一个延拓定理*

陈志杰

设E是一个Banach空间，$P\subset E$为一个闭凸集，且$P\cap -P=\{0\}$。设$f:-P\cup P\to -P\cup P$为一连续的奇映射，且$f(P)\subset P$，那么是否存在一个连续函数$F:E\to -P\cup P$使得$F|_{-P\cup P}=f$且F是奇的？

令$A=\{x\in E:\rho(x,P)\le\rho(x,-P)\}$（$\rho$为$E$中由范数诱导的距离），则$A$为闭集，$P\subset A$，且$A\cup -A=E$，$A\cap -A=\partial A=\{x\in E:\rho(x,P)=\rho(x,-P)\}$。

由Dugundji延拓定理[1]，存在$T:A\to E$，T连续，且$T|_P=f$，$T(A)\subset \mathrm{conv}T(P)\subset P$。定义$\tilde{T}:A\to E$

$$\tilde{T}(x)=\begin{cases}\frac{\rho(x,-P)-\rho(x,P)}{\rho(x,-P)+\rho(x,P)}T(x), & x\in A\setminus\{0\},\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

由于$x\in A\setminus\{0\}$时，$\rho(x,-P)+\rho(x,P)>0$，$\rho(x,-P)-\rho(x,P)\ge 0$，所以$\tilde{T}$定义合理，且$0\le\frac{\rho(x,-P)-\rho(x,P)}{\rho(x,-P)+\rho(x,P)}\le 1\Rightarrow\tilde{T}(x)\in P$。验证得

$$\tilde{T}(x)=\begin{cases}T(x)=f(x) & x\in P,\\ 0 & x\in\partial A.\end{cases}$$

即$\tilde{T}|_P=f$且$\tilde{T}(A)\subset P$。

$x\in A,x\neq 0$时，显然$\tilde{T}$在x处连续。$x=0$时，设$x_n\in A\setminus\{0\}$，$x_n\to 0$，$\|\tilde{T}(x_n)\|\le\|T(x_n)\|\to 0\Rightarrow\tilde{T}$在$x=0$处连续。所以$\tilde{T}$连续并满足$\tilde{T}(A)\subset P$，$\tilde{T}|_P=f$，$\tilde{T}|_{\partial A}=0$。

定义$F:E\to E$

$$F(x)=\begin{cases}\tilde{T}(x) & x\in A,\\ -\tilde{T}(-x) & x\in -A.\end{cases}$$

则F连续，F为奇函数，$F|_{-P\cup P}=f$且$F(E)\subset P\cup -P$。

---

*本文是作者(08级博士生）在非线性泛函分析课程中对一道思考题的解答，选入本刊时稍有修改。

[1]设(X,ρ)为一个度量空间，$A\subset X$为闭集，$(Y,\|\cdot\|)$为线性赋范空间，$T:A\to Y$为连续映射。则存在连续映射$\tilde{T}:X\to T$使得$\tilde{T}(x)=T(x)$，$\forall x\in A$，且$\tilde{T}(X)\subset\mathrm{conv}T(A)$（$\mathrm{conv}T(A)$为$T(A)$的凸包，即包含$T(A)$的最小凸集）。参见Dugundji J., An extension of Tietze's theorem, Pac. J. Math. 1 (1951), 357-367，或Kung-Ching Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, 175-177, Theorem 3.6.1。编者注。