有关等度连续函数序列一致有界性的问题[1]

杜升华[2]

§1 问题

在高等分析课上，我们学习了如下形式的 Arzelà-Ascoli 定理：

设$K\subset\mathbb{R}^d$为紧集，$\{f_n\}\subset C(K)$满足：⑴一致有界，即$\|f_n\|:=\sup\limits_{x\in K}|f_n(x)|\le C,\forall n\ge 1$（$C$与 n 无关）；⑵等度连续，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得当$x,y\in K$，$|x-y|<\delta$时，$\sup\limits_{n\ge 1}|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$。则存在子列$\{f_{n_k}\}$使得$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$在 K 上一致收敛，即$\exists f\in C(K)$使得$\|f_{n_k}-f\|\to 0\,(k\to\infty)$。

由于证明过程中只用到逐点有界的条件，但根据卓里奇的教材，一致有界是一个必要条件，所以有同学提出这样的问题：是否$\{f_n\}$的一致有界性可由逐点有界和题目的其他条件推出？或者考虑一个更强些的命题：是否紧集上逐点有界的连续函数序列一定是一致有界的？

以下是我在课后给出的结论和证明——

§2 紧集上逐点有界的等度连续函数序列必一致有界

设X是一个度量空间，$K\subset X$是一个紧集，$f_n\in C(K,\mathbb{R})$是K上的等度连续函数序列，$\forall x\in K$，序列$\{f_n(x)\}$有界，则函数序列$\{f_n\}$在K上一致有界。

证明：假设不然，那么$\sup\limits_{x\in K}\left(\sup\limits_{n\ge 1}\left|f_n(x)\right|\right)=+\infty$。对于 1，存在$x_1\in K$使得$\sup\limits_{n\ge 1}\left|f_n(x_1)\right|>1$；对于 2，存在$x_2\in K$使得$\sup\limits_{n\ge 1}\left|f_n(x_2)\right|>2$；⋯⋯；对于$k\in\mathbb{N}$，存在$x_k\in K$使得$\sup\limits_{n\ge 1}\left|f_n(x_k)\right|>k$⋯⋯由此得到紧集$K$中序列$\{x_k\}$，它有在$K$中收敛的子列$\{x_{k_j}\}$，设$\lim\limits_{j\to\infty}x_{k_j}=x_0$。而序列$\{f_n(x_0)\}$是有界的，设$\sup\limits_{n\ge 1}\left|f_n(x_0)\right|=M$。由函数序列$\{f_n\}$在$K$上等度连续知$\exists\delta>0$使得$\forall x,y\in K$，$d(x,y)<\delta$有$\left|f_n(x)-f_n(y)\right|<1$，$\forall n\ge 1$。特别地，当$x\in B(x_0,\delta)$时，$\left|f_n(x)\right|<\left|f_n(x_0)\right|+1\le M+1$，$\forall n\ge 1$。但是当 j 充分大时，有$d(x_{k_j},x_0)<\delta$且$\sup\limits_{n\ge 1}\left|f_n(x_{k_j})\right|\ge k_j\ge j>M+1$，矛盾。

也可直接证明：由等度连续定义，$\exists\delta>0$使得$\forall x,y\in K$，$d(x,y)<\delta$有$\left|f_n(x)-f_n(y)\right|<1$，

---

[1] 本文根据作者在 2007 年春季学期高等分析课程学习期间推导出的结果整理而成。

[2] 基科 58-基数 53

$\forall n \ge 1$。$\bigcup_{x\in K} B(x,\delta)$ 构成紧集 K 的开覆盖，从中可取出有限覆盖：$\bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,\delta) \supset K$。令 $M = \max_{1\le i\le N}\left\{\sup_{n\ge1}\left|f_n(x_i)\right|\right\}+1$。$\forall x\in K$，$\exists x_i$ 使得 $x\in B(x_i,\delta)$，则 $\left|f_n(x)-f_n(x_i)\right|<1$，$\forall n\ge1$。于是有 $\left|f_n(x)\right|<\left|f_n(x_i)\right|+1\le \sup_{n\ge1}\left|f_n(x_i)\right|+1\le M$。由 x 与 n 的任意性知函数序列 $\{f_n\}$ 在 K 上一致有界。

值得注意的是，条件中“等度”二字不能去掉。因为可以构造出随着 n 的增大在某一点处变化得越来越“厉害”的函数序列。下面举一个反例：

设 $K=[0,2]$ 为 $\mathbb{R}$ 中紧集，$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le \dfrac{1}{n} \\ 2n-n^2x, & \dfrac{1}{n}\le x\le \dfrac{2}{n} \\ 0, & \dfrac{2}{n}\le x\le 2 \end{cases}$，它的图像是底边在 x 轴上、以 $\left(\dfrac{1}{n},n\right)$ 为顶点的等腰三角形的两腰以及 x 轴上的一条线段。$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 显然是 $[0,2]$ 上的连续函数序列，且不难验证它们在每一点处都是有界的，但显然并不一致有界。

§3 相关问题

任课老师对我的上述证明表示肯定，并指出可能只要“函数列在某一点处的函数数列有界”加上“等度连续”即可推出“一致有界”。后来补充说当紧集 K 不连通时上述命题不总成立，而连通时应当成立。于是我对此作了严格证明——

§4 在连通紧集内某点处有界的等度连续函数序列一致有界

设 K 是度量空间 X 内的连通紧集，$\{f_n\}$ 是 K 上的等度连续函数序列，$x_0\in K$，数列 $\{f_n(x_0)\}$ 有界，则 $\{f_n\}$ 在 K 上一致有界。

证明：根据已证明的“紧集上逐点有界的等度连续函数序列必一致有界”的命题，只需证 $\{f_n\}$ 在 K 上逐点有界。

由 $\{f_n\}$ 等度连续知，$\exists\delta>0$ 使得 $\forall x,y\in K$，只要 $d(x,y)<\delta$ 就有 $|f_n(x)-f_n(y)|<1$，$\forall n\ge1$。

设 $E=\{x\in K \mid \exists M>0,\forall n\ge1,|f_n(x)|<M\}$，来证明 E 是 K 中的非空开闭集。非空性是已知的。

任取 $x_1\in E$，设 $\sup_{n\ge1}|f_n(x_1)|=M$。考虑 K 中开集 $B(x_1,\delta)\cap K$，$\forall x\in B(x_1,\delta)\cap K$，有

$|f_n(x)|\le|f_n(x_1)|+|f_n(x)-f_n(x_1)|<M+1$，$\forall n\ge 1$，故 $B(x_1,\delta)\cap K\subset E$，$E$ 是 K 中开集[3]。

任取 $x_2\in K\setminus E$。考虑 K 中开集 $B(x_2,\delta)\cap K$，假设 $\exists a\in B(x_2,\delta)\cap K$ 使得 $\{f_n(a)\}$ 有界，设 $\sup\limits_{n\ge1}|f_n(a)|=M$，则 $|f_n(x_2)|\le|f_n(a)|+|f_n(x_2)-f_n(a)|<M+1$，$\forall n\ge 1$。由此推出 $x_2\in E$，矛盾。故 $\forall x\in B(x_2,\delta)\cap K$，$\{f_n(x)\}$ 无界，即 $B(x_2,\delta)\cap K\subset K\setminus E$，所以 $K\setminus E$ 是 K 中开集，也即 E 是 K 中闭集。

由 K 的连通性知 $E=K$，即 $\{f_n\}$ 在 K 上逐点有界，从而一致有界。

注： K 的紧性要在“逐点有界”推“一致有界”这一步用到。

§5 结论

至此，我们可以把开头提到的 $\mathbb{R}^d$ 中紧集上的 Arzelà-Ascoli 定理在更弱的条件下表述出来[4]：

设 (X,d) 是一个度量空间，$K\subset X$ 是一个紧集，$f_n\in C(K,\mathbb{R})$ 是 K 上的等度连续函数序列，并满足如下两条件之一：① $\forall x\in K$，序列 $\{f_n(x)\}$ 有界；② K 是连通集，且 $\exists x_0\in K$ 使得序列 $\{f_n(x_0)\}$ 有界。则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 K 上一致收敛。

****

数学名言

一个没有几分诗人气的数学家永远成不了一个完全的数学家。

——[德] K•维尔斯特拉斯

一个名副其实的科学家，尤其是一个数学家，他在工作中会感受到与艺术家相同的巨大愉快。

——[法] H•庞加莱

在“真正的数学”中，存在着严肃性、寓意深远、美丽、一般性、深刻性、意外性、必然性和经济性。

——[英] G•H•哈代

[3] 所谓“E 是 K 中开集”是指相对开集（诱导拓扑意义下的开集），即存在 X 中开集 U 使得 $E=K\bigcap U$。事实上，这里可以取 $U=\bigcup\limits_{x_1\in E}B(x_1,\delta)$。对于下文中的 $K\setminus E$ 也是如此。

[4] 前面的 $\mathbb{R}^d$ 显然可以替换为任意一个度量空间 (X,d)。