$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$ 是 *e* 的整数倍的证明

刘立达[1]

2007 年 8 月

对 $\forall k\in\mathbb{N}$, $k\geq1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$ 是 e 的整数倍.

证明：

首先，当 k=1 时，该式等于 e，结论显然成立.

当 $k\geq2$ 时，我们来分拆 n^k，将 n^k 分拆为阶梯状乘积的和.

令：

$p_{1,1}$ 为 $n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)$的展开式中 n 的系数;

$p_{1,2}$ 为 $n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)$的展开式中 n^2 的系数;

……

$p_{1,k}$ 为 $n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)$的展开式中 n^k 的系数（=1）;

$p_{2,1}$ 为 $n(n-1)\ldots\ldots(n-k+2)$的展开式中 n 的系数;

……

$p_{2,k-1}$ 为 $n(n-1)\ldots\ldots(n-k+2)$的展开式中 n^{k-1} 的系数（=1）;

……

$p_{k,1}$ 为 n 的展开式中 n 的系数，即 1.

即下表：

$$\begin{array}{ccccc}
 & n^k\text{的系数} & n^{k-1}\text{的系数} & \cdots & n\text{的系数} \\
n(n-1)\cdots(n-k+1) & p_{1,k} & p_{1,k-1} & \cdots & p_{1,1} \\
n(n-1)\cdots(n-k+2) & & p_{2,k-1} & \cdots & p_{2,1} \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
n & & & & p_{k,1}
\end{array}$$

令 $n^k=[q_1n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)]+[q_2n(n-1)\ldots\ldots(n-k+2)]+\ldots\ldots+q_kn$，其中 $q_1=1$。由于等式两边 $n, n^2, \ldots\ldots, n^{k-1}$ 的系数都为 0，所以有：

$$\begin{cases}
q_1p_{1,1}+q_2p_{2,1}+\cdots\cdots+q_kp_{k,1}=0 \\
q_1p_{1,2}+q_2p_{2,2}+\cdots\cdots+q_{k-1}p_{k-1,2}=0 \\
\vdots \\
q_1p_{1,k-2}+q_2p_{2,k-2}+q_3p_{3,k-2}=0 \\
q_1p_{1,k-1}+q_2p_{2,k-1}=0
\end{cases}$$

由此解得：

$q_1=1$;

$q_2=-p_{1,k-1}$;

$q_3=-(p_{1,k-2}+q_2p_{2,k-2})$;

……

$q_k=-(p_{1,1}+q_2p_{2,1}+\ldots\ldots+q_{k-1}p_{k-1,1})$.

那么我们得到 $n^k=[q_1n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)]+[q_2n(n-1)\ldots\ldots(n-k+2)]+\ldots\ldots+q_kn$，其中 q_1, ……, q_k 的表达式如上。

至此，我们将 n^k 拆成了 k 个阶梯状乘积的和．从而得到下式：

[1] 基科 58-基数 53

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{j=1}^{k}q_j\prod_{i=1}^{j}(n-i+1)}{n!}\\
&=\sum_{j=1}^{k}q_j\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{j}(n-i+1)}{n!}\\
&=\sum_{j=1}^{k}q_j\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{(n-j)!}\\
&=\sum_{j=1}^{k}q_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\\
&=e\sum_{j=1}^{k}q_j
\end{aligned}
$$

鉴于诸 q_j 都是整数，其和必为整数，因而结论得证.

****

数学笑话

微分

常函数和指数函数 e^x 走在街上，远远看到微分算子，常函数吓得慌忙躲藏，说：“被它微分一下，我就什么都没有啦！”指数函数不慌不忙道：“它可不能把我怎么样，我是 e^x！”指数函数与微分算子相遇。指数函数自我介绍道：“你好，我是 e^x。”微分算子道：“你好，我是 d/dy！”

黑色的羊

物理学家、天文学家和数学家走在苏格兰高原上，碰巧看到一只黑色的羊。

“啊！”天文学家说道，“原来苏格兰的羊是黑色的。”

“得了吧，仅凭一次观察你可不能这么说。”物理学家道，“你只能说那只黑色的羊是在苏格兰发现的。”

“也不对，”数学家道，“由这次观察你只能说：在这一时刻，这只羊，从我们观察的角度看过去，有一侧表面上是黑色的。”

处处不可导

有一位国外的学者（搞数学研究的）到我们学校访问，住在学校外宾招待所，他要走的时候，我问他对我们学校的印象如何，他说：“你们学校的招待所太差了，以后再也不敢住了！”我急忙问其原因。教授说道：“那吃饭的碗，碗口处处不可导，这哪是给人用的！”