先进的国家。但是百年树人，我们的领导应该一方面大力投入，一方面也要有耐心，要尊重学问。

作为一个中国数学家，看着我们有些有能力有才华的学者为了蝇头小利，竞争得头破血流，不求上进，使人感伤。很多有权位的学者，更以为自己代表泱泱大国，可以傲视一切，看不起第三世界的学者。然而“学如逆水行舟，不进则退”，学问的评判自有其客观性，我们面对有学问的专家时，自然知道自己的长处和缺点。

汉唐时代，中国不单是经济军事大国，也是文化大国，亚洲国家甚至称中国为父母之国。经过六十年的建设，中国终于成为经济大国，在世界强国环伺下，举足轻重。然而在数学研究上，我们远远比不上四十和六十年代陈华领导的光境。

今日我们在清华园重新燃烧起国人对数学的热情，让我们忘记了名利的追求，忘记了人与人间的纠纷，校与校间的竞争，国与国间的竞争。让我们建立一个为学问而学问，一个热烈追求真和美的数学中心。也希望在中央和学校的支持下，在我们国内外朋友的帮助下，让这个重新燃起的火光永恒不熄，也让我们一起在数学史上留下值得纪念的痕迹。

五 丘先生答学生问

Q:请问数学和个人创造力培养的关系。

A:数学和创造力，其实跟文学创造力、物理学创造力都差不多。我们无非对大自然的真和美有深入的了解。有了深入的了解，有热情以后，才能够产生这种创造力，才能够对数学有很好奇的了解。所以我本人是对研究，和物理学界的朋友有很深切的来往，和工程学界的朋友也有很多来往。希望从他们不同学科里边得到一些感想，让我们能够有一定的创造力。所以我鼓励诸位能够将自己的思想开放，不要讲，今天我学的数学就是学分析，今天我学的数学是清华的数学，不是北大的数学。这都是很狭隘，同时很可怜的想法。希望我们自己能够心胸广大，能够创造，尽力地创造。

Q:很多同学学数学的兴趣更多地是停留在学好了数学得到的鼓励和奖赏，而并不是学数学本身让自己的兴趣倍增。您怎么看待这个问题？

A:学数学在中学大学，我们都很期望我们的老师给我们打很高的分数，就觉得很高兴。我觉得，考试考好是一个重要的标志，表示至少对基本的东西有了解。真正好的学问，要靠自己摸索，要晓得什么叫做好。这是要经过研究院导师的指导引路，去深入地研究才晓得的。第二个，我们看文学，假如你没有看过很多其他的大著作，你不会晓得为什么《红楼梦》和《三国演义》是好的。我们总要有不同的比较。学问做得好不好，做学问的人知道，心里有数。往往受到某个院士或者某个政府的奖赏，我常常觉得这是不是我要的？——这不是我要的。我觉得，我做成了一个学问，我了解了这个学问的内容是什么，我心里了解，我自己很清楚。如果因为我拿到了杰出青年或者拿到了院士，我就觉得完成了我的使命，请同学们自己想想，名头和荣誉，比得上你自己心里面晓得你学问的深度吗？

Q:您觉得学术腐败是普遍现象还是个别现象？这种现象在清华大学存在吗？（听众笑）作为数学中心的主任，如何抵制或者预防这类现象？

A:我想，清华里是否存在这种现象，学校的党委书记应该比较清楚（听众笑），具体的要由他来答复。至于全中国有这个普遍的作风，我想不用我讲大家也知道。（听众大笑）至于能否停止这种作风，其实很简单。假如一个做学问的人，一个年轻人，像你们这样的年纪，全部时间都在想问题，想做研究，想将一个问题解决，你就没有时间去搞主观的东西，也没有时间去想买房子，去拿高的薪水，这些种种问题都应该不存在。有些人他抄了这个文章，得到很高的奖励。你觉得重不重要？你会觉得不重要。因为这样子得到的荣誉并不是你想要的，因为你是抄

的，自己心里很清楚。就好像我们下棋，下棋的时候旁边有人教你走一步，你赢了，我不是很高兴。因为我始终期望，我下的棋，赢了才算数。你抄袭的比这个更糟糕。所以我想基本上就是讲，你一个做研究的人员，好奇是你最大的问题。好奇浓厚到一定的地步以后，国家的奖赏也不重要了，其它同行的批评也不重要，也就不会产生这种不重要的、不应当存在的问题。

Q:您做科研这么多年，有没有想过转方向，比如去做物理，生命科学等等。（听众笑）我觉得一个数学家涉足一些自然科学是很有优势的。（听众笑）

A:转方向是一个很重要的问题。我在数学上转了很多不同的方向（听众笑），每次转的方向基本都取得了成果。可是你想一想，我要是转到物理去，虽然跟物理学家有很多来往，但要成为一个物理学家却不大可能。因为我从小的训练，在物理上、实验上的洞察力不够，所以没有办法成为一个职业性的物理学家。我想，你要考虑要不要转行，年轻的时候可以考虑。但是到了我这个年纪就不大可能了。（听众大笑）不过我跟物理学家、生物学家、工程学家都有很深入的往来，假如我能为这些学科做一点贡献的话，我是很愿意的。

Q:您既是哈佛大学数学系的主任，也是清华大学数学科学中心的主任。您一定接触了很多两校的研究生。我想知道您对哈佛大学研究生的学习习惯、科研态度及科研方法方面的体会，以及在这些方面两校研究生的对比。能不能给我们清华大学研究生，特别是刚刚步入科研门槛的学生们一些建议？

A:我对哈佛大学的研究生了解得比清华大学的多，因为毕竟我在哈佛大学 20 多年了，我也教了不少学生。哈佛大学的数学系很小，我们大概每年收 10 到 12 个研究生。我们是挑了全世界最好的学生到哈佛念书。所以来的时候至少我们期望他们是世界第一流学生的水平。有时候挑选学生时运气不好，挑选到不好的学生。我们尽量在第一个学期能够了解他的程度。一般来讲，考过我们的 qualify 考试以后，我们大概心里有数他有多好。他们一般来讲都很用功，我们学校的研究生念书都念到十一二点，我自己也常在 office 里看到他们很用功地在念书。一个重要的事实是他们的讨论，学生和学生的讨论是很热烈的。他们上课、讨论，自己有他们的讨论班，跟老师的来往也很密切。另一个很重要的事实是他们学风很好，他们从早到晚都在讨论学术的问题，有时候也去 MIT 等学校听课。在学习的过程里，用功跟交流（是很重要的）。清华大学的学生我接触不多，像曹怀东已经是三十年前的事了。最近有几个学生到我们学校去，刚开始的时候有一定困难，现在慢慢习惯了我们学校里的学风，也很不错了。我觉得清华大学的学生很用功，能够纠正自己就尽量纠正自己，向好的方向学习。但是基础方面未必比得上欧洲来的或者美国培养的学生的基础。不过他们能够很快追上去，也是让我很高兴的事。

Q:搞科研是十分艰苦的一项工作，尤其是数学研究。有不少有天赋的、对数学有感觉的人都因为条件的艰苦而转行。请问您对这种人才流失持什么样的看法？

A:我想这是一个很不幸的事情。刚才在开幕典礼的时候，你也看到我有几个朋友是在商业界做得很出色的。我跟他们谈过，他们也和我说，他们在商业界成功的过程里边的艰苦，并不见得比做学问少，除非你是依靠偷鸡摸狗成功的。一个真真正正有成就的商人花的功夫和冒险的程度，绝不比做学问的低。很不幸的是很多人以为可以投机取巧。坦白讲，一个好的成功的人，无论做生意也好，做学问也好，不经过艰苦的奋斗就获得成功是不太可能的。同时正是因为经历了这种艰苦的奋斗，你才觉得成功是值得欣赏，也值得怀念的。因为很多成功地做生意的人，资本家也好，成功地做学问的人也好，往往问他最快乐的时候是什么时候，他并不是讲赚了一大笔钱，也不是将一个定理刚好证完的时候。他可能跟你讲，他（经历）的整个过程让他觉得很有意思。就像我们下棋，假如你下一盘棋花了几个钟头，经过艰苦的奋斗，终于打败了对方，你觉得很有意思。假如对方是很差的，一下子就被打败，你觉得很无趣。（听众笑）这是同样的道理。

Q:很多人都说，自己在研究的过程中放弃，是因为条件太艰苦了。但是我觉得不是这样，而是很多人在研究过程中越来越没有自信，而且并没有人告诉他应该怎么做，而且也没有人来肯定他说你应该走下去。尤其是青年的学生，他们之所以要离开，是因为他们并不确定自己是否可以做这个工作，是否能胜任一个科学家的职责。希望丘老师能够给我们这样对自己不那么确定的学生一点建议。

A:在一个好的学校，和名师以及同学的交往很重要。互相鼓励是很重要的事情。就我自己来讲，从大学以后，我从来没有想过有什么事情做不成功的。我有个朋友，他有一天跑来跟我聊，他很高兴，说他这二十多年来想做的都做得成功。我想，主要的问题是你对自己多自信的问题。我们都想证明一些最伟大的定理，但并不见得我们都能够成功。我所谓的成功是讲，我们在做研究的路上有一定收获。一个好的研究的数学家，一年写几篇文章都没有什么大的问题。最怕就是你自以为自己不行。这些花来想自己为什么不行的时间，可以用来做出一篇好文章。（听众笑）我们自己要想清楚，尤其你们年轻的时候，不懂就好好地念书，念懂以后就花时间去想问题，我想很快就会成功，不要想一些多余的废话（听众笑，掌声大起）。

革命、变迁与偏微分方程

——林芳华教授访谈录

Y.K. Leong

编者按: 本文系林芳华先生于2007年12月10日在新加坡国立大学数学中心(IMS)接受 *Imprints* 杂志社记者 Y.K. Leong 的访谈实录，由英文译出。

林芳华（Fang-Hua Lin）是一位在世界范围内享有声誉的数学家，他以有关古典分析及其在非线性偏微分方程中应用的工作闻名于世。

林芳华 1981 年毕业于浙江大学数学系，1985 年在明尼苏达大学获数学博士学位。1985-1988 年在纽约大学库朗数学研究所担任讲师，1988 年任芝加哥大学正教授。1989 年他回到纽约大学，并于 2002 年被授予 Silver 教授一职。其间，秉承库朗研究所的传统，他一直从事于利用硬分析工具研究非线性偏微分方程的工作，并取得了杰出的成果。

林先生的学术成果包括超过 160 篇论文以及三本讲义。甚至在博士毕业之前，他就因发表了数量众多的论文而知名。在他的许多贡献中，尤以关于小参数的 Ginzburg-Landau 方程的奠基性工作和有关调和映射及液晶的深刻结果而为人熟知。

他也因此获得了众多的荣誉和奖项，其中包括 Alfred P. Sloan 研究奖（Alfred P. Sloan Research Fellowship），美国国家科学基金会杰出青年科学家总统奖（Presidential Young Investigator Award），美国数学会 Bocher 奖及陈省身奖。他是美国艺术与科学院院士，同时作为一名杰出的演讲者，曾多次被包括美国、中国、日本在内的重要学术会议以及全球各知名大学邀请。除了指导博士及博士后以外，他还是许多一流数学刊物的编委，如 *Communications in Pure and Applied Mathematics, Analyse non-linearie, IHP, SIAM Journal of Mathematical Analysis and Journal of Differential Geometry* 等等。

成为其领域领袖级的科学家后，林芳华先生依旧对他的故乡——中国怀有深厚的感情与责任感。在过去的二十余年中，他一直致力于促进国际间数学合作以及中国数学界发展的工作。此外，他还与新加坡国立大学数学系和物理系联系密切，于 2007 年 11 月 1 日至 12 月 31 日担任IMS（新加坡国立大学数学中心）中 Bose-Einstein凝聚以及超导超流中的量子漩涡项目组委员会联席主席。最近，他又担任了IMS中“计算材料仿真与设计的数学理论和数值方法”课题组（2009.7.1-2009.8.31）和该项目暑期学校（2009.6.17-2009.7.19[1]）组委会联席主席。

2007 年 12 月 10 日，林芳华先生在 IMS 接受了 *Imprints* 杂志记者 Y.K. Leong 的采访。内容包括林先生对上世纪 70 年代文化大革命中自己求学生涯的回顾，

[1] 原文作 17 July – 19 June 2009，疑有误。

在十年动乱的刺痛里成长为恢复高考后首届大学生的心路历程，以及 最早期公派留学生赴美深造的经历。在采访中，他研究的激情以及对数学和其他科学的新进展的关注溢于言表。以下根据当时访谈记录整理而成。

Imprints（以下简称 I）：您从浙江大学毕业后前往明尼苏达大学攻读博士学位，请问您为什么选择了那里？当时的研究方向是什么？

林芳华（以下简称 L）：答案非常简单，不是我选择了明尼苏达，而是我在浙大的老师替我做了选择。这个选择与浙大数学系的历史很有关联。浙江大学数学系在中国数学发展史上占有举足轻重的地位，曾培养了一大批优秀的中国数学家。当我 1978 年 2 月进入浙大时，系里只有屈指可数的几位教授。但是，教授们决定从 77，78 级学生中选出最优秀的 10 名送往美国和欧洲念博士，等到他们学成后便可回浙大工作。这是一个战略性的计划，但和当时国内的很多高校一样，这个计划并没能完全按原定方案执行。为什么当时浙大会有这么个想法呢？这得从浙大数学系的历史谈起。早年浙大数学系的陈建功和苏步青教授，都是日本东北大学 30 年代毕业的博士。当时，中国可没有多少博士，浙大数学系有两位，便已是实力雄厚。教授们当时就想啊，要是有 10 个博士，我们系就更强了。就这样，我就成为了那 10 人之一，被送到美国学习偏微分方程。去明尼苏达也是教授们决定的。当时去明尼苏达访问的正是搞偏微的董光昌教授，系主任是郭竹瑞教授。所以其实很难说我当时是在做偏微分方程，因为到了美国之后，基本上是想学什么就学什么了。最后我博士论文也不是偏微方面的，主要是一个几何变分问题。

I：那是在七十年代末的事？

L：我 78 年进浙大，81 年到明尼苏达。本科只念了三年，最后半年主要还花在学英语上了。

I：当时是由国家提供奖学金吗？

L：我在明尼苏达大学谋了一个助教的职位，所以当时是半工半读。生活虽然充满了挑战，但是也很有趣。

I：那是在文化大革命之后？

L：我是文革后大学恢复招生的第一届（77 级），但直到 78 年春天才算是真正进了大学的门。

I：那文革对您大学前的学习生活有什么影响吗？

L：当然，我从小学到高中就没有真正学习过。事实上，回想起来，我还挺怀念那段无拘无束的生活。没有作业也没有考试。77 年的高考算是我人生中第一次大考吧。那时的小学更像是一个政治训练营。

I：那您中学时是怎样学习数学的呢？

L：我小学是从三年级开始读起的，因为前两年正是文化大革命刚爆发最激烈的两年。当时除了背《毛主席语录》外也不学什么东西。直到五年级，我们才开始学解方程。当时很多同学觉得非常之难，但我却学得很轻松。我开始对数学产生了兴趣，因为除了机械地套公式以外，好像还有些别的什么藏在后头。我的小学老师认为我很有些天赋。我初中念了一年还是两年（六年级和七年级），自学了不少数学和物理的内容。我有幸遇上了一位非常好的老师，他给了我不少文革前出版的读物和一些专门的数学书。我把它们基本都读了一遍，发现也不是很难弄明白。但当时在高中里我没花多少力气去学习，因为文革一直闹着，不知何时是个尽头。你看不见你的未来，所以也不怎么努力——最后成为一个农民。我很喜欢当时自由的时光，从来没有遵照什么规则，或是系统地学习什么东西。

I：或许这样对创造力有帮助？

L：是的，某种意义上是这样。因为我总喜欢自己想问题，自己解决问题，而不是在书里找解答。当然，这样一来利弊兼有。

I：除了在芝加哥大学不长的时日，您基本上都在纽约大学工作，是什么如此吸引您呢？

L：有很多原因。首先，纽约这座城市很独特，生活在那里感觉就像在家一样，每个人都这么觉得。那儿生活很丰富：音乐、画廊、博物馆、电影院、餐馆，妙极了。我是一个懒人，总想尽可能简单地办事——吃东西方便，上下班不远，总之一切都触手可及就好。另外也是因为库朗所是世界上最好的研究所之一。在那儿有很多同事，有着不同的文化背景，谈吐文雅，让人感觉很温暖。总之在那儿我充满了友谊的体验。

I：您在文化上感受过冲击，或是不适应吗？

L：这我倒没觉得。我一直都是挺开放的一个人。当我还在明尼苏达念研究生的时候，主要都是和其他国家的学生打交道，包括一对香港来的夫妇。当然，文化是一个很深层次的东西。岁月流转，我发现自己身上中国印记很重，毕竟本性难移嘛。但在库朗所你丝毫感觉不到自己是一个外国人：你做了好的工作，人们就尊敬你。当你完成一项课题时，系里的同行都由衷地感到高兴并向你祝贺。总之那儿有着非常友好的氛围，不像其他的一些地方，在库朗所你完全不必费心思向同事证明自己很厉害。我也喜欢其他的一些地方，比如芝加哥。我非常喜欢芝加哥大学。那是一个典型的英式社交圈——人们很有绅士风度，待人如沐春风。那种感觉很棒。但芝加哥的气候不太好，我在那里的时候尤甚。我还是很喜欢那里，这也成为后来我和家人回到那里定居的原因。此外，我还在 Berkeley 做了半年的博士后，在 Princeton 度过了一个休假年，在高等研究所做了半年的博士后。

I：从那以后您回到过中国吗？

L：当然，回了很多次。我第一次回国是在 1989 年春夏之交，在美国生活

了 8 年之后第一次，也是以后多次回国的开端和基础。周围的一切都变了，变得很不错。从那以后，我实际上每年都会回国，呆上一两个月；近几年甚至更长。我一般夏天回国，给研究生上上课，还有就是找一找博士后和优秀的学生。最初，我们这些在美国当上教授的人没有想回国的，因为在美国生活很不错。很难说这么做是对还是不对，但我想，总体上来说，我对我们会以某种方式报效祖国这一点还是相当乐观的。尤其是在过去的十年中，中国发生了翻天覆地的变化，如果我再年轻 20 岁，说不定就已经回国了。毕竟在我毕业的 1985 年时，大环境很不一样。

I：我们知道，您研究的领域涉及纯数学和应用数学，您一开始就对数学在物理上的应用感兴趣吗？

L：高中以来我一直很喜欢物理，高考的时候，也是物理考得最好。但我从来没有对物理产生过像对数学一样严肃的兴趣，我总把自己当成一个数学家。我感兴趣的数学问题可能与自然现象和科学有关，也可能无关。但当我在库朗所呆了一些年头后，我的观点发生了变化。年轻的时候，只要是别人告诉的或者自己发现的问题，我就会跳将上去想要解决它。但年纪渐长，就愈发意识到，这世上的问题实在是太多了，无穷无尽，而一个人的精力实在有限。你不可能解决所有的问题，因此，研究必须变得富有选择性。年龄越大，观点不断改变，你会花更多的时间来选择问题。对我来说，问题的种类很重要。无论何时，总是只有极少数的问题才是真正有趣的。当你翻看 50 年前别人的文章时，你不由感慨，“怎么这些文章研究的对象都这么怪异？”50 年后的人们看到我们今天的文章时，肯定也会有同样的感觉。这实际上告诉我们，今天我们认为有兴趣的问题在未来未必有价值。所以一个人应该选择那种不只是数学上有趣的，而且也与科学密切相关的问题来研究。科学在发展，并不只是想象力和创造力的舞台，而更多的是被现实的需求所驱动。

I：那您是怎样选择自己研究的问题的呢？是通过文献还是与别人交谈接触到这些问题的？

L：一个人会根据他的学养、背景以及兴趣还有和别人的交流来选择研究的对象——我花了相当多的时间来阅读 *Nature, Science* 等刊物上的非数学文章。知道什么东西相互关联是一件了不得的事情。当然对某些数学家来说，他也可以与世无争，完全醉心于自己感兴趣的问题。如你所知，科学正日新月异地发展，包罗万象，所以如果你不对整体的图景保持关注，便容易错过很多东西。

I：库朗所主要侧重于应用数学，是这样吗？

L：没错，我们的教员从事纯数学和应用数学研究的都有，可能应用的更强一点，但我们纯数学也相当不错。在芝加哥大学，我更多地被当做一名应用数学家，但到了库朗所，恐怕倒成了研究纯数学的了。

I：有人说模拟物理现象时所引入的偏微分方程都基于一些简化的，理想化

的假设，这种提法有根据吗？或者说这些方程真的能反映现实吗？

L：我想首先从哲学的角度来回答这个问题。绝对的真理或真实并不存在，或者对我们来说并不重要。即便它存在，我们理解自然现象时也只能通过自己的观察和感知。所以当我们谈论真理和真实时，我们说的实际上是一种近似。如果我们掌握了绝对的真理或真实，那我们对问题的理解已经非常透彻，从而这些问题也就变得不再有意义。我们用偏微分方程和其他数学工具来建立模型。模型之所以为模型，当然包括一些简化和合理的假设。但在不同的模型之间，总是可以分得清优劣的。那区别在哪儿呢？首先，我们喜欢简单的模型，因为我们对简单的事物有着更好的理解。如果模型和实际问题一样复杂，那这个模型有什么用呢？好的模型总是能抓住要处理的问题中最本质的因素。对模型的另一个基本要求是要它们足够真实。在你要求的真实程度与客观需求之间存在一个平衡。你说得不错，偏微分方程总是采用简单的模型，好处在于大多数时候我们总能理解这些模型，同时我们也明白更一般的情形。

I：您会认为建模与其说是一种科学，更应该算一门艺术吗？

L：二者兼有之。你不能丢掉问题里那些基本的内容，从这个角度来说，它是科学。但至于你怎么做，精巧、优美、天马行空等等，就到了艺术的层面，当然，它同时也与应用的技术、工具有关。

I：您建模有什么秘诀吗？

L：在建模方面，我其实并不擅长。我想就和做物理或是数学一样吧，潜意识里，人们总是使用一些最基本的原理。

I：那哪一种问题最好解决呢？比如说给定初值的演化问题（比如抛物型或双曲型）或是椭圆型方程的边值问题？

L：其实很难在不同种类的问题里做一个清晰的比较，然后下结论说某些相对容易，另外的比较难。叙述简洁的问题可能异常困难，而一个处理复杂方程组的问题也许相对简单。关键在于你想做什么：如果你只是想对问题有一个大概的了解，那么即便对象是非常复杂的系统，也可能比较轻松。但是一旦你想理解一个具体问题的非常细节化的，微妙的特质，可能就需要深入挖掘问题的本质，这个问题也就非常难解。我认为问题的困难程度主要取决于你想得到怎样的结论，而不是问题本身的具体形态（静态的或演化的）。

I：遇到的都是技术上的困难吗？

L：有的问题可能只是技术上需要技巧，其他的则是难以下手。如果是这种情况，你必须针对问题有着相当原创且深入的见解。

I：似乎有这么一种趋势，当解析的方法无法实现的时候，人们往往诉诸于数值方法。这已经成为应用数学的模式了吗？这种方法是否带来了新的突破呢？

L：某种程度上，我的回答是肯定的。历史上，数值方法只是辅助的工具，

只有当我们难以理解某些问题的时候，我们才去做数值计算，或者计算是为了验证一些东西。因此，数值计算是作为阐明种某想法的补充，以及用来检验其可行性的一种方法。但是随着科技的发展，尤其是在最近的 10 到 20 年里，情况有了很大改变。超级计算机模拟不仅仅是为了了解某些问题或者进行计算，求数值解，它已经成为了一门颇具雏形的学科。比如说，在早期，我们做了很多材料学的实验。然后根据物理上的直觉和理论，从实验中我们提出一些经验的模型。我们得到的方程里可能有些新的内容，于是我们就用各种实验数据来检验理论，改变和加入越来越多的参数。这是解决这类问题经典的方法。可现在看起来，在最初阶段似乎不必过多地纠缠理论，有人直接把各种参数输入计算机，同时进行数以百计的仿真实验。这样一来你得到大量的数据，而数据处理以及从中抽象出数学模型的工作也可以由计算机自发完成。采用计算机进行模拟已经成为一种必须。这两者并不必分得那么清楚。你可以先有一个绝妙的想法，然后用计算机检验，同样你也可以从数值模拟的实验中得到灵感。

I：这么说仿真也会激发新的观点？

L：没错。仿真在有助于我们理解问题的同时也会带来新的观点。计算机可以生成海量的数据，尔后，你需要理解这些数据是什么。你可以用统计的方法或是其他的方法，有了某个模型后又可以进一步验证，这个过程产生了许多新的数学分支。如今的许多研究方法很早以前就提出来了，只是在牛顿和莱布尼兹用微积分优雅、简洁地解决了理想条件下的问题后被人们淡忘了。

I：可牛顿并不是靠着模拟而发明了微积分。

L：数学在科学里处于特殊的地位。那些或多或少纯粹来源于想象和逻辑演绎的结果居然会和现实世界发生联系，这足够令人惊奇了。也许是因为想象本身便是现实世界一部分的缘故吧。

I：在您的研究成果中，有没有过什么让您直觉上感到不可思议？

L：不好说。有时候当你证明或是创造了一些东西的时候你觉得挺神奇，但经过若干年深入的思考和反刍，你意识到它是如此的自然。我觉得我做的很多东西其实是很自然的。在特定的阶段，会发生一些事情让人惊讶一阵子。比如说，在做一个看起来很复杂的问题时，人们往往做得很好。刚开始你会感到惊讶，但经过若干年仔细思考和琢磨后也会发现是这只是再自然不过的一件事了。

I：在关于偏微分方程的工作里，相比于技术上的细节，您是否更强调模型优美与否呢？

L：个人来说，我对解决问题的方法和出发点更感兴趣的。有时一些技术上的计算无法避免，你也得有处理这种困难的能力。技术上的问题是实实在在的问题，但你有时对处理问题的方法更感兴趣，因为他们更美也更有价值。

I：我相信不少物理学家认为美妙的理论一定是正确的，您怎么看？

L：一定程度上是这样。如果某样东西很简洁，充满美感，你会说："太妙了！"也许只需要最基本的数学就可以理解它。但是简明的事物也可能涉及非常深刻和复杂的数学。所以你无法预测。

I：2 维的 Ginzburg-Landau 方程是否已经被完全解决？

L：有很多关于 2 维或 3 维的 Ginzburg-Landau 方程的文献和专著。在某种意义上说，我们对这些方程和它们的解已有相当的了解。偏微分方程里看似有太多的方程要解，但好处是只有很少的几类才是非常基本且饶有趣味的。这些方程现在会，以后更会不断地出现。所以我不会说我们已经完全理解了 Ginzburg-Landau 方程，它取决于你提出怎样的问题，想要处理怎样的情况。比如说，人们关于 Laplace 方程的研究已经有两三百年的历史，我们实际上明白了它的方方面面，但说不定哪天又会有人告诉你最新的进展。Ginzburg-Landau 方程是模拟物理现象最为基本的方程之一，它是一个非线性的偏微分方程，而且我觉得它还会不断出现。甚至 2 维情形的有些问题我们还知之甚少，所以我觉得很难说它已被完全解决了。

I：Navier-Stokes 方程异常难解，是因为在经典力学固有的框架里难以表述新的概念吗？

L：Navier-Stokes 方程是我所知的最具魅力的偏微分方程之一。我个人也花了一定时间思考，但说不上多，因为鲜有进展。我们意识到在对方程的理解上存在很多困难，却不知道该如何克服。在很多其他的数学问题里，当你真正明白了困难的所在，就多少有些头绪，运气好的时候就搞定了。但 Navier-Stokes 方程很不一样，从不同的角度和观点来看这些障碍，也许你会对它有所理解，但却不知道该如何克服它。这究竟纯粹是因为技术上的不成熟，还是问题的表述不够本质呢？我不得而知。如果有一天有人告诉我说"Navier-Stokes 方程只是一个更庞大的、可解的物理系统的一部分，即便我们连这个特殊的情形也闹不明白"，我一点儿也不会感到惊奇。如果是这样，问题就回到了原始表述的层面上，也许从最基本的地方就缺了点什么。另一方面，从数学的观点上来看，Navier-Stokes 方程已经是自洽的了。换句话说，它是一个封闭的系统，你不需要任何额外的来自外界的信息。但是，有时外部的信息可能会带来观念上根本性的转变。

I：Navier-Stokes 方程解的存在性是不是已经部分地被解决了呢？

L：在所谓"弱条件"下解的存在性是清楚的，但我们想要的是一个经典意义上的解。人们也许会说，这对实际的应用并不重要，但它是一个很吸引人的问题，一个叙述简单的问题，而我们却不知道答案。它非常神秘。

I：那为什么物理学家们并不关心解的存在性呢？

L：对物理学家来说，物理系统的解一定存在，但他们说的未见得就是经典意义上的解。很难说我们是否该相信这一点，这也是困难的一部分。

I：Navier-Stokes 方程并不是量子力学的方程，而是一个经典力学的方程，是这样吗？

L：是的，有很多方法可以推导出这个方程。不过从数学的角度看，用哪种方法导出它无关紧要。

I：Navier-Stokes 方程对所有的流体都适用吗？

L：确实如此，虽然有可压缩的和不可压缩的，或是粘滞的和弹性的流体之分。在很多实际的物理问题中，可以导出类似的方程。

I：您说的是推广了的或修正后的 Navier-Stokes 方程？

L：Navier-Stokes 方程存在很多修正的或是相当复杂的表述形式。但相比于经典的 Navier-Stokes 方程来说，修正的方程不太引人注意，因为原始方程里的那些困难都被人为地避免了。这不是发展一门数学理论的方法。

I：您认为在未来 30 年里解出 Navier-Stokes 方程的可能性如何？

L：这很难预测。我个人不喜欢做预测，但我还是要说，这个问题不会在相对短的时间内被解决，研究会持续很长一段时间。迄今为止，几代最优秀的科学家都曾在这个问题上下功夫，但都没能成功。

I：似乎应用数学家较纯数学家而言，其研究方式更加群体化，更讲究合作。为什么是这样？

L：你说得不错，我也认为应用数学家比纯数学家更加群体化一些，这并不奇怪。同时你也看到越来越多的纯数学家一起合作来解决问题。这很大程度上取决于问题本身。传统意义上的数学家都是一个人研究，但当问题变得更加复杂，并且跨多学科交叉，自然就需要一批人一起来攻克同一个问题。在应用数学，即把数学应用到自然科学的范畴里，问题自然是跨学科的。所以这并不奇怪，就应该是这样。

I：那您对刚入学的对纯数学和应用数学都有兴趣的研究生有什么建议呢？

L：如果因为你想在交叉学科有所发展，于是就试图对各个领域都有一些浅显的理解，这肯定是不行的。这正如你想比所有人都懂得多。没有理由你会比其他领域的专家做得更好，事实上他们做的比你要好得多。即便是在做跨学科的研究，你也必须在一两件事上有专长，或者是看问题的眼光，或者是分解问题的能力等等。此外，你还得有一颗敞开的心，学习新知识并对它们产生兴趣。就算你研究理论数学，也不应该一个人蛮干。某些方面我可能更偏向应用，但我真正关心的是理论数学和自然科学会有什么进展。如果有了以上的态度和专业素养，同时还有随时拓广自己视野和知识的心胸，你一定会取得成功。从事不同学科研究的人对事物往往有着不同角度的理解。这其实是一件非常有意思同时也让人高兴的事情，理智上来说，也令人满意。而事实上，人们往往还是可以发现很多事情之间都是有着交集的。

I：您带学生吗？

L：目前我在带的有 4 个学生，2 个大概明年就会毕业。已经有 10 到 11 个学生从我这里毕业了，还有一些博士后也在跟我做。

I：您是否认为中国的学生更倾向于应用数学一些？

L：我并不这么想。中国学生可能既不侧重理论，也不侧重应用。中国的教育总体来说还是有一些缺陷的，因为学生过早的把精神集中在某些狭小的问题上，大部分时间内都是如此。你不时会看到非常优秀的学生也犯同样的毛病。越早这样，能力也就越受到限制。如果不拓展你的视野和知识范围，你就会失去许多机会。久而久之，当看到一个问题时，你会说“这不在我研究的范围之内”。平常上课的时候就应该广泛涉猎，而不是说上一门课就仅仅是为了把它用到某个地方。当然，在解决问题时，你应当用你用上你想得到的任何工具。

（基数 73 班 费腾 译）

****

数学名言

“真正”的数学，费马的以及欧拉的、高斯的、阿贝尔的和黎曼的数学，是几乎完全“无用”的。不可能根据其工作的有用性来肯定任何真正的职业数学家的一生。

——（英国数学家）G·H·哈代

任何一门数学分支，不管它如何抽象，总有一天会在现实世界中找到应用。

——（俄国数学家）罗巴切夫斯基

数学中不仅存在大量问题，而且真正重要的问题没有不同其他问题密切相关的，虽然它们乍一看来似乎相距甚远。当一个数学分支除了专家以外不能引起任何人的兴趣时，它就几乎濒于死亡，至少是危险地接近于瘫痪，而要想把它们从这种状况中解救出来的唯一办法，那就是把它们重新浸泡到科学的生命之源泉中去。

——（法国数学家）韦伊

一个延拓定理*

陈志杰

设E是一个Banach空间，$P \subset E$为一个闭凸集，且$P \cap -P = \{0\}$。设$f : -P \cup P \to -P \cup P$为一连续的奇映射，且$f(P) \subset P$，那么是否存在一个连续函数$F : E \to -P \cup P$使得$F|_{-P\cup P} = f$且$F$是奇的？

令$A = \{x \in E : \rho(x, P) \le \rho(x, -P)\}$（$\rho$为$E$中由范数诱导的距离），则$A$为闭集，$P \subset A$，且$A \cup -A = E$，$A \cap -A = \partial A = \{x \in E : \rho(x, P) = \rho(x, -P)\}$。

由Dugundji延拓定理[1]，存在$T : A \to E$，T连续，且$T|_P = f$，$T(A) \subset \mathrm{conv}T(P) \subset P$。定义$\tilde{T} : A \to E$

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} \frac{\rho(x,-P)-\rho(x,P)}{\rho(x,-P)+\rho(x,P)} T(x), & x \in A \setminus \{0\}, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

由于$x \in A \setminus \{0\}$时，$\rho(x, -P) + \rho(x, P) > 0$，$\rho(x, -P) - \rho(x, P) \ge 0$，所以$\tilde{T}$定义合理，且$0 \le \frac{\rho(x,-P)-\rho(x,P)}{\rho(x,-P)+\rho(x,P)} \le 1 \Rightarrow \tilde{T}(x) \in P$。验证得

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} T(x) = f(x) & x \in P, \\ 0 & x \in \partial A. \end{cases}$$

即$\tilde{T}|_P = f$且$\tilde{T}(A) \subset P$。

$x \in A, x \ne 0$时，显然$\tilde{T}$在x处连续。$x = 0$时，设$x_n \in A \setminus \{0\}$，$x_n \to 0$，$\|\tilde{T}(x_n)\| \le \|T(x_n)\| \to 0 \Rightarrow \tilde{T}$在$x = 0$处连续。所以$\tilde{T}$连续并满足$\tilde{T}(A) \subset P$，$\tilde{T}|_P = f$，$\tilde{T}|_{\partial A} = 0$。

定义$F : E \to E$

$$F(x) = \begin{cases} \tilde{T}(x) & x \in A, \\ -\tilde{T}(-x) & x \in -A. \end{cases}$$

则F连续，F为奇函数，$F|_{-P\cup P} = f$且$F(E) \subset P \cup -P$。

---

*本文是作者(08级博士生）在非线性泛函分析课程中对一道思考题的解答，选入本刊时稍有修改。

[1]设(X, ρ)为一个度量空间，$A \subset X$为闭集，$(Y, \|\cdot\|)$为线性赋范空间，$T : A \to Y$为连续映射。则存在连续映射$\tilde{T} : X \to T$使得$\tilde{T}(x) = T(x)$，$\forall x \in A$，且$\tilde{T}(X) \subset \mathrm{conv}T(A)$（$\mathrm{conv}T(A)$为$T(A)$的凸包，即包含$T(A)$的最小凸集）。参见Dugundji J., An extension of Tietze's theorem, Pac. J. Math. 1 (1951), 357-367，或Kung-Ching Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, 175-177, Theorem 3.6.1。编者注。

制动器试验台的控制方法分析

顾实 马传捷 杨坤

编者按：本文是 2009 年中国大学生数学建模比赛一等奖论文，发表到本刊时作者作了删改。

[关键字]

制动器试验台　电惯量　预测控制　非参数模型

[摘要]

本文对电补偿制动器试验台的电流控制方法进行了分析和研究。

首先，我们在一些合理假设的简化下，通过题目的前三问，依据力学原理，建立了电流依赖于可观测量（瞬时转速或瞬时扭矩）的两个理论模型，并对其进行了讨论。

其次，我们建立了对给定控制方法的评价标准。在题目提及的能量误差大小 $\Delta E / E$ 的基础上，我们用角速度差绝对值积分占角速度绝对值积分的比率 r 作为另一个评价指标。因为我们模拟试验的原则是使试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致，而在这一方面，我们增加的指标显然更为合理。

再次，我们针对第三问中建立的两个理论模型分别给出了相应的控制方法并利用第四问中的数据进行模拟求解。我们提出的两个控制方法将 $\Delta E / E$ 从 0.56363e-1 分别降低到 0.28802e-2 和 0.52545e-3；新定义指标 r 从 2.3974e-2 分别降到 1.3309e-3 和 4.9598e-4。客观地说，这两个结果还是比较令人满意的。

但是我们并未满足，我们进一步对模型进行了分析和优化。我们在上述模型中加入了预测控制，有效地降低了两项指标值，并且在图像上也可以直观地看出来。其中 $\Delta E / E$ 进一步降到了 0.64017e-6 和 0.77265e-4，r 值进一步降低到了 3.6137e-6 和 7.5810e-5。

接着，我们从控制电流—时间曲线与制动扭矩—时间曲线保持的一致性以及两个评价指标两个方面对上面提出的四个模型进行了比较分析，发现模型三和四具有比较大的优越性，尤其是模型三。

最后，我们对提出的模型进行了检验。我们利用计算机模拟出其他的扭矩—时间图进行多次试验，并特别考察模型控制方法对于异常点的响应情况，发现结果仍然很令人满意。

所以，总的来说，我们的模型简单，实用，效率高，稳定性好，具有一定的实践意义。

	$\Delta E / E$	r
模型一	0.28802e-2	1.3309e-3
模型二	0.52545e-3	4.9598e-4
模型三	0.64017e-6	3.6137e-6
模型四	0.77265e-4	7.5810e-5
题给控制	0.56363e-1	2.3974e-2

控制方法成果展示

§1 问题初探

§1.1 问题重述

在车辆设计阶段，为了检测汽车制动器的综合性能，我们通常是在专门的制动器试验台上进行模拟试验。模拟的原则是使试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。本题中将路试车辆指定车轮在制动时承受的载荷在车辆平动时具有的能量等效转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量，并将与此能量相应的转动惯量称为等效的转动惯量。为了使等效惯量尽可能精确，本题的做法是在机械惯量的基础上通过电扭矩进行补偿，即让电动机在一定规律的电流控制下参与工作，补偿由于机械惯量不足而缺少的能量。本文的主要目的在于建立电流依赖于可观测量的模型并给出实际可用的控制模型。

§1.2 模型假设

1. 假设路试时轮胎与地面的摩擦力为无穷大，因此轮胎与地面无滑动。
2. 假设试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比（本题中比例系数取为 1.5 A/N·m）。
3. 试验台工作时主轴的瞬时转速与瞬时扭矩是可观测的离散量。
4. 不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

§1.3 符号约定

轮子的滚动半径为 r
载荷为 G
采样时间间隔为 Δt

初转速为 n_0，末转速为 n_1

等效的转动惯量为 J_0

机械惯量为 J_1

电动机补偿的惯量为 J_2

基础惯量为 J_3

刹车控制器提供的扭矩为 M_1

电动机补偿的扭矩为 M_2

电动机补偿的能量为 E_e

电动机电流为 I

钢材密度为 ρ

观测时间为 t_i，其中，$t_0 = 0$，$t_{i+1} = t_i + \Delta t$，$i = 1,...,N$

驱动电流与其产生的扭矩的比例系数为 $k = 1.5A/N \cdot m^{-1}$

§1.4 问题分析

本题主要是研究如何调控电流以解决制动器试验台进行模拟试验时电惯量补偿机械惯量不足的问题。

问题的第一问主要是通过将平动动能等效成相等的转动动能来求得整体的等效转动惯量，第二问主要是计算给定飞轮组所能组成的机械惯量和需要电动机进行补偿的电惯量的大小。这两问是为了后面电流调控模型的建立做准备。

问题的第三问要求给出在合理假设的简化下电流依赖于可观测量的模型，由于实际操作中并不能完美等效且不同量测量精度不同，所以电流依赖于可观测量的模型可能并不唯一，这需要通过比较和检验来确定。

问题的第四问给出了一种控制方案所得出的数据，要求对此评价。此题中的扭矩造

成我们不少困惑，未说明其是电动机扭矩和制动器扭矩之和还是仅仅制动器扭矩。我们假设该方法没有原则性问题，分别算出两种假设的 图，认为应该是制动器扭矩，否则的话曲线将几乎完全在值的下方波动。题目要求计算能量差并进行评价，但是仅计算能量差并不完整，应该需要其他判定。

问题的第五问要求基于模型给出实际的调控电流的方法，利用离散的测量值对下一时间段的期望值进行估计并据此进行调整，依据不同测量值看似等效的模型其实结果可能会不同，建模时应予以考虑。第六问则需要对第五问给出的模型进行修正和改进，以得到调整误差更小的模型。

§2 模型准备

本题中，我们的制动器试验台是用机械惯量模拟和电惯量模拟相结合的方法模拟等效转动惯量。其中电惯量系统的主要目的在于补偿等效转动惯量和机械惯量之间的差值。所以在这一部分，我们主要是建立等效转动惯量、机械惯量和电动机补偿惯量的计算模型，为后面电惯量系统的预测控制模型建立做准备。

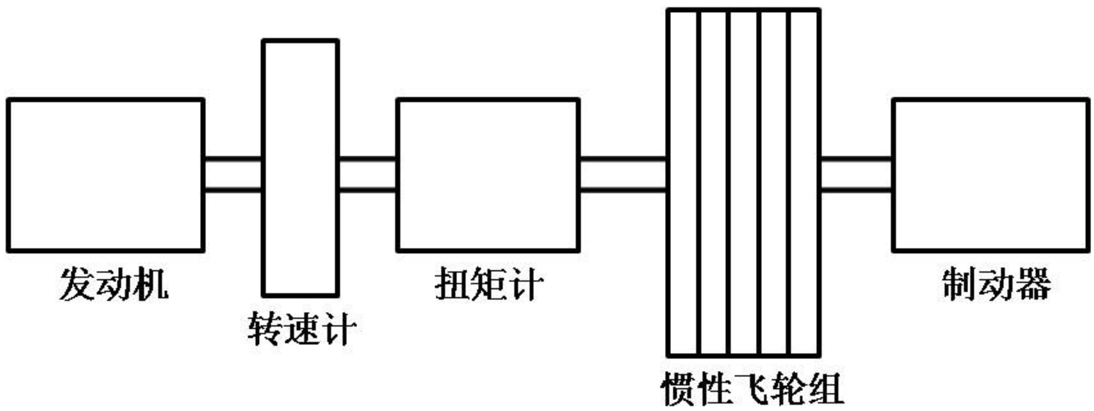


图1：制动器试验台示意图

§2.1 等效转动惯量

路试车辆的指定车轮在制动时承受载荷。我们将这个载荷在车辆平动时具有的能量（忽略车轮自身转动具有的能量）等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量，并将与此能量相应的转动惯量称为等效的转动惯量。

设车轮滚动半径为r，载荷为G，车速为v，车轮转速为n，转动角速度为ω，引

力常数为 g，车的平动动能为 E_1，等效的转动动能为 E_2，则依据上面的等效思想可以得到以下关系式：

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \\ \omega = 2\pi n \\ v = rw \\ E_2 = \dfrac{1}{2} J_0 \omega^2 \\ E_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{G}{g} v^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_0 = \frac{G}{g} r^2$$

第一问中，我们已知 $r = 0.286m$， $G = 6230N$，则等效的转动惯量 J_0 为

$$J_0 = \frac{G}{g} r^2 = 52kg \cdot m^2$$

§2.2 机械惯量和电动机补偿惯量

试验台的主轴等不可拆卸机构的惯量称为基础惯量。飞轮组由若干个环形钢制飞轮组成，使用时根据需要选择几个飞轮固定到主轴上，这些飞轮的惯量之和再加上基础惯量称为机械惯量。

将飞轮等效为圆环，则其转动惯量公式为

$J = \dfrac{1}{8} m(D^2 + d^2)$，其中， D， d 分别为内外径

第二问中，我们已知环形钢制飞轮的外直径 $D_o = 1m$，内直径 $D_i = 0.2m$，三个飞轮厚度分别为 $d_1 = 0.0392m$， $d_2 = 0.0784m$， $d_3 = 0.1568m$，钢材密度 $\rho = 7810kg / m^3$，则三个飞轮的惯量分别为：

$$\begin{aligned} J_{m1} &= 30kg \cdot m^2 \\ J_{m2} &= 60kg \cdot m^2 \\ J_{m3} &= 120kg \cdot m^2 \end{aligned}$$

设基础惯量为 J_3，则机械惯量的所有可能组合为

$$J_3+\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i J_{mi}\text{，其中，}\varepsilon_i=0,1$$

将 $J_3=10kg\cdot m^3$ 代入得到具体数值如下：

$$\begin{array}{ccc} 10kg\cdot m^2 & 40kg\cdot m^2 & 70kg\cdot m^2 \\ 100kg\cdot m^2 & 130kg\cdot m^2 & 160kg\cdot m^2 \\ 190kg\cdot m^2 & 220kg\cdot m^2 & \end{array}$$

又因为电动机补偿的能量相应的惯量的范围 $I_\delta=[-30,30]kg\cdot m^2$，所以电动机补偿的转动惯量

$$J_2=12kg\cdot m^2 or -18kg\cdot m^2$$

§3 模型初建

由题目假设可知，在时刻 t，电动机补偿的扭矩 $M_2=\frac{I}{k}$。设此刻主轴的转动角速度为 ω，转速为 n，主轴边缘线速度为 v，机械惯量为 J_1，电动机的补偿能量为 E_e。考虑模型的物理关系，我们可以得到下面两个模型。

模型 1：

考虑能量关系，有如下方程：

$$\begin{cases} M_2\omega dt=dE_e \\ E_e=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}J_1\omega^2 \\ M_2=\frac{I}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(t)=2\pi k(mr^2-J_1)\frac{dn}{dt}\text{，其中 } n \text{ 为可观测量}$$

模型 2：

考虑动量关系，有如下方程：

$$\begin{cases} M_1 = J_0 \dfrac{d\omega}{dt} \\ M_2 = J_2 \dfrac{d\omega}{dt} \\ J_0 = J_1 + J_2 \\ M_2 = \dfrac{I}{k} \end{cases}$$

$\Rightarrow I(t) = kM_1(1 - \dfrac{J_1}{J_0})$，其中 M_1 为可观测量

显然，对已正好完美等效的过程，以上两个模型是等价的。

第三问中，已知 $t_0 = 5s$，$v_0 = 50km/h$，且假设过程为匀减速，可算得

$$I = +174.8252A \quad or \quad -262.2378A$$

其中，$I = +174.8252A$ 对应 $J_2 = 12kg \cdot m^2$ 的情况，"+"表示补偿为正，电流产生的扭矩阻碍减速过程；$I = -262.2378A$ 对应 $J_2 = -18kg \cdot m^2$ 的情况，"−"表示补偿为负，电流产生的扭矩促进减速过程。

§4 控制方法的评价

对于给定控制方法的评价，我们在这一部分提出了两个衡量指标：能量误差比例 η 和角速度差的绝对值积分比率 γ。

首先，考虑到能量误差的大小是评价控制方法优劣的一个重要数量指标，我们可以用它作为控制方法的一个衡量指标。在本题中，能量误差是指所设计的路试时的制动器与相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差（通常不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差）。

第四问中，路试的等效转动惯量 $J_0 = 48kg \cdot m^2$，机械惯量 $J_1 = 35kg \cdot m^2$，主轴转速

初值 $n_0 = 514r/min$，末值 $n_1 = 257r/min$。时间间隔 $\Delta t = 10ms$。

设在它所给出的某种控制方法试验中扭矩做的功设为 W_1，则 $W_1 = \int_{t_b}^{t_e} M_1 \omega dt$，通过差分法可以得出试验台上制动器在制动过程中消耗的能量的近似值为

$$W_1 = \sum_{i=1}^{N} M_1(t_i)\omega(t_i)\Delta t = 49291.94215J$$

另一方面，制动器在路试的减速过程中的动能损失为

$$\Delta E = \frac{1}{2} J_0 ({\omega_0}^2 - {\omega_1}^2) = 52216.50804J$$

考虑衡量指标

$$\eta = \frac{|W_1 - \Delta E|}{\Delta E}$$

代入数据有

$$\eta = 0.056$$

其次，考虑到我们模拟的原则是要使试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致，也就是说我们试验得到的速度—时间曲线应尽可能与实际路测时保持一致，我们就可以将实际路测时的转速—时间曲线与模拟试验中得到的曲线的一致性作为评价的另一个指标。其中，实际路测时的转速—时间曲线可以根据试验得到的扭矩—时间曲线及测得的初速度计算得出，两条曲线的一致性可以用对两条曲线差值的绝对值积分的大小来衡量。

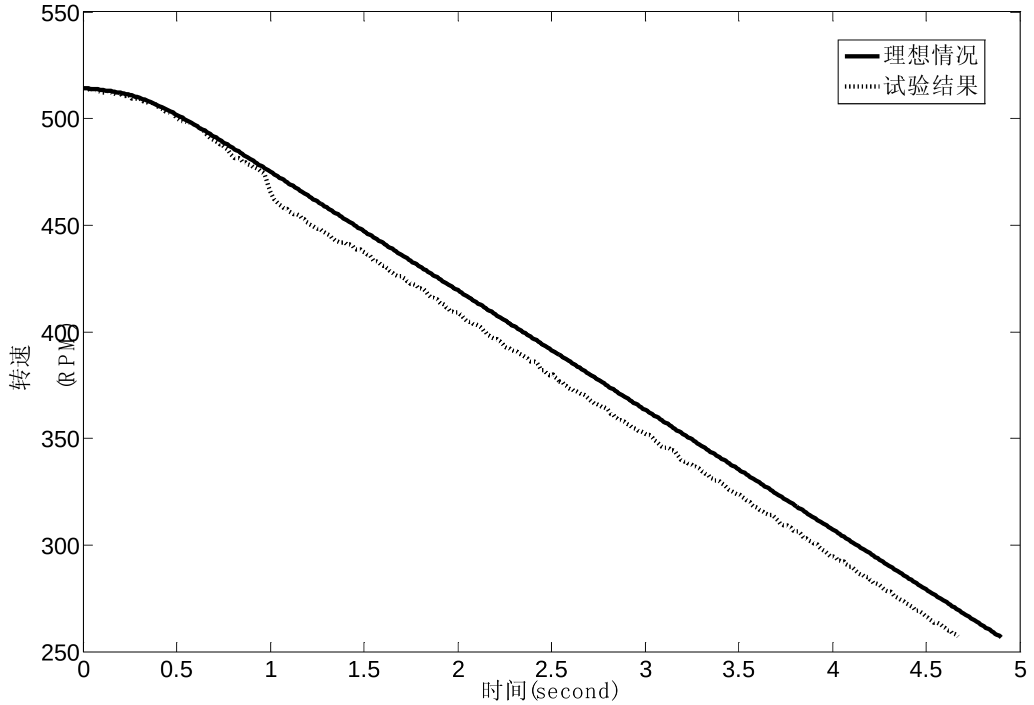
考虑衡量指标

$$\gamma = \frac{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_r(t) - \omega_o(t)| dt}{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_o(t)| dt}$$

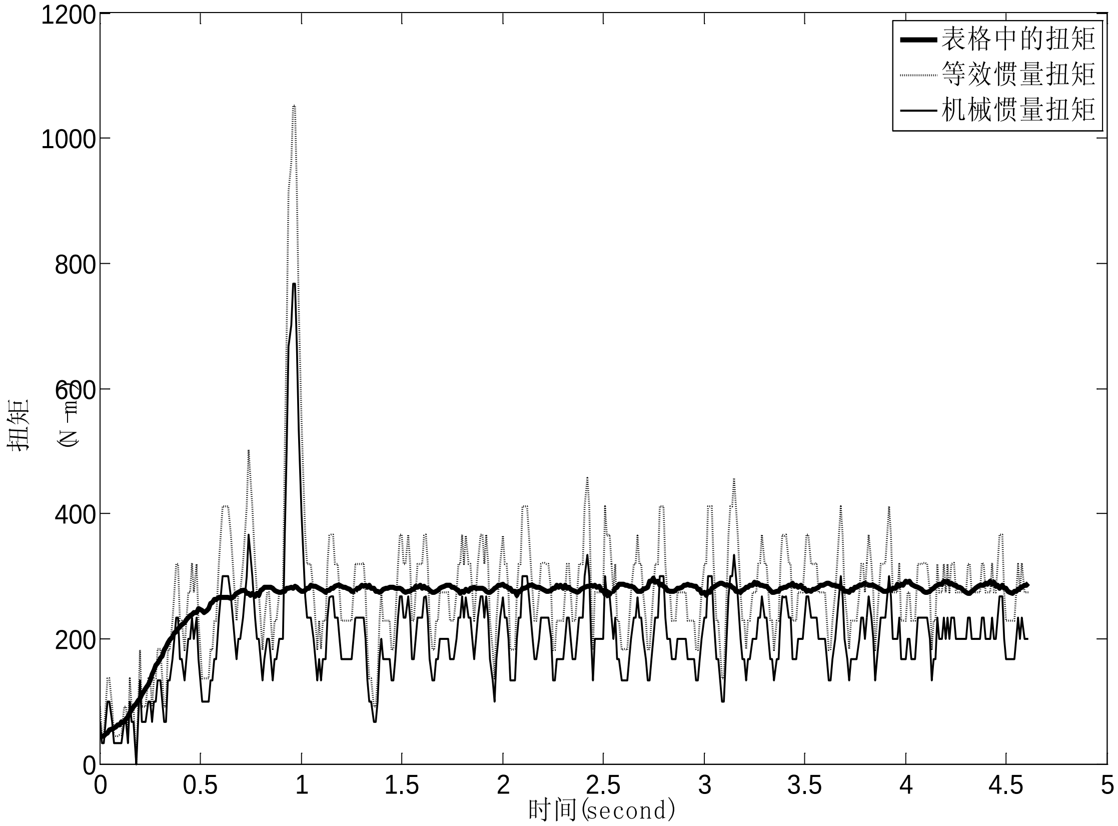
代入数据，有

$$\gamma = 0.024$$

通过分析按给定数据的扭矩计算出的$\omega - t$和实际测的$\omega - t$图，我们可以看出第四问中给出的控制方法的问题在于没有很好的自纠正性，一旦出现较大偏差，将会一直保持此偏差。尽管从本题数据看来，该控制方法没有进一步扩大误差，但是长期的稳定较大偏差产生的累积效果使得这个控制并不是很好。这一点可从下图明显地看出。



另外值得一提的是，在考虑题目第四问所提供用某种控制方法试验得到的数据时，我们对其中的扭矩产生了歧义——数据表中的扭矩是指主轴扭矩还是指制动扭矩？为了能够正确地判断，我们分别绘制出了表格中的扭矩—时间、机械惯量扭矩—时间、等效转动惯量—时间的曲线：



通过观察不难看出，等效转动惯量—时间曲线基本围绕着表格中的扭矩—时间曲线上下振荡，而机械惯量—时间曲线则与其有一个偏移。因此，我们认为数据表中给出的扭矩是指制动扭矩。

§5 电流控制方法建模

§5.1 扭矩与时间关系分析

一般情况下，由于制动器性能的复杂性，电动机驱动电流与时间之间的精确关系是很难得到的。 但是为了合理地进行控制，我们需要对驱动电流随时间变化的关系有个大体判断，为此，我们考虑如下分析：实际路测中，由于人踩踏板的力不是直接加到最大而且材料也有一定的动力学响应时间，所以整体来说，制动器提供的扭矩随时间变化方式应该是先随增大后趋于稳定值。考虑两种近似：

1. 认为先匀速增加后达到一个稳定值，则

$$M_1 = M_{10} + \lambda t + \frac{\lambda}{2}[Sgn(t-t_0)+1](t_0-t)$$

其中，M_{10} 是 M_1 的初始值，λ 是待定常数，$Sgn(x)$ 为符号函数。

2. 认为增加的速度与当前值成线性关系，即

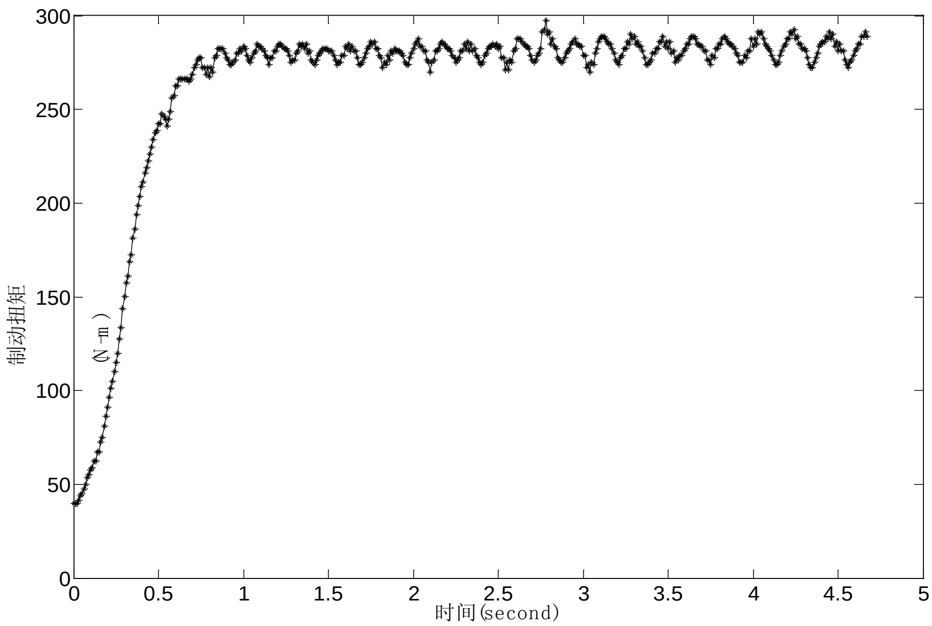
$$\frac{dM_1}{dt} + \lambda M_1 = M_0$$

$$\Rightarrow M_1 = M_{10} + \frac{M_0}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})$$

其中，M_{10} 是 M_1 的初始值，λ 和 M_0 为待定常数。

可设 $\lambda_m = \frac{M_0}{\lambda}$，上式化成 $M_1 = M_{10} + \lambda_m(1-e^{-\lambda t})$。

问题四中的“制动扭矩—时间图（$M_1 - t$ 图）”如下所示：



由上图可以看出，制动扭矩上升到一定值后基本围绕一个值以基本稳定的振幅振荡。上升过程是由系统的反应迟滞导致的，振荡可能是由于系统的机械振荡引起的。此处关系分析的目的在于在控制过程中进行拟合以对未来期望值作出预判断，所以不必一开始就给出参数。另外，上升过程也可以用多项式进行拟合，但是对于不同的制动过程可能未必能够拟合得很好，因而仍需考虑非参数模型以使测试系统具有更高的适应性。

§5.2 模型一

设检测中测得的实际角速度为ω_r，角加速度为α_r，路测中的角速度即目标角速度为ω_o，角加速度即目标角加速度为α_o，则

$$\alpha_r = \frac{-M_1(t_{i-1}) + M_2(t_{i-1})}{J_1} \tag{1}$$

$$\omega_r(t_i) = \omega_r(t_{i-1}) + \alpha_r \cdot \Delta t \tag{2}$$

$$\alpha_o = -\frac{M_1(t_{i-1})}{J_0} \tag{3}$$

$$\omega_o(t_i) = \omega_o(t_{i-1}) + \alpha_o \cdot \Delta t \tag{4}$$

$$M_2(t_i) = \frac{\omega_o(t_i) - \omega_r(t_i)}{\Delta t} \cdot J_1 + M_1(t_{i-1}) \tag{5}$$

$$\Delta E_i = M_{i-1} \cdot \omega_r(t_{i-1}) \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\alpha_r \cdot (\Delta t)^2 \tag{6}$$

实际控制中，J_0和J_1已知，$M_1(t_i)$为可观测量。初始角速度ω_0已知，且末角速度ω_1也可以事先设定，所谓控制即是对$M_2(t_i)$的控制（因为$M_2(t) = I(t)/k$，而k为常数）。将作如下初始化：

$$M_2(t_0) = 0，\quad \omega_o(t_0) = \omega_0，\quad \omega_r(t_0) = \omega_0。$$

由于实际的减速方式我们并不知晓，所以我们需要对其做出判定，我们此处考虑的是非参数模型，即用前一个观测点处的加速度作为两个观测点之间的加速度，由于Δt很小，这种近似误差并不是很大（但是仍可改进，后文将有陈述）。在每个时刻t_i，我们利用前一阶段的观测数据和导出的$M_2(t_{i-1})$计算出两次测量之间的加速度α_r，进一步算出t_i时刻的角速度。实际路测过程中，所加扭矩的承受者应该为整个等效惯量，所以由(3)式算出目标加速度$\omega_o(t_i)$并由(5)导出使测试减速方式趋近于实际过程所要求电动机补

偿的扭矩$M_2(t_i)$。其控制原理流程图如图2所示：

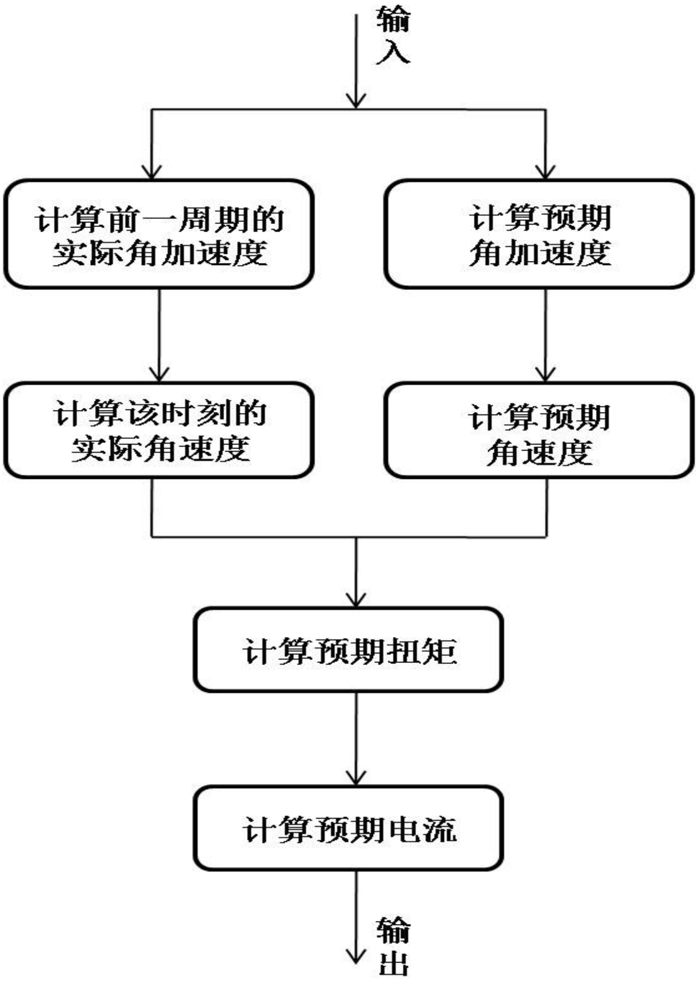


图2：电流控制原理流程图

实验中消耗的能量$E_{test}=\sum_{i=1}^{N}\Delta E_i$

实际路测中消耗的能量$E_{real}=\frac{1}{2}J_0\cdot(\omega_s{}^2-\omega_e{}^2)$

衡量指标为

$$\eta=\frac{|E_{test}-E_{real}|}{E_{real}}\quad,\quad\gamma=\frac{\int_{t_b}^{t_e}|\omega_r(t)-\omega_o(t)|\,dt}{\int_{t_b}^{t_e}|\omega_o(t)|\,dt}$$

§5.3 模型二

根据公式

$$I(t)=kM_1(1-\frac{J_1}{J_0})$$

进行单步调控，与模型 1 类似，在进行预测时我们只能用到前一阶段的测量值。

即离散过程中，我们使用下式进行调节：

$$I(t_i)=kM_1(t_{i-1})(1-\frac{J_1}{J_0}) \qquad ①$$

同样地，做初始化：

$$M_1(t_0)=0 \qquad ②$$

然后根据①式对每一步的电流值进行调节，评价方式与模型一相同。

§5.4 电流控制模型优化

§2.4 中提出的模型一和模型二仅仅考虑了尽可能减少每一步的误差，并不能消除之前积累的误差。为了克服这一缺点，我们将它们做了改进，得到了下面的两个优化模型：模型三和模型四。

§5.4.1 模型三

针对模型一，提出如下修改方案：

$$\alpha_r=\frac{-M_1(t_{i-1})+M_2(t_{i-1})}{J_1} \qquad (7)$$

$$\omega_r(t_i)=\omega_r(t_{i-1})+\alpha_r\cdot\Delta t \qquad (8)$$

$$\alpha_o=-\frac{M_1(t_{i-1})}{J_0} \qquad (9)$$

$$\omega_o(t_i)=\omega_o(t_{i-1})+\alpha_o\cdot\Delta t \tag{10}$$

$$M_2(t_i)=(\frac{\omega_o(t_i)-\omega_r(t_i)}{\Delta t}+\alpha_o)\cdot J_1+M_1(t_{i-1}) \tag{11}$$

$$\Delta E_i=M_{i-1}\cdot\omega_r(t_{i-1})\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\alpha_r\cdot(\Delta t)^2 \tag{12}$$

其中，方程(7) --- (10)与模型一相同，方程(11)对(5)作了修正，加上了α_o，实际上是考虑将数值调到下一次测量时的期望大小，这样可以降低由于滞后一个周期所造成的误差。其余计算同模型一：实验中消耗的能量$E_{test}=\sum_{i=1}^{N}\Delta E_i$，实际路测中消耗的能量$E_{real}=\frac{1}{2}J_0\cdot(\omega_s{}^2-\omega_e{}^2)$，衡量指标为

$$\eta=\frac{|E_{test}-E_{real}|}{E_{real}} \quad , \quad \gamma=\frac{\int_{t_b}^{t_e}|\omega_r(t)-\omega_o(t)|\,dt}{\int_{t_b}^{t_e}|\omega_o(t)|\,dt}$$

§5.4.2 模型四

模型二中由于使用$M_1(t_{i-1})$逼近$M_1(t_i)$是误差的主要来源。为了尽量减少这一误差，我们应该大概判断$M_1(t)$随时间变化的关系。考虑用$2M_1(t_{i-1})-M_1(t_{i-2})$替代模型二中的$M_1(t_{i-1})$，提出如下修改方案：

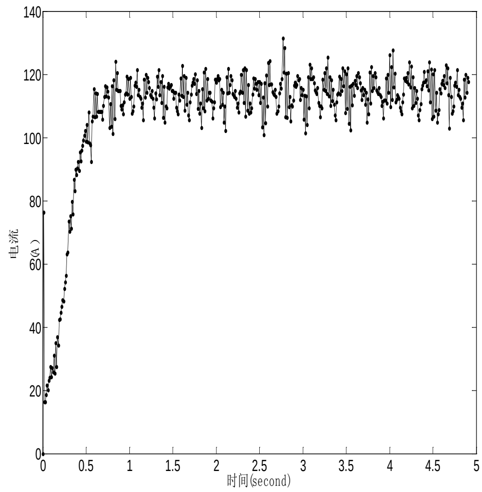
$$I(t_i)=k[2M_1(t_{i-1})-M_1(t_{i-2})](1-\frac{J_1}{J_0})$$

衡量指标与前相同。

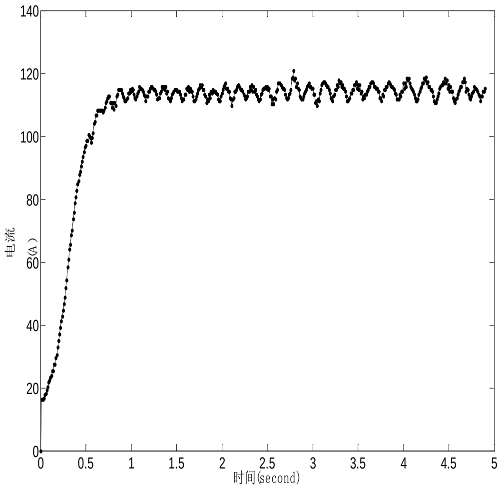
§6 模型比较

§6.1 四个模型的控制电流—时间图比较

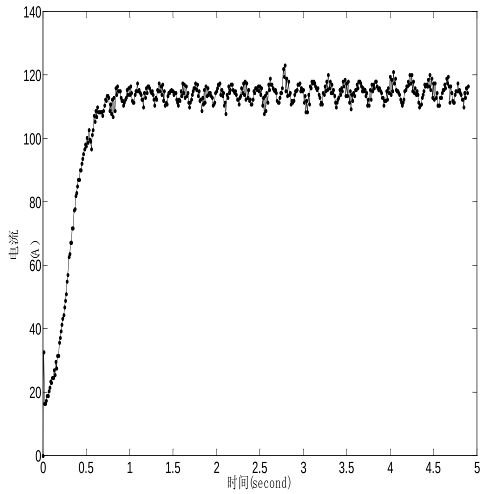
四个模型的控制电流—时间图（$I-t$ 图）如下所示：



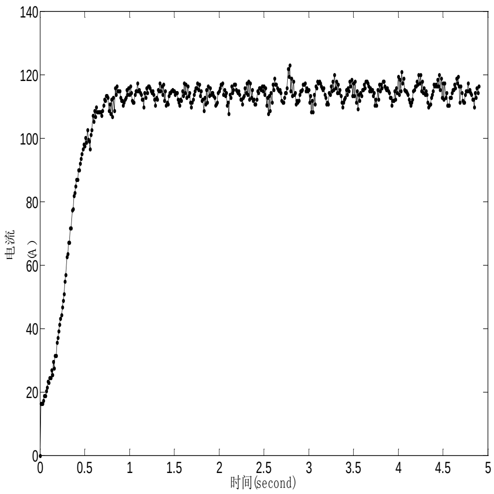
模型一



模型二



模型三



模型四

可以看出，四个模型的$I-t$图都基本与M_1-t图保持一致，这表明我们的调节方法

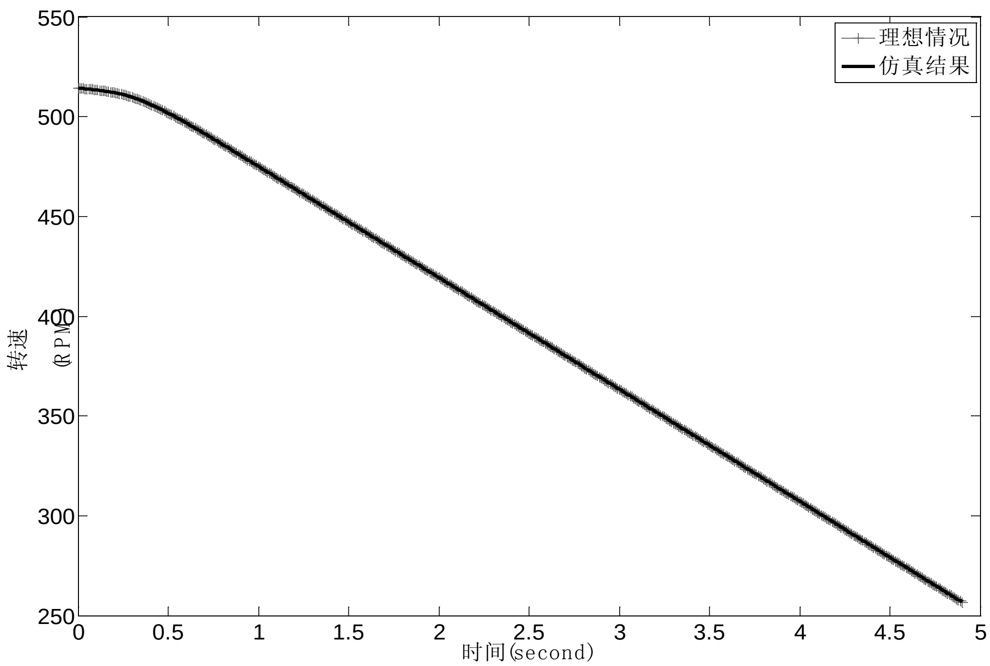
是比较成功的。模型一的图后期波动较 $M_1 - t$ 图与其他模型相比较大，故而结果也会差一些。其余三个模型在后期波动过程中表现都还不错。

§6.2 四个模型的评价指标比较

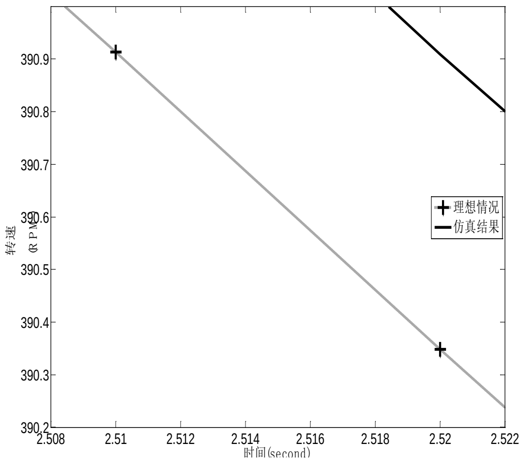
模型三、四分别是对模型一、二的改进。我们将第四题中的扭矩时间关系图看作是路测时实际关系，利用以上模型对其模拟。

考虑衡量指标 $\eta = \frac{|E_{test} - E_{real}|}{E_{real}}$，有如下结果：

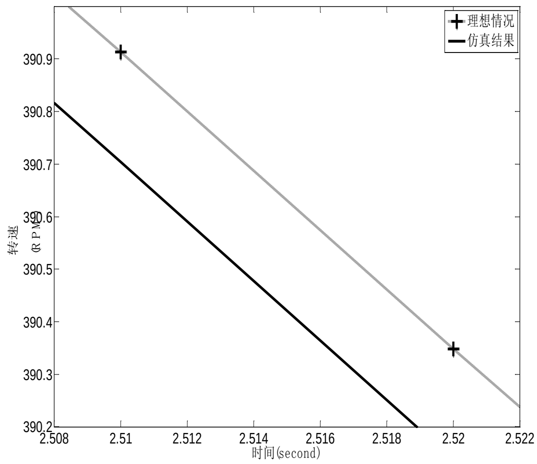
	E_{real}	E_{test}	$\lvert\Delta E\rvert$	η
模型一	52267.91732	52418.45828	150.54096	0.28802e-2
模型二	52267.91732	52240.45296	27.46436	0.52545e-3
模型三	52267.91732	52267.88386	0.03346	0.64017e-6
模型四	52267.91732	52263.87882	4.03850	0.77265e-4
题给控制	52267.91732	49291.94215	2945.97517	0.56363e-1



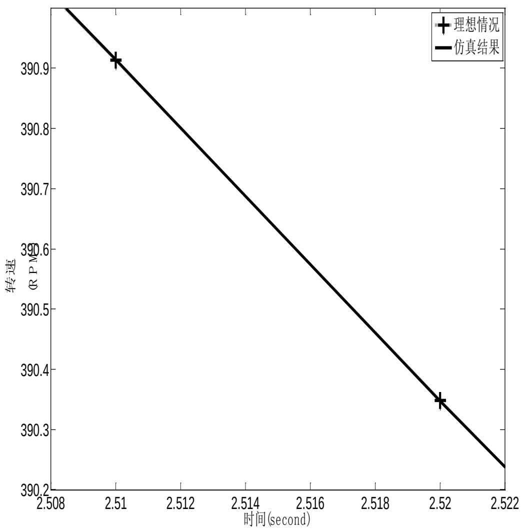
总的来说，四个模型模拟的结果都不错，画图时如果选取区间较大，四条曲线几乎无法区别，且都与实际曲线十分接近，基本如上图所示。所以，为了看出差别，我们将四条曲线在相同的较短区间内放大数倍后观察。以下选取 2.508s-2.522s 内各模拟曲线与实际曲线进行比较。



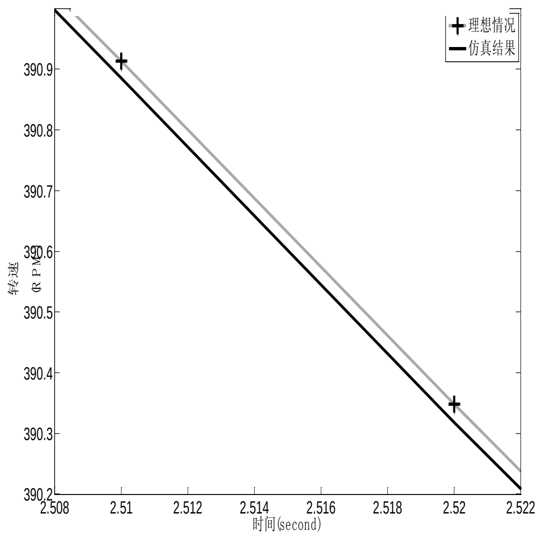
模型一



模型二

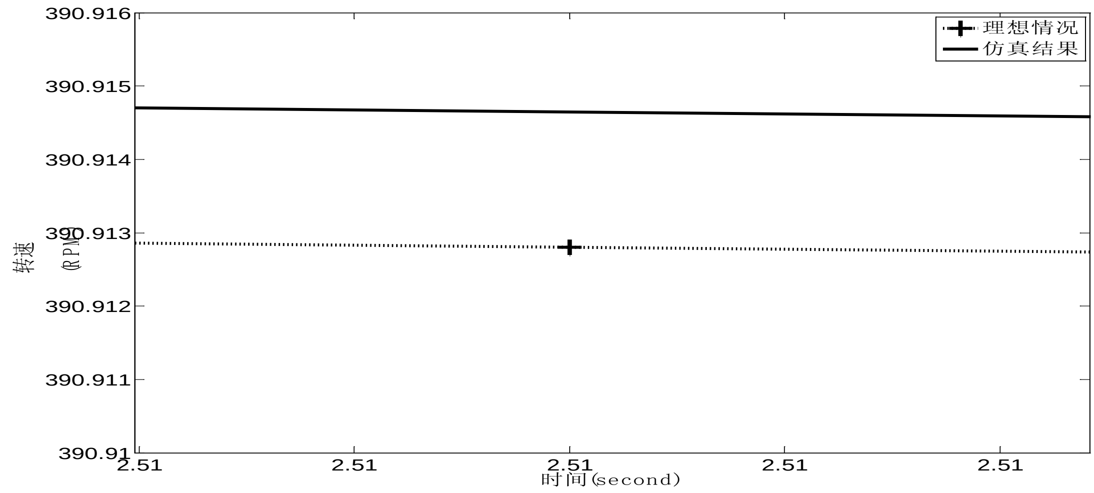


模型三



模型四

可以看出，模型三和模型四对模型一和模型二的修正效果还是很明显的，且模型三尤其卓越，在选定的区间内可以认为几乎无误差（忽略其他影响因素）。但是我们将其进一步放大后，发现其实还是可以看出有误差的，更精细的局部放大图如下所示：



考虑我们定义的另一个指标：

$$\gamma = \frac{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_r(t) - \omega_o(t)| \, dt}{\int_{t_b}^{t_e} |\omega_o(t)| \, dt}$$

结果如下表所示：

	γ	减速时间/s	角位移/rad
模型一	1.3309e-3	4.900	202.3604
模型二	4.9598e-4	4.900	201.8224
模型三	3.6137e-6	4.900	201.7226
模型四	7.5810e-5	4.910	201.8073
题给控制	2.3974e-2	4.670	190.7970
理想值	\	4.910	201.8227

这进一步说明了建模的有效性并且大小顺序与能量指标相同。模型三和模型四控制结果都很好，但是差异不如能量指标反映得那么大，我们认为该指标在反应实际运动曲线相似程度上较能量指标更为优越。同时，通过比较角位移与理想值的差异也可以大体判断模型的优劣。

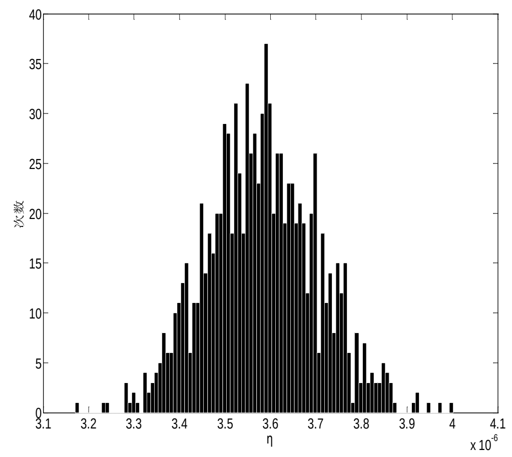
§6.2 四个模型比较分析小结

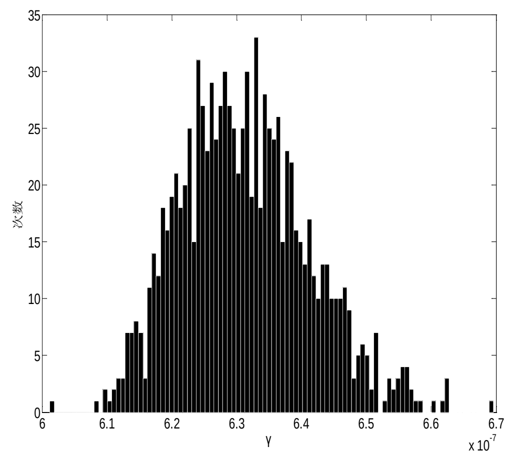
在这一部分，我们先对四个模型的控制电流—时间曲线进行了对比分析，发现它们基本上都和制动扭矩—时间曲线相一致，符合题目的相关假设和内在关系，其建立是成

功的。然后，我们依据§4 中制定的两个方法控制评价的衡量指标对四个模型进行了比较，发现作为模型一和模型二改进版的模型三和模型四确实具有比较大的优越性，尤其是模型三。

§7 模型检验

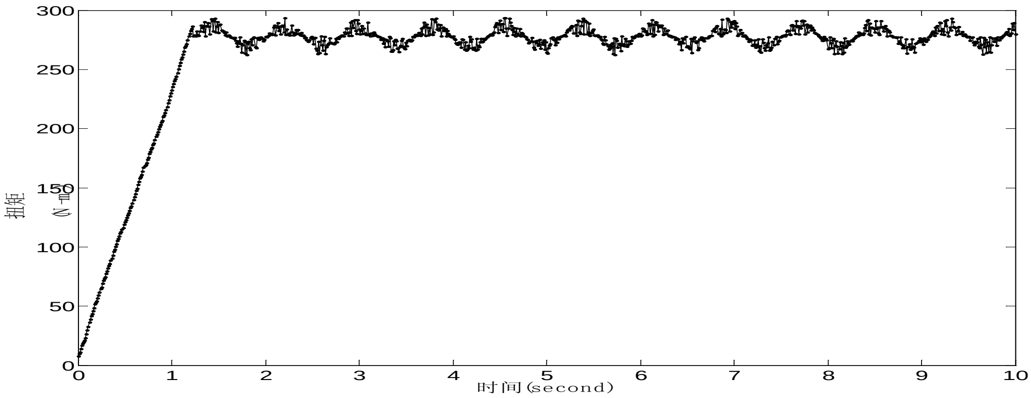
本题模型敏感性指的是结果对“扭矩—时间曲线”的依赖程度。我们首先使用无异常值的不同曲线进行模拟（重复 1000 次）以得到η和γ的分布图，如下图所示：





由以上图表可以看出，对于不同的曲线，我们的模拟结果还是很稳定的。当然，我们不排除会以极低概率出现数值较大的情况。例如当实际路测$\omega-t$图在每个测量点持续呈“W”型变化时，对振荡的预测将会基本失效。事实上，我们在实际检验中也出现了这种情况，且较大的在10^{-3}左右。

（M_1-t 曲线生成方式为先依照之前所述拟合模型进行构造，接着加上随机扰动使其更符合实际，下图为一示例：



)

接着，我们将数据中的某些值调整成异常值，然后进行模拟，可以看出，即使存在异常值，我们的模型也能在异常后迅速回归到正常数值。

综合以上两点，可以看出，本模型具有很好的稳健性。

****

数学家趣闻

▲一次 Princeton 举行的物理演讲，演讲者拿出一个幻灯片，上面极为分散地排列着一些实验数据，并且他试图说明这些数据在一条曲线上。von Neumann 大概很不感兴趣，低声抱怨道：“至少它们是在同一个平面上。”

▲L.V.Ahlfors 说下面这些话的时候，正是二战受封锁的时期。“Fields 奖章给了我一个很实在的好处，当被允许从芬兰去瑞典的时候，我想搭火车去见一下我的妻子，可是身上只有 10 元钱。我翻出了 Fields 奖章，把它拿到当铺当了（!!!!)，从而有了足够的路费，我确信那是唯一一个在当铺呆过的 Fields 奖章。”

▲Hardy 每次坐船的时候，总是怕沉了。克服这个东西的一个方法是，每次不得不坐船航行的时候，他会给同事发个电报或者明信片什么的，说已经搞定了 Riemann 猜想回来之后会给细节的。他的逻辑是，上帝不会允许他被淹死，否则这又将是第二个类似于 Fermat 大定理的事情。

闭区间上端点各阶导数值给定的函数的存在性

苏桃*

1 问题

[1] 中第 201 页有这样一段话:“不应该认为每个无穷可微的函数的 Taylor 级数都在点 x_0 的某个邻域内收敛, 因为对于任何一个数列 $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ 都可以构造(这并不是很简单的)一个函数 $f(x), f^{(n)}(x_0) = c_n, n \in \mathbb{N}$.”

[2] 中第 136 页第 6 题第 $a)$ 问:“构作函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 使 $f|_{[-1,1]} \equiv 1$ 且 $\mathrm{supp} f \subset [-1-\delta, 1+\delta]$, 其中 $\delta > 0$.”此题一般的做法是直接构造一个显式函数, 但笔者因受前一问题的启发, 在考虑的过程中想到这个命题可能被加强, 于是想到了以下命题:

命题1. *任给两个实数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$,$\{b_n\}_{n\geq 0}$ 及闭区间 $[a,b](a<b)$, 存在函数 $f \in C^{(\infty)}[a,b]$, 使得 $f^{(n)}(a) = a_n$,$f^{(n)}(b) = b_n$, $\forall\, n \geq 0$.*

如果能证明上述命题, 稍加论述, 我们就能顺便给出前面两个问题的证明.

2 问题的证明

首先, 作简单考虑知闭区间 $[a,b]$可换为闭区间 $[0,1]$, 下面我们仅考虑闭区间 $[0,1]$.

为证命题 1, 考虑到函数在端点上各阶导数值比较随意, 自然想到构造级数来做, 大致思路如下:

对 0 阶导数值 a_0, b_0, 构造函数 f_0, 使得 $f_0(0) = a_0, f_0(1) = b_0$; 对 1 阶导数值 a_1, b_1, 构造 f_1, 使得 $f_1(0) = 0, f_1(1) = 0, f_1^{(1)}(0) = a_1 - f_0^{(1)}(0), f_1^{(1)}(1) = b_1 - f_0^{(1)}(1)$; 依此构造 $\ldots$ 对 f_n ,有 $f_n^{(i)}(0) = 0, f_n^{(i)}(1) = 0(0 \leq i \leq n-1)$, 而 $f_n^{(n)}(0)= a_n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)}(0)$, $f_n^{(n)}(1) = b_n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)}(1)$, 这样函数 $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ 将满足前 n 阶导数值的条件, 从而(函数) $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ 可能满足命题中的所有要求. 下面来具体实现这一想法.

*基科 81

关键是构造合适的函数形式, 取

$$f_k(x) = (c_{k,0}(x-1)^{2p_k} + c_{k,1}x^{2q_k})\frac{x^k}{k!}\frac{(x-1)^k}{k!},\ p_k, q_k \in \mathbb{N}^+$$

知 $f_k \in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 且由 Leibniz 求导公式知 f_k 有很好的性质: $f_k^{(i)}(0) = 0,\ f_k^{(i)}(1) = 0\ (1 \le i \le k-1)$, 而 $f_k^{(k)}(0) = \dfrac{(-1)^k}{k!}c_{k,0},\ f_k^{(k)}(1) = \dfrac{1}{k!}c_{k,1}$, 上面的构造已完成一半.

对 f_0, 令 $c_{0,0} = a_0, c_{0,1} = b_0$, 取 p_0, q_0 使 $|c_{0,0}| \le 2p_0, |c_{0,1}| \le 2q_0$, 并令 $h_0 = f_0$;

对 f_1, 令 $c_{1,0} = -a_1 + f_0^{(1)}(0), c_{1,1} = b_1 - f_0^{(1)}(1)$, 取 p_1, q_1 满足: $2p_1 \ge |c_{1,0}|, 2q_1 \ge |c_{1,1}|, p_1 > p_0, q_1 > q_0$, 并令 $h_1 = f_0 + f_1$;

$\cdots\cdots$

若已取 $f_i, h_i (0 \le i \le k), k \ge 1$, 则已有 $h_k \in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足: $h_k^{(i)}(0) = a_i, h_k^{(i)}(1) = b_i, |c_{i,0}| \le 2p_i, |c_{i,1}| \le 2q_i (0 \le i \le k)$, 而 $p_j < p_{j+1}, q_j < q_{j+1} (0 \le j \le k-1)$.

对 f_{k+1}, 可令 $\dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}c_{k+1,0} = a_{k+1} - h_k^{(k+1)}(0),\ \dfrac{1}{(k+1)!}c_{k+1,1} = b_{k+1} - h_k^{(k+1)}(1)$, 即 $c_{k+1,0} = (-1)^{k+1}(k+1)!(a_{k+1} - h_k^{(k+1)}(0)), c_{k+1,1} = (k+1)!(b_{k+1} - h_k^{(k+1)}(1))$; 取 p_{k+1}, q_{k+1}, 使 $|c_{k+1,0}| \le 2p_{k+1},\ |c_{k+1,1}| \le 2q_{k+1},\ p_{k+1} > p_k,\ q_{k+1} > q_k$, 令 $h_{k+1} = h_k + f_{k+1}$, 知 h_{k+1} 亦有与 h_k 类似的性质.

于是, 我们得到了函数序列 $\{f_n\}(n \ge 0)$, 其级数部分和 $\sum_{k=0}^{n} f_k$ 已满足前面的设想, 只需再证明:

命题2. *函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (f_n 如前) 在闭区间 $[0,1]$ 上收敛, 且若其和函数记为 $f(x)$, 则 $f \in C^{(\infty)}([0,1],\mathbb{R})$, 且 $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x), \forall x \in [0,1]$.*

为证命题 2, 我们考虑下面的定理:

定理(Weierstrass). *若函数序列 $f_n(z)(n = 1, 2, \dots)$ 在区域 D 内解析, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内内闭一致收敛到函数 $f_(z)$, 则: (1) 函数 $f(z)$ 在 D 内解析; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 内内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z), k \in \mathbb{N}$.*

证明. 证明见 [3] $Pg.$ 113. □

引理. *函数项序列 $\{F_n(x)\}_{n \ge 0}$ 满足 : (1) 对 $n \ge 0$, $F_n(x) = c_n(x-1)^{p_n}\dfrac{x^n}{n!}$ ($p_n \ge 0,\ p_n \in \mathbb{Z}$); (2) $\exists N, N_0 \in \mathbb{N}$, 使对 $\forall n \ge N_0$ 有 $|c_n| \le p_n^N$, 其中 $1 \le p_n < p_{n+1}$. 令 $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n$, 则*

$F\in C^{(\infty)}([0,1],\mathbb{R})$, 且 $F^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(k)}(x)(\forall k\geq 0)$.

注. 若证明了引理 1, 则对 $F_n(x)=c_nx^{p_n}\dfrac{(x-1)^n}{n!}$ 而其它条件不变, 有同样的命题成立.这只需用 $1-x$ 代替命题中的 x 即可.

证明. 由于每个 F_n 均为 x 的多项式, 视其为复数域上的复变量函数, 则 $F_n(n\geq 0)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 考虑 $D:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\}$, 对 $\forall\, 0<r<\frac{1}{2}$, 在 $D_r:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-\frac{1}{2}|\leq r\}$ 中, 当 $n\geq N_0$ 时, 成立

$$|F_n(z)|\leq\frac{1}{n!}|c_n|(\frac{1}{2}+r)^{p_n}\leq p_n^N(\frac{1}{2}+r)^{p_n}\leq(p_n+1)\dots(p_n+N)(\frac{1}{2}+r)^{p_n}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{n=N_0}^{\infty}|F_n(z)|&\leq\sum_{n=N_0}^{\infty}(p_n+1)\dots(p_n+N)(\frac{1}{2}+r)^{p_n}\leq\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+N)(\frac{1}{2}+r)^n\\&=\frac{N!}{(\frac{1}{2}-r)^{N+1}}\end{aligned}$$

从而知 $\sum_{n=0}^{\infty}F_n(z)$ 在 D 内内闭一致收敛.

故由定理 1 知, 在 $|z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$ 内 :$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(z)$解析, 且 $F^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(k)}(z)$, 特别的对开区间 $]0,1[$ 成立.

为证引理 1 只需再考虑两端点 $0,1$. 对 $x=0,1,F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)$ 收敛性显然. 对 $\forall x\in\,]0,1[$, $m\geq N_0$, 由

$$\begin{aligned}F(x)-F(0)&=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(0))+\sum_{n=m+1}^{\infty}(F_n(x)-F_n(0))\\&=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(0))+\sum_{n=m+1}^{\infty}F_n(x)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}|\sum_{n=m+1}^{\infty}F_n(x)|&\leq\sum_{n=m+1}^{\infty}p_n^N(1-x)^{p_n}x^{m+1}\leq(\sum_{n=0}^{\infty}n^N(1-x)^n)x^{m+1}\\&\leq[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+N)(1-x)^n]x^{m+1}=N!x^{m-N}\end{aligned}$$

可取 $m \geq N+2$, 则

$$F(x)-F(0)=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(0))+O(x^2)=\sum_{n=0}^{m}F_n^{(1)}(0)x+o(x),\ x\to 0_+$$

这说明 $F^{(1)}(0)=\sum_{n=0}^{m}F_n^{(1)}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(1)}(0)$.

可取 $m \geq N_0$, 使对 $\forall n \geq m, p_n > 2$. 则对 $\forall x \in]0,1[$

$$\begin{aligned}F(x)-F(1)&=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(1))+\sum_{n=m+1}^{\infty}(F_n(x)-F_n(1))\\&=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(1))+\sum_{n=m+1}^{\infty}F_n(x)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}|\sum_{n=m+1}^{\infty}F_n(x)|&\leq(1-x)^2[\sum_{n=m+1}^{\infty}p_n^N(1-x)^{p_n-2}]\\&\leq(1-x)^2[\sum_{n=m+1}^{\infty}(p_n-1)p_n\dots(p_n+N-1)(1-x)^{p_n-2}]\\&\leq(1-x)^2[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+N)(1-x)^n]=N!\frac{(1-x)^2}{x^{N+1}}\\&=O((1-x)^2),\ x\to 1_-\end{aligned}$$

$$F(x)-F(1)=\sum_{n=0}^{m}(F_n(x)-F_n(1))+O((1-x)^2)=\sum_{n=0}^{m}F_n^{(1)}(1)(x-1)+o(1-x),\ x\to 1_-$$

从而有 $F^{(1)}(1)=\sum_{n=0}^{m}F_n^{(1)}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(1)}(1)$.

这样, 我们已得到: $F^{(1)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(1)}(x)\ (x\in[0,1])$.

现在可归纳完成引理 1 的证明:

若已证 $F^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(k)}(x), x\in[0,1](k\geq 1)$, 取 $n_0\in\mathbb{N}, n_0>k$, 使对 $\forall\, n\geq n_0$, 有 $p_n>k$. 则由 Leibniz 求导公式

$$\begin{aligned}F_n^{(k)}(x)&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}c_n((x-1)^{p_n})^{(k-i)}(\frac{x^n}{n!})^{(i)}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}c_np_n(p_n-1)\dots(p_n-k+i+1)(x-1)^{p_n-k+i}\frac{x^{n-i}}{(n-i)!}\end{aligned}$$

设 $F_{n,i}(x)=\binom{k}{i}c_np_n(p_n-1)\dots(p_n-k+i+1)(x-1)^{p_n-k+i}\dfrac{x^{n-i}}{(n-i)!}, n\geq n_0,\ 0\leq i\leq k.$

对 $F_{n,i}(n>n_0)$, 知其仍满足引理 1 的条件, 由前面的证明知对 $G_i(x)=\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}F_{n,i}(x)$ 收敛, 且有

$$G_i^{(1)}(x)=\sum_{n=n_0+1}^{\infty}F_{n,i}^{(1)}(x)\ (x\in[0,1])$$

从而知

$$\begin{aligned}F^{(k)}(x)&=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k)}(x)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}F_{n,i}(x)\\&=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k)}(x)+\sum_{i=0}^{k}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}F_{n,i}(x)\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}F^{(k+1)}(x)&=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k+1)}(x)+\sum_{i=0}^{k}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}F_{n,i}^{(1)}(x)\\&=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k+1)}(x)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}F_{n,i}^{(1)}(x)=\sum_{n=0}^{n_0}F_n^{(k+1)}(x)+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}F_n^{(k+1)}(x)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(k+1)}(x)\quad(x\in[0,1])\end{aligned}$$

综上, 引理 1 证毕. □

至此, 我们证明了前面提出的问题并得到了一些有意义的结果. 作为补充我们指出: 只需对函数作简单的衔接, 命题 1 完全可推广到 n 个点的情况.

参考文献

[1] V.A.Zorich 著; 蒋铎等译, 数学分析, *第一卷(第四版)*, 高等教育出版社, 北京, 2006.

[2] V.A.Zorich 著; 蒋铎等译, 数学分析, *第二卷(第四版)*, 高等教育出版社, 北京, 2006.

[3] 方企勤著, 复变函数教程, 第一版, 北京大学出版社, 北京, 1996.

A simpler proof of the Poincaré-Birkhoff theorem

Patrice Le Calvez and Jian Wang

December 17, 2009

Introduction

In his search for periodic solutions in the restricted three body problem of celestial mechanics, H. Poincaré constructed an area-preserving section map of an annulus **A** on the energy surface. He asserted that an area-preserving homeomorphism of the closed annulus that satisfies some "twist condition" admits at least two fixed points. He proved it is true in some simple cases and conjectured it is also true in a general case [5]. Then he died. So we also call the theorem the last geometric theorem of Poincaré.

In 1913, Birkhoff [1] proved a result which was valid to find one fixed point but uncorrect to get the second one. A small modification of the argument was necessary and Birkhoff corrected this minor error in a paper [2] published in 1925. See also the well-detailed expository paper of Brown and Newman [3].

The goal of this short paper is to introduce the notion of *positive path* of a homeomorphism which seems to be a natural object to understand Birkhoff's arguments.

This short paper is a part of the paper [4]. Only for communion within the mathematics department of Tsinghua University.

Statement and proof of the Poincaré-Birkhoff theorem

In what follows a *path* on a topological space X is a continuous map $\gamma : I \to X$ defined on a segment $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$. The *origin* and the *extremity* of γ are respectively $\gamma(a)$ and $\gamma(b)$. If X_1 and X_2 are two subsets of X, we will say that γ *joins* X_1 to X_2 if its origin belongs to X_1 and its extremity belongs to X_2. The restriction of γ to a compact interval $J \subset I$ is a *sub-path* of γ. If γ is one-to-one, γ is an *arc* ; if $\gamma(a) = \gamma(b)$, it is a *loop* ; if $\gamma(a) = \gamma(b)$ and γ is one-to-one on $[a, b)$, it is a *simple loop.* The concatenation of two paths (when it is defined) is denoted by $\gamma_1\gamma_2$. As it is usually done, we often will not make any distinction between a path and its image. In particular, if Y is a subset of X, we will write $\gamma \subset Y$ if the image of γ is included in Y.

We write $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ and we fix in this section and the next one a homeomorphism F of $\mathbf{A} = \mathbf{T}^1 \times [0,1]$ homotopic to the identity and a lift f of F to the universal cover $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \times [0,1]$. We suppose that f satisfies the *boundary twist condition* :

$$\text{for every } x \in \mathbf{R},\ p_1 \circ f(x,0) < x < p_1 \circ f(x,1),$$

where $p_1 : \widetilde{\mathbf{A}} \to \mathbf{R}$ is the first projection. We write $\mathrm{Fix}_*(F)$ for the set of fixed points of F that are lifted to fixed points of f. Let us state the Poincaré-Birkhoff theorem :

Theorem 1. *If F preserves the measure induced by $dx \wedge dy$, then $\sharp\mathrm{Fix}_*(F) \geq 2$.*

Let us recall the ideas of Birkhoff. The vector field $\widetilde{X} : z \mapsto f(z) - z$ is invariant by the covering automorphism $T : (x,y) \mapsto (x+1,y)$ and lifts a vector field X on $\mathbf{A}$ whose singular set is exactly $\mathrm{Fix}_*(F)$. If γ is a path in $\widetilde{\mathbf{A}} \setminus \mathrm{Fix}(f)$, one may define the *variation of angle*

$$i_\gamma f = \int_{\widetilde{X} \circ \gamma} d\theta$$

where

$$d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

is the usual polar form on $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. The form $d\theta$ being closed can be integrated on any (even non-smooth) path in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. The theorem will be proved if one finds a loop Γ in $\widetilde{\mathbf{A}} \setminus \mathrm{Fix}(f)$ such that $i_\Gamma \neq 0$. Indeed if $\mathrm{Fix}_*(F)$ is finite (equivalently if $\mathrm{Fix}(f)$ is discrete) then

$$i_\Gamma f = \sum_{z \in \mathrm{Fix}(f)} i(\widetilde{X}, z) \int_{\xi_z \circ \Gamma} d\theta$$

where $i(\widetilde{X}, z)$ denotes the Poincaré index of $\widetilde{X}$ at z and ξ_z is the vector field $z' \mapsto z' - z$. This implies that $\sharp\mathrm{Fix}_*(F) \geq 2$ because $i(\widetilde{X}, z) = i(X, \pi(z))$ and because the Poincaré-Hopf formula asserts that

$$\sum_{z \in \mathrm{Fix}_*(F)} i(X, z) = \chi(\mathbf{A}) = 0.$$

If we can find two paths γ and γ' such that $i_\gamma f = i_{\gamma'} f \neq 0$, the first one that joins $\mathbf{R} \times \{0\}$ to $\mathbf{R} \times \{1\}$, the second one that joins $\mathbf{R} \times \{1\}$ to $\mathbf{R} \times \{0\}$, the loop $\Gamma = \gamma\delta\gamma'\delta'$ obtained by adding horizontal segments on each boundary line will satisfy $i_\Gamma f = 2 i_\gamma f \neq 0$.

In [1] Birkhoff composes F with a small vertical translation to build such paths. Suppose that the displacement is positive, the iterates by the perturbed map G of $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ are pairwise disjoint, and they are not all included in the annulus (because G also preserves the area). Birkhoff chooses an arc α that joins a point $z \in \mathbf{T}^1 \times \{0\}$ to $G(z)$ and by concatenation of the iterates of α constructs an arc that joins $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ to $\mathbf{T}^1 \times \{1\}$ and that is lifted into an arc γ satisfying $i_\gamma f = -\frac{1}{2}$. We will give here a simple construction, in the spirit of Birkhoff's ideas, that does not need any perturbation and that is still valid under weaker hypothesis than the preservation of the area.

Definition 2. Let G be a homeomorphism of a topological space X. A *positive path* of G is a path $\gamma\,: I \to X$ such that for every t, t' in I

$$t' \geq t \Rightarrow G(\gamma(t')) \neq \gamma(t).$$

Observe that a positive path γ does not meet the fixed point set, that any sub-path of γ is positive and that the images $G^k \circ \gamma$, $k \in \mathbf{Z}$, are also positive.

Proposition 3. *If γ is a positive path of f that joins a boundary line of $\widetilde{\mathbf{A}}$ to the other one, then $i_\gamma f = -\frac{1}{2}$.*

Proof. We write the proof in the case where γ joins $\mathbf{R} \times \{0\}$ to $\mathbf{R} \times \{1\}$, the other case being similar. The boundary of the simplex

$$\Delta = \{(t,t') \in I^2 \,|\, t' \geq t\}$$

may be written $\partial\Delta = \delta_d\delta_h\delta_v$ where δ_d is the diagonal, δ_h a horizontal segment and δ_v a vertical one. The path γ being positive, the map

$$\Phi\,: (t,t') \mapsto f(\gamma(t')) - \gamma(t)$$

does not vanish on Δ and one has

$$\int_{\Phi\circ\delta_d} d\theta + \int_{\Phi\circ(\delta_h\delta_v)} d\theta = \int_{\Phi\circ\partial\Delta} d\theta = 0.$$

Observe now that the image by Φ of each segment δ_h and δ_v does not intersect the vertical half-line $\{0\} \times (-\infty, 0]$. This implies that

$$i_\gamma f = \int_{\Phi\circ\delta_d} d\theta = -\int_{\Phi\circ(\delta_h\delta_v)} d\theta = -\frac{1}{2}.$$

□

Recall that a *wandering point* of a homeomorphism f of a topological space X is a point that admits a *wandering neighborhood* U, that means a neighborhood U such that the $f^k(U)$, $k \geq 0$, are pairwise disjoint. Recall that a *Urysohn space* is a topological space such that two distinct points may be separated by closed neighborhoods.

Proposition 4. *Suppose that X is a connected and locally path-connected Urysohn space and that G is a fixed point free homeomorphism of X with no wandering point. If $Z \subset X$ satisfies $G(Z) \subset Z$, then for every $z \in X$ there exists a positive path of G that joins Z to z.*

Proof. One must prove the equality $Y = X$, where Y is the set of points that may be joined by a positive path of G whose origin belongs to Z. The space X being connected, it is sufficient to prove that $\overline{Y} \subset \mathrm{Int}(Y)$. Fix $z_0 \in \overline{Y}$. By hypothesis, one can find a path-connected neighborhood V of z_0 such that $\overline{V} \cap G(\overline{V}) = \emptyset$. We will prove that $V \subset Y$.

The fact that $z_0 \in \overline{Y}$ implies that there exists a positive path $\gamma_0 : I \to X$ from Z to V. The closures of the subsets $J = \gamma_0^{-1}(V)$ and $J' = \gamma_0^{-1}(G(V))$ do not intersect because $\overline{V} \cap G(\overline{V}) = \emptyset$. This implies that $\inf J \neq \inf J'$.

Suppose first that $\inf J < \inf J'$ (this includes the case where $J' = \emptyset$). In that case, there is a sub-path γ_1 of γ_0 from Z to V that does not meet $G(V)$. For every $z \in V$ one can find a path γ inside V that joins the extremity z_1 of γ_1 to z. The path $\gamma_2 = \gamma_1\gamma$ is positive because γ_1 is positive and $G(\gamma)$ is disjoint both from γ and γ_1. This implies that $z \in Y$.

Suppose now that $\inf J' < \inf J$. In that case, there is a sub-path γ_1 of γ_0 from Z to $G(V)$ that does not meet V. We denote by z_1 its extremity. The point $G(z_1)$ does not belong to γ_1 because this path is positive. The path being compact (X is Hausdorff), one can find a path-connected neighborhood $U \subset G(V)$ of z_1 such that $G(U)$ does not intersect γ_1. The set U being non wandering, one can find a point $z_2 \in U$ whose positive orbit meets $G^{-1}(U) \subset V$. Choose a path γ inside U that joins z_1 to z_2. The path $\gamma_2 = \gamma_1\gamma$ does not meet V and is positive because γ_1 is positive and $G(\gamma)$ is disjoint from γ_1 and γ. Let us consider the integer $k \geq 1$ such that $G^k(\gamma_2) \cap V \neq \emptyset$ and $G^{k'}(\gamma_2) \cap V = \emptyset$ if $0 \leq k' < k$. Since $G(Z) \subset Z$, the path $G^k(\gamma_2)$ is a positive path from Z to V that does not meet $G(V)$. We conclude like in the first case. □

Let us explain how to deduce Theorem 1 from Proposition 3 and 4.

Proof of Theorem 1. One may suppose that $\mathrm{Fix}_*(F)$ does not separate the two boundary circles (otherwise $\sharp\mathrm{Fix}_*(F) = +\infty$). If n is large enough, the homeomorphism F' of the annulus $\mathbf{A}' = \mathbf{R}/n\mathbf{Z} \times [0,1]$ lifted by f has no fixed points but the ones that are lifted to fixed points of f. Therefore $\mathrm{Fix}(F') = \mathrm{Fix}_*(F')$ does not separate the boundary circles of $\mathbf{A}'$ and one may consider the connected component W of $\mathbf{A}' \setminus \mathrm{Fix}(F')$ that contains the boundary. Moreover F' has no wandering point because it preserves the area. Applying Proposition 4 to $X = W$, to $G = F'|_W$ and to $Z = \mathbf{R}/n\mathbf{Z} \times \{0\}$ or $Z = \mathbf{R}/n\mathbf{Z} \times \{1\}$, one constructs a positive path of F' from one of the boundary circle of $\mathbf{A}'$ to the other one. Such a path is lifted to a positive path of f from the corresponding boundary line to the other one. Theorem 1 follows from Proposition 3. $\square$

Remark 5. One can prove that F' has no wandering point if it is the case for F. Indeed, let T' be a generator of the (finite) group of automorphisms of the covering space $\mathbf{A}'$. The fact that F has no wandering point implies that for every non empty open set $U \subset \mathbf{A}'$, there exists $q \geq 1$ and $p \in \mathbf{Z}$ such that $F'^q(U) \cap T'^p(U) \neq \emptyset$. Let us fix a non empty open set $U_0 \subset \mathbf{A}'$ and define a sequence $(U_k)_{k\geq 0}$ of non empty open sets where U_{k+1} may be written $U_{k+1} = F'^{q_k}(U_k) \cap T'^{p_k}(U_k)$. One deduces that for every $k' > k$, one has $U_{k'} \subset F'^{q_k+\cdots q_{k'-1}}(U_k) \cap T'^{p_k+\cdots p_{k'-1}}(U_k)$. One can find $k' > k$ such that $p_k + \cdots + p_{k'-1} = 0 \pmod n$. This implies that U_k is non-wandering and therefore that U_0 itself is non-wandering. So Theorem 1 is valid if instead of supposing that F preserves the area, one supposes that F has no wandering point. Anyway, instead of working in a finite cover of $\mathbf{A}$, one can prove directly that the conclusion of Proposition 2 occurs if X is the connected component of $\widetilde{\mathbf{A}}\backslash\mathrm{Fix}(f)$ that contains the boundary, if $G = f|_X$ and if Z satisfies $f(Z) \subset Z$ and $T(Z) = Z$.

References

[1] G. D. Birkhoff : Proof of Poincaré's last geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 14-22.

[2] G. D. Birkhoff : An extension of Poincaré 's last geometric theorem, *Acta. Math.*, **47** (1925), 297–311.

[3] L. E. J. M. Brown, W. D. Newmann : Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Michigan. Math. J.*, **24** (1977), 21-31.

[4] Patrice Le Calvez and Jian Wang : Some remarks on the Poincaré-Birkhoff Theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **V.138** (2010),**No.2**, 703-715.

[5] H. Poincaré : Sur un théorème de géométrie, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **33** (1912), 375-407.

****

数学趣闻——庞加莱最后几何定理

在1911年，庞加莱开始有了他可能不久于人世的预感，12月9日他写信给一个数学杂志的编辑，询问是否能接受一篇尚未完成的论文——与通常的习惯相反——关于一个庞加莱认为最最重要的问题的论文："……以我的年纪，我可能不能解决它了，所得到的结果，有可能把研究者们带到新的、意想不到的道路上去，尽管它们使我多次受骗，我认为它们太有前途了，我自愿献出它们……。"他已经把两年时间中较好的部分用来试着去克服他的困难，但没有收效。

他猜测的那个定理的证明，能够使他在三体问题上取得惊人的进展；特别是它将使他能够证明比以前考虑过的更一般的一些情形的无限多个周期解的存在。这个期望中的证明，在庞加莱的"未完成交响乐"发表以后不久，就由一个年轻的美国数学家乔治·戴维·伯克霍夫证明了。

1912年春天，庞加莱再次病倒，7月9日接受了第二次手术。手术是成功的，但是7月17日，他在穿衣服的时候，非常突然地死于血栓。他当时五十九岁，正处在他能力的顶峰——用潘勒韦的话说，"理性科学的活着的大脑。"

Mathematical Quotations

Poincaré, Jules Henri (1854-1912)

Mathematical discoveries, small or great are never born of spontaneous generation. They always presuppose a soil seeded with preliminary knowledge and well prepared by labour, both conscious and subconscious.

概率论感觉测试（二）

王子卓[1]

1、1000 枚硬币里有一个硬币两面都是国徽，其他的硬币都是一面是国徽，一面是数字。如果你从中选出了一个硬币，随机掷了 10 次，结果全部都是国徽，问这个硬币是那个两面都是国徽的概率大约有多大？

A. 99%

B. 90%

C. 75%

D. 50%

2、三国杀游戏里周泰的技能是当没有血的时候，可以从牌堆里抽取一张牌，如果和其前面的牌的数字都不同，则可以继续活着；否则就死了。假设牌堆里的牌是完全随机的一副扑克牌，问期望他大约一共要抽多少张牌才能死？

A. 3-4 张

B. 4-5 张

C. 5-6 张

D. 6-7 张

接上题，如果玩家可以给周泰增加一个技能，叫做重生。即在抽取第 k 张牌时如果这张牌和以前的牌数字相同，则周泰获得满血。但是玩家必须在使用角色前声明 k。如果你是玩家，你会声明 k 为多少？

A. 4

B. 5

C. 6

D. 其他

3、一位篮球运动员罚球 100 次。已知他前两个球罚中了一个。从第 3 个球开始，他罚每一个球的命中率为其前面所罚所有球的命中率，比如他前 50 个球罚中了 40 个，则下一个球的命中率为 80%。问以下哪种情况发生的可能性较大

A. 他最终罚中了 50-60 个球

B. 他最终罚中了 60-70 个球

C. 他最终罚中了 70-80 个球

[1] 数学系 03 级师兄,现就读于斯坦福大学

D. 以上 3 个可能性一样

4、接以前的收集硬币问题。 美国共有 50 种 25 分的硬币，在上次的题中，我们已经求过收集全他们所需要的大约次数（假设每种硬币出现的概率相同）。现在假设你已经收集了 80 枚硬币，你期望大约已经收集了多少种？
A. 30
B. 35
C. 40
D. 45

5、假设在一根长为 1 米的绳子上随机的分布着 5 只蚂蚁，他们的位置和初始的方向都是均匀随机的。从时刻 0 开始，他们朝着他们初始的方向以每分钟 1 米的速度开始爬，直到离开绳子或者碰到另外一只蚂蚁。当他们碰到另外一只蚂蚁时，两只蚂蚁会分别转向然后继续前进。问期望大约多少时间之后所有蚂蚁都将离开绳子?
A. 50 秒
B. 1 分钟
C. 2 分钟
D. 5 分钟

6、两个人玩一个硬币游戏。在游戏之前，第一个人选择一个长度为 3 的序列，比如说“国徽，国徽，数字”，在第一个人选择之后，另外一个人选择另外一个序列（必须是不同的）。 在两个人都选定序列之后游戏开始。两个人反复掷硬币，直到一个人所选择的序列出现为止。出现所选择此序列的人获胜。问先选择的人如果做出最正确的选择大约可以有多大的可能性获胜？
A. 30%
B. 50%
C. 70%
D. 90%

7、 假设有 100 个人排队买一个 5 块钱的电影票，其中 50 个人只有 5 块钱，50 个人只有 10 块钱。问电影院在整个过程中一直可以找开钱的可能性大约有多大？（注：这和在之前的测试中的台湾大选问题有一定的类似之处，但并不相同）
A. 1%
B. 2%

C. 5%
D. 10%

8. 假设你掷一枚硬币，问你期望需要掷大约多少次才能获得连续 10 个正面？
A. 100 次
B. 500 次
C. 1000 次
D. 2000 次

9. 赌场里有这样一个游戏：你掷一枚色子。在任意时刻，如果 6 从来没有出现，你可以选择获得你所掷出的总点数或者继续；若 6 出现，则游戏结束，你获得 0 块钱。（比如，你掷出了 2，3，5；则你可以选择立刻获得 10 块钱或继续，但是如果你下次掷出 6 你就什么都没有了，如果是其他你还可以继续）问这个游戏你的平均收益大概是多少（换句话说你愿意付多少钱去玩一次这样的游戏）？
A. $4
B. $6
C. $8
D. $10

10. 假设一个飞机上有 100 个座位。100 名乘客中第一名乘客喝醉了酒，就随机在飞机上找了一个座位坐下。其他的乘客如果自己的座位没有被占，则会坐在自己的座位上，否则也将在剩余的座位上随机的找一个座位。问最后一名乘客坐在自己座位上的概率有多大？
A. 50%
B. 10%
C. 5%
D. 1%

** About the resources of these problems, many of the problem in this set is from the book: *A Practical Guide to Quantitative Finance Interviews* by Xinfeng Zhou. They are frequently encountered in interviews for quantitative positions. So if you aim for those jobs, you would like to read it.

概率论感觉测试（二）答案

1. Answer:D.这个问题是一个比较简单的问题，只需要用 Bayes 公式计算一下即可。 但是人们有时候感觉这个概率比实际中的大。类似的问题还出现在比如当你检测出来患有某种疾病的时候，假设检测错误的概率只有千分之一，但是如果那个患有那个疾病的人本身只有万分之一或者更少，则你实际得这种病的几率也要比 10% 要略少。另外的一个情况我在我的另外一篇校内日志 Do say love to her 中也提到了。总的来说，人们通常更多的关注到了事情的变化，而忽略了一些事物的本质。

2. Answer:C.这个也没有什么算的技巧，只需要把各种情况列举一下即可得到大约需要 5.7 张牌。

Answer:B.与上题的计算方法一样，k 为 5 的时候最优，大约有 17%的可能性可以获得重生。

3. Answer:D.这个题也许有人会认为他要么罚中很多球，要么罚中很少球，因为一旦开始罚中的多，则后面命中率会倾向于越来越高，反之亦然。但是实际上这名运动员最后罚中 1-99 个球的可能性都是相等的。简单的证明方法可以用数学归纳法。

4. Answer:C.上次我们问过期望需要集多少个才可以集齐，答案大约是 200 个。实际上这个集的过程开始都是很快的，大约在 40 个的时候就用将近 30 种，在 80 个的时候有 40 种，而只有最后面几个需要很漫长的时间。这个公式是 N-N(N-1/N)^n, 其中 N 是一共要收集的数目，n 为已收集的数目。

5. Answer:A.从某种意义上来讲，这个题不能被认为是一道概率问题，因为其真正的难度不在于概率。似乎看起来这道题完全无法计算，因为你完全不知道每只蚂蚁的方向以及所处的位置，但是关键在于注意到当两只蚂蚁碰面时，虽然实际中他们互换了 方向，但是从运动的角度来讲，可以认为两只蚂蚁继续保持了前进但互换了代号。所以这个题相当于在 0-1 之间有 5 个随机数，问其中最大的期望是多少。这个数为 5/6， 所以答案为 A。

6. Answer:A.也许有些人会对这个答案感到有些吃惊。先选的人居然如此吃亏。因为人们可能会认为，在这些序列中，有一个最优的序列，它出现的平均时间最早。这确实不错，但是序列之间不是独立的，也就是说如果 A 比 B 好，B 比 C 好，

并不一定能保证 A 比 C 好。比如第一个人选了“国徽，国徽，数字”这个序列，那我选择“数字，国徽，国徽”就可以保证在他这个序列出现之前的那 3 个情况中，我大约有 1/2 的概率可以获胜（也即在这个序列之前的那次硬币为数字即可）。这个题只能用 Markov 链去计算任何两个序列对抗时分别的获胜率，然后用博弈论的方法去求解。对于第一个人来说，最佳的选择可使他有 1/3 的概率获胜。

7. Answer:B.在上一系列的概率论感觉测试的题目中，我们问在整个过程中，某一方一直领先另一方的概率。这个题只要求一方（有 5 块钱的人）不落后另外一方（有 10 块钱的人）。这个的算法是需要用 brownian motion 的 reflection principle。实际上的比例为从 0 开始每一步为-1,1 运动最后停到-2 的路径数除以停到 0 的路径数，为 1/51。

8. Answer:D.在上一系列的概率论感觉测试中，我们说掷 n 次大概连续正面的数量为 log_2^n.现在问的是要获得一定量的正面，需要掷多少次。结果比较接近但是仍然不是很相同，准确的数字为 2^(k+1)-2，也就是 2046 次。简单的证明方法可以用数学归纳法。而比较推荐学过 martingale 的同学用 martingale 的方法证明：假设每一时刻有 1 个人来赌，如果正面，他的资金翻倍，否则就为 0；当连续出现 10 个正面的时候，所有来赌的人的钱为 2046。根据 Optional Stopping Theorem, 所需要时间的期望也是 2046。Martingale 方法的好处是可以计算达到任何序列所需要的时间。

9. Answer:B.这个题需要用动态规划进行计算。这种动态规划在任何管理和金融的应用中都非常常见。准确地值大约为$6.15。

10. Answer:A.这个题应该算比较经典的一道题目，但是并不能算是一道纯粹的概率题。这种类似于脑筋急转弯的题目需要人们能注意到一些简化的方法。思考的方法大约如下：对于第一名乘客，如果他恰好坐在自己的座位上，则最后一名乘客肯定也能坐在自己的座位上，如果他恰好坐在了最后一名乘客的作为上，那最后一名乘客无论如何也无法坐在自己的位子上，而这两个概率是相等的；对于其他情况，如果他坐了第 k 个乘客的座位，则从第 2 到第 k-1 个乘客，他们都会坐在自己的位子上，问题变相当于飞机一共有 101-k 个座位，第一个乘客（原来的第 k 个）随机选一个座位。这样递归下去可以得到不管有多少座位，以上的问题的概率都是 1/2。

第一堂课 [1]

杜升华

探索数学世界的真理，追寻人类心智的荣耀，正是我们数学人的崇高使命。欢迎你们，基科九字班的同学们，欢迎你们来到高等数学的世界！就让我来带领你们吧，通往一条无限趋近于真理的道路。

同你们一样，我也是新生，只不过是研究生新生。我于 2005 年考入清华，成为首届“大基科班”的一员；大二分流，选择了数学系；大三时跟几个同我一样喜爱数学的同学共同创办了《荷思》。大学的这四年，对我来说是一段非常美好的时光。今天第一次登上讲台，我想以一个师兄、一个学长的身份，首先跟大家交流一些学习经验，提供一些建议。

一、学会欣赏数学。

学习数学分析，我们会经常遇到一个德国数学家的名字：卡尔·维尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）。正是由于为数学分析的严格基础的建立作出了卓越贡献，他被誉为“现代分析学之父”。他有一句名言：“一个没有几分诗人气的数学家，永远成不了一个完美无缺的数学家。”这种诗人气质，在我看来，主要是指对数学的欣赏。

为什么要说“学会”欣赏数学呢？有句老话叫“艺术源于生活，而又高于生活”。比如书法、绘画、交响乐等高雅艺术，只有具有一定欣赏水平的人才能体会其中的妙处。从某种意义上讲，数学也是一种艺术，而且是一种更为高雅、更为抽象的艺术。丘成桐教授所写《数学和中国文学的比较》，以优美的文笔展示了数学的意义、文采和意境。不仅如此，数学还是连接理论与实践、思想与观察的桥梁。正如华罗庚先生所言：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速．化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。”大卫·希尔伯特（David Hilbert）更在 1930 年的广播演讲中从应用与理论两方面深入阐释了数学的价值，并引用雅可比（Jacobi）的话说：”Die Ehre des menschlichen Geistes, ist der einzige Zweck aller Wissenschaft.“（人类心智的荣耀，是所有科学的唯一目的。）数学之美、数学的意义和价值，是需要借助理性思维不断思考才能体会和领悟的。只有学会了欣赏数学，才能培养和提高学习兴趣，才能为今后的数学生涯找到正确的方向。

至于具体做法，首先要多努力、多思考。没有具体的理论知识作为基础，一切有关数学修养的哲学感悟都只能是空谈。其次，我建议大家在课余时间适当地读一些“关于数学”的东西，即数学史、著名数学家传记与科普著作之类。好处是多方面的：我们既可以从中了解到数学发展的历史潮流是怎样的，一个数学概念

[1] 本文是作者第一堂数学分析习题课的讲稿，选入本刊时有所修改。

是为什么以及如何被引入的，一个数学定理解决了什么困难、产生了哪些影响，一个数学分支与其他分支的联系与发展趋势是什么，又可以看到历史上的数学大师是怎样做数学的，如何提出问题，如何发展或选取合适的工具来解决问题，如何做出有价值的推广，更会受到他们严谨、勤奋的工作态度与对数学的热情的感染，有时甚至能够同他们对数学的感悟产生共鸣。以此作为一种业余爱好，对于提高数学修养必大有益处。

这方面的课外读物，首先我要推荐 E. T. Bell 的 MEN OF MATHEMATICS，中译本《数学精英——数学家的故事》。这本书汇集了从古希腊时代到 19 世纪末的二十余位伟大数学家的生平传记，并且穿插一些相关高等数学知识的介绍，兼具知识性与趣味性。该书作者是一位数学家，对数学的发展历程有精辟的见解，语言也充满数学家的幽默。当然，非数学家的作品中也不乏精品。C. Reid 的 HILBERT，中译本《希尔伯特——数学世界的亚历山大》，生动地描绘了这位数学大师的热情洋溢的数学生涯。即便专业数学工作者，也能从这本书中获益不少。

数学思想方面的书，通常以像哈代（G. H. Hardy）这样的大数学家的作品为佳，因为他们对数学有更深刻的认识。新近出版的《数学家思想文库》丛书，还汇集了阿蒂亚（M. Atiyah）、布尔巴基（Bourbaki）等数学名家的通俗文章，是难得一见的好书。至于科普读物，我推荐布尔巴基学派成员狄奥多涅（J. Dieudonne）的《当代数学：为了人类心智的荣耀》，国内张景中院士主编的《好玩的数学》丛书也不错。

二、树立远大理想。

古语云："取法乎上，得乎其中；取法乎中，得乎其下；取法乎下，得乎其下下。"对我们来讲就是说，树立远大的理想，向数学大师学习，即使达不到那样高的学术造诣，也能取得不错的成就；只关注眼前的目标和经济上的利益，比如怎样提高学分绩，毕业后有一个好的出路，将来取得一份待遇优厚的工作，那是难以大有作为的；要是不求上进，把大量时间用在跟学习无关的事情上，甚至沉迷于网络、游戏，那后果是很严重的（清华同学中不乏因此而留级或延期毕业、甚至被勒令退学的人）。当然，有了雄心壮志不见得一定能够实现，还必须付出长期不懈的努力为之奋斗，而这个目标也会为你的奋斗增添无尽的动力。反之有一点则是肯定的，一个不想做数学家的人是不可能成为好的数学家的，这就好比不去买彩票的人永远不会中奖。

也许有人担心做数学会比较清苦；事实上恰恰相反，2009 年初美国一家机构做了一个最好、最差职业的排行榜 [2]（排名依据是收入、工作环境和强度等因素），数学家名列榜首。所以有志于数学事业的同学不必担心待遇问题。从更高的层次上讲，正如哈代在其名著A Mathematician's Apology（《一个数学家的辩白》）中所说，"没有任何其他学科像数学那样形成了清楚而一致的评判标准。为

[2] 见华尔街杂志的新闻报道：
http://online.wsj.com/article_email/SB123119236117055127-lMyQjAxMDI5MzAxNjEwOTYyWj.html

人们所铭记的数学家中绝大多数是名副其实的。如果能用现钞评估的话，数学的名誉将是最稳定、最可靠的投资。”

但是必须指出，名利并不是真正的数学工作者所追求的首要目标。如果只是为了当上教授或者获得荣誉而投身数学，那只能算是“取法乎中”，不是真正伟大的数学家的做法。我们应该追求更远大的目标，为我们所热爱的这门科学的发展贡献一己之力。有了这样一个远大理想作支撑，就会促使你努力学习，迎难而上。

上世纪 80 年代的某位清华新生写了这样一首词：

江城子·志

列车一夜辞平冈，别南土，换北疆。白杨年轻，红枫却待黄。为渡书海行清华，轻舒翅，望凤凰。

意气芳足待昂扬。非健男，有何妨。对空盟誓，终生献苍茫。念驱雷公如驱羊，舞长鞭，可怪降。

四年半之前，在我参加清华大学自主招生冬令营期间，当时的校党委副书记杨振斌老师在一场精彩的报告中向我们推荐了这首词。作者化用《柳毅传》里龙女牧羊的故事（念驱雷公如驱羊），以龙女自比，要降服一切妖魔鬼怪，表达了立志克服一切困难、实现远大抱负的决心，展现了一位刚考上清华的女同学“为渡书海行清华”的精神风貌和“对空盟誓，终生献苍茫”的远大理想。愿我们以此共勉。

三、坚持独立思考。

我们在多年的学习生活中，一定已经注意到这一现象：当你完全凭借自己的思考独立解决一道难题时，你会由衷地感到成功的喜悦；更为重要的是，这时你的解题能力肯定已经得到了提高，并且思路不易遗忘，以后解决类似问题将是很顺利的事情。

对于学生而言，坚持独立思考是一种有效的学习方法，尽管这意味着直接面对困难，需要付出更大的努力；而对于科学工作者来说，独立思考更是一种必备的素质，是做出创新工作的必要条件。爱因斯坦说：“我没有什么特别的才能，不过喜欢穷根究底地追究问题罢了。”这虽是自谦之辞，但由此可见这种探究精神的重要性。我们应当在学生时代就有意识地培养这种精神，以便为将来的科研工作做好准备。

四、注重基础知识的掌握和计算技巧的训练。

这里我想强调的是，要准确地理解并牢固地记忆基本的数学概念、重要的数

学定理，并熟练掌握常用的计算和证明技巧。要思考一个数学概念跟其他概念有什么联系和区别，为什么给出书中的那种定义，定义中哪些词句起到关键作用。要明确一个数学定理的适用条件，记住它的结论，理解其证明思路，体会它解决了什么困难、有什么用处。大家在高中都学过唐代名臣魏征的名言："求木之长者，必固其根本；欲流之远者，必浚其泉源。"这种打基础的功夫，是极其重要的。概念不清、基础不牢，就会犯低级的错误，白白浪费时间和精力。这种教训在那些"民间科学家"、"业余数学家"当中比比皆是。掌握了基础知识，还要注重计算与证明技巧的训练。因为数学研究当中的许多重大突破，往往取决于细节上的推导。我们应当练就过硬的数学本领，不要做华而不实的"数学评论家"。

五、加强交流。

对我们数学人来说，交流是不可或缺的。几个有同样理想追求的人一起讨论问题，相互学习，相互激励，是一种共同进步的有效途径。大学四年里，我很高兴能够跟几位同学一起创办《荷思》，为营造一种热爱数学、讨论数学的氛围而共同奋斗。不过遗憾的是我跟同学的交流仍有所不足。我真的很羡慕 David Hilbert 的大学生活：每天下午 5 点，他与 Hermann Minkowski、Adolf Hurwitz 两位好友准时到一棵苹果树下去散步，讨论着各种感兴趣的数学问题……

四年前，教我数学分析习题课的助教赵琳师兄在第一堂课上告诉我们，大学本科的班集体是人生当中最后一个有"班"的感觉的集体了。现在想来，真是千真万确。希望你们珍惜同学之间的友谊，在学业上加强交流，互相帮助，共同进步；同时加强与任课老师和助教的沟通，及时反映学习中遇到的问题；如有奇思妙想，更欢迎向《荷思》投稿。

最后，我再送给大家一句四年前我在第一堂习题课上听到的话：学习数学就像长跑。也许现在你们还无法理解数学的学习需要多么长久的努力，但只要坚持不懈，总会取得令人满意的成绩的。祝愿你们在数学之旅中，乃至在未来的人生旅途中，有一个美好的开端！

征稿启事

《荷思》是清华大学数学系学生自主创办的数学学术刊物，面向各个院系中对数学感兴趣的本科生及研究生。

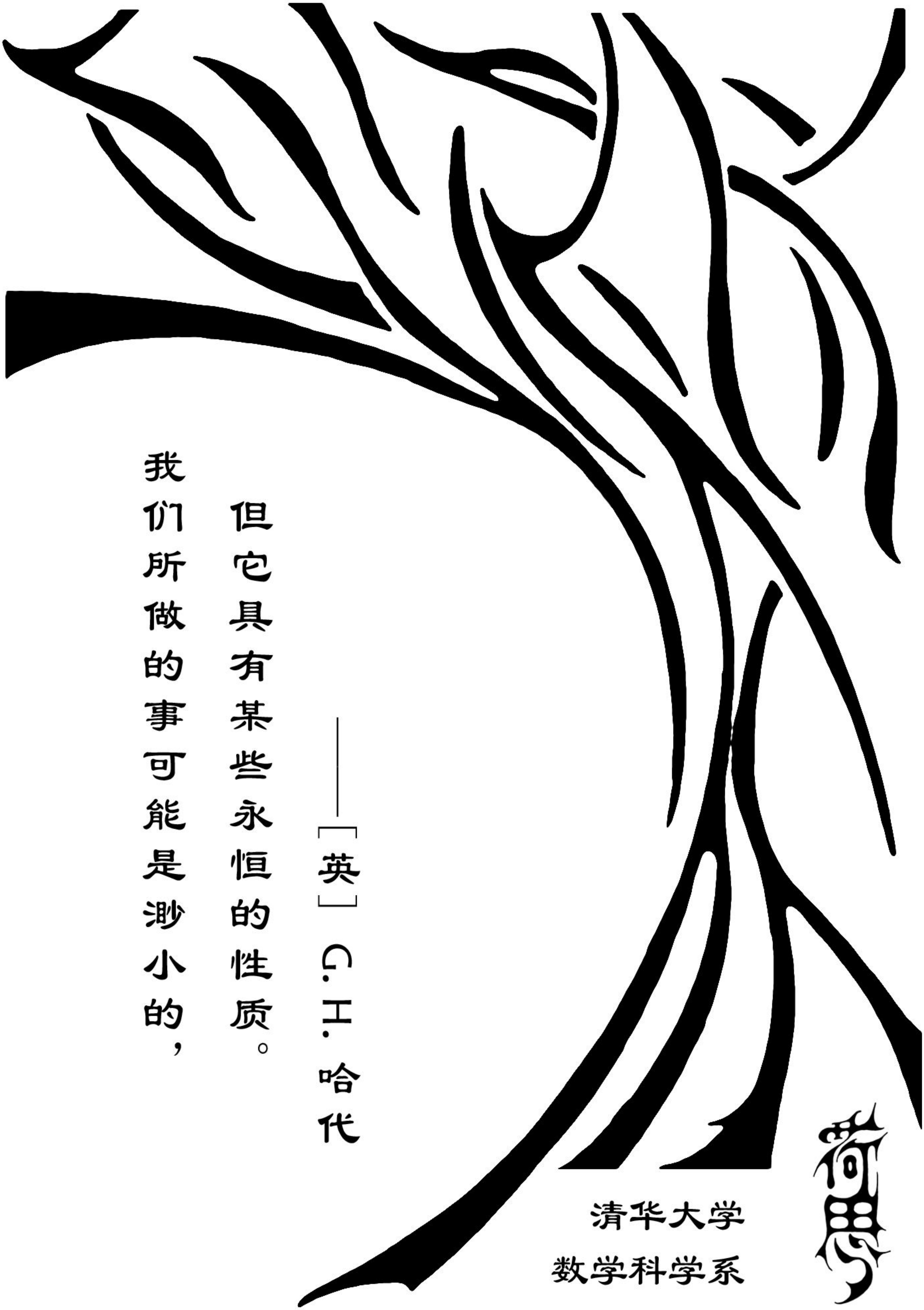
本刊欢迎全校师生任何与数学有关的投稿，无论是长篇的论述，还是精彩的小品，抑或学习/教学的心得、习题的妙解。在原作者的允许下，推荐他人的作品也同样欢迎。

为了编辑方便，建议投稿者能够提供电子版，并且采用 Word 或 LATEX 排版。来稿请注明作者，联系方式。

投稿请寄： THUmath@googlegroups.com

《荷思》编辑部
2009-12

联系本刊：THUmath@googlegroups.com
北京市 海淀区 清华大学 紫荆 9 号楼 501A
010-515-31892



我们所做的事可能是渺小的，但它具有某些永恒的性质。

——［英］G.H. 哈代

清华大学
数学科学系