变分和拓扑方法与微分方程

陈凌骅*

指导教师：邹文明教授

摘　要

本文中我们首先介绍了变分方法的基本概念，尤其是微分方程与其能量泛函之间的联系。之后具体考虑非线性微分方程组的球对称驻波解

$$\begin{cases} -\Delta u + u + V(x)u = f(x,u) \\ -\Delta V(x) = \lambda u^2. \end{cases}$$

并且对非线性项$f(x,u)$三种不同的增长水平分别加以考虑。通过应用一个抽象结果以及有关拓扑度的方法，对此三种情况均得到了多解的结果。

关键词：变分方法；Schrödinger-Poisson方程组；多解

§1　引言

§1.1　变分方法与一些基本定义

微分方程中的变分方法是将微分方程化为变分问题以探讨解的存在与否，以及解的个数等等的方法。古典变分法的基本内容是确定泛函的极值与极值点。确定泛函的极值点与确定线性微分方程的解这两个问题在一定条件下可以互相转化。

而近代变分法中，问题的范围扩大到非线性椭圆方程，其对应的能量泛函结构更加复杂，可能既没有上界也没有下界。此时方程的弱解只是对应着其能量泛函的临界点，而未必是极值点。在非线性方程解的存在性的研究中，极小极大原理（minimax principle）是重要技巧之一，这种方法不仅给出泛函的临界点，而且对相应的临界值作出了估计。在1973年， Ambrosetti A. 与 Rabinowitz P. H. 给出了所谓的“山路引理”，这个引理是极小极大原理的一个重要的具体形式，它形象的说明

*基数52

是，从盆地中心出发到盆地外部，必有一条道路从盆地周围山脉的最低点通过，而这个最低点就是泛函的一个临界点。近几十年来，山路引理和各种山路定理在非线性微分方程各种问题的应用中取得了许多有重要意义的新结果，大大推动了临界点理论的发展。

在开始具体讨论之前，我们先给出一些基本定义。

定义 1.1. 设E为 *Banach*空间，称集合$A \subset E$对称，如果$u \in A \ \Leftrightarrow\ -u \in A$。

与函数的可微相似，也可以定义泛函的可微性：

定义 1.2. 设E为 *Banach*空间，对偶空间为E'。$I:\ E \to \mathbb{R}$为泛函，$u \in E$。如果存在$A(u) \in E'$，使得

$$I(u+\phi) = I(u) + \langle A(u), \phi \rangle + o(\|\phi\|), \qquad \|\phi\| \to 0,$$

则称I在u点 *Fréchet*可微，$A(u)$称为I在u的 *Fréchet*导数，记$A(u) =: I'(u)$。如果I在E上每一点可微，则记$I \in C^1(E, \mathbb{R})$。

定义 1.3. 设泛函I在$u \in E$点可微，并且$I'(u) = 0$，则称u为I的一个临界点，$I(u)$称为相应的临界值。

定义 1.4. 称泛函$I \in C^1(E, \mathbb{R})$满足 *Palais-Smale* 条件，简称 *(PS)*条件，如果任意序列$\{u_n\} \subset E$使得$\{I(u_n)\}$有界，并且$\lim_{n\to\infty} I'(u_n) = 0$，都存在收敛子列。

在应用变分法证明泛函的临界点存在时，经常涉及临界序列的收敛性。而证明泛函满足 (PS)条件便是常用方法之一。

在本文的证明过程中，需要用到伪梯度向量场，以及拓扑度的概念及性质，更多的讨论可以参考 [2]。

定义 1.5. 设$I \in C^1(E, \mathbb{R})$。

- 如果$u, v \in E$满足$\|v\| \le 2\|I'(u)\|$，$\langle I'(u), v \rangle \ge \|I'(u)\|^2$，则称$v$是$I$在$u$处的伪梯度向量;
- 如果$S \subset E$，$X \in C(E, E)$，并且对任意$u \in S$，$X(u)$是I在u处的伪梯度向量，则称X为I在S上的伪梯度向量场。

定义 1.6. 设$A \subset E$为子集合，称A的拓扑度为n，记$\gamma(A) = n$，如果n为使得映射$\phi \in C(A, \mathbb{R}^n - 0)$存在的最小自然数。当这样的$n$不存在时，约定$\gamma(A) = \infty$，并且还约定$\gamma(\emptyset) = 0$。

由于后续证明的需要，我们在这里给出如下命题，具体证明可以参见 [2]。

命题 1.1. 设$I \in C^1(E,\mathbb{R})$，$K := \{u \in E : I'(u) = 0\}$为临界点集合，如果$\tilde{E} := E - K \neq \emptyset$，则存在$I$的局部 *Lipschitz*连续的伪梯度向量场$X : \tilde{E} \to E$。进一步，如果$I$为偶泛函，则可选取$X$为奇算子。

§1.2 一个具体问题

本文具体考虑一个三维空间中的非线性 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi - V(x)\psi + f(x,|\psi|)\frac{\psi}{|\psi|} = 0^1, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

考虑方程的驻波解，则令$\psi(t,x) = \exp\{i\omega t\}u(x)$，其中$u(x) \in \mathbb{R}$，则$u$满足不含时间的非线性 Schrödinger方程

$$-\Delta u + (\omega + V(x))u - f(x,u) = 0.$$

一个被广泛研究的情形是势函数$V(x)$由波函数本身的电荷决定，即满足 Poisson方程

$$-\Delta V(x) = \lambda|\psi|^2, \qquad \text{这里}\lambda > 0.$$

另外，由于频率$\omega > 0$是一个确定的数，所以不妨取定$\omega = 1$。此时，我们需要考虑的是有一个 Schrödinger方程和一个 Poisson方程的方程组

$$\begin{cases} -\Delta u + u + V(x)u = f(x,u) \\ -\Delta V(x) = \lambda u^2. \end{cases} \tag{1}$$

十年来这个问题有一系列的结果，最早在 V. Benci 与 D. Fortunato 的1998年的文章 [7]中处理了有界定义域 Dirichlet 边界条件且$f(x,u) \equiv 0$的情形，并得到无穷多解的结果。在2004年 T. D'Aprile 与 D. Mugnai [5]中，处理了$\lambda = 4\pi$，$f(x,u) = |u|^{p-1}u,\ 3 \le p < 5$的情形，得到一个非平凡解。在D. Ruiz的 [12]中，$f(x,u) = |u|^{p-1}u$，作者分别得到当$2 < p < 5$，对任意$\lambda > 0$，方程组至少有一对正解$\{\pm u\}$；当$1 < p < 2$方程组至少有两对正解$\{\pm u,\ \pm v\}$；当$p = 2$，存在$\Lambda' \in (0, 1/4)$，使得当$\lambda \in (0, \Lambda')$，方程组至少有一对正解$\{\pm u'\}$。不久之后A. Ambrosetti, D. Ruiz在文章中推广了 [12]的结果，证明了更多球对称解的存在。

[1] 由下文中$f(x,u)$满足的条件易见

$$\lim_{|\psi| \to 0} f(x,|\psi|)\frac{\psi}{|\psi|} = 0.$$

近几年，围绕这个问题国内外也还有很多其他的研究，譬如 [1]，[15]，[10]，[8]，不过迄今为止，还未发现有文献将该问题的非线性项替换为更为一般的函数而得到多解的结果。

在本文中，作者尝试将 [3]中的非线性项$|u|^{p-1}u$推广为更加一般的函数$f(x,u)$，并且得到与 [3]相同的多解性结论。由于作者水平所限，本文整体的结构仍旧来源于 [3]。

§1.3 问题的初步处理

在本文之后的讨论中，如果不加特殊声明，C, C'等等均表示推导过程中某个具体数值无关紧要的常数，$\int$表示在$\mathbb{R}^3$上对变量x积分，方程的解表示球对称弱解。

首先我们将问题化为一个非线性 Schrödinger方程。记$H^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，$D^{1,2}(\mathbb{R}^3) := \{u \in L^6(\mathbb{R}^3) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$为普通的 Sobolev空间，分别赋以范数

$$\|u\|^2 := \int \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx, \qquad \|u\|_D^2 := \int |\nabla u|^2 dx,$$

并且记$H_r^1 \subset H^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，$D_r^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$为相应的球对称函数子空间。由于我们的目标是寻找方程组的球对称解，所以下文的工作全部在 Hilbert空间$E := H_r^1$中展开。

由算子理论中的 Lax-Milgram定理，对任意$u \in E$，存在唯一的$\phi_u = \frac{1}{|x|} * u^2 \in D_r^{1,2}$，使得$-\Delta\phi_u = u^2$。具体证明过程参见 [5]。带入 (1)得到

$$-\Delta u + u + \lambda\phi_u(x)u = f(x,u), \qquad u \in E. \tag{2}$$

方程 (2)可以通过变分方法来处理。实际上，定义泛函$G:\ E \to \mathbb{R}$

$$G(u) := \int \phi_u(x)u^2(x)dx.$$

这样得到一个连续可微泛函

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{4}G(u) - \int F(x,u)dx, \qquad u \in E, \tag{3}$$

其中$F(x,u) := \int_0^u f(x,z)dz$，为$f(x,u)$的原函数。这个泛函的临界点对应着方程 (2)的解。

在本文的讨论中，$f(x,u)$满足以下条件：

f.1 $f(x,u) \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$；

f.2 $f(x,-u) = -f(x,u)$，并且$f(x,u)$为球对称函数；

f.3 存在常数$a>0,\ b>0,\ s\in[0,\,5)$，使得$|f(x,u)|\le a+b|u|^s$对任意(x,u)成立；

f.4 $\lim_{u\to 0} f(x,u)/u=0$对$x\in\mathbb{R}^3$一致成立。

而$f(x,u)$以及它的原函数$F(x,u)$还满足以下三个条件之一：

f.5 $0\le F(x,u)$对一切$u\in\mathbb{R}$成立；存在常数$p>3,\ r\ge 0$，使得$0<pF(x,u)\le uf(x,u)$对任意$|u|\ge r$成立；存在常数$A\in(0,\frac{p-2}{p+2})$使得，$|f(x,u)|\le A|u|$对任意$|u|<r$成立;

f.6 存在常数$3>p>2,\ r\ge 0$，使得$0<pF(x,u)\le uf(x,u)$对任意$|u|\ge r$成立；并且有$\lim_{u\to+\infty} f(x,u)/u^3=0$对$x\in\mathbb{R}^3$一致成立。

f.7 $0\le F(x,u)$对一切$u\in\mathbb{R}$成立；存在常数$r\ge 0, B_1>B_2>0, B_3\in(0,\frac{1}{5})$，使得$B_2|u|^3\le F(x,u)\le B_1|u|^3$ 对任意$|u|\ge r$成立；并且当$|u|<r$，有$|f(x,u)|\le B_3|u|$。

我们将证明对新的非线性项$f(x,u)$成立平行于 [3]中结论的以下：

定理 1.1. *当$f(x,u)$满足条件**f.1-f.4**，**f.5**，则对于任意$\lambda>0$，方程组 (2)在E中存在无穷多对解$\{\pm u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，并且当$k\to\infty$，$I_\lambda(\pm u_k)\to+\infty$。*

定理 1.2. *当$f(x,u)$满足条件**f.1-f.4**，**f.6**，则对于任意$k\in\mathbb{N}$，存在$\Lambda_k>0$ 对任意$\lambda\in(0,\,\Lambda_k)$，方程 (2)在$E$中有至少$k$对解$\{\pm u_{k,\lambda}\}$，使得$I_\lambda(\pm u_{k,\lambda})>0$，还有另外$k$对解$\{\pm v_{k,\lambda}\}$，使得$I_\lambda(\pm v_{k,\lambda})<0$。此外，有估计$\Lambda_k\le\Lambda_{k-1}\le\cdots\le\Lambda_1$。*

定理 1.3. *当$f(x,u)$满足条件**f.1-f.4**，**f.7**，则对于任意$k\in\mathbb{N}$，存在$\Lambda'_k>0$ 对任意$\lambda\in(0,\,\Lambda'_k)$，方程 (2)在$E$中有至少$k$对解$\{\pm u_{k,\lambda}\}$，使得$I_\lambda(\pm u_{k,\lambda})>0$。此外，有估计$\Lambda'_k\le\Lambda'_{k-1}\le\cdots\le\Lambda'_1$。*

对于$p\in(2,3)\cup(4,6)$，由 [5]中的结果可知相应泛函满足 (PS)条件，因此以上这些结果都可以由山路引理的对称版本得到，参见 [4]。然而，对于$p\in[3,4]$，泛函的几何结构更加复杂，无法用标准的方法加以描述；并且对于$p\in[3,4)$，尚无法验证 (PS)条件是否被满足。为了克服这些困难，我们引入一个辅助泛函

$$I_{\lambda,\mu}(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{\lambda}{4}G(u)-\mu\int F(x,u)dx,\qquad \frac{1}{2}\le\mu\le 1, \tag{4}$$

并且证明对于几乎每一个μ该泛函存在多个临界点。这个证明实际上是一个抽象结果的具体应用，该抽象结果的原型来自于L. Jeanjean的文章 [9]，其中用到了Struwe在 [14]提出的“单调性技巧 (monotonicity trick)”。对于$3<p<4$可以证明几乎每一个$\mu\in$

$[\frac{1}{2},1]$与任意$k\in\mathbb{N}$，泛函$I_{\lambda,\mu}$存在一个临界值$c_{k,\mu}$，相应临界点为$u_{k,\mu}\in E$。之后对于固定的k，令一列$\mu_n\nearrow 1$，可以证明序列u_{k,μ_n}收敛到 (2)的解u_k。最后通过与泛函

$$I_0(u):=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int F(x,u)dx$$

的比较可知$I_\lambda(\pm u_k)\to+\infty$。

对于$p=3$，泛函$I_{\lambda,\mu}$的结构有所不同，当$\lambda>0$充分小，对于几乎每一个$\mu\in[\frac{1}{2},1]$，仅仅存在有限个临界值$c_{\mu,k}$。我们同样通过$\mu_n\nearrow 1$来得到I_λ的临界点。最后，为了证明该泛函多个临界点的存在性，需要令$\lambda\to 0$，并且利用$I_0(u)$存在无穷多个相异临界点的事实。

本文后续内容的结构安排如下——在第二节提出那个抽象结果；在第三节中证明**定理1.1**。**定理1.2**以及**定理1.3**的证明细节由于完全类似于文献 [3]以及 [12]中的特殊情形，限于毕业特刊的篇幅，故在此略去。

§2 一个抽象结果

该抽象结果的原型来自于 L. Jeanjean的文章 [9]，在 [3]中 A. Ambrosetti 提出了这个具体的形式。实际上，在下文的证明中可见，如果$\alpha(u)$, $\beta(u)$都是偶泛函，则可以选取具有对称性，即在奇异同伦下稳定的集合族$\mathcal{F}$，并证明成立同样的抽象结果。这仅仅需要对 [3]中原有的证明过程稍加修饰。实际上本文将处理的具体问题 (3)正是偶泛函。另外原证明相对简略，在此本文作者按照自己的理解较为细致地对偶泛函情形作出证明。

考虑一个 Hilbert 空间E，以及泛函$\Phi_\mu:\ E\to\mathbb{R}$，有形式$\Phi_\mu=\alpha(u)-\mu\beta(u),\ \mu>0$。假设$\alpha(u)$, $\beta(u)$都是偶泛函，$\alpha\in C^1$，并且满足强制性条件，即$\lim_{\|u\|\to\infty}\alpha(u)=+\infty$，并且$\beta\in C^1,\ \beta(u)\geq 0,\ \beta,\ \beta'$将有界集合映为有界集合。另外，存在对称集合$K\subset E$与$E$中的一族对称紧子集$\mathcal{F}$，满足如下条件：

S.1 $K\subset A$对任意$A\in\mathcal{F}$成立，并且$\sup_K\Phi_\mu<c_\mu$，其中

$$c_\mu:=\inf_{A\in\mathcal{F}}\max_{u\in A}\Phi_\mu;$$

S.2 如果$\eta\in C([0,1]\times E,E)$ 为一个奇同伦，使得$\eta(0,\cdot)=I_E$，$\eta(t,\cdot)$为同胚，并且$\eta(t,x)=x$对任意$x\in K$成立，则有$\eta(t,A)\in\mathcal{F}$对任意$A\in\mathcal{F}$成立。

首先需要推导c_μ的基本性质，归结为如下

引理 2.1. *在以上条件下，$\mu\mapsto c_\mu$为单调非增左连续映射。*

Proof. 由$\beta(u) \geq 0$以及c_μ的定义，显然该映射单调非增。

现假设$\mu_n \nearrow \mu$，则有$c_{\mu_n} \geq c_\mu$。任意$\epsilon > 0$，存在$A \in \mathcal{F}$使得$\max_{u\in A} \Phi_\mu < c_\mu + \epsilon$。由于$A$为紧集，所以当$n >> 1$，有$\max_{u\in A} |\Phi_{\mu_n} - \Phi_\mu| < \epsilon$。因此得出$c_\mu \leq c_{\mu_n} \leq \max_{u\in A} \Phi_{\mu_n} \leq c_\mu + 2\epsilon$。故左连续性得证。 □

由以上引理即知映射$\mu \mapsto c_\mu$几乎处处可微。记$\mathcal{J} \subset (0, +\infty)$为该映射的可微点集合。

命题 2.1. 对任意$\mu \in \mathcal{J}$，存在一个关于水平c_μ的有界 *(PS)*序列，即存在$\{u_n\} \subset E$使得

$$\Phi_\mu(u_n) \to c_\mu, \qquad \Phi'_\mu(u_n) \to 0.$$

Proof. 令$\mu_k \nearrow \mu$；由于$\mu \in \mathcal{J}$，则$\frac{c_\mu}{\mu}$在μ点也可微，因而有

$$\frac{\frac{c_{\mu_k}}{\mu_k} - \frac{c_\mu}{\mu}}{\mu - \mu_k} \leq C \tag{5}$$

对于某常数$C > 0$成立。因为$\alpha(u)$满足强制性条件，故可选择$R > 0$，使得

$$\alpha(u) \leq C\mu^2 + 2\mu \;\Rightarrow\; \|u\| < R. \tag{6}$$

假设命题结论不真，则存在$\delta > 0$充分小，使得

$$\|\Phi'_\mu(u)\| \geq 2\delta, \quad \forall u \in M := \{u \in E : |\Phi_\mu(u) - c_\mu| < 2\delta, \|u\| < 2R\}.$$

此外，定义集合

$$N := \{u \in E : |\Phi_\mu(u) - c_\mu| < \delta, \|u\| < R\} \subset M.$$

在后文中我们会证明$N \neq \emptyset$。

由β, β'将有界集合映为有界集合，并且$\mu \mapsto c_\mu$左连续，故可以取定k充分大，使得

a. $(\mu - \mu_k)\|\beta'(u)\| < \delta$，对于任意$\|u\| \leq 2R$成立；

b. $(\mu - \mu_k)|\beta(u)| < \frac{\delta}{3}$，对于任意$\|u\| \leq R$成立；

c. $|c_\mu - c_{\mu_k}| < \frac{\delta}{3}$；

d. $|\mu - \mu_k| < \frac{\delta}{3}$。

令$X: M \to E$为Φ_μ的伪梯度向量场，并且为奇映射；$\chi: E \to [0, +\infty)$ Lipschitz连续，并且为偶函数，使得在N中$\chi = 1$，在$E - M$中$\chi = 0$。考虑由X, χ诱导的流

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}(u,t) &= -\frac{1}{4\delta}\chi(\psi(u,t))X(\psi(u,t)) \\ \psi(u,0) &= u. \end{aligned}$$

由定义

$$\frac{d}{dt}\Phi_\mu(\psi(u,t)) = -\frac{1}{4\delta}\langle \Phi_\mu(\psi(u,t))',\, \chi(\phi(u,t))X(\phi(u,t))\rangle.$$

因此，结合伪梯度向量场的定义以及假设 **a**，我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_\mu(\psi(u,t)) &\leq 0 \quad \forall u \in E; \\ \frac{d}{dt}\Phi_{\mu_k}(\psi(u,t)) &\leq 0 \quad \forall u \in E; \\ \frac{d}{dt}\Phi_\mu(\psi(u,t)) &\leq -\delta \quad \text{当}\, \psi(u,t) \in N. \end{aligned}$$

选取$A \in \mathcal{F}$，使得$\max_{u\in A}\Phi_{\mu_k} < c_{\mu_k} + (\mu - \mu_k)$。当$u \in E$，记$u_t := \psi(u,t),\ A_t := \psi(A,t)$。当选取$\delta < \frac{1}{2}|c_\mu - \sup_{u\in K}\Phi_\mu(u)|$时，由假设 S.1，可知$K \cap M = \emptyset$，因此$\psi$在$K$上对于$t$为常数。再由假设 S.2得出$A_t \in \mathcal{F}$。

在此断言：

- 如果$u \in A$对某$t \geq 0$成立$\Phi_\mu(u_t) > c_{\mu_k} - (\mu - \mu_k)$，则$u_t \in N$。

由这个断言立即可以得出$N \neq \emptyset$的结论。实际上，由c_μ的定义可知存在$u \in A$使得$\Phi_\mu(u) \geq c_\mu$。由此断言即知$u \in N$。

下面分两步来证明这个断言。

i. $\|u_t\| < R$.

首先由流的下降性以及我们对集合A的选择可知

$$\Phi_{\mu_k}(u_t) \leq \Phi_{\mu_k}(u) \leq c_{\mu_k} + (\mu - \mu_k).$$

由此不等式以及断言中的假设，有

$$\begin{aligned} \alpha(u_t) &= \mu\mu_k \frac{\frac{\Phi_{\mu_k}(u_t)}{\mu_k} - \frac{\Phi_\mu(u_t)}{\mu}}{\mu - \mu_k} \\ &\leq \mu\mu_k \frac{\frac{c_{\mu_k}}{\mu_k} - \frac{c_\mu}{\mu}}{\mu - \mu_k} + (\mu + \mu_k) \leq C\mu^2 + 2\mu. \end{aligned}$$

由 (5)即得$\|u_t\| < R$。

ii. $|\Phi_\mu(u_t) - c_\mu| < \delta$.

由断言中的假设以及 **d**，我们有

$$\Phi_\mu(u_t) > c_\mu - (\mu - \mu_k) > c_\mu - \delta.$$

结合第一步以及 **b, c, d**，得到

$$\Phi_\mu(u_t) \le \Phi_{\mu_k}(u_t) + \frac{\delta}{3} \le \Phi_{\mu_k}(u) + \frac{\delta}{3} < c_\mu + (\mu - \mu_k) + \frac{\delta}{3} < c_\mu + \delta.$$

即得第二步结论，于是断言得证。

最后我们将证明$\max_{u\in A_2}\Phi_\mu(u) \le c_\mu - (\mu - \mu_k)$，由 **S.2**，$A_2 \in \mathcal{F}$，因而这与$c_\mu$的定义矛盾，于是假设错误，即命题得证。

若不然，则存在$u \in A$，使得$\Phi_\mu(u_2) > c_\mu - (\mu - \mu_k)$。特别，由流的下降性可知$\Phi_\mu(u_t) > c_\mu - (\mu - \mu_k)$对一切$t \in [0,2]$成立。定义$g(t) := \Phi_\mu(u_t)$，得到如下矛盾：$g(0) < c_\mu + \delta$, $g(2) > c_\mu - \delta$，然而$g'(t) < -\delta$。 □

§3 当$3 < p < 6$时方程组的多解性

§3.1 极小极大值

本节我们将上一节的抽象结果用于偶泛函 (4)，在此$E = H_r^1$，$\alpha(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\lambda G(u)$，$\beta(u) = \int F(x,u)dx$。

在构造集合族$\mathcal{F}$之前，先做一些准备工作。

现在设$u_t(x) = u(tx)$，推导$I_{\lambda,\mu}(t^2u_t)$。直接计算可知

$$\begin{aligned}\int |\nabla u_t(x)|^2dx &= \frac{1}{t}\int |\nabla u(y)|^2dy \\ \int u_t^q(x) &= \frac{1}{t^3}\int u^q(y)dy, \qquad 2 \le q \le 6.\end{aligned}$$

此外，记$\phi^*(x)$为方程$-\Delta\phi^* = (t^2u_t)^2$的解，则有$\phi^*(x) = t^2\phi_u(tx)$。由此可知

$$\begin{aligned}G(t^2u_t) &= \int \phi^* t^4 u_t^2(x)dx = t^6\int \phi_u(tx)u^2(tx)dx \\ &= t^3\int \phi_u(y)u^2(y)dy = t^3G(u).\end{aligned}$$

由以上推导得到

$$I_{\lambda,\mu}(t^2u_t) = \frac{t^3}{2}\int |\nabla u|^2dx + \frac{t}{2}\int u^2dx + \frac{\lambda t^3}{4}G(u) - \mu\int F(x, t^2ut)dx.$$

下面设$u\neq 0$，并做一些具体的估计。由条件 **f.3**， **f.4**，对任意$\epsilon>0$，存在常数$C>0$，使得

$$|f(x,u)|\leq \epsilon|u|+C|u|^s, \qquad \forall (x,u)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}. \tag{7}$$

两边对u积分得

$$|F(x,u)|\leq \int_0^u |f(x,z)|dz\leq \frac{\epsilon}{2}|u|^2+C|u|^{s+1}. \tag{8}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\int F(x,t^2u_t)dx\right| &\leq \int\left(\frac{\epsilon}{2}t^4|u(tx)|+Ct^{2s+2}|u(tx)|^{s+1}\right)dx\\ &= t\,\frac{\epsilon}{2}\int|u(y)|^2dy+t^{2s-1}\,C\int|u(y)|^{s+1}dy.\end{aligned}$$

现在取$0<\epsilon_0<\frac{1}{2}$，则对任意$u\neq 0$，当$t>0$充分小，有

$$I_{\lambda,\mu}(t^2u_t)\geq t\,\frac{\epsilon_0}{2}\int u^2dx>0. \tag{9}$$

另一方面，由条件 **f.5**，当$|u|\geq r$

$$\frac{p}{u}\leq\frac{f(x,u)}{F(x,u)},$$

两边积分得

$$p\ln(|u|)\leq \ln(|F(x,u)|), \qquad |u|\geq r,$$

即

$$|F(x,u)|\geq C|u|^p, \qquad |u|\geq r. \tag{10}$$

另一方面，仍然由条件 **f.5**，对任意$u\in\mathbb{R}$总有$F(x,u)\geq 0$。结合以上讨论，以及$F(x,u)$关于u为偶函数，最终我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}F(x,t^2u(tx))dx\\ =\;&\int_{\{x:\,|t^2u(tx)|\geq r\}}F(x,t^2u(tx))dx+\int_{\{x:\,|t^2u(tx)|<r\}}F(x,t^2u(tx))dx\\ \geq\;&\int_{\{x:\,|t^2u(tx)|\geq r\}}C|t^2u(tx)|^pdx\\ =\;&C\,t^{2p-3}\int_{\{y:\,|t^2u(y)|\geq r\}}|u(y)|^pdy.\end{aligned}$$

由 Levi单调收敛定理知，对于确定的$r>0$，有

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\{y:\,|t^2u(y)|\geq r\}}|u(y)|^pdy=\int_{\mathbb{R}^3}|u(y)|^pdy.$$

故，当$t>0$充分大，由$3<p<6$可知

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(x,t^2u(tx))dx \geq \frac{C}{2}t^{2p-3}\int_{\mathbb{R}^3}|u(x)|^p dx.$$

因此，当$t>0$充分大，$u\neq 0$，

$$I_{\lambda,\mu}(t^2u_t) \leq \frac{t^3}{2}\int|\nabla u|^2dx + \frac{t}{2}\int u^2dx + \frac{\lambda t^3}{4}G(u) - \mu\frac{C}{2}t^{2p-3}\int_{\mathbb{R}^3}|u(x)|^p dx.$$

记B为E中单位球，$S:=\partial B$。由以上推导可知$\forall u\in S$，存在唯一最小的$T=T(u)>0$，使得

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\frac{1}{2}}(T^2u_T) &= 0, &&(11)\\
I_{\lambda,\frac{1}{2}}(t^2u_t), &< 0 \qquad \forall\, t>T(u), &&(12)\\
\max_{t\in[0,T(u)]} I_{\lambda,\frac{1}{2}}(t^2u_t) &> 0. &&(13)
\end{aligned}$$

对任意$k\in\mathbb{N}$，选取E的$k-$维子空间$E_k\subset E$，并且$E_k\subset E_{k+1}$。记$S_k:=S\cap E_k$。由于$S_k\ni u\mapsto T(u)$为连续映射，并且S_k为紧集，故$T_k:=\sup\{T(u):\, u\in S_k\}<+\infty$。进而集合

$$A_k:=\{v\in E:\, v=t^2u_t,\, t\in[0,T_k],\, u\in S_k\}$$

为紧集。同时，由于$I_{\lambda,\mu}$为偶泛函，故A_k是对称集合。由于$T_k\geq T(u), \forall\, u\in S_k$，因此

$$I_{\lambda,\frac{1}{2}}(v)\leq 0, \qquad \forall\, v\in\partial A_k. \tag{14}$$

下面设

$$H_k:=\{g:\, E\to E \text{ 奇同胚，使得 } g(v)=v, \forall\, v\in\partial A_k\}$$

并考虑

$$G_k:=\{g(A_k):\, g\in H_k\}.$$

定义

$$c_{k,\mu}:=\inf_{A\in G_k}\max_{u\in A} I_{\lambda,\mu}(u).$$

由于$A_k\subset A_{k+1}\ \forall\, k\in\mathbb{N}$，则有$c_{k,\mu}\geq c_{k-1,\mu}\geq\cdots\geq c_{1,\mu}>0$。此式最后一个不等号成立是因为$c_{1,\mu}$正是由山路引理得到的$I_{\lambda,\mu}$的临界水平。

现在来证明G_k可以作为第二节抽象结果中的集合族$\mathcal{F}$。实际上，取$K=\partial A_k$，由 (14)以及不等式$I_{\lambda,\mu}(u)\leq I_{\lambda,\frac{1}{2}}(v),\ \forall\,\mu\in[\frac{1}{2},1]$得到

$$\sup_{v\in\partial A_k} I_{\lambda,\mu}(v)\leq 0. \tag{15}$$

然而$c_{k,\mu}>0$，故条件 **S.1**满足。

另一方面，对于所有满足条件 **S.2**的奇映射η，以及所有$g\in H$，我们有$\tilde{g}:=\eta(t,g)\in H$，于是条件 **S.2**满足。

引理 3.1. *存在$\mathcal{M}\subset[1/2,1]$，使得$[1/2,1]-\mathcal{M}$为零测集，并且对一切$\mu\in\mathcal{M}$ 以及$k\in\mathbb{N}$，$c_{k,\mu}$ 为$I_{\lambda,\mu}$ 的临界值。*

Proof. 对任意$k\in\mathbb{N}$，以$\mathcal{M}_k\subset[1/2,1]$记$\mu\mapsto c_{k,\mu}$可微点的集合。记$\mathcal{M}:=\cap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{M}_k$；显然$[1/2,1]-\mathcal{M}$为零测集。

对于固定的$k\in\mathbb{N}$与$\mu\in\mathcal{M}$，对$\Phi_\mu=I_{\lambda,\mu}$，$\mathcal{F}=G_k$应用第二节抽象结果，得到有界序列$\{u_n\}$，使得$I_{\lambda,\mu}(u_n)\to c_{k,\mu}$，$I'_{\lambda,\mu}(u_n)\to 0$。则因为$E$为自反可分的 Banach空间，所以任意有界序列中存在子序列$u_n\rightharpoonup u_0$。而另一方面 [12]中的**引理2.1**告诉我们当$u_n\rightharpoonup u_0$弱收敛于$E=H_r^1$，则$\phi_{u_n}\to\phi_{u_0}$强收敛于D_r^1。这个结果与$H_r^1\hookrightarrow L^{s+1}$的紧嵌入性质结合，可知实际上$u_n\to u_0$强收敛于$E$。引理得证。 □

§3.2 I_λ的临界值

在确定I_λ的临界值之前，我们先建立一个引理：

引理 3.2. *设$\mathcal{M}\ni\mu_n\nearrow 1$，$k\in\mathbb{N}$固定。选取$u_n\in E$使得$I_{\lambda,\mu_n}(u_n)=c_{k,\mu_n}$，$I'_{\lambda,\mu_n}(u_n)=0$。则存在子序列$u_n\to u\in E$使得$I_\lambda(u)=c_{k,1}$，$I'_\lambda(u)=0$。*

Proof. 我们首先要证明序列$\{u_n\}$在E中有界，之后的步骤都是标准的。

显然$\{c_{k,\mu_n}\}$为单调非增的正序列，因而有界。由条件可知$I_{\lambda,\mu_n}(u_n)=c_{k,\mu_n}$，$\langle I'_{\lambda,\mu_n}(u_n),u_n\rangle=0$，即

$$\int\left[\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2+\frac{1}{2}u_n^2+\frac{\lambda}{4}\phi_{u_n}u_n^2-\mu_n F(x,u_n)\right]dx=c_{k,\mu_n},\tag{16}$$

$$\int\left[|\nabla u_n|^2+u_n^2+\lambda\phi_{u_n}u_n^2-\mu_n u_n f(x,u_n)\right]dx=0.\tag{17}$$

这是因为$\{u_n\}$满足方程

$$-\Delta u_n+u_n+\lambda\phi(x)u_n=\mu_n f(x,u_n).\tag{18}$$

而方程 (18)的解满足 Pohozaev等式。具体证明见文献 [6]。在此，Pohozaev等式的具体形式为

$$\int\left[\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2+\frac{3}{2}u_n^2+\frac{5\lambda}{4}\phi_{u_n}u_n^2-3\mu_n F(x,u_n)\right]dx=0.\tag{19}$$

为记号简便，下面记$\alpha_n := \int |\nabla u_n|^2$，$\beta_n := \int u_n^2$，$\gamma_n := \lambda \int \phi_{u_n} u_n^2$，$\delta_n = \mu_n \int F(x, u_n)$以及$\epsilon_n = \mu_n \int u_n f(x, u_n)$。于是根据 (16)，(17)以及 (19)，得到以下线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{4}\gamma_n - \delta_n &= c_{k,\mu_n} \\ \alpha_n + \beta_n + \gamma_n - \epsilon_n &= 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{3}{2}\beta_n + \frac{5}{4}\gamma_n - 3\delta_n &= 0 \end{aligned}$$

下面用$\frac{12-5p}{2}$，1，$\frac{p-4}{2}$依次乘以上述三个等式，相加后得到

$$(p-3)\alpha_n + \frac{p-2}{2}\beta_n = \frac{5p-12}{2} c_{k,\mu_n} + p\,\delta_n - \epsilon_n. \tag{20}$$

由条件 **f.5**，$3 < p$，而且上式中

$$p\,\delta_n - \epsilon_n = \mu_n \int (pF(x, u_n) - u_n f(x, u_n))dx \le \frac{p+2}{2} A\beta_n < \frac{p-2}{2}\beta_n.$$

再由$\{c_{k,\mu_n}\}$有界，α_n和β_n均为正数，我们得出α_n和β_n均有界。于是序列$\{u_n\}$在E中有界。

通过与**引理3.1**证明中相同的推导可知，$u_n \to u$强收敛于E。特别有$I'_\lambda(u) = 0$。

最后，由于映射$\mu \to c_{k,\mu}$左连续，以及$\mu_n \nearrow 1$，我们有$I_\lambda(u) = c_{k,1}$。 □

§3.3 完成证明定理1.1

下文中记$c_k := c_{k,1}$。值得注意的是上一引理实际上并没有得出多解的结论，因为那些临界点以及临界值可能重合在一起。下面的命题才真正说明泛函I_λ的确有无穷多个临界值，于是完成了**定理1.1**的证明。

命题 3.1. 当$k \to \infty$，$c_k \to +\infty$.

Proof. 由于$\lambda > 0$以及$G(u) \ge 0$，我们有

$$I_\lambda(u) \ge I_0(u), \qquad \forall\, u \in E, \tag{21}$$

其中$I_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int F(x, u)dx, \quad u \in E$。令$B^k := E_k \cap B$,，以及

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_k &= \{g \in C(B^k, E) : g\text{ 为奇同胚}, I_0(g(y)) \le 0, \forall\, y \in \partial B^k\}, \\ \tilde{G}_k &= \{A \subset E : A = g(B^k), g \in \tilde{\Gamma}_k\}, \\ \tilde{b}_k &= \inf_{A \in \tilde{G}_k} \max_{u \in A} I_0(u). \end{aligned}$$

由 [4]中**推论2.16**以及**定理3.14**可知

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{b}_k = +\infty. \tag{22}$$

值得指出的是 [4]中**定理3.14**是对在$H_0^1(\Omega)$上定义的泛函I_0得出的，其中$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为有界区域。实际上这个设定仅仅是为了保证嵌入$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 < p < 2^*$的紧性，然而在球对称 Sobolev空间中，这种紧性仍旧得以保持。

现在我们断言$G_k \subset \tilde{G}_k$。为此，令$A \in G_k$，则存在$g \in H$使得$A = g(A_k)$。首先，存在一个奇同胚$\varphi\colon B^k \to A_k$，

$$\varphi(u) = T_k^2 \|u\| u(T_k \|u\| x) \qquad u \in B_k.$$

因而$A = g \circ \varphi(B^k)$。显然$\tilde{g} := g \circ \varphi$为奇同胚，所以对任意$y \in \partial B^k$，有$v := \varphi(y) \in \partial A_k$。由$g \in H$，知$g(v) = v$。因此由 (21)与 (15)得

$$I_0(g(v)) = I_0(v) \le I_\lambda(v) \le 0.$$

这就证明了我们的断言，并且得出$c_k \ge \tilde{b}_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$. 于是有$\lim_{k\to\infty} c_k = +\infty$，**定理1.1**证毕。 □

§4 结论

至此，我们完全证明了第一章中的第一个定理，即推广了文献[3]中的第一个结果。然而不得不说的是，虽然将方程组的非线性项由具体的函数$|u|^p u$换为了更一般的$f(x,u)$，但是我们仅仅走出了一小步。因为一般来说，只对$f(x,u)$在0点附近和u充分大时的行为加以限制。然而我们在第三章以及第五章的证明中，还对$0 < |u| < r$时$f(x,u)$的行为加以限制，并且假设了$0 \le F(x,u)$对一切$u \in \mathbb{R}$成立。这些分别是为了证明序列$\beta_n := \int u_n^2 dx$的有界性，以及应用第二章的抽象结果而需要保证辅助泛函$I_{\lambda,\mu}$对参数μ的单调性。以前文献中的函数$|u|^p u$自然满足这两个限制。

值得注意的是，由条件 **f.4**，当$|u| > 0$充分小，后一限制条件自然满足。而且，如果方程是建立在某有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^N$中，则无需限制$0 < |u| < r$时$f(x,u)$的行为。然而本文中处理的定义域是$\mathbb{R}^3$本身，所以一些保证有界性的方法无法直接在此应用。

限于作者水平，尚不了解这两条限制，尤其是前一条，是否有关问题的本质，抑或只是技巧的不到位。

参考文献

[1] A. Ambrosetti, *On Schrödinger-Poisson Systems*, Milan J. Math. 76 (2008), 257-274

[2] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 104. Cambridge Univ. Press, 2007.

[3] A. Ambrosetti, D. Ruiz, *Multiple bound states for the Schrödinger-Poisson equation*, Comm. Contemp. Math.10 (2008) 1-14.

[4] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

[5] T. D'Aprile and D. Mugnai, *Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 134 (2004) 893-906.

[6] T. D'Aprile, D. Mugnai, *Non-existence results for the coupled Klein Gordon Maxwell equations*, Adv. Nonlinear Stud. 4 (2004) 307-322.

[7] V. Benci, Donato Fortunato, *An Eigenvalue Problem for the Schrödinger-Maxwell Equations*, Topo. Meth. Nonl. Anal. 11, (1998), 283-293

[8] Hiroaki Kikuchi，*On the existence of a solution for elliptic system related to the Maxwell-Schrödinger equations*, Nonlinear Analysis 67 (2007) 1445-1456.

[9] L. Jeanjean, *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and applications to a Landesman-Lazer type problem set on RN*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 129 (1999) 787-809.

[10] João Marcos do Ó, Everaldo Medeiros, Uberlandio Severo, *On the existence of signed and sign-changing solutions for a class of superlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl. 342 (2008) 432-445.

[11] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critcal Point Theory with Applications to Differetial Equations*, AMS, 1986.

[12] D. Ruiz, *The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term*, J. Funct. Anal. 237 (2006) 655-674.

[13] W.A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. 55 (1977) 149-162.

[14] M. Struwe, *Variational Methods*, Ergeb. der Math. u. Grenzgeb, Vol. 34 (Springer-Verlag, 1996).

[15] Leiga Zhao, Fukun Zhao, *On the existence of solutions for the Schrödinger-Poisson equations*, J. Math. Anal. Appl. 346 (2008) 155-169