紧黎曼流形谱理论综述*

杜升华†
指导教师：马力教授

摘　要

本文由两个独立的部分组成：第一部分是对紧致黎曼流形的Laplace算子特征值理论的初步综述，参照有关文献介绍了该领域中一些基本概念和经典结果；第二部分计算了$\mathbb{R}^3$中光滑曲线的半径为ρ的扰动的管状邻域曲面的平均曲率当$\rho \to 0$时的展开式。

关键词：黎曼流形；谱几何；Laplace算子；特征值

§1　引言

关于本文将介绍的这一学科分支，其历史背景要从两位德国数学大师的伟大工作讲起。

20世纪初，David Hilbert（大卫·希尔伯特）致力于积分方程的研究。他所引进的概念和方法，成为希尔伯特空间理论乃至泛函分析学科的源泉，启发了后人大量的工作，意义远超过积分方程本身。此间，希尔伯特在讨论特征值问题时，创造了"谱"这个术语，开辟了算子的谱理论这一研究方向；后来，谱分析理论成为研究量子力学的合适工具，甚至在物理光谱理论中也获得了出人意料的应用。

1910年，希尔伯特邀请了荷兰物理学家Lorentz（洛伦兹）来Göttingen（哥廷根）大学讲学。洛伦兹提出了来自电磁辐射理论的一个问题，其在数学上与Laplace算子特征值的渐近分布有关。1911年，希尔伯特最优秀的学生、著名数学家Hermann Weyl（赫尔曼·外尔）运用积分方程理论解决了这个问题[1]，这是谱理论早期的一个重要结果。

*原题为"紧黎曼流形谱理论综述与管状邻域曲面的平均曲率展开式"，选入本刊的是原文的第一部分，并作了适当删节。

†基数53

[1]即[27]中的Satz X：微分方程$\Delta u + \lambda u = 0$的属于面积为J的任意区域J和边界条件$u = 0$的特征值λ_n，按大小排序，满足等式$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{J}{4\pi}$。

另一方面，同样在哥廷根大学，1854年，Bernhard Riemann（波恩哈德·黎曼）在其申请讲师职位的演讲*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*（关于作为几何基础的假设）中，提出了一系列研究几何对象的深刻思想，标志着几何学的一个至今仍在蓬勃发展的领域——黎曼几何学——的诞生。后经Christoffel、Ricci、Levi-Civita等人的发展，到20世纪初，黎曼几何已初具规模，为广义相对论奠定了合适的数学基础。

黎曼流形的谱理论正是上述两大领域的结合点。具体说来，黎曼流形的“谱”是其上Laplace算子的特征值的全体，对此的研究又称为谱几何。本文第二章从相关的基本概念开始，关于这一学科作一初步综述，介绍该领域的一些基本结果和研究进展。本文作者由于不懂法文，只引用了英文和德文的外文参考文献；限于篇幅，所考虑的主要是紧致无边的黎曼流形和定义在函数空间上的Laplace算子。

§2　紧黎曼流形的谱理论

§2.1　基本概念

首先我们回顾一些有关算子的特征值的一般概念与结论，然后给出黎曼流形上Laplace算子的定义。

§2.1.1　有关算子的特征值的一般概念与结论

设V为一个实（或复）线性空间，其上带有一个正定对称双线性型（或正定Hermite型）$(\cdot,\cdot)$，则称V为一个内积空间（或拟Hilbert空间），$(\cdot,\cdot)$称为V上的内积。

关于内积有如下众所周知的Cauchy-Schwarz不等式与Minkowski不等式：

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y), \quad \forall x,y \in V, \tag{2-1}$$

$$\sqrt{(x+y,x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}, \quad \forall x,y \in V. \tag{2-2}$$

故可由内积诱导范数$\|\cdot\|$：$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$。若V关于此范数所诱导的度量是完备的，则称之为Hilbert空间。一个重要事实是任何度量空间都有在等距意义下唯一的完备化，详见[5]§9.5。

设W为另一个内积空间，内积仍用$(\cdot,\cdot)$表示。设$L: V \to W$为一线性算子，令$D = \{y \in W | \exists z \in V$使得$(Lx,y) = (x,z),\ \forall x \in V\}$，则可在$D$上定义算子$L^*$，$L^*y$等于使

$$(Lx,y) = (x,z),\ \forall x \in V$$

成立的$z \in V$（容易验证此z是唯一的）。称$L^*: D \to X$为L的伴随算子，D就是L^*的定义域。

设$T:V\to V$为一个线性变换，若存在$\lambda\in\mathbb{R}$（或$\lambda\in\mathbb{C}$）和非零向量$x\in V$使得$Tx=\lambda x$，则称λ为T的一个特征值，x为相应于特征值λ的一个特征向量，所有这些x的全体构成一个线性空间，叫做相应于特征值λ的特征子空间。

若T的伴随算子T^*在其定义域上与T相等，则称T为对称的；若对称算子T的伴随算子T^*可定义在全空间V上，则称T是自伴随的。若对任意非零向量x，均有$(Tx,x)>0$（或$(Tx,x)\geq 0$），则称T是正定的（或半正定的）。

下面列举一些简单但十分有用的一般结论。

- 自伴随算子的特征值都是实数；特别地，半正定自伴随算子的特征值都是非负实数。这由

$$\lambda(x,x)=(\lambda x,x)=(Tx,x)=(x,Tx)=(x,\lambda x)=\bar{\lambda}(x,x)$$

  立即可得，其中x是相应于自伴随算子T的特征值λ的特征向量。

- 设$T:V\to V$为内积空间V上的自伴随线性变换，x和y分别是相应于特征值λ与μ的特征向量，其中$\lambda\neq\mu$，则$(x,y)=0$。这是因为，

$$\lambda(x,y)=(\lambda x,y)=(Tx,y)=(x,Ty)=(x,\mu y)=\mu(x,y).$$

- 设$L:V\to W$是两个内积空间之间的线性算子，其对偶算子L^*的定义域包含L的值域。令$N=L^*L:V\to V$，则对任意$x,y\in V$有

$$(Nx,y)=(L^*Lx,y)=(Lx,Ly)=(x,L^*Ly)=(x,Ny),$$

$$(Nx,x)=(L^*Lx,x)=(Lx,Lx)\geq 0,$$

  故N是一个半正定自伴随算子。

接下来回顾有关Fourier级数的一些基本概念和定理：

设H为一Hilbert空间，若$\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$是$H$中一列两两正交的单位向量，且$\forall x\in H$都能写成它们的有限或无限线性组合（无穷级数的收敛按内积诱导的范数意义理解），则称$\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$是$H$的一组标准正交基。若一列向量的有限线性组合在$H$中是稠密的，则称其在$H$中是完全的。一个熟知的事实是，对一列两两正交的单位向量来说，它们构成H的标准正交基等价于在H中是完全的，而且等价于下面的Fourier展开式(2-3)和Parseval等式(2-4)：

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,x_i)x_i,\quad \forall x\in H, \tag{2-3}$$

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,x_i)|^2,\quad \forall x\in H. \tag{2-4}$$

§2.1.2 黎曼流形上Laplace算子的定义

事实上，常用的Laplace算子定义有两种，以下分别介绍。

设(M,g)为一定向的n维紧致无边黎曼流形。设∇为光滑函数的梯度算子，div为光滑向量场的散度算子。定义**Beltrami-Laplace算子**为$\Delta=\mathrm{div}\circ\nabla$，即：对任意光滑函数$f\in C^\infty(M)$，有$\Delta f=\mathrm{div}(\nabla f)$。取流形$M$上的局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$，设$(g_{ij})=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$为度量矩阵，$(g^{ij})$为其逆矩阵，$\Gamma_{ij}^k$为相应于Levi-Civita联络$\nabla$的Christoffel符号，则$\Delta f$在局部坐标系下的表达式为[2]

$$\Delta f=\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)=g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-g^{ij}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{2-5}$$

在欧氏空间情形，$g_{ij}=\delta_{ij}$，上式化归为经典的欧氏空间中Laplace算子：

$$\Delta f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}.$$

这一定义有一种等价表述方式：$\Delta f=\mathrm{trHess}f$。其中Hess$f$为函数$f$的Hessian张量，对任意向量场$X,Y$，其取值为

$$\mathrm{Hess}f(X,Y)=g(\nabla_X\nabla f,Y). \tag{2-6}$$

在局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$下，记Hess$f$的分量为$f_{i,j}=\mathrm{Hess}f\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$，则

$$\Delta f=g^{ij}f_{i,j},$$

$$|\mathrm{Hess}f|^2=g^{ik}g^{jl}f_{i,j}f_{k,l}.$$

易见Δf与$|\mathrm{Hess}f|^2$分别是矩阵$(g^{ik}f_{k,j})$的特征值之和与特征值平方之和。由Cauchy不等式立得

$$|\mathrm{Hess}f|^2\geq\frac{1}{n}|\Delta f|^2. \tag{2-7}$$

这一关系式将在后面定理2.9的证明中用到。

下面介绍另一种Laplace算子，以线性算子同其对偶算子的乘积的形式定义的Hodge-Laplace算子（暂记为$\tilde{\Delta}$），这恰是谱几何的主要研究对象，并与前一种Laplace算子密切相关。为此必须先在M的光滑函数空间$C^\infty(M)$与一阶光滑微分形式空间$\Lambda^1(M)$上引入内积。

[2]本文全篇采用Einstein求和约定，即上下指标重复代表对该指标从1到n求和。

因为M是定向的，所以n-形式$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$不依赖于局部坐标系的选取，并可定义其积分（详见[5]第15章）。称dV_g为(M,g)的体积形式，$\int_M dV_g$就是(M,g)的体积，记作$Vol(M,g)$。由此可定义$C^\infty(M)$上的内积

$$(f,h) = \int_M fhdV_g, \tag{2-8}$$

其中$f,h \in C^\infty(M)$。

利用黎曼度量g，不难在切向量场空间$\Gamma(M)$上也定义一个内积（为记号简便，仍用$(\cdot,\cdot)$表示，下同）：设$X,Y \in \Gamma(M)$，定义

$$(X,Y) = \int_M g(X,Y)dV_g. \tag{2-9}$$

为把内积的定义推广到一阶外微分形式空间$\Lambda^1(M)$上，需要用到1-形式与向量场之间的“音乐同构”$\sharp$与$\flat$（[1]§7.4）：若X为向量场，则对应的1-形式$X^\flat$定义为$X^\flat(Y) = g(X,Y), \forall Y \in \Gamma(M)$；若$\omega$为1-形式，则对应的向量场$\omega^\sharp$由下式唯一确定：$\omega(Y) = g(\omega^\sharp, Y), \forall Y \in \Gamma(M)$。在局部坐标系下，设$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$X^\flat = X_i dx^i$，$\omega = \omega_i dx^i$，$\omega^\sharp = \omega^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，则有

$$X_i = g_{ij}X^j, \tag{2-10}$$

$$\omega^i = g^{ij}\omega_j, \tag{2-11}$$

即向量场与1-形式之间的转换对应着指标的升降，因而采用了音乐的记号。

于是可定义$\omega,\eta \in \Lambda^1(M)$之间的内积为：

$$(\omega,\eta) = \int_M g(\omega^\sharp, \eta^\sharp)dV_g. \tag{2-12}$$

容易验证以上定义的这些内积确实满足正定性、对称性、双线性性。

现在，函数的微分映射$d: C^\infty(M) \to \Lambda^1(M)$是内积空间之间的线性映射。定义它的伴随算子为$\delta: \Lambda^1(M) \to C^\infty(M)$，即$\delta$满足

$$(\phi, df) = (\delta\phi, f), \quad \forall \phi \in \Lambda^1(M),\ \forall f \in C^\infty(M). \tag{2-13}$$

值得注意的是，δ确实可在整个$\Lambda^1(M)$上定义（甚至可以在任意阶微分形式空间上定义$\delta: \Lambda^{r+1}(M) \to \Lambda^r(M), 0 \le r \le n-1$，称之为**余微分算子**）；利用Hodge星算子$*: \Lambda^r(M) \to \Lambda^{n-r}, 0 \le r \le n$，可将其在$\Lambda^1(M)$上的定义表达为

$$\delta = -* \circ d \circ *: \Lambda^1(M) \to C^\infty(M). \tag{2-14}$$

这里略去相关的细节。重要的是，δ的定义域包含d的值域，因而可以定义$C^\infty(M)$上的**Hodge-Laplace算子**：$\tilde{\Delta} = \delta \circ d$。由上节的一般结论立即可知$\tilde{\Delta}$是自伴随的、半正定的线性算子。

两种Laplace算子之间有着紧密的联系。事实上，我们有如下命题（证明参见[2]§2.5）：

命题2.1. *Hodge-Laplace*算子$\tilde{\Delta}$与*Beltrami-Laplace*算子Δ具有如下关系：

$$\tilde{\Delta} = -\Delta.$$

需要指出的是，在黎曼几何的文献中，Laplace算子Δ通常是按照Beltrami-Laplace算子的方式定义的，以此作为欧氏空间中经典Laplace算子的自然推广；而在研究流形上算子的特征值时，人们往往选择半正定的Hodge-Laplace算子，因为这时其特征值都是非负的。为协调这种不一致性，以下简称Hodge-Laplace算子为Laplace 算子，但记为$-\Delta$。有时在上标位置标注流形名称以示区别。

现在给出黎曼流形的谱的确切定义：

定义2.1. 称黎曼流形(M, g)上*Hodge-Laplace*算子$-\Delta$的特征值的集合为(M, g)的谱，记作$\mathrm{Spec}(M, g)$。

下面叙述几个将在后面经常用到的基本定理及其推论：

定理2.1. （紧致无边流形的*Stokes*定理）设M为一个定向的n维紧致无边光滑流形，ω为M上一个光滑的$n-1$次微分形式，则

$$\int_M d\omega = 0. \tag{2-15}$$

定理2.2. （紧致无边黎曼流形的散度定理）设(M, g)为定向的紧致无边黎曼流形，X为M上的光滑向量场，则

$$\int_M \mathrm{div} X dV_g = 0. \tag{2-16}$$

上述两定理的证明分别可参见[5]§15.3和[2]§2.5。特别地，取$X = \nabla f$，其中f为M上的光滑函数，则$\mathrm{div} X = \Delta f$。因此在上述条件下有如下重要推论：

$$\int_M \Delta f dV_g = 0. \tag{2-17}$$

此外，设Y为M上另一光滑向量场，由$\mathrm{div}(fY) = g(\nabla f, Y) + f \mathrm{div} Y$可得**分部积分公式**：

$$\int_M g(\nabla f, Y) dV_g = -\int_M f \mathrm{div} Y dV_g. \tag{2-18}$$

特别地，取$Y = \nabla h$，其中h为M上的光滑函数，则有

$$-\int_M h\Delta f dV_g = \int_M g(\nabla f, \nabla h) dV_g = -\int_M f\Delta h dV_g. \tag{2-19}$$

接下来叙述著名的Stone-Weierstrass定理（证明参见[5]§16.4）。在此之前先引入两个定义：

定义2.2. 称集合X上的函数集S**分离X中的点**，如果对任意一对不同的点$x_1, x_2 \in X$存在一个函数$f \in S$使得$f(x_1) \neq f(x_2)$。

定义2.3. 称集合X上的函数族$\mathcal{F}$在X上**非退化**，如果对每一点$x_0 \in X$存在一个函数$f_0 \in \mathcal{F}$使得$f_0(x_0) \neq 0$。

特别地，当非零常值函数属于$\mathcal{F}$时，显然$\mathcal{F}$是非退化的。在如下定理的应用中，这是一个很常用的条件。

定理2.3. （*Stone-Weierstrass*定理）令A为一个定义在紧集K上的连续实值函数的代数[3]，若A分离K中的点且在K上非退化，则A是K上实值连续函数空间$C(K, \mathbb{R})$的一个到处稠密子空间（即在一致收敛范数意义下稠密）。若A为复值连续函数的代数且加上自伴随性条件（即$f \in A$可推出$\bar{f} \in A$，其中$\bar{f}$为f的共轭），则在同样假定下A在$C(K, \mathbb{C})$中稠密。

上述定理包含了Weierstrass的一个经典结果作为特例：

定理2.4. （*Weierstrass*多项式一致逼近定理）设K为$\mathbb{R}^n$中一个紧集，$f \in C(K, \mathbb{R})$（或$C(K, \mathbb{C})$），则存在多项式序列$\{P_n\}$在K上一致收敛于f；当f为实值时，$\{P_n\}$亦可取成实值的。

在分析学中，内积空间的完备性往往起着至关重要的作用。按照经典的测度与积分理论，平方可积函数空间$L^2(M)$与Sobolev空间$H^1(M)$分别可看作$C^\infty(M)$在范数$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$与$\|f\|_1 = \sqrt{(f,f) + (df, df)}$意义下的完备化。限于篇幅，这里不再讨论其详细定义，但引述一个重要的不等式：

定理2.5. （*Poincaré*不等式）令$H_0^1(M) = \{f \in H^1(M) | \int_M f dV_g = 0\}$，则存在常数$C > 0$使得$\forall f \in H_0^1(M)$，有

$$\int_M |\nabla f|^2 dV_g \geq C \int_M |f|^2 dV_g. \tag{2-20}$$

Poincaré不等式是分析学中的一个重要定理，[9]§8.11的证明可以平行地搬到紧黎曼流形上来；后面将看到谱理论同该不等式的密切联系。

[3]即A是$C(K, \mathbb{R})$的一个线性子空间，且对乘法封闭。

§2.2 重要性质

本节介绍紧致黎曼流形的谱的一些重要性质。

§2.2.1 基本定理

首先，引述有关Laplace算子特征值与特征子空间的一个基本定理（其叙述引自[4]136页定理4.1，证明参见[6]定理14.6和第16节）：

定理2.6. （*1*）紧致黎曼流形的谱Spec(M,g)构成趋向于$+\infty$的离散序列$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$;（*2*）每个特征值$\lambda_i$的特征子空间$\mathscr{P}_i(M,g)$都是有限维的;（*3*）在一致收敛的拓扑意义下$(M,g)$的特征子空间$\mathscr{P}(M,g)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_i(M,g)$ 在$C^\infty(M)$内稠密，在二次均方收敛意义下也稠密。

由此，利用前面的一般结论不难看出，存在Laplace算子的一列特征函数$\{\varphi_0,\varphi_{1_1},\cdots,\varphi_{1_{d_1}},\cdots,\varphi_{i_1},\cdots,\varphi_{i_{d_i}},\cdots\}$，其中$\varphi_{i_\alpha}$是相应于特征值$\lambda_i$的特征函数，$1\le\alpha\le d_i=\dim\mathscr{P}_i(M,g)$，使其成为$L^2(M)$的一组标准正交基。上述定理还可推出一个很有用的命题，可用于在某些情况下完全确定一个黎曼流形的谱。

命题2.2. 设$\forall i\in\mathbb{N}$给定非零向量空间$V_i\subset C^\infty(M)$，满足（*1*）$\forall i\in\mathbb{N}$，$\exists\lambda_i\in\mathbb{R}$使得$\forall\varphi\in V_i$均有$-\Delta\varphi=\lambda_i\varphi$,（*2*）$\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}V_i$在二次均方收敛意义下在$C^\infty(M)$中稠密，则Spec$(M,g)=\{\lambda_i\}$，且每个$V_i$都是相应$\lambda_i$的特征子空间。

证明（参照[4]137页命题4.2）：根据定义，显然$\{\lambda_i\}\subset$ Spec(M,g)且V_i包含于λ_i的特征子空间$\mathscr{P}_i(M,g)$。假设$\exists\lambda\in$ Spec(M,g) 而$\lambda\notin\{\lambda_i\}$，则存在相应于$\lambda$的非零特征向量$v$，$v$与所有$\mathscr{P}_i(M,g)$正交，从而与$\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}V_i$正交，这与条件（2）矛盾。故必有Spec$(M,g)=\{\lambda_i\}$。假设某个$V_i$是$\lambda_i$的特征子空间$\mathscr{P}_i(M,g)$的真子空间，根据定理2.6，$\mathscr{P}_i(M,g)$ 是有限维空间，故存在$w_i\in\mathscr{P}_i(M,g)-V_i$使得$w_i$与$V_i$正交。易见$w_i$与所有的$V_j,j\in\mathbb{N}$都正交，这又与条件（2）矛盾。所以$V_i=\mathscr{P}_i(M,g)$，$\forall i\in\mathbb{N}$。

§2.2.2 乘积流形的谱

作为应用，我们可以由两个黎曼流形的谱来决定它们的乘积流形的谱。

设$(M\times N,g\times h)$是两个黎曼流形(M,g)与(N,h)的乘积流形，其中$g\times h=p^*g+q^*h$，p和q分别为$M\times N$到M和N上的投影。对于$\lambda\in\mathscr{P}(M,g),\mu\in\mathscr{P}(N,h)$，令

$$p^*\mathscr{P}_\lambda(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}_\mu(N,h)=\{(f_1\circ p)\cdot(f_2\circ q)|f_1\in\mathscr{P}_\lambda(M,g),f_2\in\mathscr{P}_\mu(N,h)\}.$$

以及

$$p^*\mathscr{P}(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}(N,h)=\{(f_1\circ p)\cdot(f_2\circ q)|f_1\in\mathscr{P}(M,g),f_2\in\mathscr{P}(N,h)\}.$$

下面参照[4]§4.1.3来证明如下结果：

定理2.7. *(i)*$\mathscr{P}(M\times N,g\times h)=p^*\mathscr{P}(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}(N,h)$；*(ii)*$\mathrm{Spec}(M\times N,g\times h)=\{\lambda+\mu|\lambda\in\mathrm{Spec}(M,g),\mu\in\mathrm{Spec}(N,h)\}$，且$\forall\gamma\in\mathrm{Spec}(M\times N,g\times h)$，有

$$\mathscr{P}_\gamma(M\times N,g\times h)=\sum_{\substack{\lambda\in\mathrm{Spec}(M,g)\\ \mu\in\mathrm{Spec}(N,h)\\ \lambda+\mu=\gamma}}p^*\mathscr{P}_\lambda(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}_\mu(N,h).$$

证明: 将$M\times N$，M和N上的Levi-Civita联络分别用$\nabla^{M\times N}$，∇^M和∇^N表示。设λ与μ分别是$-\Delta^M$与$-\Delta^N$的特征值，f_1与f_2分别是相应于λ与μ的特征函数。

易证（参见[4]第117-118页）

$$\nabla^{M\times N}(f_1\circ p)=(\nabla^M f_1)\circ p,$$

$$\Delta^{M\times N}(f_1\circ p)=(\Delta^M f_1)\circ p,$$

以及

$$\begin{aligned}
&-\Delta^{M\times N}((f_1\circ p)\cdot(f_2\circ q))\\
=\;&-\Delta^{M\times N}(f_1\circ p)\cdot(f_2\circ q)-2g\times h(\nabla^{M\times N}(f_1\circ p),\nabla^{M\times N}(f_2\circ q))\\
&+(f_1\circ p)\cdot(-\Delta^{M\times N})(f_2\circ q)\\
=\;&(-\Delta^M f_1)\circ p\cdot(f_2\circ q)-2g\times h(\nabla^M(f_1\circ p),\nabla^N(f_2\circ q))+(f_1\circ p)\cdot((-\Delta^N f_2)\circ q)\\
=\;&\lambda(f_1\circ p)\cdot(f_2\circ q)+(f_1\circ p)\cdot\mu(f_2\circ q)\\
=\;&(\lambda+\mu)(f_1\circ p)\cdot(f_2\circ q).
\end{aligned}$$

由此可见$p^*\mathscr{P}_\lambda(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}_\mu(N,h)\subset\mathscr{P}_{\lambda+\mu}(M\times N,g\times h)$。进一步，如令

$$W_\gamma=\sum_{\substack{\lambda\in\mathrm{Spec}(M,g)\\ \mu\in\mathrm{Spec}(N,h)\\ \lambda+\mu=\gamma}}p^*\mathscr{P}_\lambda(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}_\mu(N,h),$$

则有$W_\gamma\subset\mathscr{P}_\gamma(M\times N,g\times h)$。

注意到$p^*\mathscr{P}(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}(N,h)=\sum_\gamma W_\gamma$，其中$\gamma\in\{\lambda+\mu|\lambda\in\mathrm{Spec}(M,g),\mu\in\mathrm{Spec}(N,h)\}$，且$W_\gamma$满足命题2.2中的条件（1）。因此为得出定理的结论，只需验证命题2.2中的条件（2），即$p^*\mathscr{P}(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}(N,h)$在$\mathscr{P}(M\times N,g\times h)$中的稠密性。

事实上，由定理2.6知$\mathscr{P}(M,g)$与$\mathscr{P}(N,h)$分别在$C^\infty(M)$与$C^\infty(N)$中在一致收敛意义下稠密，从而$p^*\mathscr{P}(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}(N,h)$在相同意义下在$p^*C^\infty(M)\otimes q^*C^\infty(N)$中稠密。另一方面，$p^*C^\infty(M)\otimes q^*C^\infty(N)$显然是$C^\infty(M\times N)$的一个子代数，满足Stone-Weierstrass定理的条件，故在后者当中在一致收敛意义下稠密。因此$p^*\mathscr{P}(M,g)\otimes q^*\mathscr{P}(N,h)$在$C^\infty(M\times N)$中在一致收敛意义下稠密，当然也在$\mathscr{P}(M\times N,g\times h)$中在均方收敛意义下稠密。证毕。

§2.2.3 λ_1的极大极小原理及其估计

本小节参照[4]§5.1给出Laplace算子第一非零特征值λ_1（以下简称第一特征值）的一种变分刻画，并引述有关λ_1上、下界估计的一些经典结果。

定理2.8.（λ_1的极大极小原理）设黎曼流形(M,g)谱的第一特征值为λ_1，则

$$\lambda_1=\inf_{f\in H_0^1(M)}\frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}. \tag{2-21}$$

证明：设(M,g)的谱为$\{\lambda_i\}$，根据定理2.6，可找到Laplace算子的特征函数组成的L^2标准正交基$\{\varphi_{i_\alpha}\}$，其中φ_{i_α} 相应于特征值λ_i。设$f\in H_0^1(M)$，令$(f,\varphi_{i_\alpha})=a_{i_\alpha}$，则

$$\begin{aligned}
0 &\le \|\nabla f-\sum_{i_\alpha}a_{i_\alpha}\nabla\varphi_{i_\alpha}\|^2\\
&= \|\nabla f\|^2-2\sum_{i_\alpha}a_{i_\alpha}(\nabla f,\nabla\varphi_{i_\alpha})+\sum_{i_\alpha}a_{i_\alpha}^2\|\nabla\varphi_{i_\alpha}\|^2\\
&= \|\nabla f\|^2-2\sum_{i_\alpha}a_{i_\alpha}(f,-\Delta\varphi_{i_\alpha})+\sum_{i_\alpha}a_{i_\alpha}^2(\varphi_{i_\alpha},-\Delta\varphi_{i_\alpha})\\
&= \|\nabla f\|^2-\sum_{i_\alpha}a_{i_\alpha}^2\lambda_i.
\end{aligned}$$

根据Parseval等式并考虑到$(f,1)=0$，有$\sum\limits_{i\neq 0}a_{i_\alpha}^2=\|f\|^2$，故

$$\|\nabla f\|^2\ge\sum_{i_\alpha}\lambda_i a_{i_\alpha}^2\ge\lambda_1\sum_{i\neq 0}a_{i_\alpha}^2=\lambda_1\|f\|^2. \tag{2-22}$$

此外，当f是相应于λ_1的特征向量时上式等号成立：

$$\|\nabla f\|^2=(\nabla f,\nabla f)=(f,-\Delta f)=(f,\lambda_1 f)=\lambda_1\|f\|^2,$$

所以$\lambda_1=\inf\limits_{f\in H_0^1(M)}\frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}$。

第一特征值λ_1的这种极小值原理给出了Poincaré不等式中的常数的一个几何解释：该式的最佳常数就是λ_1。下面的定理利用曲率信息给出λ_1 的一个下界估计，从而也就把Poincaré不等式常数的下界与流形的几何性质联系在一起。

定理2.9.（*Lichnerowicz*定理）设(M,g)为n维紧致黎曼流形，Ric为其*Ricci*曲率张量，若存在正数$k>0$使$\mathrm{Ric}\ge kg$，则对$-\Delta$的第一特征值λ_1有如下估计：

$$\lambda_1\ge\frac{n}{n-1}\cdot k. \tag{2-23}$$

证明：首先引用一个著名的微分恒等式（它是被称作Weitzenböck公式的一系列公式中的一个，证明参见[4]§3.2或[8]§12）：

引理2.1. （*Bochner*公式）对黎曼流形(M,g)上的光滑函数f，有

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\mathrm{Hess}f|^2 + g(\nabla f, \nabla\Delta f) + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f). \tag{2-24}$$

在Bochner公式中，取f为$-\Delta$的相应于特征值λ_1的特征函数，则有

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\mathrm{Hess}f|^2 - \lambda_1 g(\nabla f, \nabla f) + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

在(M,g)上积分并利用Cauchy-Schwarz不等式$\|\mathrm{Hess}f\|^2 \geq \frac{1}{n}\|\Delta f\|^2$得

$$\begin{aligned} 0 &= \|\mathrm{Hess}f\|^2 - \lambda_1\|\nabla f\|^2 + \int_M \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)dV_g \\ &\geq \frac{1}{n}\|\Delta f\|^2 - \lambda_1\|\nabla f\|^2 + k\|\nabla f\|^2 \\ &= \frac{1}{n}\lambda_1\langle f, -\Delta f\rangle + (k-\lambda_1)\|\nabla f\|^2 \\ &= \frac{\lambda_1}{n}\|\nabla f\|^2 + (k-\lambda_1)\|\nabla f\|^2, \end{aligned}$$

故$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}\cdot k$。

与此相关，Sobolev不等式[4]中的常数也与谱值有密切联系，参见[16]，限于篇幅，不再详述。下面列举有关第一特征值λ_1的估计同流形几何性质的关系的另一些基本定理：

定理2.10. （*Obata[22]*）在定理*2.9*的条件下，若*(2-23)*中等号成立，即

$$\lambda_1 = \frac{n}{n-1}k,$$

则(M,g)与标准球面(S^n, g_0)等距。

定理2.11. （*Cheeger[10]*）对于任一自然数n，存在一数$k(n)>0$，使得对任意非负截面曲率的n维黎曼流形(M,g)都有[5]

$$\lambda_1 \leq \frac{k(n)}{d^2},$$

其中d为(M,g)的直径，即M上任意两点间距离的上确界。

---

[4]若M为紧致无边n维黎曼流形，则存在常数C使得对一切$f\in H_0^1(M)$，有$C\left(\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_M |\nabla f|$，详见[3]§3.1及[9]第8章。

[5]在[10]中给出了常数$k(n)$ 的具体估计：$4\sqrt{e^3(n+2)^3}\cdot\sqrt{1/\lambda_1} \geq d$，其中$e$为自然对数底数。

定理2.12. (*Cheeger*) 设(M,g)为连通的紧致黎曼流形，定义等周常数

$$h=\inf_S\left\{\frac{Vol(S)}{\min\{Vol(M_1),Vol(M_2)\}}\right\},$$

其中S取遍M中超曲面，它将M分成以S为共同边界的两部分M_1和M_2。则有

$$\lambda_1\geq\frac{h^2}{4}.$$

关于λ_1的上界估计，[3]§3.3中给出了S. Y. Cheng在[13]中建立的特征值比较定理：

定理2.13. (*S. Y. Cheng*)设M是完备的n维黎曼流形，其*Ricci*曲率$\geq(n-1)k$。以$B(x_0,r)$表示M中以x_0为中心、r为半径的测地球；再以$V(k,r)$表示单连通的n维具常曲率k的空间形式中半径为r的测地球，则对*Dirichlet*边界条件[6]而言

$$\lambda_1(B(x_0,r))\leq\lambda_1(V(k,r)).$$

关于λ_1的下界估计，[3]§3.4对非负Ricci曲率流形给出了一个很简洁的不等式：

定理2.14. [7] (*Li-Yau*)设M为紧致无边黎曼流形，$\mathrm{Ric}(M)\geq0$，又d表示M的直径，则

$$\lambda_1\geq\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2.$$

§2.3 例子

黎曼流形的谱的计算是一个很复杂的问题，甚至对于$\mathbb{R}^2$中任意三角形的内部这样看似简单的区域，该问题都没有完全解决。不过对于具有高度对称性的流形，人们可以碰巧发现其上Laplace算子的一些特征值与特征函数，有时甚至能证明这些特征值就是其全部的谱！这里命题2.2起到至关重要的作用。下面参照[4]第四章介绍两个典型的例子——标准球面与平坦环面。(限于篇幅，后一例子略去，编者注。)

§2.3.1 标准球面的谱

令$S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}||x|=1\}$为$\mathbb{R}^{n+1}$的单位球面，赋予其由欧氏空间的平坦度量所诱导的标准度量g_0，则有如下结果：

命题2.3. 标准球面(S^n,g_0)的谱是由$\lambda_k=k(n+k-1)$ ($k\geq0$) 形成的集合，λ_k所对应的特征子空间等于$\mathbb{R}^{n+1}$上k次齐次调和多项式在S^n 上的限制所组成的空间$\mathscr{H}_k$。

---

[6] 对带边流形，Dirichlet边界条件是指将Laplace算子的定义域限制在$C_0^\infty(M)$的完备化空间$\hat{H}^1(M)$上，其中$C_0^\infty(M)$是M上紧支集光滑函数全体。详见[3]§3.1。

[7] 以此定理的方法为基础，钟家庆与杨洪苍将结论改进为$\lambda_1\geq\frac{\pi^2}{d^2}$，详见[3]§3.4。

为证明此命题，首先要计算齐次调和多项式在标准球面上的Laplace，为此需要S^n与$\mathbb{R}^{n+1}$的Laplace算子的如下关系（证明参见[4]第125页命题3.8，但那里的Δ表示本文中的Hodge-Laplace算子$-\Delta$）：

引理2.2. 球面(S^n, g_0)上的*Beltrami-Laplace*算子Δ^{S^n}与R^{n+1}中的经典*Beltrami-Laplace*算子$\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}$具有如下关系；设$f$是$\mathbb{R}^{n+1}$上的光滑函数，$r$是$\mathbb{R}^{n+1}$中点到原点的距离，则

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)|_{S^n} = \Delta^{S^n}(f|_{S^n}) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right|_{S^n} + n\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{S^n}. \tag{2-25}$$

现设$H = r^k H|_{S^n}$是一个k次齐次调和多项式。对r求导得

$$\frac{\partial H}{\partial r} = kr^{k-1}H|_{S^n}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = k(k-1)r^{k-2}H|_{S^n}.$$

代入上述公式得

$$0 = \Delta^{S^n}(H|_{S^n}) + k(n+k-1)H|_{S^n},$$

即$H|_{S^n}$是相应于$-\Delta^{S^n}$的特征值$k(n+k-1)$的特征向量：

$$-\Delta^{S^n}(H|_{S^n}) = k(n+k-1)H|_{S^n}.$$

记$\mathbb{R}^{n+1}$上k次齐次调和多项式所成向量空间为$\mathscr{H}_k$，其在S^n上的限制所成向量空间为$\tilde{\mathscr{H}_k}$，则有$\tilde{\mathscr{H}_k} \subset \mathscr{P}_{k(n+k-1)}(S^n, g_0)$.

因此根据命题2.2，为证命题2.3，只需验证$\bigoplus_{k\geq 0}\tilde{\mathscr{H}_k}$（在均方收敛意义下）在$C^\infty(S^n)$中的稠密性。

记$\mathbb{R}^{n+1}$上k次齐次多项式所成向量空间为$\mathscr{P}_k$，其在S^n上的限制所成向量空间为$\tilde{\mathscr{P}_k}$。记$\tilde{f}$为$\mathbb{R}^{n+1}$上函数f在S^n上的限制。在多项式空间$\mathscr{P} = \bigoplus_{k\geq 0}\mathscr{P}_k$中引入内积：$\langle P, Q\rangle = \int_{S^n}\tilde{P}\tilde{Q}dV_{g_0}$。则有（参见[4]第157-159页）

引理2.3. 对所有$k \geq 0$,

$$\mathscr{P}_{2k} = \mathscr{H}_{2k} \oplus r^2\mathscr{H}_{2k-2} \oplus \cdots \oplus r^{2k}\mathscr{H}_0, \quad \mathscr{P}_{2k+1} = \mathscr{H}_{2k+1} \oplus r^2\mathscr{H}_{2k-1} \oplus \cdots \oplus r^{2k}\mathscr{H}_1,$$

其中各子空间相对于如上引进的内积是两两正交的。

由上述引理立得$\bigoplus_{l\geq 0}\tilde{\mathscr{H}_l} = \bigoplus_{k\geq 0}\tilde{\mathscr{P}_k}$，而根据Weierstrass多项式一致逼近定理，后者在$C^\infty(S^n)$中在一致收敛意义下稠密，故$\bigoplus_{k\geq 0}\tilde{\mathscr{H}_k}$在均方收敛意义下在$C^\infty(S^n)$中也是稠密的。证毕。

§2.3.2 平坦环面的谱（略）

§2.4 谱几何的简单应用与研究进展

众所周知，处理几何对象分类问题的有效办法是找出在保持几何结构的映射下的不变量。例如，基本群是同胚映射的不变量，那么基本群不同的拓扑空间必然是不同胚的，从而具有相同基本群是两个拓扑空间（在同胚意义下）属于同一类的必要条件。同样地，由于黎曼流形的谱由黎曼度量完全决定，因此谱不同的黎曼流形必然不是等距的。也就是说，具有相同谱值为把两个黎曼流形按等距归为一类提供了必要条件。

很自然的问题是上述条件是否充分。遗憾的是分类问题从来不会这样简单，正如基本群不能完全决定拓扑结构一样，谱也不能完全决定黎曼度量。在这方面，Milnor给出了一个著名的反例[25]：存在两个16维平坦环面，它们谱值相同，但不是等距的，详见[4]§4.3。更多反例参见[18]，[19]，[20]。尽管如此，从谱值中仍可获得许多几何信息，例如下面的命题（为表述方便起见，首先给出一个定义）：[8]

定义2.4. 如果$\mathrm{Spec}(M,g)=\mathrm{Spec}(N,h)$，则称两个黎曼流形$(M,g)$和$(N,h)$是等谱的。

命题2.4. 等谱的黎曼流形具有相同的维数和体积。

命题2.5. *2*维黎曼流形的*Euler-Poincaré*示性数χ由谱唯一确定，因而谱能够决定定向的闭黎曼曲面的拓扑。

命题2.6. 设(M,g)与(N,h)为等谱的n维黎曼流形，$n=2,3$，若M的截面曲率为常数k，则N的截面曲率也为常数k。当$n=4$时，加上$\chi(M)=\chi(N)$的条件，则同样结论成立。

特别是，对于旋转曲面，黎曼度量可由谱决定，即[17]中的如下定理：

定理2.15. 令M，$\tilde{M}$为两个黎曼流形，分别等距于(S^2,g)和$(S^2,\tilde{g})$，其中$g,\tilde{g}$是在绕z轴的旋转与关于(x,y)平面的反射下不变的度量。则如下说法等价：
(i)M与$\tilde{M}$等距，
(ii)M与$\tilde{M}$有相同的谱。[9]

不仅如此，从Laplace算子的特征函数也能得到不少有用的信息，例如：

命题2.7. *[11]*设M是同胚于S^2的黎曼流形，$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$是平方和为常数的第一特征函数，则$M$等距于常截面曲率的球面。

---

[8] 这里采用了比[4]§6.3更简洁的表述方式，在那里可以找到相应命题的证明。

[9] [17]还证明了定理2.15中的两种说法等价于M与$\tilde{M}$有相同的S^1- 不变谱，即拥有在绕z轴旋转下不变的特征函数的那些特征值的全体。

以上这种由谱几何的信息导出黎曼流形几何性质的问题（一个通俗说法是“听音辨鼓”，参见[26]），是谱几何研究的一个重要方面，被称作谱几何的“反问题”。“正问题”指的是，由黎曼几何的性质导出Hilbert空间算子理论的谱的特性，包括一些流形的谱的计算、关于特征值的信息和谱的简单应用。

特征值的估计是一个重要的研究课题。这方面的经典结果已在前面有所介绍，以下列举一些研究进展。例如，Buser在[12]中用Ricci曲率和流形的体积给出了第k特征值λ_k的一个上界估计（Satz 7）：

命题2.8. *对每个Ricci曲率有下界$-\kappa^2(n-1),\kappa>0$的n维紧致黎曼流形M，有*

$$\lambda_k \le (j_{\frac{n}{2}-1})^2\left(2\kappa+\sigma(n)\left(\frac{k}{\mathrm{Vol}(M)}\right)^{1/n}\right),\quad k=1,2,\ldots,$$

其中$\sigma(n)=2\sqrt[n]{b_n}$，$b_n=\pi^{n/2}\Gamma(n/2+1)$为$n$维欧氏单位球面的体积，$j_{\frac{n}{2}-1}$是Bessel函数$J_{\frac{n}{2}-1}$的最小正零点。

对非负Ricci曲率的黎曼流形，Cheng在[13]中用流形的直径给出了λ_k的另一个上界估计（Corollary 2.2），并改进了Cheeger的结果：

命题2.9. *设M为一个非负Ricci曲率的紧致n维黎曼流形，则*

$$\lambda_k \le \frac{2k^2n(n+4)}{d^2},$$

其中d为M的直径。

关于Cheeger的定理2.12和等周常数h的讨论，可参考[14]，[15]；关于特殊流形（例如代数流形）的特征值估计，可参考[23]，[24]。

黎曼几何的问题往往归结为黎曼流形上的偏微分方程。为了研究其解的存在性，常需考虑某个线性算子（如Laplace 算子加上一个常数）的零空间；刻画这样一个算子的零空间正是谱几何理论的简单应用之所在。例如在附录A中翻译的文献[21]（限于篇幅，略去，编者注）里，需要考虑m维标准球面S^m上算子$\Delta+m$的零空间。这正是Laplace算子相应于特征值m的特征子空间，因而可以根据前面的结论得到完全的描述：它恰由$\mathbb{R}^{m+1}$中齐次线性函数在S^m上的限制构成，从而可以写成$\{g(\Theta,\Xi)|\Xi\in\mathbb{R}^{m+1}\}$，其中$g$为$\mathbb{R}^{m+1}$中的标准内积，$\Theta\in S^m$为自变量，视作$\mathbb{R}^{m+1}$中的向量。这个问题正是促使本文作者学习谱几何理论的主要动机。

最后应当指出，虽然本文介绍的主要是定义在紧致无边黎曼流形的函数空间上的Laplace算子的谱理论，但谱几何的研究范围也包括带边流形、非紧流形和定义在微分形式空间上的Laplace算子。具体研究课题，可参考[4]第254-255页列出的12个部分。

参考文献

[1] PETERSEN P. Riemannain Geometry（影印版）[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[2] 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论(上册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.

[3] 丘成桐, 孙理察. 微分几何讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[4] 马传渔. 黎曼流形的谱[M]. 南京: 南京大学出版社, 1993.

[5] ZORICH V A. Mathematical Analysis II[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2004.

[6] AGMON S. Lectures on Elliptic boundary value problems[M]. Princeton: Van Nostrand, 1956.

[7] EGOROV Y, KONDRATIEV V. On Spectral Theory of Elliptic Operators[M]. Basel, Boston: Birkhäuser Verlag, 1996.

[8] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步[M]. 北京: 北京大学出版社, 1989.

[9] LIEB E H, LOSS M. Analysis[M]. 2nd ed. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001.

[10] CHEEGER J. The relation between the Laplacian and the diameter for manifolds of non-negative curvature[J]. Archiv der Mathematik: 1968, XIX: 558-560.

[11] CHENG S Y. A Characterization of the 2-Sphere by Eigenfunctions[J]. Proceedings of the American Mathematical Society: 1976, 55(2): 379-381.

[12] BUSER P. Beispiele für λ_1 auf kompakten Mannigfaltigkeiten[J]. Mathematische Zeitschrift: 1979, 165: 107-133.

[13] CHENG S Y. Eigenvalue Comparison Theorems and Its Geometric Applications[J]. Mathematische Zeitschrift: 1975, 143: 289-297.

[14] YAU S T. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold[J]. Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure: 1975, Série 4 tome 8: 487-507.

[15] BUSER P. Über eine Ungleichung von Cheeger[J]. Mathematische Zeitschrift: 1978, 158: 245-252.

[16] LI P. On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact Riemannian manifold[J]. Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure: 1980, Série 4 tome 13: 451-468.

[17] BRÜNING J, HEINTZE E. Spektrale Starrheit gewisser Drehflächen[J]. Mathematische Annalen: 1984, 269: 95-101.

[18] KNESER M. Lineare Relationen zwischen Darstellungsanzahlen quadratischer Formen[J]. Mathematische Annalen: 1967, 168: 31-39.

[19] KITAOKA Y. Positive definite quadratic forms with the same representation numbers[J]. Archiv der Mathematik: 1977, XXVIII: 495-497.

[20] IKEDA J. On lens spaces which are isospectral but not isometric[J]. Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure: 1980, Série 4 tome 13: 303-315.

[21] PARCARD F, XU X. Constant mean curvature spheres in Riemannian manifolds[J]. manuscripta mathematica: 2009, 128(3): 275-295.

[22] OBATA M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan: 1962, 14(3): 333-340.

[23] GROMOV M. Spectral geometry of semi-algebraic sets[J]. Annales de l'institut Fourier: 1992, 42: 249-274.

[24] BOURGUIGNON J P, LI P, YAU S T. Upper bound for the first eigenvalue of algebraic submanifolds[J]. Commentarii mathematici Helvetici: 1994, 69: 199-207.

[25] MILNOR J. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America: 1964, 51(4): 542.

[26] KAC M. Can One Hear the Shape of a Drum?[J]. The American Mathematical Monthly: 1966, 73(4, part 2: Papers in Analysis): 1-23.

[27] WEYL H. Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte[J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse: 1911: 110-117.