

刘思齐老师访谈录

编者按：本文由刘思齐老师于 2010 年 4 月 8 日“走近理学院”活动中与数学系同学交流的记录整理而成。作为清华数学系自己培养的年轻教师的代表之一，刘思齐老师与学生们分享了他的学习和科研经历，并回答了同学们的一些问题。我们将整个互动过程一并整理发表，以飨读者。整理时，部分字句有所改动。

（最开始是漫谈部分）

我其实当年是靠数学竞赛进来的。进来之后，发现自己跑到物理系去了。所以大三分流的时候，我就毫不犹豫地选择了数学系。当时我对物理也很有兴趣，所以就选了个数学物理，看起来好像跟物理有关的（方向）。但进来之后发现，其实跟物理关系也不是很大。到了数学系之后，我发现我的数学基础不是非常的好。当时小基科学的这个数学课程跟物理系学的数学课程是差不多的。跟数学系相比还是很不一样。相对来说我数学成绩比较差。当时没有意识到这个问题，有讨论班就跟着上，导师要读点什么就读点什么，总之当时也没有发现。一直到我当助教，教数学分析或者高等代数，我才发现当年学得很差，但是这个时候我已经来不及了。不过事实上数学这个东西总是这样的，你当时不管学多好，过几年再回头看，总是会发现当时有一些东西不懂。作为弥补，以后要用到这些东西的话，你会逼着自己重新去学一遍，这样慢慢地回忆起来。当时，我是以一个不太好的数学基础跑到数学系跟张友金老师学可积系统。谈到这个东西，第一个问题肯定就是“什么是可积系统”。这个问题没有一个很好的答案——大家也不知道什么是可积系统。我在系里做过一个报告，讲的是什么是好的数学领域。不知道你们有没有学过，我觉得拓扑学就是一个比较好的领域，比较成熟的数学领域。为什么说比较成熟呢？拓扑学和代数——例如李代数——之类的课本，一般书的第一章第一页都会告诉你这个学科研究的是什么。例如拓扑学第一页就会告诉你什么是拓扑空间，拓扑空间就是一个集合加上开集条件。李代数呢，就是一个线性空间加上一个双线性运算满足一些恒等式。像这些成熟的学科，第一件事情就告诉你我们这个学科要研究什么。就好像一个国家建立起来之后得划分国界线，我们这个学科以后就研究这个国家以内的事情，国界线以外的事情就不管了。但是可积系统这个东西很不一样。随便拿一本可积系统的书，你从第一页翻到最后一页也找不到可积系统的定义。所以这个就是不太成熟的一个学科，随便拿本书，发现它主要都在讲例子，说这个东西是可积系统，那个东西是可积系统。或者讲一些特殊的性质，比如孤子可积系统，Lax 可积系统等等，但是并没有一个统一的定义。打个比方，就好比我们还未来建立一个国家，在这个范围内有好多游牧民族正在打架。大家各自定义一个可积的概念，但这些概念是矛盾的。一个系统可能满足这个性质却不满足那个性质。大体情况就是这样。我当时数学虽然学得

不多，但是我觉得很不舒服。我之所以跑到数学系，是因为我觉得物理系的数学太差了。看广义相对论还好，看量子场论就觉得里边的数学太烂了。于是我就转到数学系去。但是到这边也有这个问题。我要做研究的话，就得先把可积系统这个概念搞清楚。所以接下来一段时间做的研究都是关于这方面的。当时也是刚入门，做的都是一些小问题。我是 01 年秋天开始做 seminar 的。用一个学期的时间学了些基本的知识，第二学期就开始琢磨可积性的定义，做了一年也没有做出来。当时发现了一些东西，但是想要最终解决这个问题还是解决不了，就卡在一个地方过不去。到 03 年的时候，张友金老师给了我一个题目。他这个题目的好处也可以用前面的比方来说明。成熟的领域虽然一上来就划了国界线，但是具体到研究的问题上还是在处理一些比较好的东西。比如拓扑学研究的东西不是一般的拓扑空间，而是加一些比较好的拓扑的条件，比如加一些紧性的条件，研究的都是比较好的对象。像李代数这个东西，你要学过这门课就知道半单李代数的分类。加上一个半单的条件就得到一些好的结果。张老师给我的题目就是一类特别好的可积系统。我的工作就是研究这类系统在坐标变换下的分类。那个东西我从 03 年开始做，二三月份的时候张老师把题目给我，到七八月份的时候我觉得我做出来了。03 年正好是我本科毕业的那年，所以我的毕业论文就是把这个问题的细节说全。当时是把这个要分类的东西展开成无穷级数，把它的坐标变换也展开成无穷级数，然后要证明坐标变换后的某些性质。当时作为本科生，对级数的前两阶给出了证明。毕业之后，我觉得我可以写出一般的证明。后面的东西就非常复杂，总是有些很难算的东西。后来张老师发现一个漏洞，指出我的证明是过不去的。花了很长时间也没能修补，就这样搁置了三个月。到了 10 月份的时候才再次拿起来。当时这个过程对我以后的研究很有启发。一个东西做不出来，不要钻牛角尖，可以先放一放，去做别的事情。培养出一种陌生感之后，能让你跳出这个圈子，看到新的突破口。当时我三个月没有看什么数学的东西。到了 10 月 11 月回过头来看，发现一个更简单的办法，比我 8 月份走的路子要简单得多。然后这就成了我的第一篇文章。解决之后，我又接下来考虑一个相关的、更难的问题。这些问题研究的都是有若干分量的偏微分方程。大概到 04 年一二月份的时候对单变量的情形就证明了，但是推广到一般的多变量，大概花了 10 多个月的时间才把这个工作做完。我发现我每做一个东西大概都要花 10 个月。这些问题都是可积系统中的分类问题。当时我已经是博士了，需要参加一些资格考试，还要做社会实践。05 年我又回过头来看当时 02 年做的东西。这里有一个很有意思的经历。你们中应该有些人学过常微分方程，知道一阶拟线性偏微分方程可以归结为常微分方程来解，用特征线法找一些守恒量，然后就可以解出来。当时我解的是一个无穷多个变量的这种方程。02 年的时候我算出了前面若干个守恒量，但我不知道后面是什么东西，当时也猜不出来。然后 04 年开始，我做微积分助教，需要做一些习题，还要给学生改和讲作业。有一个很简单的事实大家微积分都学过，就是反函数的导数等于原来函数导数的倒数。一般人不知道的是，反函数的二阶导数，算出来是原来函数的二阶导数除以原来函数一阶导数的三次方，

可能还有个负号。接下去可以算出三阶导数四阶导数是什么，结果越来越长，很难写出个一般的表达式。这时候我才发现，02 年算出来的那些守恒量其实是反函数的高阶导数，发现这一点之后，02 年那个问题立刻就解决了。这已经是 05 年接近 06 年的事了。所以这个事情也说明事情放到一边，回头再看会带来新的想法。这也就是我的第三篇文章。前面两篇文章都是研究的一些比较好的东西，05 年过后开始做的就是一些不那么好的东西了。我之前的两个东西就好比是在国家的首都里搞建设，把城区规划得有秩序一点。而 05 年做的东西就像是在国界线上，把国界线划清楚一点。当时做的都是单变量的情形，最近这几个月开始考虑多变量的情形。类比是有的，但是在一些细节上的困难，现在还在研究。我学数学的经历大概就是如此。

（可积系统这个学科在世界上的发展情况如何？）

现代数学的一大趋势就是好的数学都是相互联系的，我这个学科跟其它的学科关系也很大。现在很难说一个学科的发展怎么样，因为所有学科都是连在一起的。我们做的这个非常基础的东西，就是分类问题。我觉得任何一个学科的目标，最重要的就是分类问题。也就是说，把这个国界线划清楚之后，还要做一下人口普查。分类问题做好之后，可以很快地用到其它的领域。具体一点，我们的出发点是一个不变量。我想你们可能不知道这些细节，我讲点历史。90、91 年 Witten 研究二维量子引力。这个东西有两种做法，一种是把它归结为矩阵模型，然后可以算出一些性质来；还有一种就是归结为稳定曲线模空间上的积分，转化为代数几何的问题。但是这个世界上只有一种量子引力，所以用代数几何方法算出来的积分的生成函数应该满足矩阵模型里的某些微分方程，这些微分方程就是可积系统里的 KdV 方程。这个问题解决了，之后又推广到更一般的情况。二维量子引力可以看作一个曲面到一个点的映射，然后对其进行积分。如果把那个作为靶子的点换成一般空间的话，就能得到一般的东西，这就是 Gromov-Witten 不变量，在物理里面大概叫拓扑弦。不管是数学还是物理，有一点是很像的，同样的东西，可能从不同的角度去看，以发现一些联系。所以之后这个不变量都是很多人研究的方向，最近 10 年来都是很热的。我们做这个东西就试图用可积系统的方法把这个东西确定下来。这些不变量的生成函数满足一族微分方程，我们就可以通过解微分方程把它们解出来。但是我们对可积系统了解得太少了，任给一个靶空间，我们根本就不知道对应的可积系统长什么样子。所以需要一种分类，首先要把所有的可积系统都找出来，这些系统间有坐标变换，将对应的等价关系模掉。至于你说的进展，我只能给一些个人的偏见了。我觉得（可积系统领域中的）其他问题和分类问题相比都不是很大的问题。其他的问题还有研究求解，研究对称以及一些具体的应用，比如流体力学等等。那些当然也是很好的东西，只是我个人不太关心这方面。

（想做一些东西，其中要用的东西发现自己没学过，遇到这种问题怎么办）

这是很常见的，因为现在要学的东西太多了，就现学吧。但是现学你要注意，你们现在本科阶段，课程学的东西都是将来要用到的基础。到了研究阶段，就得抓住重点。用到哪部分，就把需要的这部分看过，会用就行了。有时候不能完全看懂，也不能把相关的东西都学完——都学完就没时间做研究了。到以后你会发现，做研究和好好学东西两个方面是矛盾的。因为时间是有限的，如果一件事情占去，另一件事就没有时间了，总要找平衡。你得记住你的目标是什么。数学最终的目标终究还是要做研究而不是学以前的东西，现在读书也是为了以后做研究作准备。以后做研究需要学什么东西的话，学到基础的就可以了，不用完全搞彻底。大家都学过数学分析吧，数学分析一开始就讲集合论。集合论可以写一本很厚的书来讨论。特别朴素的集合论是数学的基础，也有很多很难的问题。但对以后的研究并没有什么太多的帮助。

（没有学卓里奇对以后的研究有没有什么影响？）

你们除了卓里奇还学什么书？（学生答：科大的徐书）很难说啊。卓里奇当然是很好的，但是有些人不适应。科大的书呢可读性比较高，不像卓里奇，至少它的习题是可以做出来的。说到最后还是看人啦，有的人学这个比较好，有的人学那个比较好。两本书都挺不错的。

（大三你选择这个方向的时候是凭什么想法选择的，还是凭感觉的）

我刚才说过我对物理比较感兴趣，看一些广义相对论或者量子场论的东西。我当时想的是把数学学好了，回头来看量子场论，数学基础会好一点。所以我就想跑到数学系来学跟物理有关的数学。当时数学系的方向中有一个是张友金、周坚，还有另外三个。我当时有个同学是来学数论的，就找了别的老师。这个同学也是我们中做得比较好的一个。总之当时最初的想法是为了学物理，但学着学着才发现这方面跟物理的关系还是比较远的。当然还是有很深的物理在里面，但总而言之，不太用物理的理论，像利用的不变量都是数学的想法。比如上同调场论，和物理某个领域做的东西一样，都用到一些变换。虽然做的东西很相似，但基本的想法还是不一样的。所以要学物理的话，还是按物理的思路从下往上学上去比较好，而不是从数学这边往物理跳，跳不过去的。物理有物理的想法。所以现在的话我也不能再去从事物理了。以前跟学堂班的同学座谈的时候，他们有个问题，就是量子力学和分析力学应该选哪个。我当时说，这两个东西不是二选一的问题，必须先学分析力学，然后才能学量子力学。学量子力学，对数学的很多方面也是有用的，因为数学现在有很多东西都是量子化的。

（你们解决科研问题的话一般都是发明新的方法吗？）

做问题肯定是要有新的东西，要不然你是做不出来的。但是具体到我们，这里其实有不同的风格。比如那些很牛的人，为了解决一个问题，他就造了一个很大的机器。看起来他写的书和文章，每句话都是废话，但是这些废话连起来就是

有用。比如 Grothendieck 和他的学生、同事花 20 年时间写了一万页的书，把一个问题解决掉。他的一个很重要的想法是要自然，每个部分都不应该有手工的痕迹，就是最自然地做。举个例子，就像吃核桃，一锤子砸开，然后挖出核来吃。他会觉得这样很暴力，而选择把核桃放在水里，等壳泡软了用手掰开吃。他做事的风格就是崇尚自然，一定要理解到最自然的程度。但是这件事是需要花时间的。理解一个东西，首先本人需要有很深刻的认识，才能把一个问题理解透彻。另一种风格就是，还是拿核桃作比方，就用一个小针把核桃壳一块一块撬下来。或者说，前面那个人杀鸡用牛刀，而这种人杀牛用小杀鸡刀，最后也能一刀刀把牛给杀掉。这种方式，可能也会引入一些概念，但都只是为了叙述的方便，不会那么多废话。具体做起来，也是把最基础的东西解决了，没有什么深入的探索。这个跟我自己做的方向有一定关系，因为方程总是比较现实的。当然我们也希望有一些工具。用一把小刀固然是把牛砍死了，但是过程很漫长，就像我们现在的计算非常复杂。但如果真的要有强有力的工具的话，效率会大大提高。所以我们现在也试图发明一些好的工具。至少现在我们还在用最土的办法，用小刀一刀刀杀牛。其实我想数学界的人是更愿意用前一种方法去杀的，但大多数人使用的还是后一种方式。为什么你们现在要学好数学分析和高等代数，因为以后的很多问题都归结为两类思想——要么是分析的思想，要么是代数的思想。别的东西和结构其实都是一种语言，思考的时候还是用到数学分析和高等代数。不过这些语言的好处是简化一下表达，但本质上还是你大一学的东西。

（你们在学术前沿的交流主要是靠什么，发 paper 和做学术报告吗）

以前都是发在期刊上，当然发在期刊上有个问题，就是比较慢。我做了一个东西，发到期刊上还要等很长的时间。另一个问题就是优先权。比如我做的一个东西和其他人撞车了，我比他快一点，然后投给期刊。但期刊的负责人可能正好是我的竞争对手，于是就把我的稿子压几个月。而他和他的合作者把他们的文章发到另一个比较快的期刊上，这样他们就成了先发表的。这种事情以前是比较多的。后来有一群做理论物理的人对这个现象很不满意，他们就架了一个服务器，让大家把文章都发上面。这样第一大家能够第一时间方便地看到他人的成果，顺便也解决了优先权的问题。这个办法让很多做数学和物理的人都感到很满意，于是这个服务器越做越大，就成了一个很重要的交流平台：arXiv。现在大多数做数学、物理、生物和统计的人都会把自己做好的文章放到这个地方。而且这个地方它有一些规则。你当然可以修改你的文章，但你以前的版本要一直留在那里。这个地方也没有谁管，文章都随便下载。但是上传的时候个人的身份是要留证据的，不是什么都能往上放。一般来说，邮箱域名是学术机构的用户上传文件更方便，而使用公共邮箱服务的人，文章往往只能放在“一般”分类里了，除非得到学术机构人员的背书。总之这个地方就是交流文章的。在其他的地方讨论也有，像我们每逢假期的时候都会往外跑。平时开学的时候在这里上课，放假的时候，做研究的人都不会在家呆着，而是跑到外面开会。上课的时间要开会的话挺麻烦，

要耽误课程。用 email 讨论的话往往不太好，还不如面对面的交流更有效率。

（在网上，一般通过什么方式来获得需要的资料）

主要是数据库。数学类的话有 AMS 美国数学会的 Math Review。所有数学的文章、书和其他出版物，它这里都会有记录。然后别的人对这些记录做评论。这里的東西通常会滞后一点，也就是说有的文章已经出版了，但是还没有入库。看看文章的评论，你会知道这个文章大概讲了些什么东西。相比摘要，有个其他人的评述会了解得更清楚。当然这里的评论赞美的居多，但要遇到真正写得不好，批评也相当严厉。一般没有评论的文章都表示“这篇文章不值得评论”，价值很可能比较低。除了这个之外，还有一个德国的数据库也是收录各种数学文章的。名字我忘了，是一个 Z 打头的德文（编者按：Zentralblatt MATH），大家去搜一下“zbmath”就知道了。跟 AMS 比的话，Z-Math 的东西要少一点。除了这些，有的时候我们也会看一些很一流的期刊，比如 Annals。因为 AMS 的收录是比较慢的，而且它得花时间写评论，而文章早就发在期刊上了。所以有的时候直接去看期刊会比较快。比如大家都觉得可能计算数学现在不是主流，很难想象计算数学的文章能发表在第一流的期刊上。但是前几年就有一篇研究牛顿法解多项式方程的文章发在 annals 上。牛顿法的关键在于初始点的选择，如果初始点选得不好的话，就会陷入循环，找不到解。这篇文章就证明了在平面上有某组点集，对所有方程都可以找到确定的解。所以这篇文章还是很有价值的。杂志的话，最好的两个是 Annals of Mathematics 和 Inventiones Mathematicae。这些都是综合性的杂志，也有一些偏向某个方向的，比如偏向偏微分方程的 Communications on Pure and Applied Mathematics。判断一个期刊的影响力可以看影响因子，它是利用期刊间相互引用的情况和发表文章的数量来计算的。当然这个因子是可以通过人为手段来作弊增加的，所以这也不是唯一的标准。但如果你不了解这个研究方向，也可以作为参考。

（和大数学家接触感受是什么样子的？）

GTM 你们知道吗？GTM 就是 Springer 出版社出的一套黄皮的数学教材。GTM 的教材都还是比较好的，其中有一套叫《现代几何》，不知道你们看过没有，作者之一是 Dubrovin。我导师张友金 90 年左右在俄国待过一年，结识了 Dubrovin。当时苏联正在解体，他就回来了。后来 Dubrovin 去了意大利的 SISSA 研究所，于是我们也就经常往意大利跑，因为现在我们做的很多问题都是跟 Dubrovin 合作的。我和 Dubrovin 主要还是数学上的交流，有的时候也有一些跟数学无关的话题，比如一起喝酒。Dubrovin 也有很多别的爱好，他上次去西藏，就背个大包，带了很专业的登山装备去爬喜马拉雅山。今年有一个会议就是庆祝他 60 岁生日。

（学生接着问：像他这种年纪很大的数学家还在自己做问题吗？还是基本上是手

下的人做？)

他们这种年纪的人一般不做太细的东西了，就像刚才说的用小刀杀牛。他们一般给学生指一个方向。跟这种人交流是有很大收获的，他们往往能预见一些重要的东西。比如刚才我说我 03 年做的那个课题，一开始写得很复杂。我们要做分类，找到一些不变量，这些不变量可以用来区分方程，也就是说，如果两个方程对应的不变量不同，则方程就不是同一类的。Dubrovin 对我们这个不变量的选取不满意。我当时是通过系数和标准形来定义的不变量。他说：“你这个东西能不能给个公式啊？”后来果然找到了公式，这篇文章就变得很好看了。今后要计算这个不变量，只需直接代入计算就可以了。他能让我们把这些很繁的东西变得非常精致。我们在年轻的时候，尽量透支一下自己的生命。我们应该尽量刻苦，年轻的时候多做一些麻烦的事情，会有一些收获。

(我们应该做什么方向，什么方向比较热门)

这个问题太大了。比如你做数论，很可能完全无法下手。但是你如果做一个问题做不出来了，你可以做一些相关的东西。你要知道自己的终极目标并朝着目标努力，当然途中也有一些小的目标。一个最简单的办法是看一下这个领域最牛的人在做什么。比如你看每年的菲尔兹奖得主，他们的文章很可能看不懂。数学部分不看，可以看看语言，了解一下问题的背景，还可以查一下文章的引用。最牛的文章引用的东西通常是有代表性的。通过这些，你可以了解你要做的方向。这里有一个潜在的问题，就是要不要去做最热门的东西。好的数学总是相互联系的，有可能一个领域新作出的结果很有价值，于是就吸引了其他人，然后这个领域发展成很热门的。数学中有很多问题，每个人都想去解决它，比如说黎曼猜想。但是这些问题往往是不能做的。我们要考虑一些现实的东西，比如我做这个东西，我花几年时间应该能把它做好，但这样我就不能发文章，赚不了什么钱，活下去比较难。所以为了活下去，可能需要做一些让自己很失望的工作。做费马猜想的 Wiles 做了 7 年，七年间也发一些小文章。这种方式对大家来说不是很可取。有一种评论认为，Wiles 当年要早点把最初的想法公布出来，参加会议，可能一两年内就有人解决了。但他不公布，偷偷摸摸地做，就花了比较长的时间，虽然最后这个结果是归功于他了。有一个很鲜明的对比，也是一个做数论的人叫做 N. Katz。如果去看费马定理的历史，也会看到这个人。这个人大家对他评价就很高。别人有了问题都和他讨论，他帮人解决了之后也不独占。这就是两种不同的习惯。

(怎么看待本科生的论文，本科生搞的研究)

(先讲了 Dantzig 和单纯形法的故事。)在新生领域可能会有年轻人能解决一些问题，但在成熟的领域，这样的事情不太可能发生。比如 Dantzig 十个问题就能解决好几个，但在数论中 100 个问题能解决一个就很不错了。和其他的工作不同，数学最大的特点是你几乎每天都在失败，很可能不知道要怎么去做一个问

题，总是做不出来。然后突然有一天成功了，就获得了最终的成功。而其他的工作是每天都在成功，事务性的工作，至少每天都有一点进展。但是一旦出了错，往往很严重。所以要培养一种感觉，先要失败，才能成功。你不要相信自己是很幸运的，要相信自己是不幸的。不会做了，出去走走，回来再做。首先你不要对自己失望，其次你要坚定地去做。我们学的东西越多，就越觉得这些东西不是人类能想出来的。但是做起研究来才明白，东西不是一下想到的，而是试了这样不行，那样不行，失败了多次，最终才找到一个可行的办法。数学研究就是这样，和学习很不一样的。

（你们在开学期间要呆在学校上课，放假还得到处跑去参加学术会议，是不是没有什么休闲娱乐的时间啊？）

你不一定每天工作十四个小时，一般工作累了就休息，看看电影，看看书，然后休息累了就继续工作（大家笑）。计划真的很难订。因为数学这个东西是不知道结果的。你只能说，我要做一些东西，但是做多长时间是不知道的，不像学习可以做计划。有时候你算一个东西，算到一半你计划的时间到了，就能放下来么？这是很难受的事情。比如我经常半夜做一个东西，算到十一点多，没有算完。去睡觉吗？睡不着的。必须把它算完才能安心。有的时候，算完发现天已经亮了。

（中国的数学水平在世界上怎么样？）

这个要看哪一方面了。（学生说：几何分析吧）中国的微分几何还是很强的。你们有机会的话，还是该到国外去学习一下，交流是很重要的。不过清华现在有了数学中心，会请国外的大师过来讲课，这也很好。我读书的时候，当时 01、02 年，数学系跟法国数论界的关系很好，联系得比较多，从法国请了一批大神级的人物来讲课，借这个机会培养出了一批人才。像获奖的田一超、郑维喆等等。清华数学中心就是要进一步发展当年那种模式，搞一些长期的课程，让学生们受益。利用这种合作的模式，培养出很多年轻的人才。这个课程一定要长，至少要一个月，三个月，或者半年一年，开出一学期长的课程。这样学生和老师能够有时间熟悉，是一件很好的事。

（那英语的问题老师有什么建议吗）

英语很重要，需要花点时间去学。你口语要说得好一点，听力也很重要。因为数学重在交流。看别人文章能够知道一些东西，但是很慢，你要是把作者抓过来讨论一番，就会很快知道这篇文章到底是在干什么，这是很有好处的一件事情。所以英语是必须要学好的。

（毛天一，余成龙整理）