关于李超同学作业的评注

杨利军

李超同学所提交的关于初值问题 $\dot{x} = t^2 + x^2, x(0) = 0$ 的饱和解的最大存在区间的估计, 解法新颖, 结论正确. 他所用到的一些工具, 是我在课堂上尚未介绍的. 他的解答组织得整齐清晰. 可以想见李超同学为解答这道题所下的功夫和所付出的努力. 这值得大力表彰和肯定.

布置这道习题的目的是希望同学们学会利用比较定理, 估计解的存在区间的大小. 李超解法非常规方法, 其思想和步骤大致如下: 先将方程 $\dot{x} = t^2 + x^2$ 转化成二阶线性方程 $\ddot{u} + t^2 u = 0$. 然后再将这个二阶线性方程化为标准的 Bessel 方程 $t^2\ddot{v} + t\dot{v} + (t^2 - p^2)v = 0$, 其通解可由 Bessel 函数表示. 可以证明原始初值问题解的最大存在区间的右端点, 对应着某个 Bessel 函数的最小正零点. 最后利用数值方法, 确定这个最小正零点.

关于第二次转化, 还值得进一步讨论. 因为二阶线性方程 $\ddot{u} + t^2 u = 0$ 看起来比 Bessel 方程 $t^2\ddot{v} + t\dot{v} + (t^2 - p^2)v = 0$ 要简单得多, 因此这样的转化有化简为烦之嫌. 虽然关于 Bessel 函数已有不少的研究成果, 但这些成果目前看来尚不能直接用来解决我们的问题. 实际上, 正如有些同学所做的, 我们可以对原初值问题, 进行数值积分从而得到右侧最大存在区间的估计, 所得到的结果与李超解答类似.

我个人认为, 数值方法对于工程应用而言很重要, 但对于常微定性分析而言, 数值方法是最后的, 不得已的方法. 例如, 我们可以利用各种数值方法求出如下无穷级数的任意精度的近似值, (以下是 40 位小数的近似值):

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = 1.6449340668482264364724151666460251892189\cdots$$

但这远不如 Euler 在 1734 年所得到的结果

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

美妙. Euler 的这个结果被认为是历史上最伟大的定理之一, 参见科普书 ” 天才引导的历程”, 威廉邓纳姆著, 1990 (中译本). Euler 的这个结果有三个很值得一学的, 被认为是来自圣经 (即上帝) 的证明, 参见 ”Proofs from THE BOOK”, Martin Aigner and Guenter M. Ziegler, Third Edition, 2004. 对有志于数学的各位同学, 我强烈地推荐这两本书.

为了使得李超同学的解答看起来更容易些, 以下介绍一些关于 Ricatti 方程与二阶线性齐次方程之关系的一些结论. 这可以看成对李超解答的补充说明.

形如

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{1}$$

的一阶方程称为 Ricatti 方程, 其中 $a(t), b(t)$ 和 $c(t)$ 通常假设为开区间上的连续函数. 习题中的方程 $\dot{x} = t^2 + x^2$ 是典型的 Ricatti 方程. 我们回忆二阶线性齐次方程是指如下形式的方程

$$\ddot{u} + p(t)\dot{u} + q(t)u = 0 \tag{2}$$

其中 $p(t), q(t)$ 为开区间上的连续函数.

定理 1: 考虑 Ricatti 方程 (1). 假设 $a(t)$ 在开区间 I 连续可微且 $a(t) \neq 0, \forall t \in I$, 则方程 (1) 则在变换

$$u(t) = \exp\Big\{ -\int_{t_0}^{t} a(\tau)x(\tau)d\tau \Big\}, \quad t, t_0 \in I \tag{3}$$

下, 可化为一个相应的二阶线性齐次方程 (2), 其系数函数 $p(t), q(t)$ 如下确定

$$p(t) = -b(t) - \dot{a}(t)/a(t), \quad q(t) = a(t)c(t). \tag{4}$$

这里"化为"的意思是: (i) 若 $x(t)$ 是 Ricatti 方程 (1) 的解, 则由方程 (3) 所确定的二次连续可微的函数 $u(t)$ 是二阶线性齐次方程 (2) 的正解; (ii) 若 $u(t)$ 是 (2) 的正解, 则由变换 (3) 的逆变换所确定的连续可微的函数

$$x(t) = -\frac{\dot{u}(t)}{a(t)u(t)}, \quad t \in I \tag{5}$$

是 Ricatti 方程 (1) 的解.

注: 这里要求 $u(t)$ 是正解并不构成一个限制, 因为若 $u(t)$ 是 (2) 的解, 则 $-u(t)$ 也是. 实际上, 若 $u(t)$ 是 (2) 的一个解, 则由方程 (5) 确定了若干个 Ricatti 方程 (1) 在不同的开区间 I_k 上的不同的解, 而这些开区间 I_k 是由解 $u(t)$ 的零点隔离开区间 I 而得到的.

定理 1 的证明: (i) 设 $x(t)$ 是 Ricatti 方程 (1) 的解, 函数 $u(t)$ 是由方程 (3) 所确定, 或等价地, $x(t)$ 可由方程 (5) 来表示. 对方程 (5) 求导得

$$\dot{x} = -\frac{\ddot{u}}{au} + \frac{\dot{u}(\dot{a}u + a\dot{u})}{(au)^2}.$$

另一方面,

$$\dot{x} = ax^2 + bx + c = a\left(\frac{-\dot{u}}{au}\right)^2 - b\frac{\dot{u}}{au} + c.$$

对上述两个方程稍加整理即可得到

$$\ddot{u} + (-\dot{a}/a - b)\dot{u} + cau = 0. \tag{6}$$

因此结论 (i) 成立.

(ii) 设 $u(t)$ 是方程 (6) 的解, 函数 $x(t)$ 是由方程 (5) 所确定. 对方程 (5) 求导得

$$\dot{x} = -\frac{\ddot{u}}{au} + \frac{\dot{u}(\dot{a}u + a\dot{u})}{(au)^2}.$$

$$= \frac{1}{au}\left(\Big(-\dot{a}/a - b\Big)\dot{u} + cau\right) + \frac{\dot{u}(a\dot{u} + \dot{a}u)}{(au)^2}$$

$$= c + \Big(\dot{a}/a + b\Big)x + ax^2 - \dot{a}x/a = ax^2 + bx + c.$$

结论 (ii) 成立. #

同理, 二阶线性齐次方程 (2) 可化为 Ricatti 方程 (1).

定理 2: 二阶线性齐次方程 (2) 在变换 (5) 下, 可化为相对应 Ricatti 方程 (1), 其系数函数为

$$a(t) = 1, \quad b(t) = -p(t), \quad c(t) = q(t), \tag{7}$$

这里"化为"的意义同定理 1.

证明: 证明思想同定理 1, 但更简单. 略. #

对于习题中的 Ricatti 方程 $\dot{x} = t^2 + x^2$, 其对应的二阶线性齐次方程为 $\ddot{u} + t^2u = 0$. 两个方程的解有如下关系:

$$x(t) = -\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} \quad \text{或} \quad u(t) = \exp\Big\{-\int_0^t x(\tau)d\tau\Big\} \tag{8}$$

这里需要需要注意的是, 两个解的定义区间通常是不一样的. 解 $x(t)$ 的定义区间为 $u(t)$ 不为零的连通的开区间.

根据上述定理, 我们不难得到如下结论.

定理 3: 一阶 Ricatti 方程初值问题

$$\dot{x} = t^2 + x^2, \quad x(0) = 0 \tag{9}$$

饱和解的右侧最大存在区间的右端点是二阶线性齐次方程初值问题

$$\ddot{u} + t^2 u = 0, \quad u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0 \tag{10}$$

解的最小正零点.

证明: 记问题 (10) 的解为 $u(t)$. 根据定理 1 知, $x(t) = -\dot{u}(t)/u(t)$ 是 Ricatti 方程 $\dot{x} = t^2 + x^2$ 的解, 其初值条件为 $x(0) = 0$, 即 $x(t) = -\dot{u}(t)/u(t)$ 是问题 (9) 的解. 由此可见, 解 $x(t)$ 右侧最大存在区间的右端点, 正是 $u(t)$ 的最小正零点. 证毕. #

注 1: 对于初值问题 (10) 解的最小零点的确定, 李超同学的方法是再做进一步的转化, 转化为 Bessel 函数的零点问题. 如前所述, 这种转化是一种可行的, 但不一定是最理想的. 关于 Bessel 方程以及 Bessel 函数, 因为涉及的内容较多, 很难用简短的篇幅说清楚, 我这里就不细谈了. 有兴趣的同学可参阅丁同仁李承治的书, §7.5, page 236.

注 2: 若将问题 (10) 的初值条件 $u(0) = 1$ 中的 1 可以换成任何非零数 $u_0 \neq 0$, 即 $u(0) = u_0$. 这是因为相应的解的零点个数及其位置不变.

注 3: 设 $u(t)$ 是问题 (10) 的解, 再记 $v(t)$ 为二阶线性齐次方程 $\ddot{u} + t^2 u = 0$ 满足初值条件 $v(0) = 0, \dot{v}(0) = 1$ 的解, 则 Ricatti 方程 $\dot{x} = t^2 + x^2$ 的满足初值条件为 $x(0) = \mu$ 的解 $x(t, \mu)$ 可表为 $x(t, \mu) = -\dot{u}(t, \mu)/u(t, \mu), u(t, \mu) := u(t) - \mu v(t)$.

注 4: 请有兴趣的同学进一步思考, 如何解析的估计或确定初值问题 (10) 解的最小正零点?

评注完毕.

****

数学名言

数统治着宇宙。

—[古希腊] 毕达哥拉斯

数学，科学的女皇；数论，数学的女皇。

—[德] C · F · 高斯

你，自然，我的女神，我要为你的规律而献身。

—[德] C · F · 高斯

无限！再没有其他的问题如此深刻地打动过人类的心灵。

—[德] D · 希尔伯特