# 折纸的代数结构[1]

毛天一[2]　石权[3]　林洁[4]　王芝兰[5]

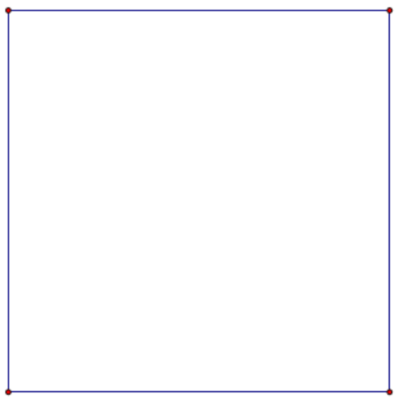
## 摘要

本文从折纸六条公理着手，详细对比了折纸与尺规作图，逐步添加公理得到了该公理体系下平面折纸的代数结构。其中还给出了正五边形的折纸折法。最后对七公理体系下的折纸以及折叠型做了简要的讨论。

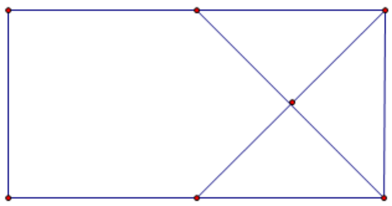
## 一、引子

折纸，是每个人童年的记忆。飞机，纸鹤，星星，它们都曾寄托着我们美好的心情与美丽的愿望。然而，究竟什么样的图形是我们可以折出来的，或者说，折纸，究竟蕴含着哪些奥秘。我们先从折正五边形看起。[1]

1.取一张正方形的纸张。

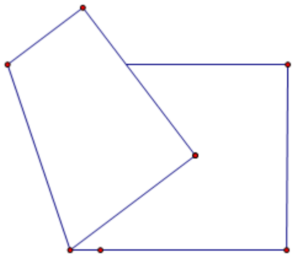


2.将一张正方形的纸张对折后，再折出如图十字交叉型折痕，得到交点。

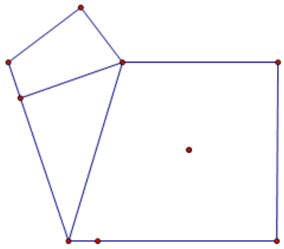


3.把对折后的左下角与该交点重合。

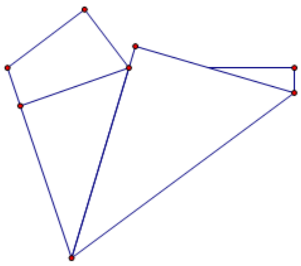
[1] 本文是2008年春季学期近代数学专题（肖杰老师）课程论文。
[2] 基科71
[3] 基数51
[4] 基科78
[5] 基数51



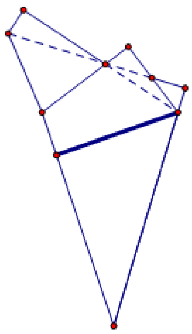
4.把刚才折过去的部分反过来对折。



5.将右下角的边对折到刚才的中缝。

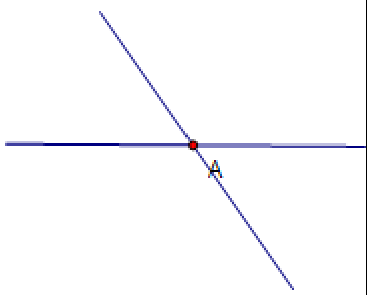
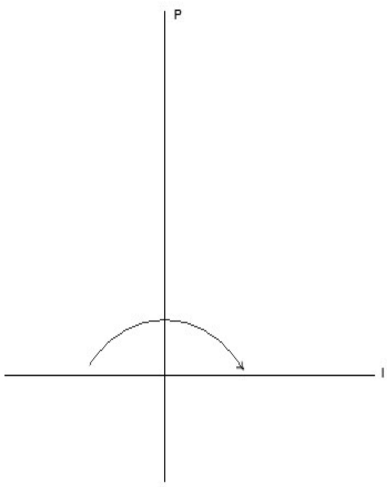
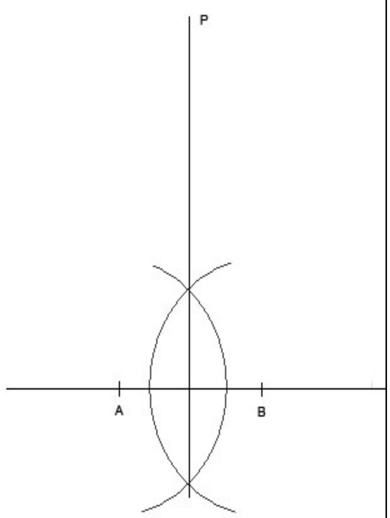
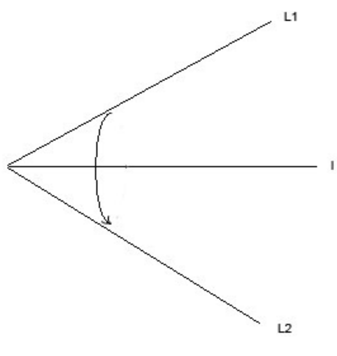
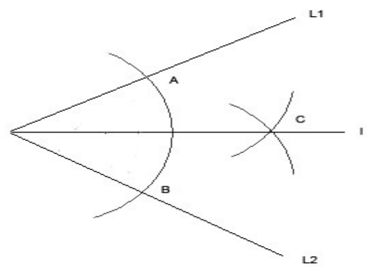


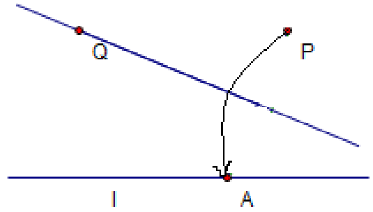
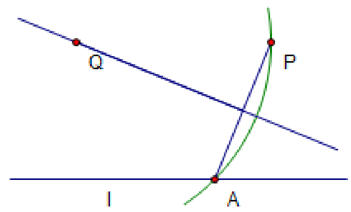
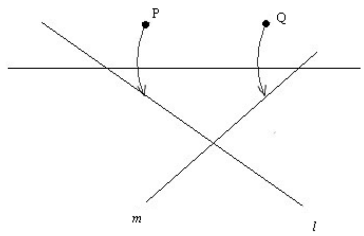
6.将其反过来折得到如下形状后，沿粗线折。



展开纸，沿粗线的折痕即为正五边形。

如何得到正多边形，是尺规作图的经典问题。对比尺规作图，我们发现，许多尺规可以得到的图形，折纸也可以做到。那么，折纸与尺规，究竟有哪些不同。我们先看下，折纸的六条公理(后文会详细叙述其来由)中哪些是可以被尺规完成的：[2]

| | 公理 | 图示 | 对照尺规作图 |
|---|---|---|---|
| 1 | 连接两个可构造点的线是可构造的。 |  | 基本作图 |
| 2 | 不同可构造线的交点是可构造的。 |  | 显然 |
| 3 | 两个可构造点的中垂线是可构造的。 |  |  |
| 4 | 任一角的角平分线可以被折出。 |  |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 给定点 P，Q 与直线 l，则能折出过 Q 的直线，使得 P 关于该直线的对称点在 l 上。 |  | <br>以 Q 为圆心，过 P 做圆交 $l$ 于 A，由 3 的尺规部分，可作 AP 的中垂线，易知它过 Q，且为所求直线。 |
| 6 | 给定直线 l，m 和点 P，Q，那么使得 P，Q 关于它的对称点分别在 l，m 上的直线是可构造的，只要这样的直线存在。 |  | 以后会看到，公理 6 等价于解三次方程。故它不能被尺规代替。 |

## 二、基于折纸几何的公理系统

### 1.折纸公理系统的基本假设

首先，我们认为折纸的操作对象是平面上的点。为方便后文的运算和叙述，我们取定复平面 $\mathbb{C}$ 作为研究对象。这样，点的集合被等同为数集。

**定义 1** 给定一套公理系统，在该公理系统定义的运算下封闭的最小集合称为该公理系统下的一个可构造集。其中的点称为可构造点。

那么，通常意义上说的“能够折出的”所有点就可以用折纸的公理系统下的可构造集来描述。于是下面的关键在于，如何建立折纸模型的公理系统。我们从几条最基本的、最容易被接受的公理入手：

(0) 该集合包含三个不共线的点 O、M 和 N。并记该可构造集为 $\Pi(O，M，N)$，也简记为 $\Pi$。

(1) 连接 $\Pi$ 中两点的线称为可构造线。

(2) 不同可构造线的交点是可构造点。

(3) 两个可构造点的中垂线是可构造的。

我们很容易把这三条公理和现实生活中的折纸对应起来。

### 2.对该集合的代数处理

我们从一些最基本结论开始。如果不加特别说明，该节下面的内容全是在一个可构造集 $\Pi=\Pi(O，M，N)$ 上的研究。

**引理 2.1(平移)** 给定点 P 和线段 AB。那么我们可以构造出以 P 为端点，且与 AB 同向等长的线段。

引理的证明：只需考虑三点不共线的情况。连接 PA、PB，作 PA、PB、AB 的中点，依次为 B’、A’、P’。再作 PB’的中点 C。A’C 和 P’B’交于 D，BB’和 PD 交于 Q。那么 PQ 就是要求的线段。对于共线的三点，先在 AB 外找一点 R，仿上作 RS，再对 RS 和 P 处理即可。

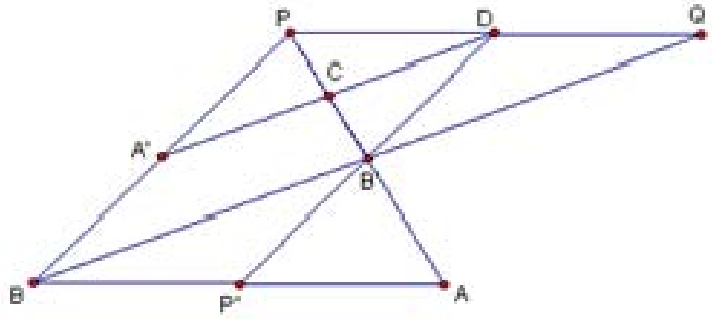



图 1　引理 2.1 的说明

**推论 2.2** 对直线 l 及一点 A，可过 A 作 l 的垂线。

推论的简证：取 l 上任两点作其中垂线，然后将中垂线上任一线段平移至 A 处。

**推论 2.3(相似)** 给定点 P 和共线的三点 ABC，可作点 D 使得 ΔADB 与 ΔAPC 相似。

推论的简证：只考虑 P 不在 ABC 上的情况。将 CP 平移到 BP’，该线段所在直线交 PA 于 D。

**推论 2.4(对称)** 给定点 P、直线 m 和异于 m 且不过 P 的直线 l，可作 P 关于 l 的对称点、 m 关于 l 的对称直线。

推论的简证：只证明关于直线 m 和 l 的论断。任取 l 上两点 A，B，分别过其作 l 的垂线，依次交 m 于 A’，B’，再将 A’A，B’B 平移到 AA’’，BB’’，A’’B’’就是所求直线。

以上叙述都是基于几何现象的。一般地，可以用以下方式概括：

**推论 2.5** Π 在向量的加法下是封闭的。特别地，若取 $O = 0$，Π 就是一个阿贝尔群。

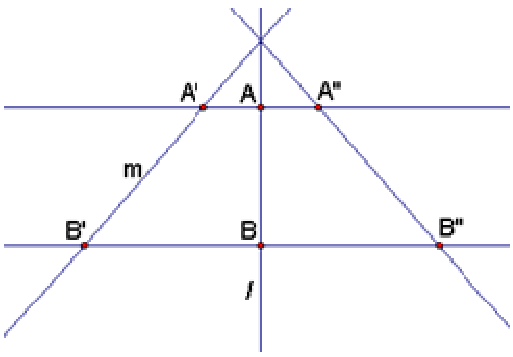



图 2　引理 2.4 的说明

更具体地，如果我们继续取 $M = 1$，那么实轴和虚轴都是可构造线。Π 完全由第三个点的性质决定，我们可以认为 $\Pi = \Pi[z]$ 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的函数。容易证明，Π 和实数集的交 $X = X[z]$ 以及和纯虚数集交的实部 $Y = Y[z]$ 都是阿贝尔群，并且有

$$\Pi(z) = X[z] \oplus iY[z]。$$

或者说换一种更正式的方式来表达：

**推论 2.6** $\forall z \in \mathbb{C}$，$\Pi[z]$ 是有理数集上的线性空间，在复共轭运算下封闭，且有子空间$X[z]$，$iY[z]$。

事实上，这两个子空间不是简单的加法群，其结构应该有更精细的描述。下面我们从除法的可能性入手：

**引理 2.7** 若 $0 \neq t \in Y$，那么 $\frac{1}{t} \in Y$。

引理的证明：不妨 $t > 0$。那么可以作出如下图的一个直角三角形来实施除法。

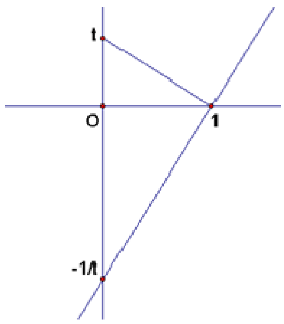



图 3 引理 2.7 的证明

进一步地，若已有点 u，$x \in X$ 和 v，$y \in Y$，我们可以作 $x + iy$。利用推论 2.3，可以继续得到 $u + \frac{uy}{x}i$ 及$\frac{vx}{y} + vi$。这意味着$\frac{vx}{y} \in X$，$\frac{uy}{x} \in Y$。特别地，若在两式中分别令 $x = 1$及$u = 1$，则有$\frac{v}{y} \in X$，$\frac{y}{x} \in Y$。总结起来，我们有下面的推论：

**推论 2.8** 对点 $x \in X$ 和 v，$y \in Y$，有

(1)$xy \in Y$，$vy \in X$。

(2)若 Y 非平凡，则 X 是一个域。

(3)若 $X \cap Y$ 非平凡，则 $X = Y$。

推论的证明：

对(1)，由引理 2.7 得到$\frac{1}{y} \in Y$。由此立得后一结果。同时$\frac{1}{xy} \in Y$，故 $xy \in Y$。

对(2)，$\forall x_1$，$x_2 \in X$，$0 \neq y \in Y$，有 $\frac{x_1}{y}$，$x_2 y \in Y$。故 $x_1 x_2 = \frac{x_1}{y} \cdot x_2 y \in X$。另外，由 $\frac{y}{x} \in Y$，$\frac{1}{y} \in Y$ 得到$\frac{1}{x} \in X$。

对(3)，由$\exists y \neq 0$，$y \in X \cap Y$。从而$1 = y \cdot \frac{1}{y} \in Y$。自然引导出结论。

由该结论可进一步得到：

**推论 2.9** 对任一复数 $z=a+bi$，$b\neq 0$， $\Pi[z]$ 是域 $\mathbb{Q}(a，b，i)$的子域。

推论的证明只需逐个按定义验证，应用推论 2.8 的结论就可以。并注意到$\Pi[z]$关于共轭运算是封闭的。

明显地，$z\in\Pi[z]$。利用前面的性质不难知道，b 的偶次幂全在 X 中，而奇次幂全在 Y 中。或者说 $\mathbb{Q}(a，b^2)\subset X\subset\mathbb{Q}(a，b)$。于是 X 可能的代数结构并不会太多。

**定理 2.10** $b\in\mathbb{Q}(a，b^2)\Leftrightarrow X=Y$。这即是说$X=\mathbb{Q}(a，b^2)$或 $\mathbb{Q}(a，b)$。

定理的证明：从左向右是容易的。从右向左，采用反证。若不然，考虑由 b 生成的$\mathbb{Q}(a，b^2)$的二次扩域，一定有一个自同构 σ 在 $\mathbb{Q}(a，b^2)$ 的限制为恒等，且满足 $\sigma(b)=-b$。[3]现在，Π 中任何一个点 P 都能从$\{0，1，z\}$中经过有限步构造出来。逐一验证三条公理产生新点的方式，我们得到一组不变关系：

$$\begin{cases}\sigma(\mathrm{Re}(P))=\mathrm{Re}(P)\\ \sigma(\mathrm{Im}(P))=-\mathrm{Im}(P)\end{cases}$$

若$X=Y$，则能构造出 i 来。但这不满足上式，矛盾。

这个定理完全揭示了在三个基本公理的系统下可构造集的代数结构。

## 3.四公理系统

根据折纸的常识，我们试着从实际折纸动作中衍生出更多适用的公理：

(4) 任一角的角平分线可以被折出。

加入该公理后，新公理系统的可构造集用 π 表示。我们同时减弱公理 0 的初始条件，仅保留 0 和 1 作为初始点。但我们将很快发现，这样的削弱远不能抵消公理 4 的强大作用。例如，这次可以明显得到$X=Y$。

这个公理系统新获得的主要能力是构造各种长度的线段。具体言之，X 要求对函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 封闭。将这样的最小实数集记为$\mathcal{P}$，那么我们立刻有：

**定理 3.1** $\pi=\mathcal{P}\oplus i\mathcal{P}$ 是一个域。

## 4.五公理系统

前面的公理出现了点与点(公理 3)、线与线(公理 4)的同一过程中留下的痕迹作为可构造线。受此启发并结合折纸实际，我们添加一条新公理：

(5) 给定点 P，Q 与直线 l，则能折出过 Q 的直线，使得 P 关于该直线的对称点在 l 上。

对新的五公理系统，以 0 与 1 作为初始点。对它的可构造集$\mathcal{E}$的代数结构进行分析，我们得到一个著名的结果：

**定理 4.1** $\mathcal{E}$是对开平方保持封闭的$\mathbb{C}$的最小子域。

我们不证明这个定理，而是来看看如何构造出平方根。首先给出公理 5 的几何直观：

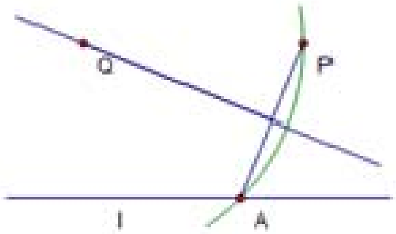



图 4 公理 5 的几何直观图

事实上，可以证明，反复地折叠，会得到抛物线的包络。从某种意义上说，我们获得了抛物线，从而开平方的问题也已解决。但是，得到包络总给我们一种进行了无数次操作的感觉。下面给出一个实际可操作的构造方法：

首先构造直线 $l_1$：$y=r$，$l_2$：$y=\frac{1}{4}$，$l_3$：$y=-\frac{1}{4}$。然后随意作它们的一条公垂线，分别交$l_1$，$l_2$，$l_3$于 Q，R，P。对 P，Q 和 $l_2$ 使用公理(5)，得到直线 m。取 P 关于 m 的对称点 S，那么 RS 的长即为 $\sqrt{r}$。

## 5.最终的六公理系统

我们加入最后一条，也是最关键的一条公理：

**(6) (公切线)** 给定直线 l，m 和点 P,Q,那么使得 P,Q 关于它的对称点分别在 l，m 上的直线是可构造的，只要这样的直线存在。

我们用图形直观地给出它的几何解释。结合(5)，这是很容易理解的。

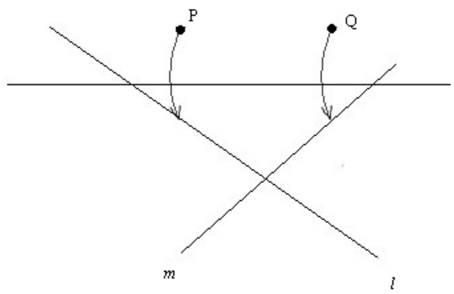



图 5 公理 6 的几何直观图

这个完整的公理系统对应的可构造集记为 $\mathcal{O}$。它与实数集的交记为 $\mathcal{O}_R$ 。容易得到 $\mathcal{O}=\mathcal{O}_R\oplus i\mathcal{O}_R$。下面研究 $\mathcal{O}_R$ 的代数性质。

考虑两条抛物线

$$\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=2bx,\quad y=\frac{x^2}{2}$$

其中 a，$b\in\mathcal{O}_R$。设它们的公切线斜率为 k。通过计算，我们得到 $k^3+ak+b=0$。也就是说，在 $\mathcal{O}_R$ 中三次方程是可解的。

于是得到下面的定理：

**定理 5.1** $\mathcal{O}=\mathcal{O}_{\mathrm{R}}\oplus \mathrm{i}\mathcal{O}_{\mathrm{R}}$ 是一个域。其中 $\mathcal{O}_{\mathrm{R}}$ 是对开三次方与开平方封闭的 $\mathbb{R}$ 的最小子域。

我们最后做些进一步的讨论。前面提到包络的问题时，我们已经怀疑：得到曲线的包络和得到曲线本身有多大区别呢？事实上，这个问题可以用射影几何的观念解决。

我们把研究对象从复平面扩充到含无穷远线的射影空间。由代数几何学的知识，该平面上的点可以被视为三数组 $(x, y, z)$ 模去非零数量积所得的空间。$z=0$ 对应着无穷远线。在该空间上的非零实对称二次型 $F(x, y, z)=(x, y, z)A(x, y, z)^{T}$ 对应了其上的圆锥曲线 $F(x, y, z)=0$。我们希望利用对偶曲线的理论，将切线转变为点。

事实上，曲线 $F(x, y, z)=0$ 的对偶是 F 的全体切线满足的方程。设某切线的方程为 $ux+vy+wz=0$，那么由代数几何知识，$(u, v, w)$ 在射影空间中满足

$$\hat{F}(u, v, w)=(u, v, w)A^{*}(u, v, w)^{T}=0$$

其中 $A^{*}$ 是 A 的古典伴随方阵。并且不难证明 $\hat{\hat{F}}=F$。[4]由此，我们得到：

利用公理 5，可以在射影空间中作一条抛物线。

利用公切线公理，可以在射影空间中求得抛物线的交点，进而就在复平面上求得抛物线的交点。

注意到古典伴随方阵的计算仅仅依赖于有理运算。这样一来，曲线就和包络在某种意义上等同起来了。

作为这个结论的具体应用，我们可以对四次方程 $x^4+ax^2+bx+c=0$ 直接求解。它等价于两条抛物线

$$\begin{cases} y=x^2 \\ \left(y+\dfrac{a}{2}\right)^2=-b\left(x+4c-\dfrac{a^2}{4b}\right) \end{cases}$$

的交点。容易看出，利用对偶的方法，我们最后把它归结成了二次方程与一次方程的联立求解。正是公理 6，把代数求解过程中降到三次的过程一步完成。

## 三、展望与应用

### 1.第七公理

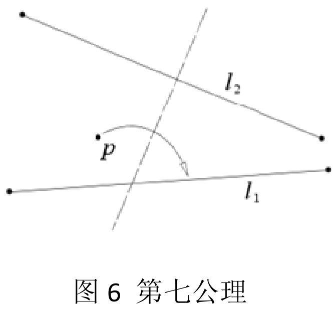



图 6 第七公理

Koshiro Hatori 发现，折叠还有另外的操作，称之为第七公理：

(7) 已知一点 p 和两直线 $l_1$ 及 $l_2$，存在折叠使 p 过 $l_1$，且折痕垂直于 $l_2$。

第 7 公理的意义在于，它是一种与前面六种完全不同的折纸操作。Robert Lang 证明，这七个公理的体系可以完成一切可能的折纸操作，是完备的。任何折纸操作无非是七种之一。[5] 但实际上，如果仅就生成点集的角度说，七个公理并不都是必要的。事实上，只要有最强的第六公理，和基本的第一公理，其它的公理操作就可以被代替。[6]

## 2.折叠形

若把折痕作为连接两刚性平面的转轴，我们可以折出很多空间中的图形(flat origami crease pattern)，这在实际应用中是很有意义的。[7]例如曾应用于空间科学的 Miura-ori 地图折叠。

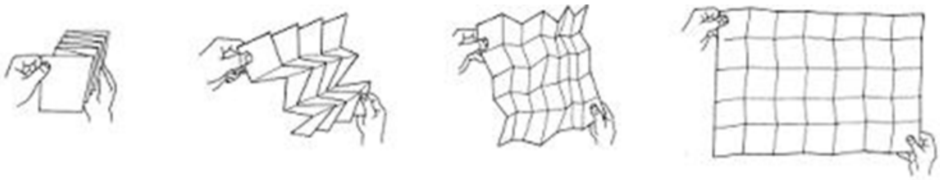


图 7 Miura-ori 地图折叠

对于这样折出来的在三维空间中的图形(称为折叠形)，我们可以考量在顶点的性质。[8]确定平面的一面为“外面”，则可以定义一条折痕为“凹”或“凸”。对于最基本的情形，也就是只有一个顶点的折叠形(flat vertex folds)有如下定理

**(Maekawa)** 单顶点折叠形顶点上凸折痕与凹折痕数目相差 2.

推论：单顶点折叠形的顶点连接的棱是偶数条。

一个更有意思的定理是这样的：

**(Meguro)** 折叠形的面可以被两种颜色不相邻的涂满(2-face colorable)。

证明：考虑其对偶图形，一个回路只绕一个面，由推论知是偶回路。如果包含多个面，则每个面的边界是偶数条边，减去重复的(一来一回)，仍是偶数。对偶图形不存在奇回路，故顶点可被二着色，故原图形是也可被二着色。

还有一个看似容易的定理： [9]

**(Kawasaki)** 在一个顶点上的角，依次记为$a_1$，$a_2$，$a_3$， ...，$a_{2n}$，则有

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = 180$$
$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = 180$$

也就是说，相隔角度的和是 180 度。

对于只有一个顶点的折叠形，Kawasaki 定理的逆定理同样成立。也就是说，若顶点满足这个角度条件，则该图形可以被折出。但折叠形有多个顶点时，逆定理不成立。

尽管我们已经得到了这么多有趣的结论，但折纸还有更多的乐趣，等待着我们去发现。

# 四、致谢

感谢肖杰老师精彩的讲课以及对这份报告的关注与支持。

## 参考文献

(1) [2008-06-28] http://hi.baidu.com/jiuaidiy/blog/item/e727a5a19c5c5b8847106413.html
(2) 张贺佳. 折纸与尺规作图[J]. 数学通报，2007(10)，58-59.
(3) 冯克勤，代数数论讲义(教学用内部资料).
(4) Hartshorne, R.，冯克勤等译，代数几何，北京科学出版社，2001.7.
(5) LANG, Robert J., Origami and Geometric Constructions. [2008-06-28]. http://www。Langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf
(6) [2008-06-28] http://origami.ousaan.com/library/conste.html
(7) [2008-06-28] http://www.origami-resource-center.com/origami-science.html
(8) [2008-06-28] http://www.paperfolding.com/math/
(9) [2008-06-28] http://kahuna.merrimack.edu/~thull/combgeom/combgeom.html

《荷思》第一期勘误

1.《数学的用场与发展》第 2 页“数与量”第 2 段“因此致学的用处”应为“因此数学的用处”。
2.《三次数学危机中的问题猎手》第 63 页第 1 节“解决了第一次数学问题”应为“解决了第一次数学危机”；第 65 页第 3 节“法国数学家策墨罗”应为“德国数学家策墨罗”。
3.第 66 页数学家趣闻“Hausdroff 空间”应为“Hausdorff 空间”。
4.《天才与愚蠢——埃瓦里斯·伽罗瓦的悲剧故事》第 70 页倒数第 4 段“Hio”应为“Hic”。

## Mathematical Quotations

**Gauss, Karl Friedrich (1777-1855)**
I mean the word proof not in the sense of the lawyers, who set two half proofs equal to a whole one, but in the sense of a mathematician, where half proof = 0, and it is demanded for proof that every doubt becomes impossible.

**De Morgan, Augustus (1806-1871)**
[When asked about his age.] I was x years old in the year x^2.