概率论感觉测试

王子卓[1]

1. 假设考试周为 1 个礼拜（周一到周日），且考试时间为均匀分布，假使你有 3 门考试，则最后一门考试大约在：
A 周五
B 周六
C 周日

2. 如果你去参与一项赌博，每次的回报为正态分布，假设你赌了 100 把发现赢了 10000 块（明显是很小概率事件，但假设确实发生了），那么你觉得你最有可能是因为：
A 有一把赢了巨多
B 一直在慢慢的赢
C 两种情况都有可能

3. 有一根密度不均匀的绳子，你想通过测量多点的密度来估计他的重量（你知道截面积）。则如果给你 n 次测量密度的机会的话，如果 n 很大，（估算质量就通过这些点取平均然后乘以截面积）：
A 则按规律选取测量点会测得准些
B 随机选取测量点会测得准些
C 两种方法差不多

4. 台湾大选，假定马英九最终得到 600000 票，谢长廷得到 400000 票，如果一张一张的唱票，则过程中马英九一直领先谢长廷的概率为：
A 0.1
B 0.2
C 0.3
D 0.4

5. 你拿 10 块钱去赌场赌大小，你有两种玩法，一种是每次赌 10 块，一种每次赌 1 块，你决定都是输光或者赢到 100 块就走，则：
A 两种方法输光的概率一样

[1] 数学系 03 级师兄,现就读于斯坦福大学

B 第一种输光的概率较大
C 第二种输光的概率较大

6. 100 个球随机的放在 100 个箱子里，最后空箱子的数量大约是：
A. 0-0.1
B. 0.1-0.2
C. 0.2-0.3
D. 0.3-0.4

7、打 10000 副拱猪，总共持有 9500-10500 个 A 的概率大约在：
A. 80%-90%
B. 90%-95%
C. 95%-99%
D. 99%以上

8. 有以下几个国家,每个国家有自己的习俗。问哪个国家长期以后男人最多：
A. 每个家庭不断的生孩子直到得到第一个男孩为止
B. 每个家庭不断的生孩子直到得到第一个女孩为止
C. 每个家庭不断的生孩子直到得到一男一女为止
D. 以上几个国家最后男女比例基本一样

9. 实验室测试灯泡的寿命。在灯泡坏的时候立刻换新灯泡。灯泡寿命约为 1 小时。考察 10000 小时时亮着的那个灯泡：
A. 那个灯泡的寿命期望也约为 1 小时
B. 那个灯泡的寿命期望约为其他灯泡的 2 倍
C. 那个灯泡的期望寿命约为其他灯泡的 1/2
D. 以上说法都不对

10. 如果一个群体里，每个个体以 0.2 的概率没有后代，0.6 的概率有 1 个后代，0.2 的概率有两个后代，则：
A. 这个群体最后会灭绝
B. 这个群体最后将稳定在一个分布，即种群大小在一定范围内震荡
C. 这个群体最后将爆炸，人口将到无穷
D. 不一定会发生什么

11. 给一个 1-n 的排列，与原来位置相同的数字的个数的期望大约是 （如 n=5 则 51324 与原来位置只有 3 是相同的）：
A. 1

B. log n
C. ln n

12. 如果有 3 个门，有一个背后有大奖。你选中一个，主持人知道哪个门后面有奖，并且总会打开另外两个中的某个没奖的。现在你有一次换得机会，你应该：
A. 换
B. 不换
C. 换不换都一样

13. 以下那件事情发生的期望时间最短：
A. 在第 0 秒，一个物体从原点出发，每一秒以概率 1/2 向左走，1/2 向右走，第一次回到原点的时间
B. 一只猴子，每秒种随便按键盘上的一个键，第一次打出"Beijing WelcomesYou"的时间
C. 在第 0 秒，一个物体从原点出发，每一秒以概率 1/2 向左走，1/2 向右走，第一次到达 1 的时间

14, 美国的 25 分硬币共有 50 种，上面有 50 个州的图案，如果我们每次得到的硬币是随机的，则大约收集多少可以收集全：
A. 200
B. 300
C. 400
D. 500

15. 假设有 1000 次 100m 短跑大赛，每次比赛的冠军成绩都在 9.7-10 之间均匀分布，问期望有多少次比赛比赛能够破纪录：
A. 7
B. 10
C. 15
D. 32

16. 在打桥牌的时候，如果你和对家共持有某门花色的 9 张牌，则剩余的 4 张牌怎样分布的概率最大：
A. 2-2
B. 3-1
C. 4-0

17. 如果一个物体在 3 维随机游动，也即每一刻他可以向左，右，上，下，前，

后等概率的走，长久来看，则会发生什么情况：
A.　此物体无穷多次回到原点
B.　此物体无穷多次回到任何一条坐标轴上，但不会无穷多次回到原点
C.　此物体不会无穷多次回到任何一条坐标轴上

18. 扔 10000 次硬币，其中最长一次连着正面的次数大约会是多少：
A.　100
B.　13
C.　9
D.　4

19. 有一支股票，初始价为 1，每天的价值变化率独立同分布，且期望为 0，不恒为 0。则：
A.　股票在任何时刻期望价值为 1
B.　股票以概率 1 变成 0
C.　A 和 B 都对
D.　A 和 B 都不对

20. 当我们考虑一种可能重复发生的事件时，哪种方式更科学：
A.　按照第一次发生这个事件的时间作为一个起点，考虑从其本身出发之后的性质
B.　按照最后一次发生这个事件的时间作为一个起点，考虑从其本身出发之后的性质
C.　以上都可以
D.　以上都不可以

概率论感觉测试答案

1. Answer: B. 一般的讲, 在[0,1]之间 n 个均匀分布的随机变量最大值期望为 n/(n+1)，也就是可以认为这 n 个随机变量分别大约在 1/(n+1),2/(n+1),...,n/(n+1)。这道题通过这个方法算一下答案大约是周六的上午。

2. Answer: B. 也许答案对很多人有些出乎意料。在这种情况下，可能有人觉得能够连续赢很多把很难，但是实际上赢一把大的更难。这个问题是随机问题中的长尾和短尾的问题(Heavy Tail vs Light Tail)。长尾的意思就是取大的值的概率不是很小，而短尾正好相反（具体的定义为短尾分布的密度函数是指

数下降的)。容易验证题目中的正态分布属于短尾，因此答案是 B。如果稍微改一下题目中的分布，使其成为长尾的分布。则有可能是因为一次赢了很大而最后赢的。另外跑题说一句，有一本书叫《长尾理论》，里面说明了现在的经济中有很多分布是长尾的，比如说一年销量排在 100000 名之后的歌曲仍然能占据市场的一部分。这是电子商务流行的很重要原因，因为不必支付储存这个长尾的 cost。

3.Answer: A. 也许这个答案也略有些意外。对于一维的情况，方法 A 要好于方法 B。不过在高维的情况下方法 A 就一般情况下不如方法 B 了，原因是要想获得相同的效果，这个“有规律的点”需要选取太多。这是所谓的 Quasi-Monte Carlo Sampling 和 Monte Carlo Sampling 之间的关系。

4.Answer: B. 直觉上讲这个概率并不会太大，而且尤其是在前面几张的时候多少会出现一些反复。实际上这个结果跟一共多少人投票没什么关系，如果得票比例为 a:b(a>b),则这个概率为(a-b)/(a+b)。

5.Answer: A. 不管什么赌法都不会改变这个概率。我认为这是随机过程中一个比较简单但是很有意义的结论，意思就是说 you can't beat the system。这件事情说明了对于像股市，赌博这种系统，如果你假设了随机性，则其实怎么操作结果都是一样的。因此重要的在于发掘其中的非随机性。另外，到 100 的概率很容易计算，因为初始值是 10，假设到 100 的概率为 p，则有 100*p+0*(1-p)=10，也即 p=0.1。

6.Answer: D.这个题可以用简单的概率论计算。结论是不管多少个球，c*n 个球放到 n 个箱子里，最后空箱子的个数约为 e^(-c)，现在的情况是箱子数和球数一样多，那么就约为 e^(-1)。

7.Answer: D. 这个可以用中心极限定理计算。事实上这个题也不需要计算，只是要考察大家的一个感觉，实际上这个概率大于 0.99...9，一共有 9 个 9，尽管有时候我们打牌仍然觉得牌总是很差，只是我们不注意我们抓好牌的时候罢了。

8.Answer: D. 我们只需要考察一个家庭最后产生多少男孩和女孩即可以。用概率的方法可以得到不管哪个方法都是 1:1。事实上，我们只是把一个很长的男女的序列按照不同的方式来截断。当然这个序列本上包含多少男女是不变的。我每次都愿意以另外一个例子来说明，那就是如果我们在网上下棋，可以每天下到第一盘输为止或是第一盘赢为止或是有输有赢为止，显然不管怎样，因为你的实力是恒定的，你永远都是你本来应有的胜率。

9.Answer:B. 这个题可能稍难。如果具体的计算需要一点本科高年级的知识。不过我们仍然可以从直觉得到结果。事实上，当每个灯泡或是我们观测的事物的生命是随机的时候。在时间足够久以后的一点，那个事物的寿命要长于这个事物本身平均的寿命。原因是比较直观得——正是因为它寿命长导致我们容易观测到。简单的说，如果灯泡有两种，一种只能坚持 1 小时，一种能坚持 100 小时，那我们在后面观测到的 99%都可能是 100 小时那个。所以观测到的对象平均寿命要比这个对象整体的平均寿命要长。通常我们认为灯泡的寿命是指数分布的，在这个情况下，答案应该是恰好 2 倍。对于一般的分布，甚至有可能平均寿命有限，而观测的那个寿命期望是无限的。 这个问题还有另外一个背景——在美国一次监狱调查中被发现，被调查的囚犯的平均判刑年数要远大于全美平均判刑的年数。

10.Answer:A. 这是个简单的人口模型。这个可能直觉比较困难，但是这个实际上和后面的一道题道理是一样的。注意到每一代的期望总是 1。因此根据上次的答案，这个群体最后会灭绝。对于这种模型，当每一代的期望小于等于 1 时，最后的结果都是会灭绝。对于期望大于 1 的情况，我们也可以很简单的通过解方程得到灭绝的概率。

11.Answer: A. 这个题要去算具体有几个数字和位置相同的概率是很困难的，不过实际上有一个很简单的方法。在第 1 个位置，这个排列的第 1 个数字为 1 的概率为 1/n，而期望是可加的，所以总共与原来位置相同的数字的个数的期望应该是 1。也就是说不管是多少的数字，平均总是有一个数与顺序是相同的。期望的可加性看似简单，但是实际中非常有用，很多时候都会忽略这个简单的方法。另外，这个题会非常经常出现在考试和习题中。

12.Answer: A. 这个是网上非常经典的一个问题了。不换正确的概率是 1/3，换正确的概率是 2/3。我比较喜欢这样去想，试想一下如果有 100 个门，你先选定 1 个，然后主持人打开 98 个空的，然后给你机会换不换。我想如果这样，你不难做出正确的选择。

13.Answer:B. A 和 C 两个事件发生的时间的期望都是+inf. 只有 B 是有限的。A 和 C 说明了等概率的赌博不可能赢钱（如果 C 是有限的则参加赌大小的游戏总能赢钱了）。而 B 说明的是另外一条概率上的定理,"What always stands a reasonable chance of happening will almost surely happen, sooner rather than later",也就是说从任何时刻开始，总有一个固定的概率发生的事情(比如一个猴子打出 beijing welcomes you, 这个概率可能是 1/26^20 左右)，不管这个概率是多少，这件事情早晚能发生。

14.Answer: A. 这是所谓的收集硬币问题。具体解法不是很容易。不过结论是要收集齐 n 种硬币，需要大约 nlogn 个。大约思路是收集第 k 个时候需要大约 n/(n-k)次。平时我们收集一些食品里的卡片，也都遵循这个规律，不过多数时候每种卡片的数量都是很不同的。还记得小时候可乐里收集到苹果加蜡烛可以得到到头等奖，不过最后也没收集到任何一个苹果。

15.Answer: A. 这是所谓的破纪录问题。假设均匀分布,则最后 n 次比赛之后这 n 个成绩形成一个排列。第 k 次创纪录的概率是这个排列中第 k 个在前 k-1 个之前的概率，也即 1/k，所以 n 次比赛大约有 1+1/2+1/3+...1/n 次破纪录，也即约为 logn 次。

16.Answer:B. 可以简单计算得到这个结果。3-1 的概率应该是 50%。2-2 的概率是 37.5%。4-0 的概率是 12.5%。但是如果有奇数张，则最平均的就是最可能的。

17.Answer: B. 1 维和 2 维的随机游动是常返的，也就是说会无穷多次回到起点（尽管回来的平均时间不是有限的），而 3 维以上的随机游动是非常返的。因此对于 2 维的某个坐标，此物体会无穷多次经过，但是不会无穷多次经过原点。

18.Answer: B.这也是一个特殊的概率问题，叫做 Head Runs.答案应该是 log2^n，大约为 13。

19.Answer: C. 这个可以参见网上的一篇文章 The Flaw of Average. 对于很多投机的东西，平均值总是不变的，但是多数人都会倾家荡产。其实仔细想想很有道理，比如说你的股票第一天涨 10%。第二天跌 10%或是第一天跌 10%，第二天涨 10%，最后的结果都是跌了 1%。所以要保持增长所需要的是远大于 0 的平均变化率，这个是一般人难以做到的。

20.Answer: A. 这个问题深一些的背景在于 Kolmogorov 向前向后微分方程。很多人知道向后微分方程更通用，但是并不知道原因。事实上，向后微分方程是基于 A 的方法对事件进行分解得到的，而向前微分方程是基于 B 的方法对事件进行分解的。但是有很多重复发生的事情会越发生越频繁，以致没有最后一次发生的事件。但是我们总能找到第一次发生的时间。所以相对来说 A 更科学。