纤维丛和Hopf纤维化[*][†]

高挺然[‡]

切丛是微分流形理论中非常基本的概念。设M为一个n维光滑流形，$\mathscr{F}$是其图册。记TM_x为M上x点处的切空间，则可以考虑

$$TM = \bigcup_{x\in M} TM_x$$

并在其上附加一个由$\mathscr{F}$诱导得到的光滑结构，从而将其看成$2n$维流形。TM上还有一个自然投影

$$\begin{aligned} \pi\colon TM &\longrightarrow M \\ \xi &\longmapsto x \qquad \xi\in TM_x, x\in M \end{aligned}$$

任取$\mathscr{F}$的一个图卡(U,φ)，U为开集。可以想见，由于每个点x上的切空间都是同构的，应有$\pi^{-1}(U)=\bigcup_{x\in U}TM_x\cong U\times TM_{x_0}$，其中$x_0\in U$是$U$中任意一个固定的点。因此，局部地看，$TM$就像是一个乘积空间。

纤维丛的概念是上述切丛概念的推广。借助于纤维丛，我们可以更好地理解Hopf在1931年作出的一个非常精巧的观察 [1]，现在一般称之为Hopf纤维化(Hopf fibration)。它在$\pi_3(S^2)$的计算中起到重要的作用 [2] [5]，而且具有令人印象深刻的几何直观 [4]。更令人注目的是，它在物理学的许多地方都有着令人意想不到的应用 [8]。

这则笔记首先介绍纤维丛的概念，由此引出Hopf纤维化的构造，最后简单提及Hopf纤维化的几个应用。其中将仅讨论初等的内容，避免使用代数拓扑的工具。对相关及更深入的代数拓扑背景感兴趣的读者将会发现 [5]的价值。

1 纤维丛

1. 启发性的考虑和例子

[*]根据2009年4月29日学术沙龙报告整理

[†]感谢毛天一为插图付出的辛勤劳动

[‡]基数 61

暂时先不考虑在其上装备坐标系统，如果我们希望推广切丛的构造，那么一个纤维丛的几何图象至少应该包含哪些因素？实践表明，我们至少可以要求一个“纤维丛”$\mathscr{B}$含有以下成分：

(i) 一个拓扑空间B，起到TM的作用，称之为**丛空间(bundle space)**或**丛 (bundle)**；

(ii) 一个拓扑空间X，起到M的作用，称之为**底空间(base space)**；

(iii) 一个连续映射（在适当的拓扑下）$\mathrm{p}\colon B \longrightarrow X$，且映满$X$，称之为**投影(projection)**，就像切丛上的自然映射π；

(iv) 一个“模板”Y，称之为**纤维(fibre)**；并记$Y_x := \mathrm{p}^{-1}(x), \forall x \in X$，称之为**$x$上的纤维(fibre over the point x of X)**。就像对任意的$x \in M$，TM_x都同构（装备了适当的拓扑以后甚至可以是同胚）那样，对任意的$x \in X$，要求Y_x同胚于Y。对每个固定的$x \in X$，从Y_x到Y的同胚映射不必唯一，但要求它们至多只相差某个群G中的一个元素，这里群G是作用在Y上的一个从Y到Y的变换群，且G与具体的x的选择无关。我们称群G为此纤维丛的**丛结构群**或**丛群(group of the bundle)**；

(v) $\forall x \in X$，存在x的邻域V以及同胚$\phi\colon V \times Y \longrightarrow \mathrm{p}^{-1}(V)$且满足

$$\mathrm{p}\phi(x', y) = x', \quad \forall x' \in V, y \in Y.$$

上面的(i)-(v)都是通过直观类比得到基本要求。其中第五条要求体现出我们强烈地希望B至少在局部上如同乘积空间一样易于考察。

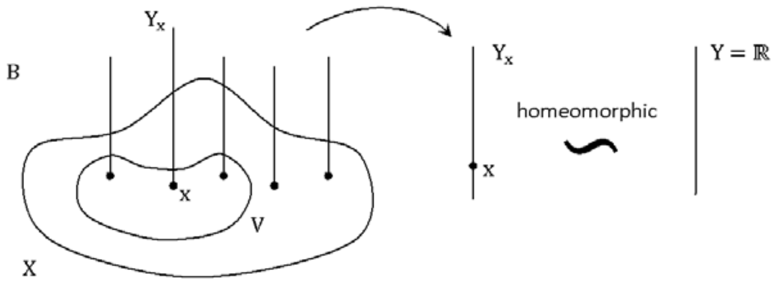


图 1: 取$Y = \mathbb{R}$。在线丛的情形，B就像是一个带有头发的皮球。

例 1.1 (乘积丛) X, Y为两个拓扑空间，$B = X \times Y$，$\mathrm{p}(x, y) = x$, $Y_x = \{x\} \times Y$。Y_x与Y之间的同胚映射由$(x, y) \mapsto y$给出。为满足(v)，可取$V = X$，ϕ为从$V \times Y$到$\mathrm{p}^{-1}(V) = V \times Y$的恒等映射。

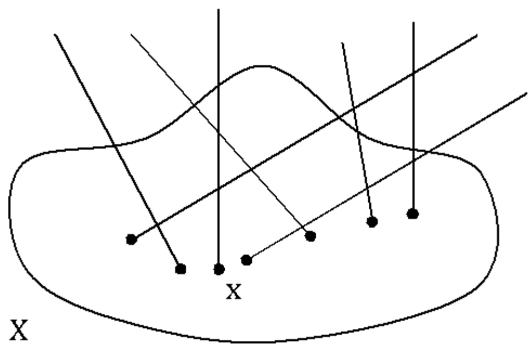
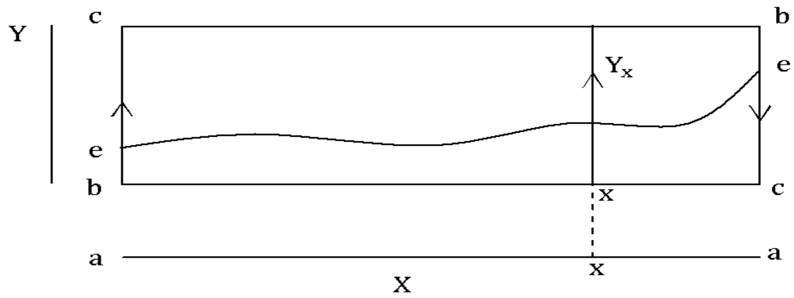
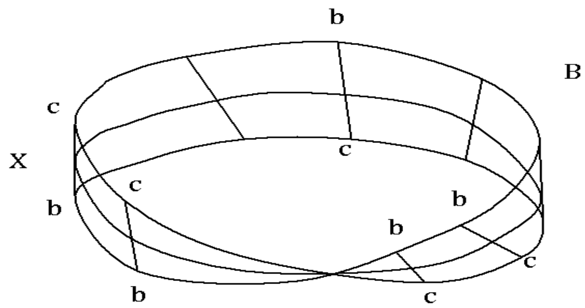


图 2: 若没有第五条要求，B可能非常混乱，并非如我们所愿。

例 1.2 (Möbius带) 取底空间X为一条线段L粘合其两端而得到的圆周。纤维Y取为一条线段。B则由$L\times Y$将两端的线段反向粘合得到。

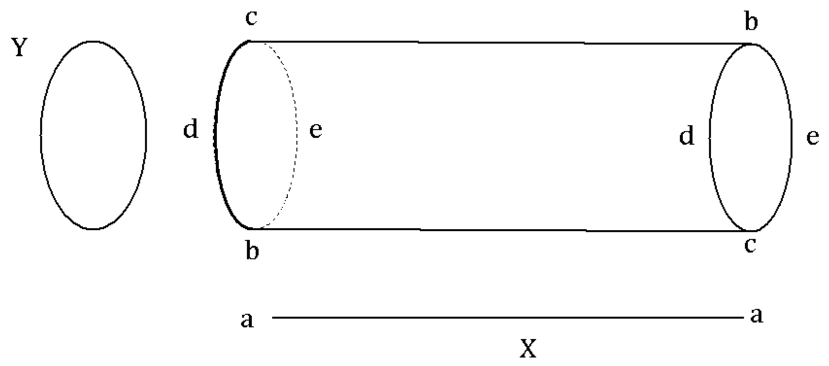




投影p: $B\to X$可以看成自然投影π: $L\times Y\to L$在上述粘合下诱导的映射，直观上将其理解为将Möbius带上各点投影至腰圆上是非常方便的。可取$V=X$，并将ϕ按与p类似的方式理解。从B上的一个**截面(cross section)**是指一个连续映射$f\colon X\to B$满足$\mathrm{p}f(x)=x,\forall x\in X$。上图中连结矩形左端$e$点和矩形右端$e$点的曲线即是Möbius带上的一个截面的例子。注意在前述的粘合下，两端的e点是

重合的。

例 1.3 (Klein瓶) 将例2中的纤维Y替换为一个圆周，并将$L \times Y$两端的圆周绕一条直径$\overline{de}$反射后粘合得到B。这种粘合方式下，B是一个Klein瓶。



例 1.4 (陪集空间) 取B为一个李群，X为一个流形，而且B作为一个变换群传递地作用在X上。为定义投影p，任意固定X上一点x_0，并定义$\mathrm{p}\colon B \to X$为$b \mapsto b(x_0)$。纤维Y可取为B的固定x_0的子群；对每个$x \in X$，由于B在X上的作用是传递的，故存在$\beta_x \in B$使得$\beta_x(x_0) = x$。而Y_x就是B中包含β_x的陪集$\beta_x Y$。容易验证此Y_x的定义不依赖于β_x的特定选取。进一步注意到，每一个$b \in Y_x$都给出了从Y到Y_x的同胚映射：$y \mapsto by, y \in Y$，而且任意两个这样的同胚映射$b\colon Y \to Y_x, b'\colon Y \to Y_x$之间只相差一个$Y$上的左乘$b'b^{-1}$的平移。易见$b'b^{-1} \in Y$。因此在这个例子里丛结构群就是$Y$,而且以左平移的方式作用在$Y$上。在这样的一个丛$B$上找一个截面即是构造一个$B$中的单传递连续变换群。

通过以上几个例子，我们可以感觉到纤维丛和乘积空间有很大的相似性，纤维丛的概念是乘积空间概念的推广。事实上，对空间X, Y以及映射$f\colon X \to Y$的研究等同于对乘积空间$X \times Y$、两个自然投影（$\pi_1\colon X \times Y \to X$和$\pi_2\colon X \times Y \to Y$）以及映射$f$的图象的研究。纤维丛的概念将$X \times Y$推广到丛空间$B$，将自然投影$\pi_2$替换为对每个固定的$x \in X$指定的一族从$Y_x$到$Y$的同胚，其中任意两个同胚只相差一个作用在$Y$上的变换群$G$中的元素；$f\colon X \to Y$的图象则被推广到丛上的截面。

2. 坐标丛和纤维丛的精确定义

反思我们在前面做过的事情。在例4中，丛结构群G具有一个拓扑结构！这是我们非常希望任何一个“纤维丛”都能具有的。因此在上一节中我们并不急于给出纤维丛的精确定义，虽然所有的要素都已经齐备。本节首先借助坐标在丛群G上给出一个拓扑，再通过在坐标丛之间引入一个等价关系来摆脱坐标，最终达到我们的目的。引入坐标也将给我们日后的工作提供很大的便利。

一个坐标丛$\mathscr{B}$是以下要素的集合：

(1) 一个拓扑空间B，称为**丛空间(bundle space)**；

(2) 一个拓扑空间X，称为**底空间(base space)**；

(3) 一个连续满映射$\mathrm{p}\colon B \to X$，称为**投影(projection)**；

(4) 一个拓扑空间Y，称为**纤维(fibre)**；

(5) 一个Y上的有效(effective)拓扑变换群G，称为**丛结构群**或**丛群(group of the bundle)**（G**有效**是指对任意的$g \in G$，$gy = y, \forall y \in G \leftrightarrow g = e$）；

(6) X的一个开覆盖$\{V_j\}_{j\in J}$，其中每一个V_j称为一个**坐标邻域(coordinate neighborhood)**；

(7) 对任意的$j \in J$，存在一个同胚$\phi_j\colon V_j \times Y \longrightarrow \mathrm{p}^{-1}(V_j)$，称为一个**坐标函数(coordinate function)**（或一个**局部平凡化(local trivialization)**）满足以下条件(8)-(10)；

(8) $\mathrm{p}\phi_j(x, y) = x, \quad \forall x \in V_j, y \in Y$；

(9) 若定义映射$\phi_{j,x}\colon Y \longrightarrow \mathrm{p}^{-1}(x)$为$\phi_{j,x}(y) = \phi_j(x, y)$，则对任意$i, j \in J$，以及任意$x \in V_i \cap V_j$，同胚$\phi_{j,x}^{-1}\phi_{i,x}\colon Y \longrightarrow Y$与$G$中一个元素在$Y$上的作用相同（在我们的定义下这个元素必定唯一，因为G是有效的）；

(10) $\forall i, j \in J$，由$g_{ji}(x) = \phi_{j,x}^{-1}\phi_{i,x}$定义的映射$g_{ji}\colon V_i \cap V_j \longrightarrow G$是连续的。

不难发现，若没有(5)，(9)，(10)则这个纤维丛的概念和§1中的定义是一样的。条件(9)将群G与纤维丛的结构本质地联系了起来，而条件(10)则刻画了群G的拓扑。

(10)中定义的映射g_{ji}称为纤维丛$\mathscr{B}$的坐标变换。这个定义的直接推论是，对任意的$i, j, k \in J$

(11) $$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \qquad \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k$$

特别地，若$i = j = k$，则

(12) $$g_{ii}(x) = \text{群G的单位元} \qquad \forall x \in V_i$$

若在(11)中令$i = k$，并运用(12)，可得

(13) $$g_{jk}(x) = [g_{kj}(x)]^{-1} \qquad \forall x \in V_j \cap V_k$$

为方便计，定义映射$\mathrm{p}_j\colon \mathrm{p}^{-1}(V_j) \to Y$为$\mathrm{p}_j(b) = \phi_{j,x}^{-1}(b)$，$x = \mathrm{p}(b)$，则$\mathrm{p}_j$满足恒等式

$$\mathrm{p}_j\phi_j(x,y) = y, \quad \phi_j(\mathrm{p}(b), \mathrm{p}_j(b)) = b, \quad g_{ji}(\mathrm{p}(b))\mathrm{p}_i(b) = \mathrm{p}_j(b) \quad \forall p(b) = x \in V_i \cap V_j$$

我们称两个坐标丛$\mathscr{B}$和$\mathscr{B}'$在严格意义上等价，若它们有相同的丛空间、底空间、投影、纤维、丛结构群，而且它们的坐标函数$\{\phi_j\}, \{\phi'_j\}$满足下述条件：$\forall x \in V_j \cap V'_k$，映射$\overline{g}_{kj}(x) = \phi'^{-1}_{k,x}\phi_{j,x}$与$G$中一个元素在$Y$上的作用相同，而且由此得到的映射$\overline{g}_{kj}\colon V_j \cap V'_k \longrightarrow G$是连续的；简言之，两组坐标函数之并仍是一组坐标函数。

利用G作为一个拓扑群的性质，容易知道上面定义的"在严格意义上等价"确实是一个等价关系。利用这个等价关系，我们可以给出如下的定义：

定义 1 一个**纤维丛**是指坐标丛在上述等价关系下的一个等价类。

实用中一类非常重要的纤维丛是**主丛(principal bundle)**，其纤维Y即是丛结构群G自身，且G在Y上的作用是左平移。

作为本节的结束，我们指出有如下重要的基本定理成立：

定理 1 (存在性定理) *若G是Y的一个有效拓扑变换群，$\{V_j\}_{j\in J}$和$\{g_{ij}\}_{i,j\in J}$是X的一族坐标变换，则存在一个纤维丛$\mathscr{B}$，以X为底空间，以Y为纤维，以G为丛结构群，以$\{g_{ij}\}_{i,j\in J}$为坐标变换。而且任何两个这样的纤维丛都是等价的。*

证明略去，可参阅文献 [3]§3.2。

2 Hopf纤维化

1. **Hopf映射$S^3 \longrightarrow S^2$**

   将球面S^3和S^2按如下方式参数化：

$$S^3 = \left\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\right\}$$
$$S^2 = \left\{(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1\right\}$$

Hopf [1]犀利地指出，S^3是S^2上以U(1)为纤维的一个丛。U(1)即是S^1，因此S^3即是“the fibering of spheres by spheres”的一个最简单的非平凡的例子。（将S^1看作以S^1为底空间、以S^0为纤维的丛，我们就看到了一个平凡的例子。）

为$\mathbb{R}^4$引入复坐标$z^0 = x^1 + \mathrm{i}x^2, z^1 = x^3 + \mathrm{i}x^4$，则$S^3$可以写成

$$S^3 = \left\{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \middle| \, |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1\right\}$$

定义Hopf映射$h\colon S^3 \longrightarrow S^2$如下：

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= 2(x^1x^3 + x^2x^4) = z^0\overline{z^1} + \overline{z^0}z^1 = 2\,\mathrm{Re}\,z^0\overline{z^1} \\
\xi^2 &= 2(x^2x^3 - x^1x^4) = -i(z^0\overline{z^1} - \overline{z^0}z^1) = 2\,\mathrm{Im}\,z^0\overline{z^1} \\
\xi^3 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = |z^0|^2 - |z^1|^2
\end{aligned}$$

容易验证h确实将S^3映成S^2：

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2]^2 = 1$$

而且容易验证h是满射。这个映射h就是我们要找的从丛空间S^3到底空间S^2的投影。

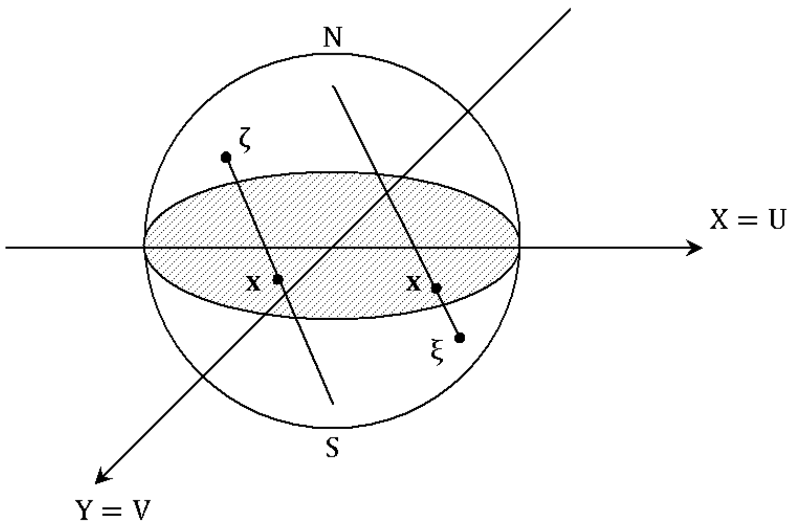
为构造坐标函数，首先考虑S^2的球极投影。取U_N为S^2的上半球面与赤道的并，取U_S为S^2的下半球面与赤道的并，则$U_N \cup U_S = S^2$，$U_N \cap U_S$为赤道。在赤道平面上装备复坐标，则$\forall \xi \in U_S$，可以考虑北极与ξ的连线与赤道平面的交点（我们考虑这种球极投影，因为我们希望所得到的投影坐标在单位圆内），其复坐标为

$$Z = \frac{\xi^1 + \mathrm{i}\xi^2}{1 - \xi^3} = \frac{z^0\overline{z^1}}{|z^1|^2} = \frac{z^0}{z^1}$$

注意到对任意$\lambda \in \mathrm{U}(1) = S^1$，$Z$在旋转$(z^0, z^1) \mapsto (\lambda z^0, \lambda z^1)$上不变，而且$\dfrac{z^0}{z^1}$在此球极投影下的原像都是形如$(\lambda z^0, \lambda z^1)$的点，因此纤维即是$S^1$！又由于$|\lambda| = 1, (\lambda z^0, \lambda z^1) \in S^3$，可见每条纤维都是$S^3$上的大圆。类似地，$\forall \zeta \in U_N$

$$Z = \frac{\zeta^1 - \mathrm{i}\zeta^2}{1 - \zeta^3} = \frac{\overline{z^0}z^1}{|z^0|^2} = \frac{z^1}{z^0}$$

在赤道$U_N \cap U_S$上，坐标变换为$z \mapsto \dfrac{1}{z}$。



借助球极投影，下面可以给出S^3作为S^2上纤维丛的坐标函数：

$$\begin{aligned}\phi_S^{-1} : h^{-1}(U_S) &\longrightarrow U_S \times S^1\\(z^0, z^1) &\longmapsto (\frac{z^0}{z^1}, \frac{z^1}{|z^1|})\\\phi_N^{-1} : h^{-1}(U_N) &\longrightarrow U_N \times S^1\\(z^0, z^1) &\longmapsto (\frac{z^1}{z^0}, \frac{z^0}{|z^0|})\end{aligned}$$

赤道上$\xi^3 = 0$，$|z^0| = |z^1| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，对每个固定的$\dfrac{z^0}{z^1} \in U_S \cap U_N$，$\phi_N$与$\phi_S$相差一个坐标变换

$$t_{NS}(\xi) = \frac{\sqrt{2}z^0}{\sqrt{2}z^1} = \frac{z^0}{z^1} \in \mathrm{U}(1) = S^1$$

因此丛结构群即是S^1。我们可以验证以上构造满足坐标丛定义的所有要求，而且纤维和丛结构群都是S^1。这即是说S^3不但是S^2上以S^1为纤维的一个纤维丛，而且是一个主丛！

2. **Hopf纤维化$S^3 \longrightarrow S^2$的几何图象**

需要指出的是，S^3作为S^2上的S^1丛这个事实远不是平凡的。换言之，S^3并不同胚于$S^2 \times S^1$，这只要考察它们各自的高阶同伦群就可以得知。这个非平凡性还体现在如下的有趣事实中：任意两条纤维S^1都不是两个不相干的圆周，它们在球极投影下是相互套在一起的(linked)！它们构成了最简单的一种link，

一般称之为Hopf link。为了说明这一点，我们需要考察将S^3映入$\mathbb{R}^3$的球极投影。

记其中一个投影函数为

$$\begin{aligned} s: S^3 \backslash (1,0,0,0) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (w,x,y,z) &\longmapsto (\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w}) \end{aligned}$$

容易验证，s将S^3中不经过$(1,0,0,0)$的圆周映为$\mathbb{R}^3$中的圆周，而将S^3中经过$(1,0,0,0)$的圆周映为$\mathbb{R}^3$中的直线。我们的观察分为两步：

(1) 直接计算可以发现，纤维$h^{-1}((0,0,1)) = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \big| \, |z^0| = 1\}$被$s$映为$\mathbb{R}^3$中的$x$轴，而纤维$h^{-1}((0,0,-1)) = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \big| \, |z^1| = 1\}$被$s$映为$\mathbb{R}^3$中的$yz$平面上的单位圆。

除此之外，对任意的点$P = (p_1, p_2, p_3) \in S^2, P \neq (0,0,\pm 1)$，考虑$s \circ h^{-1}(P)$与$yz$平面的交点，即要解方程组

$$\begin{cases} 2(x^1x^3 + x^2x^4) = p_1 \\ 2(x^2x^3 - x^1x^4) = -p_2 \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = p_3 \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1 \\ (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = 1 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1x^3 = \dfrac{p_1}{2} \\ \\ x^1x^4 = \dfrac{p_2}{2} \\ \\ (x^1)^2 = (x^3)^2 + (x^4)^2 = \dfrac{1+p_3}{2} \end{cases}$$

一般地，只要$(p_1, p_2, p_3) \neq (0,0,\pm 1)$，交点$(\frac{x^3}{1-x^1}, \frac{x^4}{1-x^1})$可以有而且仅有两个不同的位置，分别对应于取正值和负值的x^1。注意到

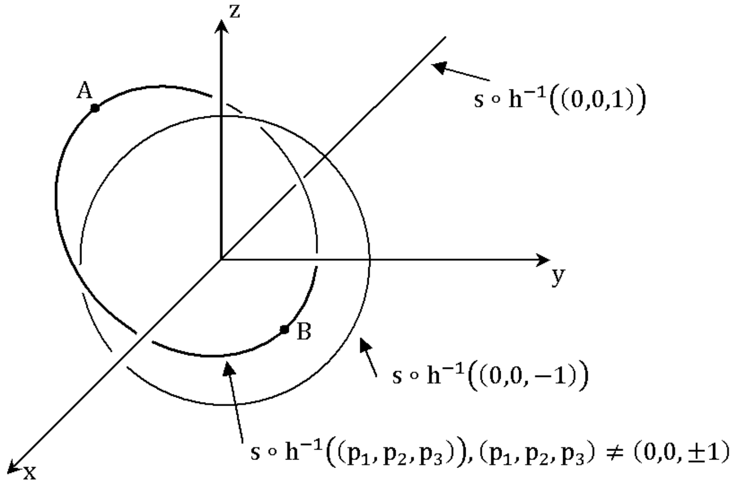
$$\Big(\frac{x^3}{1-x^1}\Big)^2 + \Big(\frac{x^4}{1-x^1}\Big)^2 = \frac{1-(x^1)^2}{(1-x^1)^2} = \frac{1+x^1}{1-x^1}, \quad x^1 = \pm\sqrt{\frac{1+p_3}{2}} \in (-1,1)$$

故若取 $x^1 = \sqrt{\dfrac{1+p_3}{2}}, \quad x^1 \in (0,1), \quad \dfrac{1+x^1}{1-x^1} > 1$，则交点在单位圆外；

若取 $x^1 = -\sqrt{\dfrac{1+p_3}{2}}, \quad x^1 \in (-1,0), \quad \dfrac{1+x^1}{1-x^1} < 1$，则交点在单位圆内。

由此即可得知，$s \circ h^{-1}(P)$和$s \circ h^{-1}((0,0,-1))$是套着的，而且x轴必定不在$s \circ h^{-1}(P)$所在的平面内，因为S^2中不同点上的纤维是彼此不交的。

(2) 对任意两根纤维$h^{-1}(P_1)$和$h^{-1}(P_2)$（假设$(0,0,\pm 1)$不在上述两根纤维的任何一根上），我们要说明它们在球极投影下的像是套着的。为此首先考虑一个S^3上的旋转ρ，它将$h^{-1}(P_1)$转到S^3上一个新的位置，使得$(0,0,-1)$位

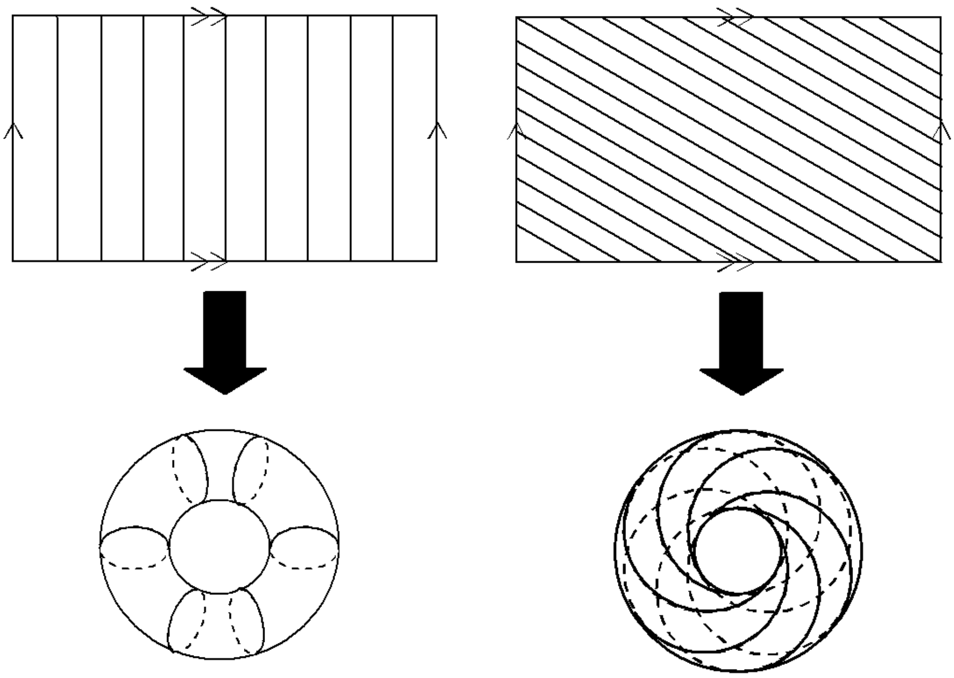


于$\rho \circ h^{-1}(P_1)$上。接着考虑(1)中的球极投影，由(1)容易知道$\rho \circ h^{-1}(P_1)$与$\rho \circ h^{-1}(P_2)$在此球极投影下是套着的。但现在这两个圆环是$s \circ h^{-1}(P_1)$和$s \circ h^{-1}(P_2)$在映射$s \circ \rho \circ s^{-1}$下的像，由于旋转$\rho$是同痕于恒等映射的，$s \circ \rho \circ s^{-1}$必然也是同痕于恒等映射的。由此可以断言，$s \circ h^{-1}(P_1)$和$s \circ h^{-1}(P_2)$也是套着的，因为一个Hopf link对应的Jones多项式是$\sqrt{t}(1+t^2)$，两个不套着的圆环对应的Jones多项式则是$-(\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t})$，而且我们知道Jones多项式具有同痕不变性(isotopic invariance)（参见 [6]）。

统合(1)(2)，我们注意到，借助从S^3到$\mathbb{R}^3$的球极投影，我们将$\mathbb{R}^3$分解成了一条直线和许多圆环的并，而且非常不平凡地，其中任意两个圆环都是套着的，同时直线穿过所有圆环的内部。我们也可以将这种分解视为$\mathbb{R}^3$的一个“纤维化”(fibration)。

特别有趣的一个情形是，若我们考察S^2上的一个纬圆C（不经过极点，落在某个球极投影s的定义域里），容易发现$h^{-1}(C)$同胚于$S^1 \times S^1$，从而$s \circ h^{-1}(C)$是$\mathbb{R}^3$的一个环面，它被一族圆环$\{s \circ h^{-1}(P) | P \in C \subset S^2\}$纤维化，而且其中任意两个圆环都是套住的！这样的一族圆环历史上被称为Villarceau circles，它是S^1以非平凡的方式纤维化T^2的著名例子。

作为一个重要的注记，在本节的最后我们指出，不但S^3上的任意两根纤维在球极投影下的像是套在一起的，他们本身在S^3上也是套在一起的。关于这一点，可以参阅 [5]§17, pp.227-239。（h的Hopf不变量为+1，即是说$\forall P_1, P_2 \in S^2$，



(a) T^2的S^1纤维化：平凡的方式　　(b) T^2的S^1纤维化：Villarceau circles

$h^{-1}(P_1)$和$h^{-1}(P_2)$在S^3中是套在一起的。）

3. **其他Hopf映射**

我们可以换一种方式来考虑Hopf映射$S^3 \to S^2$，从而得到它的一些推广。将S^3看作一维复球面：

$$S^3 \cong S^1_{\mathbb{C}} = \left\{ (z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 \middle| \, |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1 \right\}$$

将S^2看作一维复射影空间：

$$S^2 \cong \mathbb{CP}^1 = \left\{ [(z^0, z^1)] \middle| \, (z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2,\ [(z^0, z^1)] = \left\{ \lambda(z^0, z^1) \middle| \, \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \right\} \right\}$$

考虑如下映射：

$$\begin{aligned} h \colon S^1_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\ (z^0, z^1) &\longmapsto [(z^0, z^1)] \end{aligned}$$

在此映射下，$S^1_{\mathbb{C}}$上所有形如$\lambda(z^0, z^1), |\lambda| = 1$的点都被映为$\mathbb{CP}^1$中相同的点，而且$h^{-1}([(z^0, z^1)])$必定由所有形如$\lambda(z^0, z^1), |\lambda| = 1$的点构成。容易验证，这个映射$h$确实和之前定义的Hopf映射$S^3 \to S^2$相一致。

推广的基本想法是将数域$\mathbb{C}$换为其他代数。仔细检查Hopf映射$S^3 \to S^2$的构造，可以注意到我们并没有用到$\mathbb{C}$的全部性质，而仅要求这个代数满足：(1)是一个可除代数(division algebra)；(2)其上的范数是可乘的($\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$)。注意(2)可以保证这个代数是一个无零因子环。由于$\mathbb{C}$可看作是一个实二维可除代数，因此我们推广的方向就成为：寻找所有装备了可乘范数的实可除代数。注意这里的代数不但未必是交换的，甚至可以是非结合的。

1878年，Frobenius [9]证明了所有的结合实可除代数只能是实数$\mathbb{R}$，复数$\mathbb{C}$和四元数$\mathbb{H}$；1958年，Bott和Milnor [10]证明了所有的有限维实可除代数只能是$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$和八元数$\mathbb{O}$。八元数代数$\mathbb{O}$又称为Cayley numbers，不但不是域、不交换，甚至不是结合的。若再要求范数可乘，则不可能有满足要求的无限维代数，Hurwitz定理 [11]指出$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$和$\mathbb{O}$就是我们所有可能的选择。这四种情形下相应的Hopf映射分别为：

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}: &\quad S^0 \hookrightarrow S^1 \xrightarrow{h} S^1 \\
\mathbb{C}: &\quad S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{h} S^2 \\
\mathbb{H}: &\quad S^3 \hookrightarrow S^7 \xrightarrow{h} S^4 \\
\mathbb{O}: &\quad S^7 \hookrightarrow S^{15} \xrightarrow{h} S^8
\end{aligned}$$

这就是我们所可能拥有的所有Hopf纤维化。对$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$和$\mathbb{H}$的情形可以直接套用上面对Hopf映射$S^3 \to S^2$的等价描述，只需要选取不同的代数即可，而且得到的纤维丛都是主丛。$\mathbb{O}$的情形有一些小的困难，因为它是非结合的，故$\mathbb{CO}^1$未必能定义好；而且S^7不是一个群，从而得到的纤维丛必不是主丛。但用另外的方式仍能看出Hopf映射$S^{15} \to S^8$上的纤维丛结构，详细的讨论可参见[3]§20, pp.105-110。

值得一提的是，上述四个代数在物理中都有广泛而深刻的应用。

3 Hopf纤维化的各种应用

可以想见，既然Hopf纤维化研究的是球面这样基本的几何对象的拓扑性质，它应能在许多场合下出现。

1. **力学中的两个例子 [13]**

   (1) **1-1共振(The One-to-one Resonance)**

考虑两个谐振子的共振系统时，人们常常遇到如下形式的Hamilton函数：

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\lambda}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \text{高阶项}$$

若$\lambda = 1$，则此Hamilton函数的二次型部分描述的即是被称为“1-1共振”的力学系统。考虑临界情形

$$H_0 = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)$$

等能量面$H_0 \equiv \text{const}$即是$S^3 \subset \mathbb{R}^4$。引入复坐标$z_1 = q_1 + \mathrm{i}p_1, z_2 = q_2 + \mathrm{i}p_2$，则$H_0 = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)$。易见$H_0$在SU(2)的作用下是左不变的，相应的守恒量为

$$W_1 = 2(q_1q_2 + p_1p_2)$$
$$W_2 = 2(q_2p_1 - q_1p_2)$$
$$W_3 = q_1^2 + p_1^2 - q_2^2 - p_2^2$$

且它们满足$4H_0^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2$。因此上述映射$j\colon (q_1, p_1, q_2, p_2) \mapsto (W_1, W_2, W_3)$是一个从$S^3$到$S^2$的连续映射，不难发现这就是Hopf映射$S^3 \to S^2$。因此，在相空间中1-1共振系统的轨道$(q_1, p_1, q_2, p_2)$就是$S^3$上的大圆。（这个为人所熟知的经典例子在很多地方都被提及，例如 [7], pp.24）

(2) 刚体的运动

刚体的构形空间是$\mathrm{SO}(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$。若固定一个正交矩阵$A$，将沿固定在刚体上的坐标系的某条坐标轴的单位向量$\overrightarrow{k}$映到$A\overrightarrow{k}$，则我们构造了一个从SO(3)到$S^2$的投影（本质上是一个动量映射的限制，参阅 [13] §1.3, §1.10）。将此投影与从$\mathrm{SU}(2) \cong S^3$到$\mathrm{SO}(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$的商映射复合，我们将再次见到Hopf映射$S^3 \to S^2$。 [13] §1.10中提供了大量相关介绍和历史注记。

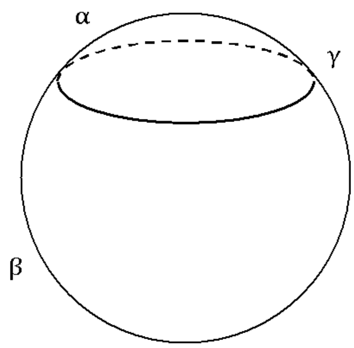
2. **磁单极子(Magnetic Monopole)的势场 [14] [8]**

考虑一个强度为$g \neq 0$的磁单极子。为描述一个在它所产生的磁场中运动的电子的波函数，我们需要找该磁场的一个矢量势$\overrightarrow{A}$。1931年，Dirac [15]描述了这样的一个势$\overrightarrow{A}$，但它不是光滑的，其奇点排列在某些线上。

一个这样的光滑的矢量势是不存在的，为此只需考虑以这个磁单极子为中心，R为半径的一个球面，在其上取一条闭合曲线γ，γ将球面分成两个区域α和β。

利用Stokes定理可以计算出通过球冠α和β的磁通量：

$$\Omega_\alpha = \oint_\gamma A_\mu \mathrm{d}x^\mu$$
$$\Omega_\beta = \oint_\gamma A_\mu \mathrm{d}x^\mu$$



因此穿过整个球面的总磁通量为$\Omega_\alpha - \Omega_\beta = 0$，与由Gauss定理给出的总磁通量应为$4\pi g \neq 0$矛盾。

然而，一个磁单极子激发的磁场应是没有奇点的，因此$\overrightarrow{A}$的这些奇点仅仅是数学上而不是真实物理上的困难。克服这一困难的方法是用两张图卡覆盖上面所说的球面，并分别在它们上面定义磁矢势，就像我们经常在流形上做的那样。记R_a为半径为R的球面挖去南极点的部分，R_b为半径为R的球面挖去北极点的部分，它们组成球面的一个开覆盖。在R_a上定义矢势$(\overrightarrow{A})^a$：

$$(A_r)^a = (A_\theta)^a = 0, \quad (A_\phi)^a = \frac{g}{r\sin\theta}(1-\cos\theta)$$

在R_b上定义矢势$(\overrightarrow{A})^b$：

$$(A_r)^b = (A_\theta)^b = 0, \quad (A_\phi)^b = \frac{-g}{r\sin\theta}(1+\cos\theta)$$

它们在各自的定义域上都是没有奇点的。不难验证它们都给出磁单极子g激发的磁场，故在$R_a \cap R_b$上它们相差一个梯度项。直接的计算表明

$$(A_\mu)^a - (A_\mu)^b = \partial_\mu \alpha, \quad \alpha = 2g\phi \quad (\text{其中}\phi\text{是方位角})$$

于是磁单极子的磁场中电子的Schrödinger方程为

$$\Big[\frac{1}{2m}(p-eA_a)^2 + V\Big]\psi_a = E\psi_a \quad \text{in} \quad R_a$$
$$\Big[\frac{1}{2m}(p-eA_b)^2 + V\Big]\psi_b = E\psi_a \quad \text{in} \quad R_a$$

其中ψ_a,ψ_b就是电子分别在R_a和R_b中的波函数。由于两个方程中的矢量势相差一个梯度，由规范场的理论可知ψ_a和ψ_b相差一个相位因子的变换

$$\psi_a = S\psi_b, \quad S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\alpha}$$

或写为

$$\psi_a = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}q\phi}\psi_b, \quad q = eg$$

考虑球面上的赤道，它落在$R_a \cap R_b$中，由ψ_a在R_a中的单值性以及ψ_b在R_b中的单值性可知，绕赤道一周后回到出发点的波函数ψ_a,ψ_b应和它们出发前相同，这就导出了著名的Dirac量子化条件

$$2q = 2eg = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

这里的波函数ψ_a,ψ_b已经不是通常意义上的S^2上的函数，而是S^2上的截面，它定义在S^2上的一个非平凡的纤维丛上。这是一个怎样的纤维丛呢？这就由上面的Dirac量子化条件中的整数n决定。整数n（又称为**拓扑量子数(topological quantum number)**）是R_a和R_b两个图卡之间的坐标变换映射沿赤道的**环绕数(winding number)**，在相差一个同构的意义下唯一地刻画了S^2上的一个复线丛，或附加于其上单位向量的一个球丛（参阅 [5], pp.297-302）。特别地，当$n = 1$时，我们得到的就是S^2上的一个S^1丛，也就是Hopf纤维化$S^3 \to S^2$中给出的纤维丛结构。$n = -1$的丛被称为anti-Hopf的。

3. **两态量子系统的Bloch球面(Bloch Sphere)表示 [16] [8]**

一个两态量子系统可以用一个二维Hilbert空间$\mathbb{C}^2$描述，其上装备标准的Hermite内积。一个量子比特(qubit)可以写为

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

系统的态由密度矩阵（迹为1的Hermite正定2×2矩阵）给出，而系统的观测量则由Hermite矩阵给出。用矩阵A表示的观测量在密度矩阵为ρ的态上的期望由实数$\mathrm{Tr}\,A\rho$给出。当ρ的秩为1时，它被称为一个纯态(pure state)，可以用向量$z \in \mathbb{C}^2$表示为$\rho = \dfrac{zz^\dagger}{z^\dagger z}$，其中$z^\dagger w = \langle z, w\rangle = \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2$；而观测量$A$在其上的期望为$\dfrac{z^\dagger A z}{z^\dagger z}$。注意到相差一个复因子的向量$z$决定同一个纯态。

现在考虑以Pauli矩阵$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$为观测量的期望，其中

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

将它们写成一个矩阵向量$\overrightarrow{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$，它在态$\rho$上的期望可以写为$\overrightarrow{R} = \mathrm{Tr}\,\rho\overrightarrow{\sigma} \in \mathbb{R}^3$。容易验证这个关系可以逆过来写成$\rho = \frac{1}{2}(1 + \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{\sigma})$，其中$\rho$的正定性蕴含$\overrightarrow{R}^2 \leq 1$，且仅当$\rho$是纯态时等号成立。这即是说，$\overrightarrow{R}(z) := \dfrac{z^\dagger\overrightarrow{\sigma}z}{z^\dagger z}$满足$\overrightarrow{R}^2(z) = 1$，亦即密度矩阵$\rho$可以用$\mathbb{R}^3$中单位闭球表示，而纯态都相应于$\mathbb{R}^3$中的单位向量。这个单位闭球面历史上称之为Bloch sphere（这个单位闭球则相应地可以被称为Bloch ball），因为F. Bloch曾用它解释了磁自旋共振现象。

具体地写出来，态集合$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\psi\rangle(\phi \in [0, 2\pi))$被映到$S^2 \subset \mathbb{R}^3$中的一个点，其坐标为

$$X = \langle\sigma_1\rangle_\psi = 2\,\mathrm{Re}\,\overline{\alpha}\beta$$
$$Y = \langle\sigma_2\rangle_\psi = 2\,\mathrm{Im}\,\overline{\alpha}\beta$$
$$Z = \langle\sigma_3\rangle_\psi = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

Bloch球面坐标和纯态密度矩阵$\rho_{|\psi\rangle}$的关系为

$$\rho_{|\psi\rangle} = \rho_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+Z & X-\mathrm{i}Y \\ X+\mathrm{i}Y & 1-Z \end{pmatrix}$$

对混合态(mixed state)的情形，密度矩阵与Bloch sphere内部的点一一对应。显然，(X, Y, Z)就是前面给出的Hopf映射$S^3 \to S^2$。

完全类似地，我们可以考虑一个two-qubit Hilbert空间，其中一个2-量子比特纯态可以写为

$$|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1.$$

借助四元数代数$\mathbb{H}$，我们可以考虑一个类似的“Bloch球面表示”，其中用到Hopf映射$S^7 \to S^4$。而这里一个有趣的事实是：S^7的Hopf纤维化对纠缠态(entangled state)是“敏感”的(entanglement sensitive)，并且因此为2-量子比特态提供了某种“分层”(“stratification”)（参阅 [16]中的详细论述）。

4. **更多的应用例子**

   [8]中提及了更多物理中应用Hopf纤维化的例子。

4 一点历史注记

Heinz Hopf最早为了计算$\pi_3(S^2)$而提出的Hopf纤维化 [1]是拓扑学中的重要发现，也在李群理论的发展中起到了不容忽视的作用。 [1]和 [2]无疑是早期同伦论发展的光辉成就。

P. A. M. Dirac对磁单极子的磁场所作的研究推广了传统波动力学的框架，具有重要意义。直到20世纪70年代，人们才意识到Dirac所描述的东西在数学上相当于纤维丛、截面和联络的语言 [17]。类似于数学上研究函数的Hilbert空间，人们发现需要研究截面的Hilbert空间 [18]。

“Dimensions”是一个非常著名的非商业数学系列科普短片，在各种视频网站上都可以容易地找到，其中使用大量直观的图象和动态视频演示了几何学的许多研究对象。它的第7、8两集深入地解释了纤维丛和Hopf纤维化的构造，基本涵盖了这则笔记的核心内容，观看之将给人非常大的启发。

参考文献

[1] Hopf, H. *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.* Math. Ann. 104(1931), 637-665

[2] Hopf, H. *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären neidrigerer Dimension.* Fund. Math. 25(1935), 427-440

[3] Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton Univ. Press, 1974

[4] Lyons, D. *An Elementary Introduction to the Hopf Fibration.* Mathematics Magazine. 76(2003), no.2, 87-98

[5] Bott, R. and Tu, L. W. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, New York, 1982 (GTM82)

[6] Lickorish, W. B. R. *An Introduction to Knot Theory.* Springer, New York, 1997 (GTM175)

[7] Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* 2nd edition, Springer, New York, 1989 (GTM60)

[8] Urbantke, H. K. *The Hopf Fibration—seven times in physics.* J. Geom. Physics. 46(2003), no.2, 125-160

[9] Mishchenko, A. and Solovyov, Y. *Quaternions.* Quantum 11(2000), 4-7 and 18

[10] Bott, R. and Milnor, J. *On the Parallelizability of the Spheres.* Bull. Amer. Math. Soc. 64(1958), 87-89

[11] Kantor, I. L. and Solodnikov, A. S. *Hypercomplex Numbers, an elementary introduction to algebras.* Springer-Verlag, New York, 1989

[12] Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics.* Institute of Physics Publishing, Philadelphia, 1990

[13] Marsden, J. and Ratiu,T. *Introduction to Mechanics and Symmetry.* Springer-Verlag, New York, 1994

[14] Yang, C. N. *Fibre Bundles and the Physics of the Magnetic Monopole.* The Chern Symposium, Springer-Verlag, 1979, 247-254

[15] Dirac, P. A. M. *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field.* Proc. R. Soc. London. A133(1931), 60-72

[16] Mosseri, R. and Dandoloff, R. *Geometry of Entangled States, Bloch Sphere and Hopf Fibrations.* J. Phys. A: Math. Gen. 34(2001), 10243-10252

[17] Wu, T. T. and Yang, C. N. *Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields.* Phys. Rev. D12(1975), 3845-3857

[18] Wu, T. T. and Yang, C. N. *Dirac Monopole Without Strings: Monopole Harmonics.* Nuclear Phys. B107(1976), 365.