代数整数是单位根的一个刻画

林洁*

1 问题

在代数数论中有一个有趣的小练习:

命题 1 一个代数整数 α 是单位根当且仅当它所有的共轭模为 1.

用初等的语言描述，命题 1 即为:

命题 1′ $p(x)$ 是一个首一整系数多项式, α 是它的根. 若 p 所有的根模都为 1, 则 α 为单位根. 特别地, 若还已知 p 不可约, 则 p 是分圆多项式.

而用矩阵的语言, 该命题又等价于:

命题 1″ r 是一个正整数, $g \in GL_r(\mathbb{Z})$. 若 g 有 r 个不同的复特征根 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, 且 $|\lambda_1| \leq 1, \ldots, |\lambda_r| \leq 1$, 则存在正整数 N, 使得 $g^N = 1$. 从而 $\lambda_1^N = \ldots = \lambda_r^N = 1$.

下面我们给出该命题的三种证明, 其中证明 1, 2 需要简单的代数数论知识, 而证明 3 只需要数学分析和高等代数知识.

2 证明

证明 1: (采用命题1的记号)

记 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式为 $P(x) = x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r$, 并记 $Gal(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \sigma_1, \ldots, \sigma_r$, 其中 $\sigma_1(\alpha) = \alpha$. 则由条件, $\forall\ 1 \leq i \leq r$, $|\sigma_i(\alpha)| = 1$. 从而 $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ 1 \leq i \leq r$, 有 $|\sigma_i(\alpha^n)| = 1$.

记 $P_n(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \sigma_i(\alpha^n)) = x^r + c_{1n}x^{r-1} + \ldots + c_{rn}$. 则

$$\begin{aligned} |c_{kn}| &= |\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots \\ < i_k \leq r}} \sigma_{i_1}(\alpha^n) \ldots \sigma_{i_k}(\alpha^n)| \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots \\ < i_k \leq r}} |\sigma_{i_1}(\alpha^n) \ldots \sigma_{i_k}(\alpha^n)| = \binom{r}{k}, \end{aligned}$$

*基数 71

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, 1 \le k \le r$.

注意到 P_n 是整系数多项式, 故对任意给定的 n, $c_{nk}(1 \le k \le r)$ 的选择都是有限的. 从而 $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是有限集. 进一步地, 由 $P_n(\alpha^n) = 0$ 知 $\{\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ 也是有限集.

故 $\exists\, n_1 < n_2,\ s.t.\ \alpha^{n_1} = \alpha^{n_2}$, 即 $\alpha^{n_2-n_1} = 1$, α 是单位根.

证明 2: (沿用证明 1 中记号)

假设 α 不是单位根, 则 $\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在单位圆周上稠密 (请读者自行证明). 故 $\exists\, n \in \mathbb{N},\ s.t.\ |1-\alpha^n| < \frac{1}{2^r}$.

注意到 $\prod_{i=1}^{r}(1-\sigma_i(\alpha^n)) \ne 0$ (否则 $\exists\, i$, $\sigma_i(\alpha)$ 是单位根, 那么 α 也是单位根, 与假设矛盾), 从而 $\prod_{i=1}^{r}|1-\sigma_i(\alpha^n)| \ge 1$. 但 $\prod_{i=1}^{r}|1-\sigma_i(\alpha^n)| = |1-\alpha^n|\prod_{i=2}^{r}|1-\sigma_i(\alpha^n)| \le |1-\alpha^n|\prod_{i=2}^{r}(1+|\sigma_i(\alpha)|) = 2^{r-1}|1-\alpha^n| < 1/2$, 矛盾. 故假设不成立, 原命题得证.

在继续证明三之前, 我们先回顾一下范数等价定理. 这是数学分析大二上的内容, 这里就不证明了.

定理 2 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$)中的范数都是等价的. 从而在任何范数下, $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$)的单位闭球总是紧的.

而在下面的情况中, 两个范数等价只需简单的不等式放缩即可证明.

证明 3:(采用命题 $1''$ 中记号)

首先, 由于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 互不相同知存在可逆方阵 T, 使得 $T^{-1}gT = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$.

我们在 $M_n(\mathbb{C})$ 中定义范数如下: 对 $x \in M_n(\mathbb{C})$, 以 x_{ij} 表示其第 ij 位分量, 定义

$$\|x\| = \|T^{-1}xT\|_{\infty} := sup_{1\le i,j\le r}|(T^{-1}xT)_{ij}|,$$

则 $\|\ \|$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 中范数 (请读者自行验证).

一方面, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\|g^n\| = \|T^{-1}g^nT\|_{\infty} = \|diag(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_r^n)\|_{\infty} \le 1$. 故 $\{g^n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq B(0,1)$, 其中 $B(0,1)$ 是 $\|\ \|$ 下的单位闭球, 是一个紧集.

另一方面, $\{g^n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $\|\ \|$ 下的离散集. 事实上, 更一般地, $GL_r(\mathbb{Z})$ 是 $M_r(\mathbb{Z})$ 在 $\|\ \|$ 下的离散集. 这是由于 $GL_r(\mathbb{Z})$ 是 $M_r(\mathbb{Z})$ 在 $\|\ \|_{\infty}$ 下的离散集, 而 $\|\ \|_{\infty}$ 与 $\|\ \|$ 是等价的.

综合两方面, 离散集 $\{g^n\}_{n=0}^{\infty}$ 包含在一个紧集内, 故它是有限集. 即 $\exists\, n_1 < n_2,\ s.t.\ g^{n_1} = g^{n_2}$, 由 g 可逆得到 $g^{n_2-n_1} = 1$. 得证.

参考文献

[1] 冯克勤 著; 代数数论, 科学出版社, 北京, 2000.

[2] 巴黎高师考题, 2006年