黎曼猜想与黎曼ζ函数简介
——纪念黎曼猜想发表150周年

杜升华

2009年5月

今年是伟大的德国数学家Bernhard Riemann发表黎曼猜想（Riemann Hypothesis，又称黎曼假设）150周年。在这样一个特别的年份里，我们想对这个著名的问题作些初步的介绍。

黎曼猜想是希尔伯特第8问题的一部分，又是Clay数学所七个"百万美金"问题之一。不过真正的数学家是不会为了金钱而投身数学的；这笔奖金的作用，或许更多地在于提高重要数学问题在公众当中的知名度。在Clay数学所的网站上，人们可以看到如下一段对黎曼猜想的简介[1]：

... The distribution of such prime numbers among all natural numbers does not follow any regular pattern, however the German mathematician G.F.B. Riemann (1826 - 1866) observed that the frequency of prime numbers is very closely related to the behavior of an elaborate function

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$$

called the Riemann Zeta function. The Riemann hypothesis asserts that all interesting solutions of the equation

$$\zeta(s) = 0$$

lie on a certain vertical straight line. This has been checked for the first 1,500,000,000 solutions. A proof that it is true for every interesting solution would shed light on many of the mysteries surrounding the distribution of prime numbers.

这种过于"大众化"的介绍很难让具备一点高等数学知识的人满意。事实上，黎曼猜想的确切表述是：

黎曼ζ函数$\zeta(s)$的全部非平凡零点都落在直线$\mathbf{Re}s = \frac{1}{2}$上。

我们马上会注意到一个问题：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$的收敛区域是半平面$\mathrm{Re}s > 1$，那么为什么要研究直线$\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$？所谓"非平凡"零点（以及相应地，"平凡"零点）指的

又是什么？这就涉及黎曼ζ函数的**解析延拓**。本文将介绍一种解析延拓的过程和与黎曼猜想相关的一些事实，希望使学过复分析的读者都能对此有一个初步然而较为确切的了解。因作者水平所限，这里不能提供黎曼猜想及其进展的更深入的信息。对此有兴趣的读者可参阅中国数学会网站[2]的专题栏目及Clay数学所网站上的“官方”问题介绍[3][4]。

1859年8月，黎曼被选为柏林科学院通讯院士。作为感谢，他于同年10月向柏林科学院提交了一篇论文[5]：*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*（论小于给定大小的素数个数）。这篇论文，黎曼所发表的唯一一篇数论论文，确立了他作为现代意义下的解析数论奠基者的地位，其重要性不仅在于提出了黎曼猜想，更在于深刻地揭示了处理连续对象的分析与处理离散对象的数论之间的奇妙联系。

黎曼在开篇提到，这篇论文以欧拉发现的ζ函数与素数的联系（欧拉乘积公式）为出发点：

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

其中左边p取遍所有素数。

这个公式的发现是等比级数求和公式与算术基本定理的一个精彩应用。欧拉乘积公式第一次把ζ函数与素数联系起来，为数论的研究提供了解析的工具。由于当s趋于1时$\zeta(s)$趋于无穷（因为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散），素数有无穷多个这一事实就成为欧拉乘积公式的一个推论。不仅如此，这一公式还提供了有关素数分布的定量信息，例如素数比数列$\{n^2\}$要密集，因为后者的倒数和收敛。事实上，素数的分布规律一直是吸引着众多数学家的一个谜团；19世纪，这方面的一个中心课题是高斯和勒让德所猜想的素数定理[1]：

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad 当x \to +\infty,$$

其中$\pi(x)$等于不超过x的素数个数。

欧拉的$\zeta(s)$和乘积公式只是对实数叙述的；正是黎曼把它推广到复变量s（而且指出只有当s的实部大于1时收敛），命名公式的两端为$\zeta(s)$，并给出了两种解析延拓的方法。对于复变量，欧拉乘积公式可借助绝对收敛级数的性质来证明，或者考虑到如下命题：两个定义在复平面上一个区域内的解析函数，若在一个有极限点的集合上相等，则它们恒等。这是非零解析函数的零点没有聚点这一事实的推论。特别地，这还意味着解析延拓的唯一性。

[1]素数定理亦可表述为$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$,当$x \to +\infty$，其中$\mathrm{Li}(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\epsilon}\frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^{x}\frac{dt}{\log t}\right)$为对数积分函数。容易验证两种形式是等价的。

下面参照Stein的[6]第6章来介绍黎曼的论文中给出的ζ函数的一种延拓方法。为此先简单介绍欧拉Γ函数的解析延拓。

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx.$$

上述表达式在半平面$\mathrm{Re}s > 0$内定义了一个解析函数，因为上述积分是在每个带状区域$\{\delta < \mathrm{Re}s < M\}$内一致收敛的，其中$0 < \delta < M < \infty$。

利用分部积分推出，当s实部大于0时，

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x}x^s dx \\ &= -e^{-x}x^s|_{x=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-x}sx^{s-1}dx \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

由此可将Γ延拓到$\mathrm{Re}s > -1$上，即定义

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

然后类似地延拓到任意半平面$\mathrm{Re}s > -m$上，其中m为正整数：

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s}.$$

这样，$\Gamma(s)$就延拓为在整个复平面上亚纯的函数，仅在非正整数$0, -1, -2, \ldots$处有单极点。而函数$1/\Gamma(s)$是一个整函数，仅在非正整数$0, -1, -2, \ldots$处有单零点。[2]

[5]和[6]中对ζ函数作解析延拓的关键是下列等式：当$\mathrm{Re}s > 1$时，

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx, \tag{1}$$

其中$\psi(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}$。

首先注意到x趋于$+\infty$时$\psi(x)$的指数衰减：

$$\psi(x) \le \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n x} = \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}}.$$

然后作变量代换$t = \pi n^2 x$，

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x}x^{\frac{s}{2}-1}dx = (\pi n^2)^{-\frac{s}{2}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}dt = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s},$$

[2]事实上Γ函数满足关系式$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$，由此可得$\Gamma(s) \neq 0$及所需结论。详见[6]第6章第1节。

并交换无限求和与积分的次序即可证明(1)式。

令$\vartheta(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}=2\psi(x)+1$。黎曼的论文引用了Jacobi关于$\vartheta$函数的一个结果[3]：

$$\vartheta(x)=x^{-\frac{1}{2}}\vartheta(x^{-1}).$$

由此得到

$$\psi(x)=x^{-\frac{1}{2}}\psi(x^{-1})+\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}.$$

把它代入(1)式右端，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx &= \int_0^1\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_1^{\infty}\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx\\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left[x^{-\frac{1}{2}}\psi(x^{-1})+\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\right]dx+\int_1^{\infty}\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx\\ &= \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^{\infty}\psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.\end{aligned}$$

将(1)式两端记为$\xi(s)$，则有

$$\xi(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx. \tag{2}$$

由于$\psi(x)$的指数衰减，(2)式定义了一个在全复平面内亚纯的函数，仅在0和1处有单极点，且关于直线Re$s=\frac{1}{2}$对称：$\xi(s)=\xi(1-s),\ \forall s\in\mathbb{C}$。

这样，可由Γ与ξ给出解析（更确切地说，是亚纯）延拓到全复平面的ζ函数的表达式[4]：

$$\zeta(s)=\pi^{\frac{s}{2}}\frac{\xi(s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

由于$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$在$s=0,-2,-4,\ldots$处有单零点，$\xi(s)$在$s=0,1$处有单极点，所以$\zeta(s)$仅在$s=1$处有单极点，在负偶数$-2,-4,\ldots$处有明显的零点（即平凡的零点），其余零点（非平凡零点）与$\xi(s)$的零点一一对应。进一步，由$\xi(s)=\xi(1-s)$知$\zeta(s)$的非平凡零点的分布是关于直线Re$s=\frac{1}{2}$对称的。

此外，当Re$s>1$时，由欧拉乘积公式可知$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}$没有零点[5]。所以$\zeta(s)$的非平凡零点都分布在带状域$0\le\mathrm{Re}s\le 1$内。

---

[3]这个结果可由Poisson求和公式推出，详见[6]第4章第2节。

[4]若想了解黎曼ζ函数的更多解析延拓方式，可参阅[7]。

[5]这里用到无穷乘积的一个性质：当$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$时，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛，且该无穷乘积收敛到0当且仅当其某一因子为0。详见[6]第5章第3节。

有趣的是，黎曼ζ函数非平凡零点的分布与素数的分布有微妙的联系，甚至仅仅把上述区域中的等号排除即可导致一个重大的成果——素数定理的证明。1896年，法国数学家Hadamard与比利时数学家de la Vallée Poussin几乎同时给出了素数定理的证明。在他们的证明中，关键的一步就是证明$\zeta(s)$在直线$\mathrm{Re}s = 1$上没有零点（这等价于$\zeta(s)$的非平凡零点都分布在$0 < \mathrm{Re}s < 1$内）。详见[6]第7章。

由此不难预料黎曼ζ函数与黎曼猜想对于素数分布的重大意义，而后者正是黎曼的论文[5]的主要目的。在[5]中，黎曼采用了与这里略有不同的记号：$\Pi(s) = \Gamma(s+1)$，$\xi(t) = \Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$，其中$s = \frac{1}{2}+ti$。他指出$\xi(t)$只有当$t$的虚部在$\frac{1}{2}i$与$-\frac{1}{2}i$之间时才会等于零，以及$\xi(t)$的实部介于0与$T$之间的零点个数约为

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi},$$

接下来便提出了著名的黎曼猜想：

Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind.

(One finds now in fact about so many real zeros inside this domain, and it is very likely that all the zeros are real.)

这句话实际上是两个猜想。前半句相当于说ζ函数的位于临界线$\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$上的零点在所有非平凡零点中的比例等于1，一个比一百五十年来所证明的关于ζ函数零点分布的所有结果都要强的命题，然而这里是以完全肯定的语气叙述的！黎曼的论文[5]中有不少一笔带过的地方，其详细证明后人在几十年后才做得出来，由此也印证了他的天才（[8]中有非常生动和详尽的介绍）。虽然不知道对这一命题黎曼是否给出过正确的证明，但遗留下的手稿表明他的每个论断都是有大量的计算和推理作为基础的，决不仅仅靠直觉和猜测。后半句就是广为人知的黎曼猜想，只不过表述的形式与目前普遍采用的有所不同。注意，黎曼在此用了猜测性的词语“sehr wahrscheinlich”（很可能），然后评论道：

Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

(For this a rigorous proof would certainly be desired; I have however set this exploration aside after several quick unsuccessful attempts, as it seemed for the next purpose of my investigation unnecessary.)

可见这个问题是如此之难，以至连黎曼都放弃了证明的尝试。这里提到的“den nächsten Zweck”（紧接着的目标）是，利用ζ函数给出素数分布的精确公式。论文得到的结果为：

$$f(x)=\mathrm{Li}(x)-\sum_{\alpha}\left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)+\int_x^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x}+\log\xi(0),$$

其中α为Riemann论文中$\xi(t)$的实部大于0的零点（$\frac{1}{2}+\alpha i$就是ζ函数在上半平面的非平凡零点），$f(x)$定义为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(x^{\frac{1}{n}})}{n}.$$

由此得出$\pi(x)$的表达式[6]：

$$\pi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}f(x^{\frac{1}{n}}),$$

其中μ为Möbius函数：

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{当}n=1;\\ (-1)^k, & \text{当}n\text{为}k\text{个不同素数乘积};\\ 0, & \text{当}n\text{有重因子}.\end{cases}$$

黎曼ζ函数的零点明显地出现于以上公式中，这就揭示了ζ函数零点的分布与素数分布之间的联系。事实上，黎曼猜想与素数定理跟素数实际分布的偏差有密切关系：1901年，瑞典数学家von Koch证明了，假如黎曼猜想成立，那么素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差为$O(\sqrt{x}\ln x)$。

下面简单列举一些黎曼猜想研究历程中的重要结果(详细的介绍和更多信息可参见[8]和[9])：

- 1914年，Bohr-Landau定理：对于任何$\delta>0$，位于$\mathrm{Re}s\geq\frac{1}{2}+\delta$ 的非平凡零点所占的比例为无穷小。

- 1914年，Hardy定理：黎曼ζ函数有无穷多个非平凡零点位于临界线$\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}$上。

- 1942年，Selberg临界线定理：存在常数$K>0$及$T_0>0$，使得对所有$T>T_0$，黎曼ζ函数在临界线上$0\leq\mathrm{Im}s\leq T$的区间内的非平凡零点数目不小于$KT\ln T$。这表明黎曼ζ函数在临界线上的零点在全部非平凡零点中所占的比例大于零。

- 1974年，Levinson证明了黎曼ζ函数至少三分之一的非平凡零点位于临界线上；1989年，Conrey把这一数字推进到五分之二。

- 截至2004年，人们已验证了黎曼ζ函数的至少前10^{13}个非平凡零点位于临界线上。

[6]这里在$\pi(x)$的间断点x处（即x为素数时）取值为左极限和右极限的平均。

从数值验证结果来看，黎曼猜想的正确性确实是“sehr wahrscheinlich”。这些验证也一次又一次在人们普遍产生怀疑的时候带来了信心。然而对**有限**个零点所作的数值验证，毕竟无法构成对涉及**无限**多个零点的黎曼猜想的证明。整整一百五十年来，黎曼猜想仍然像一座高不可攀的山峰，考验着人类智慧的极限，尽管已有无数杰出的数学家沿着陡峭的山路努力攀登，同时开辟出山后的一大片美丽园地：据粗略统计，当今数学文献中已有超过一千条命题或“定理”以黎曼猜想的成立为前提。可以预计，黎曼猜想的证明必将极大地丰富人们对数学世界的认识，为翻天覆地的理论发展创造可能，这将是即使百万美金也无法衡量的**人类心智的荣耀**。

据说，希尔伯特有一次被问到如果能在去世500年后重返人间，他最想问的问题是什么。回答是，最想知道是否已有人解决了黎曼猜想。那么，但愿434年之后的人们能有一个肯定的答案吧！

参考文献

[1] http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis

[2] http://www.cms.org.cn

[3] E. Bombieri, *The Riemann Hypothesis*, http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/riemann.pdf

[4] P. Sarnak, *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis (2004)*, http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/Sarnak_RH.pdf

[5] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

[6] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

[7] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, 1986, 2nd Ed.

[8] http://www.changhai.org/articles/science/mathematics/riemann_hypothesis

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis