谈数学分析中的 3 个结果*

马力†

摘要:

我们在这里要谈到的定理有 **GRONWALL 不等式，开映射问题的 JACOBIAN 定理，和一个平均积分的极限**。我们认为，这些定理的证明在研究和学习中有典型的作用。

我们在这里讨论的 3 个典型定理可以应用到微分方程解的唯一性，存在性问题和稳定性问题。事实上，开映射问题就是一个存在性问题。目前常用的证明存在性方法就是压缩映射不动点定理方法，变分方法和拓扑度方法（这些也就是数学研究生非线性分析课程的基本内容）。GRONWALL 不等式主要是用来建立微分方程解的唯一性和稳定性的。表面上看这个办法仅仅是用不等式，可实际上，证明唯一性和稳定性就是玩不等式（不等式和凸函数性质联系密切）。目前在椭圆偏微分方程中用的滑动平面法就是要用一种特殊的不等式－－极值原理或者压缩映射原理。很多重要的数学结果的获得就是玩好了不等式。而我们谈到的平均积分的极限问题是在概率论中出现较多的问题，也是很值得注意的。

在这里还要特别指出，我们谈到的 3 个定理是和 3 个有名的数学家的名字有很多关系的。

§1　引言

我门在这里谈 3 个有意思的数学分析结果。

1. **GRONWALL 不等式**

定理 1: 假设 $f = f(t) \geq 0$ 是可微分的函数, 它满足

$$f'(t) \leq Af(t) + B,$$

这里 A 和 B 是正的常数. 那么我们有

$$f(t) \leq (f(0) + \frac{B}{A}) \exp(At).$$

2. **一个平均值定理**

定理 2: 假设 $w(t)$ 是可积分的函数，满足

$$\int_0^\infty |w(s)|ds < +\infty,$$

*本文是作者在烟台给大学生作的一场报告的讲稿。

†清华数学系基础数学研究所教授

那么我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t w(s)\frac{s}{t}ds \to 0.$$

3. **JACOBIAN 定理**

定理 3: 假设 $f = f(x)$ 是区域 $D \subset R^n$ 到 R^n 的 C^1 光滑函数，这里 $x \in R^n$。如果 $\det(J(f)) \neq 0$ 在点 x_0 成立，则 f 在 x_0 附近是一对一的的开映射。

这些定理的证明是有意思的。其中用到的方法对大学生以后进一步学习和研究数学有一定的积极作用。

§2 定理的证明

我们在本章节来给出以上 3 个定理的证明. 从证明中可以看出一些朴素而实用的分析手法. 比如, 我们要用到**变量代换方法, 用到二分法和 $\epsilon-\delta$ 分析**, 再用到**连续函数在紧集合上取到最小值的基本紧性原理**. 希望大家能够看出我们这里的一些把困难问题转化成简单问题的手法.

§2.1 定理 1 之证明:

定义

$$g(t) = Af(t) + B.$$

于是有

$$f'(t) \leq g(t).$$

利用条件, 直接计算知道

$$g'(t) = Af'(t) \leq Ag$$

于是

$$(\log g)' \leq A(t)$$

积分之,

$$\log(g(t)/g(0)) \leq At$$

所以

$$g(t) \leq g(0)\exp(At) = (Af(0) + B)\exp(At)$$

注意到 $g(t) \geq Af(t)$, 我们有

$$Af(t) \leq (Af(0) + B)\exp(At).$$

由此直接得到结论。

§2.2 定理 2 之证明:

任取 $\epsilon > 0$, 我们有 $N_1 = N_1(\epsilon)$, 使得

$$\int_{N_1}^{\infty} |w(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.1}$$

再取

$$t > N_2 = \frac{2\int_0^{N_1} |w(s)|sds}{\epsilon},$$

于是

$$\int_0^t |w(s)|\frac{s}{t}ds \leq \int_0^{N_1} |w(s)|\frac{s}{t}ds + \int_{N_1}^t |w(s)|ds$$

注意到

$$\int_0^{N_1} |w(s)|\frac{s}{t}ds \leq \frac{1}{N_2}\int_0^{N_1} |w(s)|sds \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

和

$$\int_{N_1}^t |w(s)|ds \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

我们就得到

$$\left|\int_0^t w(s)\frac{s}{t}ds\right| \leq \epsilon.$$

由此直接得到结论。

§2.3 定理 3 之证明:

这里我们利用压缩映射和扰动变分的思想来证明。这个证明方法源出于 YAMABE 的小文章 [3]。

回顾定义

$$J(f) = (\frac{\partial f^i}{\partial x^j})$$

简记 $J(x) = J(f)(x)$，不妨设 $x_0 = 0$ 且 $f(0) = 0$。于是由连续性知 $\exists\epsilon > 0$ 使得当 $|x| \leq \epsilon$ 时，

$$|(J(x) - J(0))u| \leq (1-\epsilon)|J(0)u|, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

注意到

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 J(x+ty)ydt$$

如果

$$f(x+y) = f(x).$$

于是

$$0 = |\int_0^1 J(x+ty)ydt|$$

$$= |J(0)y + \int_0^1 (J(x+ty) - J(0))ydt|$$

$$\geq |J(0)y| - |\int_0^1 (J(x+ty) - J(0))ydt|$$

$$\geq |J(0)y| - (1-\epsilon)|J(0)y| = \epsilon|J(0)y|$$

于是 $y = 0$. 这样就证明了单映射性质。

我们要证明**开映射性质**（可以看成存在性问题），只需要证明 $B(0,\delta) \subset f(B(0,\epsilon/2))$。这里我们取

$$\delta = \frac{1}{2}\epsilon \min_{\partial B(0,\epsilon/2)} |J(0)x|$$

任取 $z \in B(0,\delta)$, 定义 $x_z \in \bar{B}(0,\epsilon/2)$ 使得

$$|f(x_z) - z| = \min_{\bar{B}(0,\epsilon/2)} |f(x) - z|$$

对任何 $x \in \partial B(0,\epsilon/2)$ 我们有

$$|f(x)| \geq \epsilon|J(0)x| \geq 2\delta.$$

这样有

$$|f(x) - z| \geq \delta > |z| = |f(0) - z| \geq |f(x_z) - z|$$

从而

$$x_z \in B(0,\epsilon/2).$$

如果

$$f(x_z) - z \neq 0.$$

那我们求解线性方程

$$J(0)y = -\eta(f(x_z) - z), \tag{2.2}$$

这里我们取 $\eta > 0$ 很小使得 $x_z + ty \in \bar{B}(0,\epsilon/2)$，其中 y 为上述方程的解。于是有

$$|f(x_z) - z| \leq |f(x_z + y) - z|.$$

我们在这里要利用 y**这个方向的扰动**来看 $f(x_z + y) - z$ 的值。

首先注意到，

$$|f(x_z + y) - f(x_z) - J(0)y| \leq (1-\epsilon)|J(0)y|.$$

利用 2.2，我们有

$$|f(x_z + y) - z| \leq |f(x_z + y) - f(x_z) - J(0)y| + |f(x_z) - z + J(0)y|$$

$$\leq (1-\epsilon)|J(0)y| + |f(x_z) - z + J(0)y|$$

$$= (1-\epsilon)\eta|f(x_z)-z| + (1-\eta)|f(x_z)-z|$$

$$= (1-\eta\epsilon)|f(x_z)-z|.$$

这样我们就得到了**一个压缩关系**(这里所谓压缩关系就是类似于不等式 $f \leq af+b$, 这里 $0<a<1$, 的关系)。

所以,

$$f(x_z) = z.$$

这样我们就证明了 f 的开映射性质。

§3　定理的推广和评注

现在我们要谈一下我们为什么这样选题来讲给大家。

我们找这么 3 个问题来谈，是想要大家知道一些基本的思想在当今的数学研究中是很普遍使用的。比如第 3 个定理的思想在研究微分方程的存在性问题上是一个基本思想。我在这里挑 YAMABE 的这么一个证明来讲，也是因为希望大家重视到 YAMABE 这个名字，因为从这个人犯的一个错误开始，出现了 YAMABE 问题。后来这个问题在 80 年代才由一些著名的数学家 Trudinger, Aubin, Schoen 解决。解决这个 YAMABE 问题引导出了一些有意思的数学技巧。Yamabe 问题可以看成是广义相对论中数学问题的一个特殊情况。在这里面会涉及到正质量猜想。不过宇宙质量的数学定义目前还是在研究中；一些数学家提出的质量能做一些数学结果，但是这样的质量，比如 Brown-York 局部质量有单调减性，不满足物理上的基本要求。与广义相对论中数学问题相关的 CLAY 百万美金数学问题之一是双曲的 YANG-MILLS 方程的适定性问题还在襁褓之中。我们希望学生有机会去看看关于这个问题的一些相关的文献。

利用我们做定理 3 的方法，作为练习，大家可以去证明一下

练习 1: 给定区域 $D \subset R^n$, 假设 $f(x)$ $(x \in D \subset R^n)$ 是可微分的函数，f 在对某点 $x_0 \in D$ 的梯度 $\nabla f(x_0) \neq 0$, 证明存在一个方向 e 和区间 $[-T,T]$，使得函数 $f(x_0+te)$ 在 $t \in [-T,T]$ 上是单调增加的。

提示: 定义单位向量 $e = \nabla f(x_0)/|\nabla f(x_0)|$ 和函数

$$g(t) = f(x_0+te).$$

于是,

$$g'(0) = \nabla f(x_0)\cdot e = |\nabla f(x_0)| > 0.$$

我们谈第 2 个定理的目的，是想强调，**分割，分类的思想是很重要的**。这个小结论出现在 BOURGAIN 的一个论文中，不过，他没有给证明。在他的文章里的主题是研究 SCHRODINGER 方程组解在无穷远处的**破裂现象**。不过，他那里给出的方程不自然。物理上关心的方程组还没有象他的那么好的结论。我们这里算是给他没有证的一个小结论补了一个证明。作为练习，大家可以去证明一下定理 2 以下的推广形式：

练习 2: 假设 $w(t)$ 是可积分的函数，满足

$$\int_0^\infty |w(s)|ds < +\infty.$$

那么 $\forall k > 0$, 我们有 $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t w(s)\frac{s^k}{t^k}ds \to 0$.

你们还可以找到更多的推广吗？？

我们谈第一个定理，是要说明在研究问题中，简化问题是非常重要的步骤。当然，这个不等式对研究的微分方程稳定性问题是基本的 [2]。实际上 TAO 的书的第一章基本上全是这个不等式及其相关的问题的研究。我们希望一些大学生能去研究他那里写的东西。

练习 3: 假设 $T > 0$, $g(t) > 0, f(t) > 0$ 是 $[0, T]$ 上连续的函数，满足

$$f(t) - f(0) \le \int_0^t g(s)f(s)ds.$$

证明：

$$f(t) \le f(0)\exp(\int_0^t g(s)ds).$$

练习 4: 假设 $T > 0, p > 0$, $g(t) > 0, f(t) > 0$ 是 $[0, T]$ 上连续的函数，满足

$$f(t) \le g(t) + \int_0^t (t-s)^p f(s)ds.$$

证明：

$$f(t) \le g(t) + a\int_0^t B_p'(a(t-s))g(s)ds.$$

这里

$$a = \Gamma(p)^{1/p},$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$$

是著名的 GAMMA 函数且当 n 为正整数时有 $\Gamma(n) = (n-1)!$,

$$B_p(z) = \sum_{j=0}^\infty z^{jp}/\Gamma(jp+1),$$

而

$$B_p'(z) = \frac{d}{dz}B_p(z).$$

提示：定义

$$Bf(t) = \int_0^t (t-s)^p f(s)ds$$

利用归纳法知道：

$$f \le \sum_{k=0}^{n-1} B^k g + B^n f$$

再用归纳法知道

$$B^n f = \int_0^t \Gamma(p)^n (t-s)^{np-1} f(s) ds / \Gamma(np) \to 0, \quad as \quad n \to \infty.$$

这个练习需要较大的计算量所以可能比较复杂。

后面这 2 个练习对研究微分方程的稳定性是非常重要的。

一个更复杂的问题是：

练习 5: 假设 $T > 0, p > 0, q > 0, p+q > 1, a > 0$, $f(t) > 0$ 是 $[0,T]$ 可连续的函数并且 $t^{q-1}f(t)$ 局部可积，如果 f 满足

$$f(t) \le a + \int_0^t (t-s)^p s^{q-1} f(s) ds.$$

证明：

$$f(t) \le aB_{p,q}((\Gamma(p)^{1/(p+q-1)})t).$$

这里

$$B_{p,q}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j s^{j(p+q-1)}$$

其中 $c_0 = 1$, $c_{j+1}/c_j = \Gamma(j(p+q-1)+q)/\Gamma(j(p+q-1)+p+q)$.

更多的结论大家可以去看我们下面列的文献 [1][2]。

从我们上面说的，大家可以看出，我们谈到的 3 个定理是和 3 个有名的数学家的名字有很多关系的。我们在这里讲这个，是**希望大家除了向自己的老师和同学学习外**，**都能向数学大师们学习**。我们希望大家在看别人工作的时候，要能**模仿人家写人家写出来的**，**还能把很多人家没写细节也做出来**。等以后的机会里，我们会向大家介绍一些著名的数学问题的一些初等的方面。谢谢大家！

参考文献

[1] Dan Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer Lect. Notes in Math.. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[2] T. Tao, *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*, CBMS regional series in mathematics, 2006

[3] Hidehiko Yamabe, *A Proof of a Theorem on Jacobians*, The American Mathematical Monthly, Vol. 64, No. 10 (Dec., 1957), pp. 725-726