Cauchy 问题 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2, y(0) = 0$ 的最大存在区间

李超*

2007 年 12 月

编者按：本文是李超同学对杨利军老师在”常微分方程”课上提出的问题的探讨。我们在此文后面一并附上杨利军老师的评注。

1 问题的具体化

我们的目的是求 Cauchy 问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2, y(0) = 0 \tag{1}$$

的饱和解的最大存在区间. 在课上已经证明问题 (1) 的最大存在区间有限, 由于解曲线是关于原点对称的, 故我们不妨只考虑右行的饱和解, 设其最大存在区间为 $[0, \beta)$, 其中 $\beta < +\infty$.

2 Bessel 方程与 Bessel 函数

Bessel 函数是下列 Bessel 方程

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \nu^2) y = 0 \tag{2}$$

的解.

Bessel 方程的两个线性无关的解为 [1]:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu + k + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{3}$$

与

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{4}$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Euler Gamma 函数.

$J_\nu(x)$ 称为 ν 阶的第一类 *Bessel* 函数, 当 $\nu \geq 0$ 或 ν 为负整数时, J_ν 在整个 $\mathbb{R}$ 上有定义, 而当 $\nu < 0$ 且不为整数时, J_ν 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 而在 0 处附近无界.

$Y_\nu(x)$ 称为 ν 阶的第二类 *Bessel* 函数(或 *Neumann* 函数), $Y_\nu(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 而在 0 处无界. 当 ν 为整数时, 右端为不定式, 此时定义应被理解为关于 ν 的极限.

*基科 61

方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-2a)x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(b^2c^2x^{2c}+(a^2-c^2\nu^2))y=0 \tag{5}$$

可以通过作变换 $y=x^az$, $t=bx^c$ 转化为

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+(t^2-\nu^2)z=0. \tag{6}$$

而方程 (6) 正为 Bessel 方程的形式, 故方程 (5) 的通解为

$$y(x)=x^a(c_1J_\nu(bx^c)+c_2Y_\nu(bx^c)), \tag{7}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

3 问题的转化

我们作变换

$$u(x)=e^{-\int_0^x y(s)\mathrm{d}s}, \tag{8}$$

将方程 (1) 化为简单的形式

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+x^2u=0, u(0)=1, u'(0)=0, \tag{9}$$

两边同乘 x^2, 得到

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+x^4u=0. \tag{10}$$

这恰巧是在方程 (5) 中取 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=2$, $\nu=\frac{1}{4}$ 得到的特殊情形. 从而由 (7) 可得方程 (10) 的通解为

$$u(x)=x^{\frac{1}{2}}\left(c_1J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+c_2Y_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right), \tag{11}$$

且通过计算可得

$$u'(x)=x^{\frac{3}{2}}\left(c_1J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)+c_2Y_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right). \tag{12}$$

利用初值条件 $u(0)=1, u'(0)=0$, 得到

$$u(x) = cx^{\frac{1}{2}}\left(J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)-Y_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right), \tag{13}$$

$$u'(x) = cx^{\frac{3}{2}}\left(J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)-Y_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right). \tag{14}$$

其中常数 $c=\dfrac{2}{\Gamma(\frac{3}{4})}$.

再利用

$$J_{-\nu}=J_\nu(x)\cos\nu x-Y_\nu(x)\sin\nu x, \tag{15}$$

由方程 (8) 得到

[redacted]

当然从推导过程也可以知道, 式 (16) 在 0 处的值是在极限意义下理解的.

4 求解最大存在区间

我们画出 $y(x)$ 表达式 (16) 分母的直观的图像来, 如图 1 .

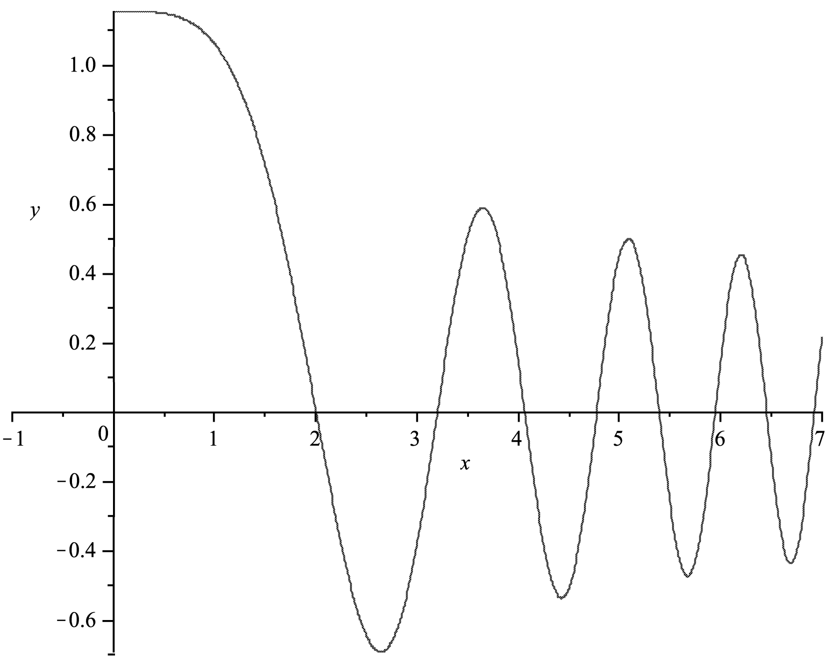

图 1 $g(x) = x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}x^2)$ 的图像

由式 (16) , 自然的, 为求问题 (1) 的最大存在区间的右端点 β, 只需求出函数 $J_{-\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}x^2)$ 0 处向右的第一个零点即可. 更进一步的, 设 x_0 为 $-\frac{1}{4}$ 阶的第一类 Bessel 函数 $J_{-\frac{1}{4}}(x)$ 的第一个零点, 则有 $\beta = \sqrt{2x_0}$.

于是原问题最终归结为求解 *Bessel* 函数的零点问题了. 当然, 如果我们除了 Bessel 函数的定义式 (3) 之外对其性质一无所知的话, 这种化归是无助于事的. 幸好 Bessel 函数由于其广泛的应用而得到了前人的充分研究, 对其零点的性质也较为清楚. 例如 Watson 在 [3] 中用了将近 50 页的篇幅来讨论 Bessel 函数的零点. 我们在这里只简要地给出 Segura 在 [2] 中给出的求零点的方法. 这个方法也被软件 *Mathematica* 所采用, 参见 `http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/6777/`.

Segura 考虑函数

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\nu(x) &= \cos\alpha J_\nu(x) - \sin\alpha Y_\nu(x), && (17) \\ H_\nu(x) &= \frac{\mathcal{C}_\nu(x)}{\mathcal{C}_{\nu-1}(x)}, && (18) \\ f_\nu(x) &= x^{2\nu-1} H_\nu(x). && (19) \end{aligned}$$

Segura 证明了 $H_\nu(x)$ 和 $f_\nu(x)$ 及其导数在 $x > 0$ 时的单调性, 由此建立了基于 $f_\nu(x)$ 的 Newton 迭代法并证明了其收敛性, 从而求得对任意 ν, α 函数 $\mathcal{C}_\nu(x)$ 的第 k 个零点, 由此可求得 Bessel 的零点.

这里我们给出实际的精确到 200 位的计算结果.

```
In[1]:= N[Sqrt[2 BesselJZero[-1/4, 1]], 200]

Out[1]= 2.003147359426884708004610979054299223810144817228995\
        61565049286252073480224409895902093197608710774122612\
        23800407945177342346641683567089788797604051459786\
        37607182307449868648326185010118032797752119152
```

图 2 *Mathematica* 6 求零点结果

```
Digits := 200;
  fsolve(BesselJ(-1/4, 1/2 x^2), x, 0..5);
                                    200
2.0031473594268847080046109790542992238101448172289961565\        (1)
  049286252073480224409895902093197608710774122612380040\
  794517734234664168356708978879760405145978637607182307\
  449868648326185010118032797752119152
```

图 3 *Maple* 11 求零点结果

其中图 2 使用专门的 Bessel 零点函数, 而图 3 只用到普通的方程数值解的函数. 尽管求值的方法不同, 但我们可以看到两者给出的结果是完全一样, 相当可信.

由于我们对解曲线的未知, 通常只能给出解曲线的近似估计, 通过比较定理来得出最大存在区间的范围. 对解曲线了解的越清晰, 估计越精确, 得到的范围也就越准确. 在这个问题中, 我们完全确定了解曲线 (例如, 由式 (3) 和式 (16)), 从而完全确定了最大存在区间 $[0, \beta)$. 当然, 虽然可以得到数 β 任意精度的值, 但或许不能期望 β 有一个简明的表示 (哪怕五次的代数方程的零点也是如此), 正如常数 π 正可以理解为通过幂级数定义的函数 $\sin(x)$ 的零点一样.

在这个意义上可以说, 我们已经对问题 (1) 的解的最大存在区间 $[0, \beta)$ 有了一个较为精确的认识. 最后我们写出, 在小于 10^{-200} 的差距范围内:

$$\begin{aligned}\beta \approx\, & 2.003147359426884708004610979054299223810144817228 99\\ & 61565049286252073480224409895902093197608710774122 61\\ & 23800407945177342346641683567089788797604051459786 37\\ & 6071823074498686483261850101180327977521191 52.\end{aligned} \tag{20}$$

解曲线如图 4.

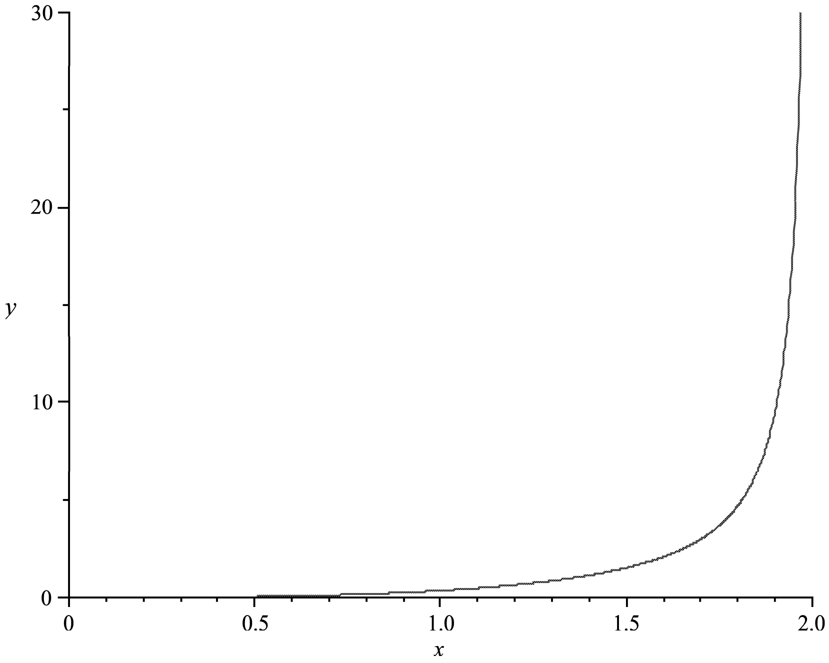

图 4 解曲线草图

参考文献

[1] 奚定平,贝塞尔函数, 北京: 高等教育出版社; 德国: 施普林格出版社,1998.

[2] J. Segura, *A global newton method for the zeros of cylinder functions*, Numerical Algorithms **18** (1998), 259-276.

[3] G.N. Watson, *A treatise on the theory of bessel functions*, Cambridge University Press, 1995.

****

数学家趣闻

▲ 40 年代的时候，Michael Golomb 曾看见 Erdos 正和一位国际象棋高手 Nat Fine 下棋：”Erdos 战胜对手的机会很少，而且总是通过心理战术……我看见 Nat 双手托着下颌，仔细盘算着如何走下一步棋，而 Erdos 却似乎在全神贯注地研究一本厚厚的医学大百科全书……我问他：'Paul，你在干嘛呢？你不是正在跟 Nat 下棋吗？' 他回答说：' 别打断我，我正在证明一个定理。'”