对任意平移不变 Borel 测度均零测或非 σ-有限的 Borel 集

姜多[1]
指导教师：文志英教授

摘 要

本文是阅读以参考文献[4]为主的相关文献的读书报告，其中补全并修改了原文献的部分结论和证明，并综合讨论了几个相关文献的结论。对于拓扑空间中一些常见的、“定义良好”的 Borel 集，我们常常希望有不变测度使其成为正测度、σ-有限集。本文讨论了 $\mathbf{R}^n$ 中在任意平移不变测度下都为零测集或非 σ-有限集的 Borel 集，给出了此类集合的两个充分条件。文章包含的一个主要结果是，Liouville 数集属于此类集合，特别地，对任意量纲函数，Liouville 数集的 Hausdorff 测度均为 0 或非 σ-有限的。另外，$\mathbf{R}$ 中此类集合的 Hausdorff 维数可以是 0 到 1 之间任意实数。

关键词：平移不变测度；Liouville 数；Hausdorff 测度；σ-有限

第1章 引 言

1.1 问题的提出

给定 $\mathbf{R}^n$ 上 Borel 集，希望用一个平移不变的 Borel 测度来衡量其“大小”。$\mathbf{R}^n$ 中常见的平移不变测度包括 Lebesgue 测度 λ，Hausdorff 测度和填充测度等等。先叙述后两者的定义如下：

定义 1.1.1 设 $F \subset \mathbf{R}^n$， s 是非负实数，任给 $\delta > 0$，定义
$H_\delta^s(F) = \inf\{\sum_i |U_i|^n : \{U_i\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中可列个直径不超过 δ 的集合，它们覆盖 $F\}$，
又定义 $\mathbf{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathbf{H}_\delta^s(F)$，称为 F 的 *s 维 Hausdorff 测度*。

[1] 基数 52

定义 1.1.2 设 s 为非负实数，任给 $\delta > 0$，定义

$\mathbf{P}_\delta^s(F) = \inf\{\sum_i |B_i|^n : \{B_i\}是一族球心在F上、互不相交且半径至多为\delta的球\}$，又定义 $P_0^s(F) = \lim_{\delta \to 0} P_\delta^s(F)$。为保证可列可加性，再定义

$\mathbf{P}^s(F) = \inf\{\sum_i \mathbf{P}_0^s(F_i) : F \subset \bigcup_i F_i\}$，称为 F 的 s *维填充测度*。

为更精确地量化 Borel 集 B 的“大小”，我们常希望用一个“精细程度”合适的测度，使它限制在 B 上为正有限的（从而，可以归一化得到一个概率测度）。比如，对于 Lebesgue 测度为 0 的 Borel 集，如果存在正实数 s 使得，$0 < \mathbf{H}^s(B) < +\infty$，则称 B 为 s-集，此时我们认为 s 维 Hausdorff 测度是精细程度刚好适合的尺子。

但是存在这样的集合，它在任何维数均不能使其 Hausdorff 测度为正有限，例如一些 McMullen 集（[11，13]）。为此，引入量纲函数来推广 Hausdorff 测度。

定义 1.1.3 设 $g:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 为增函数，它在 0 右连续且 $g(0)=0$，则称 g 为*量纲函数*。对 $F \subset \mathbf{R}^n$ 定义 $\mathbf{H}_\delta^g(F) = \inf\{\sum_i g(|U_i|) : \{U_i\}是F的\delta\text{-覆盖}\}$，又定义 $\mathbf{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathbf{H}_\delta^s(F)$，称为 F 的 *g-Hausdorff 测度*。类似地可定义 F 的 *g-填充测度*。

一个自然的问题是，是否任何 Borel 集，都可以找到量纲函数，使其 Hausdorff 测度或填充测度正有限。[13，12]对此给出了否定回答。那么，对于那些任何 Hausdorff （或填充）测度都不能“精确”刻画 $B \in \mathbf{B}^n$，是否总可以找到其它平移不变测度？注意到，对无界集来说，希望找到正有限测度是不现实的，合理的做法是把有限的要求放宽为 σ-有限。因此，问题变为：是否对于任意 $B \in \mathbf{B}^n$，均存在平移不变的 Borel 测度，使其有正测度且 σ-有限？ R. D. Mauldin（[3]）还针对著名的 Liouville 集提出了以上问题。为清晰、方便起见，引入下面两个定义：

定义 1.1.4 *Borel 测度*指定义在一个包含 Borel 集类的 σ 代数上的可列可加测度。

定义 1.1.6 非空 Borel 集 $B \subset \mathbf{R}$ 被称为*无法量度*的，如果任何 $\mathbf{R}$ 上的平移不变测度 μ 在 B 上均为 0 或非 σ-有限的。

[4]的主要结果是证明了 Liouville 数集是无法量度的，从而无法量度集不仅是存在的，而且一些重要的，看起来定义简单、性质良好的集合也是无法量

度的（如非正规数集等）。我们还得到判别无法量度性的充分条件。另外，[4]通过构造，证明 0 到 1 之间任何 Hausdorff 维数的实数集都有可能是无法量度的。

1.2 基本定义与性质介绍

1.2.1 三种维数的定义与性质

定义 1.2.1 设 $F \subset \mathbf{R}^n$，定义 $\dim_H = \inf\{s : \mathbf{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathbf{H}^s(f) = +\infty\}$，称为 F 的 *Hausdorff 维数*。类似地定义

$\dim_p = \inf\{s : \mathbf{P}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathbf{P}^s(f) = +\infty\}$，称为 F 的*填充维数*。

定义 1.2.2 设 $F \subset \mathbf{R}^n$，$F(\varepsilon) := \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, F) \le \varepsilon\}$ 为 F 的 ε 平行体。令

$\mathbf{M}^{*s}(F) = \limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\lambda(F(\varepsilon))}{(2\varepsilon)^{n-s}}$ 为 F 的上 Minkowski 容度。定义

$\overline{\dim}_M F = \sup\{s : \mathbf{M}^{*s}(F) = +\infty\} = \inf\{s : \mathbf{M}^{*s}(F) = 0\}$，称为 F 的*上 Minkowski 维数*。

性质 1.2.3 $\mathbf{R}^n$ 中有形式的集合 $\{x \in \mathbf{R}^n : k_i 2^{-m} \le x < (k_i + 1)2^{-m}, k_i \in \mathbf{Z}, i = 1,2,\ldots,n\}$ 称为 k 阶二进方体。设 $F \subset \mathbf{R}^n$ 为有界集合。则 $\overline{\dim}_M F = \limsup\limits_{m \to \infty} \dfrac{\log \omega_m(F)}{k \log 2}$，其中 $\omega_m(F)$ 表示 F 与 k 阶二进方体相交的个数。等式右边也称为计盒维数[1]。

性质 1.2.4 设 $X \subset \mathbf{R}^n, Y \subset \mathbf{R}^m$，则

（1）$\dim_H(X \times Y) \le \dim_H X + \dim_p Y$；

（2）$\dim_p(X \times Y) \le \dim_p X + \dim_p Y$；

（3）设 $f : X \to \mathbf{R}^m$ 为 Lipschitz 变换。则

$$\dim_H f(X) \le \dim_H X \text{且} \dim_p f(X) \le \dim_p X；$$

（4）$\dim_p X \le \overline{\dim}_M X$。

1.2.2 描述性集合论中的两个命题

命题 1.2.5 $\mathbf{R}$ 中的非第一纲的 Borel 子群只有 $\mathbf{R}$ 本身。

证明 设 $\mathbf{R}$ 的子群 B 是非第一纲的 Borel 集。由[8]定理 4.3，B 有 Baire 性质（见[9]第 19 页），即存在开集 G 和第一纲集 P 使 $B = G \Delta P$，其中 P 非空。设开集 G

[1] box-counting dimension，编者注。

包含区间 I，用 $|I|$ 表示其长度。来证区间 $(-|I|,|I|)\subset B-B$。当 $|x|<|I|$ 时，$(x+I)\cap I$ 包含一个区间，$P\cup(x+P)$ 为第一纲集，所以
$B\cap(x+B)\supset(x+I)\cap I-P\cup(x+P)$ 非空，即 $x\in B-B$。因此 $(-|I|,|I|)\subset B-B$。又因为 B 是群，所以 $B\subset\mathbf{R}$。 □

命题 1.2.6[1] 设 $M\subset\mathbf{R}\setminus\{0\}$ 为第一纲集。则存在紧集 $C\subset\mathbf{R}$ 满足下列条件：

（1） 由 C 生成的群与 M 不交；

（2） C 是 Cantor 集，其元素关于有理数线性独立。

证明 M 的补集一定包含某些可列个开稠集之交。先证对某个给定开稠集 U，"典型" 的紧集 C 生成的群在 U 内，即这些紧集 C 组成的集合在 $K(X)$（K 上所有紧集的空间，赋予 Vietoris 拓扑，见[9]第 24 页）中为某第一纲集的补集。对于 $(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')\in(\mathbf{N}\setminus\{0\})^{k+l}$，定义

$$C(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')=\{n_1c_1+...+n_kc_k-n_1'c_1'-...-n_l'c_l':c_i,c_j'\in C\text{两两不同}\},$$

并令 $C(\varnothing)=\{0\}$。当 $(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')$ 跑遍 $(\mathbf{N}\setminus\{0\})^{k+l}$ 时，上述集合的可列并构成 C 生成的群。因此只需证对典型的紧集 C，$C(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')\subset U$。定义映射

$$f:\mathbf{R}^{k+l}\to\mathbf{R}\text{ 为 } f(x_1,...,x_k,x_1',...x_l')=n_1x_1+...+n_kx_k-n_1'x_1'-...-n_l'x_l'。$$

则 f 是开映射且连续，所以 $f^{-1}(U)$ 在 $\mathbf{R}^{k+l}$ 中开稠。由[9]定理 19.1 知，对典型的紧集 C，集合 $(C)^{k+l}:=\{(c_1,...,c_k;c_1',...,c_l'):c_i,c_j'\in C\text{两两不同}\}\subset f^{-1}(U)$，即 $C(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')\subset U$。因此，对典型的紧集 C，$(C)^{k+l}$ 包含于可列个开稠集的交的 f-原象中。故典型的紧集 C 满足（1）。再看（2）。$\forall i\geq1$，定义

$$R_i=\{(x_1,...,x_i)\in\mathbf{R}^i:\text{对}\ \forall(q_1,...,q_i)\in\mathbf{Q}^i\text{且}q\text{不全为}0,\text{有}\sum_{k=1}^{i}q_kx_k\neq0\}\subset\mathbf{R}^i，\text{则}$$

$$R_i^{\mathrm{c}}=\bigcup_{\substack{q_k\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}\\1\leq k\leq i}}\{(x_1,...,x_i)\in\mathbf{R}^i:\sum_{k=1}^{i}q_kx_k=0\}\equiv\bigcup_{\substack{q_k\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}\\1\leq k\leq i}}A^i_{q...q_i}$$ 为可列并，其中 $A^i_{q...q_i}$ 为闭集且无内点，故 R_i^{c} 为第一纲集。由[9]定理 19.1，典型的紧集 C 满足 $(C)^i\subset R_i,\forall i\geq1$，即其元素关于有理数线性独立。综上，典型的紧集 C 满足（1）和"元素关于有理数线性独立"。再由[9] 8.8 知，存在 Cantor 集 C 满足（1）和（2）。 □

---

[1] 我们将[4]中的"典型的紧集 C"满足性质修改成了存在一个 C 满足性质。

第2章　Liouville 数集的无法量度性

2.1 一个判定定理

定理 2.1.1[1] 如果非空 G_δ 集 $B \subset \mathbf{R}^n$ 是 Lebesgue 零测集，且集合 $\{t \in \mathbf{R}^n : B + t \subset B\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密，则 B 是无法量度的。

这给出 $\mathbf{R}^n$ 上为第一纲集的补集的 Borel 集无法量度的一个充分条件。上述定理的证明用到以下两个引理：

引理 2.1.2 设 $B \subset \mathbf{R}^n$ 为 Lebesgue 零集，且存在 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel 测度 μ 使得 B 正、σ-有限。则

（1）　对 λ-几乎所有 t，$\mu(B \cap (B+t)) = 0$；

（2）　存在紧集 $C \subset B$ 满足 $\mu(C) > 0$ 且 $\operatorname{int}(C - C) = \varnothing$。

引理 2.1.2 说明，如果一个 Borel 集 B 不是无法量度的，那么对于相应测度，可以找到其紧子集对 C 不太稀疏（$\mu(C) > 0$），而其平移之间“大多”是不相交的（$C - C = \{t : C \cap (C+t) \neq \varnothing\}$ 无处稠密）。这提供了无法量度的一个充分条件。

引理 2.1.3 设 B 为稠密的 G_δ 集使得 $\{t \in \mathbf{R}^n : B + t \subset B\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密。$C \subset B$ 为紧集，满足 $\operatorname{int}(C - C) = \varnothing$。那么，在 B 中存在 C 的不可列多个不交平移。

引理 2.1.2 的证明：（1）设 μ 定义在一个包含 $\mathbf{B}^n$ 的 σ 代数 $\mathbf{S}$ 上。定义测度 μ_{S} 为：

$$\mu_{\mathrm{S}}(S) = \mu(S \cap B), \text{对任意} S \in \mathbf{S}。$$

则 μ_{S} 是 $\mathbf{R}^n$ 上 σ-有限的 Borel 测度。只需证 $\mu_{\mathrm{S}}(B+t) = 0$ 对 λ-几乎所有 t，即需证 $\int_{\mathbf{R}} \mu_{\mathrm{S}}(B+t)\, d\lambda(t) = 0$。而由 Fubini 定理（注意 μ_{S} 和 λ 均 σ-有限），

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \mu_{\mathrm{S}}(B+t)\, d\lambda(t) &= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} 1_{x \in B+t}\, d\mu_{\mathrm{S}}(x)\, d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} 1_{t \in x-B}\, d\lambda(t)\, d\mu_{\mathrm{S}}(x) = \int_{\mathbf{R}} \lambda(x-B)\, d\mu_{\mathrm{S}}(x) = 0\end{aligned}$$

（2）只需证存在 Borel 集 $B' \subset B$ 满足 $\mu(B') > 0$ 且 $\operatorname{int}(B' - B') = \varnothing$。假设如此，则因 B 在 μ 下正且是 σ-有限的，故 B' σ-有限，所以存在 $A \subset B'$ 使 $0 < \mu(A) < +\infty$，即 $\mu'(\cdot) = \mu(\cdot \cap A)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中 Borel 集上的有限测度，因此 μ' 内正

[1] 在[4]中，定理是在 $\mathbf{R}$ 叙述的，这里我们将定理及其证明在 $\mathbf{R}^n$ 中给出。

则[9]。而 $\mu'(B') = \mu(B' \cap A) = \mu(A) > 0$，则存在紧集 $C \subset B' \subset B$，满足 $\mu(C) > 0$。又 $\mathrm{int}(C - C) \subset \mathrm{int}(B' - B') = \varnothing$，即 $\mathrm{int}(C - C) = \varnothing$。

因此只需找到 Borel 集 $B' \subset B$ 满足 $\mu(B') > 0$ 且 $\mathrm{int}(B' - B') = \varnothing$ 即可。由（1）知，可选出可数稠密集 $D \subset \{t \in \mathbf{R}^n : \mu(B \cap (B + t)) = 0\}$。令

$$B' = B \setminus \bigcup_{d \in D} (B + d)\text{。}$$

因为 $\mu(B \cap (B + d)) = 0, \forall d \in D$，所以

$\mu(B') = \mu(B) > 0$ 且 $D \cap (B' - B') = \varnothing$ 即 $\mathrm{int}(B' - B') = \varnothing$。（2）得证。 □

引理 2.1.3 的证明：由于 B 是 G_δ 的，故可将 B 写成一列开集的交 $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$。于是

$$T := \{t \in \mathbf{R}^n : C + t \subset B\} = \{t \in \mathbf{R}^n : C + t \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{t \in \mathbf{R}^n : C + t \subset U_n\},$$

即 $T \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$，其中 $G_n = \{t \in \mathbf{R}^n : C + t \subset U_n\}$。因为 C 为紧集，U_n 为开集，故 G_n 开。有因 T 稠密，故 G_n 为开稠集。

按如下方式归纳地定义 $P \subset T$：对任意自然数 n，每个长度为 n 的 0-1 序列，我们将要定义 $\mathbf{R}^n$ 中非退化矩体 I_s。第 0 步，固定 $I_\varnothing \subset G_\varnothing$。假设前 n 步已完毕，在第 n+1 步，取 $x \in I_s \cap G_{n+1}$。希望再取 $y \in I_s \cap G_{n+1}$ 使得 $(C + x) \cap (C + y) = \varnothing$，这等价于 $y \in (I_s \cap G_{n+1}) \setminus (C - C + x)$。而因为 $I_s \cap G_{n+1}$ 是包含开集，且 $\mathrm{int}(C - C) = \varnothing$，所以可以选定这样的 y。而因 C 是紧集，故可以找到分别包含 x，y 的矩体 $I_{s\hat{}0}, I_{s\hat{}1} \subset I_s \cap G_{n+1}$ 满足 $(C + I_{s\hat{}0}) \cap (C + I_{s\hat{}1}) = \varnothing$。第 n+1 步结束。在上述过程中，总可保证每个 I_s 的直径不超过 $1/n$。

令 $P = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\text{是长度为}n\text{的0-1序列}} I_s$。则 $P \subset T$ 满足，$\forall p_1, p_2 \in P, p_1 \neq p_2$ 有 $(C + p_1) \cap (C + p_2) = \varnothing$。同时 P 的势 $|P| = 2^{\mathbf{N}}$，即 P 不可列。证毕。 □

定理 2.1.1 的证明 设 B 满足定理的条件，假设存在平移不变的 Borel 测度 μ 使 B 正且 σ-有限。由引理 2.1.2，存在紧集 $C \subset B$ 使 $\mu(C) > 0$ 且 $\mathrm{int}(C - C) = \varnothing$。再由引理 2.1.3 及平移不变性，存在 $\{C_t, t \in T\}$，T 不可列，使

$$C_t \subset B, \mu(C_t) = \mu(C) > 0, \forall t \in T \text{ 且 } C_t \text{ 之间不交。}$$

因为 μ 使 B σ-有限，故存在 $B_n \uparrow\subset B, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 且 $\mu(B_n) < +\infty, \forall n$。因为 T 不可列，故存在 n 使 $T_0 := \{t \in T : \mu(B_n \cap C_t) > 0\}$ 不可列。但这与 $\mu(B_n) < +\infty$ 矛盾（$\exists \varepsilon > 0$ 使 $\{t \in T : \mu(B_n \cap C_t) > \varepsilon\}$ 为无穷集，则 $\mu(B_n) \le \sum_{t:\mu(B_n \cap C_t) > \varepsilon} \varepsilon = +\infty$）。 □

2.2 Liouville 数集的无法量度性

在丢番图逼近中，很重要的一类集合是 Liouville 数，其定义如下：

定义 2.2.1 $\mathbf{L} = \{x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} : \forall n \in \mathbf{N}\, \exists p, q \in \mathbf{Z} (q \ge 2) \text{使得} \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}\}$。

L 有以下易于验证的等价定义：

定理 2.2.2 $\mathbf{L} = \{x \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N}\, \exists p, q \in \mathbf{Z} (q \ge 2) \text{使得} 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}\}$。

证明 只需证 $\mathbf{L} \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$。

$\forall r \in \mathbf{Q}, \text{设} r = \frac{p_0}{q_0} (q_0 \ge 2)$。取 $n \in \mathbf{N}, \text{使} 2^{n-1} > q_0$。则

$$\forall p, q \in \mathbf{N} (q \ge 2) \text{有} q^{n-1} > q_0 \text{。}$$

若 $\left| r - \frac{p}{q} \right| \ne 0, \text{即} p_0 q - q_0 p \ge 1$，则

$$\frac{p_0}{q_0} - \frac{p}{q} = \frac{p_0 q - q_0 p}{qq} \ge \frac{1}{q_0 q} > \frac{1}{q^n} \text{。}$$

故 $r \notin \mathbf{L}$。 □

定理 2.2.3 Liouville 数集是无法量度的。

证明 由定理 2.1.1，只需证 $\mathbf{L} \subset \mathbf{R}$ 是 G_δ 的 Lebesgue 零集，且 $\{t \in \mathbf{R} : \mathbf{L} + t \subset \mathbf{L}\}$ 在 **R** 中稠密。这些都是 Liouvilles 数集的经典性质，现简要证明如下。

（1） 采用定理 2.2.2 中的等价定义。

$$\mathbf{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \{x \in \mathbf{R} : 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}\} \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} V_{n,p,q} \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

$V_{n,p,q}$ 为开集，故 U_n 开，所以 **L** 是 G_δ 集。

（2） $\forall q \geq 2, n \geq 3$ 定义 $L_{q,n} = \bigcup_{p=-\infty}^{+\infty}(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n})$。则 $\mathbf{L} \subset \bigcup_{q=2}^{+\infty} L_{q,n}$ 。

于是 $\forall M > 0$ ，

$$\lambda(\mathbf{L} \cap (-M, M)) \leq \lambda(\bigcup_{q=2}^{+\infty}\bigcup_{p=-Mq}^{Mq}(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^n})) \leq \bigcup_{q=2}^{+\infty}\bigcup_{p=-Mq}^{Mq}\frac{2}{q^n}$$

$$= \bigcup_{q=2}^{+\infty}\frac{2(2Mq+1)}{q^n} \leq (4M+1)\bigcup_{q=2}^{+\infty}\frac{1}{q^{n-1}}$$

$$\leq (4M+1)\int_1^{\infty}\frac{dq}{q^{n-1}} \leq \frac{4M+1}{n-2} \qquad \forall n \geq 3$$

令 $n \to +\infty$ 得 $\lambda(\mathbf{L} \cap (-M, M)) = 0$。因此 $\lambda(\mathbf{L}) = 0$。

（3） 来证，$\mathbf{L} + r \subset \mathbf{L}, \forall r \in \mathbf{Q}$ 。

设 $r = \frac{p_0}{q_0}$。$\forall n \in \mathbf{N}$, 取 $N \in \mathbf{N}$, 使 $q_0{}^n < 2^{N-n}$。

$\forall x \in \mathbf{L}$, 对 $N \in \mathbf{N}$, 存在 $p, q(q \geq 2)$ 使 $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^N}$。

而 $(qq_0)^n = q^n q_0{}^n < q^n \cdot 2^{N-n} < q^N$，

故 $\left|(x+r) - (\frac{pq_0 + qp_0}{qq_0})\right| = \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^N} < (\frac{1}{qq_0})^n$。故 $x + r \in \mathbf{L}$。 □

2.3 一些其他例子

本部分进一步讨论由定理 2.1.1 给出的其他无法量度集的例子。关于无法量度性，我们有以下简单引理：

引理 2.3.1（1）若 $B_n \subset \mathbf{R}^n, n \geq 1$ 是一列无法量度集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 无法量度；

（2） 若 $A \Delta B$ 为可列集，则 A 与 B 的无法量度性等价。

证明 （1）任意平移不变测度 μ，若任意 n 有 $\mu(B_n) = 0$，则 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = 0$。否则，若存在 B_n 非 σ-有限，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 亦非 σ-有限。综上，$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 为无法量度集。

（2）当 A 与 B 可列时，计数测度使二者均正、σ-有限。现设 A 与 B 同时不可列，只需证 A 非无法量度蕴含 B 非无法量度。设平移不变测度 μ 使 A 正、σ-

有限。由平移不变性，单点集为 μ-零集，因此可列集为 μ-零集，故 μ 亦使 B 正、σ-有限。于是 B 非无法量度。 □

2.3.1 非正规数集

我们首先讨论简单正规数的情形。

定义 2.3.2 实数 $x\in\mathbf{R}$ 称为*简单正规数*，如果 10 进制展开的小数部分 $\{x\}=0.d_1d_2\ldots$满足：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{1\le i\le n:d_i=k\}}{n}=\frac{1}{10},\forall 0\le k\le 9\text{。}$$

用 N 记简单正规数全体的集合。

由大数定律易得 $\lambda(\mathbf{R}\setminus N)=0$ 。是否存在更精确的测度刻画 $\mathbf{R}\setminus N$ 呢？

定理 2.3.3 $\mathbf{R}\setminus N$ 是无法量度集。

证明 有理数的 10 进制展开可以有不唯一形式，而由引理 2.3.1（2），只需证 $(\mathbf{R}\setminus N)\setminus\mathbf{Q}$ 无法量度。$(\mathbf{R}\setminus N)\setminus\mathbf{Q}=\bigcup_{k=0}^{9}(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j^k\cup\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j^k)$，其中

$$A_j^k=\{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}:\limsup_{n\to\infty}\frac{\#\{1\le i\le n:d_i=k\}}{n}\ge 0.1+\frac{1}{j}\}\text{，}$$

$$B_j^k=\{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}:\liminf_{n\to\infty}\frac{\#\{1\le i\le n:d_i=k\}}{n}\le 0.1-\frac{1}{j}\}\text{。}$$

由引理 2.3.1（1），只需证每个 A_j^k和B_j^k 无法量度，这里只证 A_j^k ，同理易得 B_j^k 。

应用定理 2.1.1，需验证 A_j^k 为 Lebesgue 零集（显然），关于某稠密集平移不变，且 G_δ 。注意到， $x\in A_j^k$ 与否跟 x 的前有限位小数无关，所以 A_j^k 对小数部分仅有限位非零的数（组成稠密集）平移不变。又

$$A_j^k=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}:\frac{\#\{1\le i\le n:d_i=k\}}{n}\ge 0.1+\frac{1}{j}-\frac{1}{l}\}$$

而 $\{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}:\frac{\#\{1\le i\le n:d_i=k\}}{n}\ge 0.1+\frac{1}{j}-\frac{1}{l}\}$ 只与前有限位小数有关，故为开集。因此 A_j^k 为 G_δ 集。证毕。 □

正规数的一般定义为：

定义 2.3.4 设实数 $x\in\mathbf{R}$ 的 10 进制展开小数部分 $\{x\}=0.d_1d_2\ldots$，则 x 称为*正规数*，如果任意给定的 $\{0,1,2,\ldots,9\}$ 中的有限序列 $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_m$ ，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{1\le i\le n: d_i=\omega_1, d_{i+1}=\omega_2,\ldots,d_{i+m-1}=\omega_m\}}{n}=\frac{1}{10^m}\text{。}$$

我们记正规数全体为 N_1。

显然，$N_1\subset N$，且三者均为 Lebesgue 全测集。

推论 2.3.5 非正规数集 $\mathbf{R}\setminus N_1$ 为无法量度集。

证明 $\mathbf{R}\setminus N_1=\bigcup_{\omega\text{长度为}m}\ \bigcup_{\omega=\omega_1\omega_2\cdots\omega_m} C_\omega$ 为可列并，其中

$$C_\omega=\{x\in\mathbf{R}:\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{1\le i\le n: d_i=\omega_1, d_{i+1}=\omega_2,\ldots,d_{i+m-1}=\omega_m\}}{n}=\frac{1}{10^m}\}\text{。}$$

C_ω 的无法量度性与定理 2.3.3 证明类似。□

2.3.2 非 Besicovitch-Eggleston 数集

Beskclvitch-Eggleston 数指小数部分“每个数字的渐进频率均存在”的实数。

定义 2.3.6 设 $x\in\mathbf{R}$ 的 b 进制展开小数部分 $\{x\}=0.d_1d_2\ldots$，其中，如果展式不唯一，取有限位非零的那个。$(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{b-1})$ 为概率向量，$\alpha_d\ge 0,\sum_{d=0}^{b-1}\alpha_d=1$. 定义

$$\mathrm{BE}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{b-1}):=\{x\in\mathbf{R}:\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{i:1\le i\le n, d_i=d\}}{n}=\alpha_d\ \forall 0\le d\le b-1\}\text{。}$$

$\mathrm{BE}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{b-1})$ 表示 b 进制展开小数部分中，各数字的渐进频率为 $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{b-1})$ 的数的全体。

使 $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{b-1})$ 跑遍 b 维概率向量，则所有 $\mathrm{BE}(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{b-1})$ 称为 Besicovitch-Eggleston 数，记作 BE_b.

定理 2.3.7 设 $b\ge 2$，则 $\mathbf{R}\setminus\mathrm{BE}_b$ 无法量度。

证明 为了避开有理数展式的不确定性，我们只考虑 $(\mathbf{R}\setminus\mathrm{BE}_b)\setminus\mathbf{Q}$，试图把它写成可列并的形式：

$$(\mathbf{R}\setminus\mathrm{BE}_b)\setminus\mathbf{Q}=\bigcup_{d=0}^{b-1}\ \bigcup_{\substack{p<q\\ p,q\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}}(C_q^d\cap D_p^d),$$

其中

$$C_q^d=\{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}:\limsup_{n\to\infty}\frac{\#\{i:1\le i\le n, d_i=d\}}{n}\ge q\},$$

$$D_p^d=\{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}:\liminf_{n\to\infty}\frac{\#\{i:1\le i\le n, d_i=d\}}{n}\le p\}\text{。}$$

应用定理 2.1.1，只需证C_q^d满足相应条件（D_p^d同理）。根据大数定律，C_q^d是 Lebesgue 零集（事实上，$\lambda(\mathrm{BE}(\frac{1}{b},\frac{1}{b},...,\frac{1}{b}))=1$）。且$C_q^d$关于小数部分只有有限位非零的数（组成稠密集）平移不变。只需C_q^d为G_δ集。而

$$C_q^d=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}:\frac{\#\{i:1\le i\le n,d_i=d\}}{n}>q-\frac{1}{l}\}\text{。}$$

综上，$\mathbf{R}\setminus\mathrm{BE}_b$无法量度。 □

2.3.3 更多无法量度集的构造

根据定理 2.1.1，还可以给出更多无法量度的 Lebesgue 零测集。事实上，对任意 Lebesgue 零测集（不要求 Borel），都可以在其基础上，用下面步骤得到一个无法量度集。

设$A\subset\mathbf{R}$为非空 Lebesgue 零测集，则$A+\mathbf{Q}$仍是 Lebesgue 零集。根据 Lebesgue 的定义，存在包含$A+\mathbf{Q}$的G_δ集B，它本身也是 Lebesgue 零集。考虑$\bigcap_{q\in\mathbf{Q}}(B+q)$。它是$G_\delta$集, Lebesgue 测度为 0，且关于有理数的平移不变。因此定理 2.1.1 指出，$\bigcap_{q\in\mathbf{Q}}(B+q)$无法量度。上述讨论在$\mathbf{R}^n$也成立。因此，对每个 Lebesgue 零测集，我们得到了一个包含它的无法量度集。

第3章　任意 Hausdorff 维数的无法量度集

本部分的主要目的是证明，$\mathbf{R}$上任何 0 到 1 之间的 Hausdorff 维数的集类里，都有存在无法量度集。进一步，我们可以要求这样的集合为加法群。

3.1 另一个判定定理

定理 3.1.1 设$B\subset\mathbf{R}$为 Borel 集，满足$B+B\subset B$（于是$B-B$为B生成的群）。如果$B-B$不是F_σ的，则B无法量度。

特别地，

定理 3.1.2 若$G\subset\mathbf{R}$为加法群，它是 Borel 但非F_σ的，则G无法量度。

定理 3.1.1 的证明 用反证法。假设存在平移不变测度μ使B正、σ-有限。则由引理 2.1.2，存在正测度紧集$C\subset B$使$\mathrm{int}(C-C)=\varnothing$。采用与定理 3.1.2 证明中

类似的思路，希望证出 B 包含 C 的不可列个不交平移。为此，希望构造一个超限数列 $T=\{t_\alpha,\alpha<\omega_1\}\subset B$，满足 $C+t_\alpha$ 两两不交，其中 ω_1 表示最小的不可列序数。尝试用超限归纳法定义 T，只需保证归纳过程不会在某个可列序数 α 处停止。设对一切 $\beta\subset\alpha$，t_β 均已定义好。只需存在 $t_\alpha\in B$ 使 $(C+t_\alpha)\cap(C+t_\beta)=\varnothing$ 即 $t_\alpha\notin C-C+t_\beta,\forall\beta<\alpha$，于是只要证

$$B\not\subset\bigcup_{\beta<\alpha}C-C+t_\beta\text{ 。}$$

假设 $B\subset\bigcup_{\beta<\alpha}C-C+t_\beta$。则 $B-B\subset\bigcup_{\beta,\gamma<\alpha}[(C-C+t_\beta)-(C-C+t_\gamma)]$。而 $B-B$ 是群，故实际上 $B-B=\bigcup_{\beta,\gamma<\alpha}[(C-C+t_\beta)-(C-C+t_\gamma)]$。而 C 为紧集，即 $(C-C+t_\beta)-(C-C+t_\gamma)$ 为闭集，因此 $B-B$ 是 F_σ 集。与假设矛盾。这样得超限数列 T。与定理 3.1.2 证明类似，可证 μ 在 B 上非 σ-有限的。因此 G 无法量度。 □

3.2 任意 Hausdorff 维数的无法量度集的构造

本部分用到[7]中构造的一系列集合 $\{G_\alpha\subset\mathbf{R},0<\alpha<1\}$，我们将[6]中我们需要的结论写成如下引理：

引理 3.1.3 存在一列 $\mathbf{R}$ 的加法子群 $\{G_\alpha\subset\mathbf{R},0<\alpha<1\}$，满足 $\dim G_\alpha=\alpha$，且若 $\alpha<\beta$，有 $G_\alpha\subset G_\beta$。

定理 3.1.4 对任意 $0\le\alpha\le1$，存在 $\mathbf{R}$ 中 Hausdorff 维数为 α 的无法量度集。特别地，可以取这些集合为 $\mathbf{R}$ 的加法子群。

[6]中的 G_α 是 F_σ 的，为由 G_α 构造非 F_σ 的 Hausdorff-α 维集，给出以下引理：

引理 3.1.5[1] $\mathbf{R}$ 的每个 Cantor 子集 K 包含一个填充维数为 0 的不可列、Polish 子集 K_0（即可分、可完备度量化，详见[9]）。

定理 3.1.4 的证明 首先考虑 $0\le\alpha<1$ 情形。当 $0<\alpha<1$ 时，令 G_α 为引理 3.1.3 中的子群；当 α 为 0 时，令 $G_\alpha=\{0\}$。由命题 1.2.5 知，G_α 是第一纲集。令 $M=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}(G_{1-\frac{1}{n}}\setminus\{0\})$，则 M 也是第一纲的，由命题 1.2.6 得到 Cantor 集 $C\subset M$。

[1] 本定理将[4]中 K_0 是 Cantor 集的条件弱化为不可列的 Polish 空间，这使证明思路更清晰，对定理 3.1.4 的证明也足够。

再根据引理 3.1.5，存在不可列、Polish 的$C_0 \subset C$使$\dim_p C_0 = 0$，于是存在 Borel 但非F_σ的子集$B \subset C_0$（存在性见[9]定理 22.4）。定义 H 为由 B 生成的加法群，令$G_\alpha' = G_\alpha + H$。因为对$\alpha < \beta$有$G_\alpha \subset G_\beta$，所以
$G_\alpha \cap H = \{0\}$对一切$0 \le \alpha < 1$。

下面我们验证G_α'是 Borel 集，但不F_σ，且$\dim_H G_\alpha' = \alpha, \forall 0 \le \alpha < 1$。

（1）作为 B 生成的群，H 可表示为所有$B(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')$（记号的定义见命题 1.2.6 的证明）之并。因为 B 关于整数线性独立，所以$B(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')$是 Borel 集$(B)^{k+l}$的一个双射的象，即$B(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')$也是 Borel 集，从而 H 是 Borel 集。考虑从$\mathrm{G}_\alpha \times H \subset \mathbf{R}^2$到$G_\alpha' = G_\alpha + H$上自然定义的映射，它显然是连续的。而假设$g_1 + h_1 = g_2 + h_2$，则$g_1 - g_2 = h_1 - h_2 \in G_\alpha \cap H = \{0\}$，所以该映射也是单射。这样，$G_\alpha'$也某个是 Borel 集的双射象，因而是 Borel 集。

（2）下证G_α'不是F_σ集。因为C_0是紧集而 B 不F_σ，故只需证$G_\alpha' \cap C_0 = B$。设$\forall g' = g + h \in C_0, g \in G_\alpha, h \in H$，则$g = g' - h \in (C_0 - H) \cap G_\alpha \subset C \cap (M \cup \{0\})$。由命题 1.2.6（2）知，$g$=0，即$h \in H \cap C_0$。$H$ 为 B 生成的群，且 B 线性无关，因此$g' = h \in B$。所以$G_\alpha' \cap C_0 = B$，于是G_α'非F_σ。

（3） 最后正$\dim_H G_\alpha' = \alpha, \forall 0 \le \alpha < 1$。因为$G_\alpha' \supset G_\alpha$，只需证
$\dim_H G_\alpha' \le \alpha$。因$\mathrm{G}_\alpha \times H \subset \mathbf{R}^2$到$G_\alpha' = G_\alpha + H$的自然映射是 Lipschitz 的，所以由性质 1.2.4（1）和（3），
$\dim_H G_\alpha' \le \dim_H(\mathrm{G}_\alpha \times H) \le \dim_H \mathrm{G}_\alpha + \dim_p H = \alpha + \dim_p H$。故只要证
$\dim_p H = 0$。由性质 1.2.4（2），只需$\dim_p B(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l') = 0$。而
$B(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l')$可以由$B^{k+l}$的一个 Lipschitz 映射象覆盖，故

$$\dim_p B(n_1,...,n_k;n_1',...,n_l') \le \dim_p B^{k+l} \le (k+l)\dim_p B = 0。$$

综上，再应用定理 3.1.2 得到，G_α'是 hausdorff 维数为α的无法量度加群，$0 \le \alpha < 1$。当$\alpha = 1$时，$\bigcap_{n=1}^\infty G_{1-\frac{1}{n}}$即为满足条件的无法量度加群。 □

引理 3.1.5 的证明 因为 K 有界，不妨设$K \subset [0,1]$。对每个$m \ge 1$，将单位区间等分成2^m个子区间，希望归纳地从中选出一族开区间$\boldsymbol{I}_m$，满足要求：

（1）$\left|\boldsymbol{I}_m\right| \le m, \mathrm{int}(I) \cap K \ne \varnothing 且当 m < n 时, \cup I_m \subset \cup I_n$；

（2）$\forall I \in \boldsymbol{I}_m, \exists n \in \mathbf{N} 和 J, J' \in \boldsymbol{I}_n, J \ne J 使得 J, J' \subset I$.

这些条件是容易满足的，例如，可以在$m=1$时，从两个区间中选内部与K交非空的一个；$m\geq 2$时，每次选出与同时满足K交非空的 1 到 2 个子区间（只有在仅有一个区间与K相交的情况下，才放弃选择两个）。注意从某个I_m开始，之后不可能每步都只能从之选出 1 个与K相交的子区间，否则由闭区间套引理，K在I_m有孤立点，这与K是 Cantor 集矛盾，这样（2）也满足。

令$K_0=\bigcap_{m=1}^{\infty}(\cup \boldsymbol{I}_m)$。显然$K_0$是闭集，因此可完备度量化。由$K_0$的构造方法，有无穷多步都选出了 2 个区间，故$|K_0|\geq 2^{\mathbf{N}}$，即$K_0$不可列。每个$I_m$与$K_0$的交集非空，故可从此非空交集中选出一个点，于是得到可列个K_0中的点，由于m增大时，I_m的长度趋于 0，所以这可列个点构成K_0的稠密子集，因此K_0可分。综上，K_0是不可列、Polish 子集。下面再证$\dim_p K_0=0$。由性质 1.2.4（4）只需证$\overline{\dim}_H E=0$。再根据性质 1.2.3，用计盒维数计算。

$\overline{\dim}_H K_0=\limsup_{k\to 0}\dfrac{\log\omega_k(K_0)}{k\log 2}\leq\limsup_{k\to 0}\dfrac{\log k}{k\log 2}=0$。证毕。 □

第4章　结论

在进一步的研究中，我们可以问如下的问题：

问题 4.1 为了使某 Borel 集测度正、σ-有限，存在一个合适的平移不变测度是否比存在某量纲函数对应的 Hausdorff 测度和填充测度更弱。换句话说，如果对 Borel 集 B，不存在量纲函数使其 Hausdorff 测度或填充测度正、σ-有限，那么是否 B 一定无法量度？

Peres 在[12]中给出了一些集合的例子，它们对任意量纲函数的填充测度都非正或非σ-有限，而[6]中证明了上述的集合都不是无法量度的。但是有关 Hausdorff 测度，目前还没有相应的结果。

另一方面（参见注 1.1.5），[5]构造了一个不等价于 Lebesgue 测度的平移不变测度的例子，它定义在一个严格包含 Borel 集的σ代数上，且在整个$\mathbf{R}^n$上σ-有限。因此我们看到，只有不把σ代数局限于 Borel 集，我们还有除 Hausdorff 测度或填充测度外更多的选择平移不变测度的余地。

然而，对问题 4.1 的完全的回答还有待于进一步研究。

参考文献

[1] 文志英. 分形几何的数学基础[C]. 上海: 上海科技教育出版社，2000.

[2] 瞿燕辉. 分形测度的比较，周期 β 展式与高位周期词[D]. 北京：科学出版社，1999：32-36

[3] Csörnyei M. Open problems [J]. Periodica Mathematica Hungarica, 1998, 37: 227-237

[4] Elekes M., Keleti T. Borel sets which are null or non-σ-finite for every translation invariant measure [J]. Advances in Mathematics, 2006, 201:102-115

[5] Elekes M., Keleti T. Is Lebesgue measure the only σ-finite invariant Borel measures? [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 321: 445-451

[6] Elekes M., Keleti T., Mathé A. Self-similar and self-affine sets; measure of the intersection of tow copies [EB/OL]. arXiv: math.GM/0704.3727 v2.[2008-07-18]. http://arxiv.org/pdf/0704.3727

[7] Erdös P., Volkmann B. Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension [J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1966, 221:203-208

[8] Oxtoby J. Measure and category (Graduate Texts in Mathematics vol. 2) [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1980

[9] Kechris S. Classical Descriptive Set Theory (Graduate Texts in Mathematics, vol. 15) [M]. Berlin: Springer, 1995

[10] Larman D. The approximation of G_δ-sets, in measure, by F_σ-sets [J]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1965, 61:105-107

[11] McMullen C. The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets [J]. The Nagoya Mathematical Journal, 1984, 96: 1-9

[12] Peres Y. The packing measure of self-affine carpets [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1994, 115: 437-450

[13] Peres Y. The self-affine carpets of McMullen and Bedford have infinite Hausdorff measure [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1994, 116: 513-526