

数学：跨越专业的想象力飞跃

Michael F. Atiyah 阿蒂亚

英国 爱丁堡大学

数学是一门具有挑战性的神奇学科。千百年来，不同文明、不同国度的人们都把数学作为锻炼思维能力的重要手段，而数学使我着迷的魅力，在于其所蕴含的智力挑战。数学思考要求严谨审慎，因此只有真正入乎其内才能体验那种令人心醉的享受。那些将数学视作枯燥计算者，实在很难感受数学的奇妙。在我看来，数学之美犹如绵延的山脉；或许有的山峰怪石嶙峋、粗糙险峻，但整体看来却又气势恢宏、风光无限。

跟许多人一样，刚上中学时最令我着迷的是魔术般的化学。我常常乐此不疲地在试管里配制各种彩色混和液。不过，这种热情很快便消退了，因为与数学严格的逻辑一致性相比，中学化学实在是太缺乏挑战性了。

就在此时，正好数学老师向我们介绍了四元数——一种由 19 世纪伟大数学家哈密顿爵士发现的神奇的数。当年，有感于复数 $x+iy$ 的数学魅力及其在科学上的精彩应用，哈密顿花了很长的时间探索将复数推广到三个实数变量 (x,y,z) 的可能性。这一想法能够实现的话，可为物理学的空间研究提供全新的架构。事实证明，对三个实变量而言，无法实现这种推广。幸运的是，哈密顿发现在四维 (x,y,z,t) 情况下，可以得到最初被称作“超复数”（今天被称作四元数）的系统。不过，其乘法运算已不再适用交换律。也就是说，对两个四元数 q_1, q_2 而言， $q_1 \cdot q_2$ 可能不等于 $q_2 \cdot q_1$ 。

哈密顿发现四元数的故事堪称数学史上的一段传奇。他回忆说，发明四元数的灵感来自于他的一次乡间散步。1843 年的一个黄昏，他伴妻子在都柏林的皇家运河边散步时，突然意识到，如果舍弃乘法交换律，就可以得到一种新的数系了。对“虚数” i, j, k 而言，有 $i^2=j^2=k^2=-1$ 、 $ij=-ji=k$ ，等等。此发现令他兴奋不已，于是他把结果刻在了自己正通过的布罗罕桥上。

我完全被四元数迷住了，哈密顿的发现传奇无疑更增添了它对我的吸引力。我怀着极大的兴趣阅读了哈密顿及其同事的作品，看看他们是如何将四元数应用于三维几何学和数学物理学的。

几年后我进了剑桥大学，但悲伤地发现，这里没有任何提到四元数的地方。我对此表示不解，得到的回答却更令人失望——四元数并非哈密顿自认为的伟大发现，那不过是他的即兴之作。

大约 30 年后，我已是一名有所建树的数学家，在数学和物理学的交界处兴起了一个崭新而激动人心的前沿。我在自己所钟爱的这一边缘地带纵横开拓，如鱼得水。您瞧，我早年所热爱的四元数很快便成了新思想的中心（将时间解释为神奇的第四个实变量）！

这一戏剧性的转变，引出了数学和科学为何总是如此迷人的诸多思考。其一，杰出的思想有着强劲的生命力。尽管它们可能沉寂多年、明珠投暗，但那些真知灼见迟早会拨云见日，引来世人一片惊叹。其二，杰出的思想往往是跨学科、跨专业的。例如，四元数就是从代数开始，然后进入几何学、物理学领域。其三，杰出的思想既是优秀人才的个人创造，同时也是人类知识财富的组成部分。

正是由于在研究中实现了代数、几何、分析以及物理学的有效结合，我的数学研究生涯才更加耀眼。我的贡献之一是以一组公式（如今称作 Atiyah-Singer 指标定理）将上述领域联为一体，即以几何学术语给出微分方程的若干数值解。这种联结的结果往往出人意料，使旧的问题在新思路下重新焕发出智慧的光芒。应当说，数学对我有强大吸引力，原因正在于它允许我横跨专业而作出充满想象力的飞跃。我相信，迷人的数学一定会吸引更多的有志青年。