2009.5.
第03期

目录

自然哲学与逻辑

David Hilbert

译者序：1930 年，68 岁的希尔伯特达到了退休的年龄。他欣然接受了故乡柯尼斯堡[1]的“荣誉市民”称号，并在授予仪式上作了题为 Naturerkennen und Logik[2]的公众演讲；然后应邀在当地广播电台将演讲的结尾部分向全体市民再讲一遍。这段广播演讲从实际功用与理论意义两方面深刻地阐释了数学的价值，批判了所谓“文化衰落”与“不可知”的论调，洋溢着乐观主义的激情，是一曲对我们所热爱的这门科学的伟大赞歌。

著名的传记⑴第二十二章对这次演讲作了生动的描述。广播演讲稿的英译文参见⑵和⑶。希尔伯特的演讲全文参见⑷，广播演讲录音可在如下网址找到：http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio.mp3。有兴趣的读者不妨参照原文感受一下数学大师话语中蕴含着的那种坚定与自信。

感谢外语系王瑞芝老师的帮助和建议。

Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet. Schon GALILEI sagt: Die Natur kann nur der verstehen der ihre Sprache und die Zeichen kennengelernt hat, in der sie zu uns redet; diese Sprache aber ist die Mathematik, und ihre Zeichen sind die mathematischen Figuren. KANT tat den Ausspruch: „Ich behaupte, daß in jeder besonderen Naturwissenschaft nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden kann, als darin Mathematik enthalten ist.“ In der Tat: Wir beherrschen nicht eher eine naturwissenschaftliche Theorie, als bis wir ihren mathematischen Kern herausgeschält und völlig enthüllt haben. Ohne Mathematik ist die heutige Astronomie und Physik unmöglich; diese Wissenschaften lösen sich in ihren theoretischen Teilen geradezu in Mathematik auf. Diese wie die zahlreichen weiteren Anwendungen sind es, den[3] die Mathematik ihr Ansehen verdankt, soweit sie solches im weiteren Publikum genießt.

[1] Königsberg，东普鲁士的首府，著名哲学家康德的家乡，在数学史上因“七桥问题”而出名；二战后被苏联占领，改称加里宁格勒，今属俄罗斯。

[2] Naturerkennen 的字面意思是对自然的认识，不过根据⑶的说法，译成自然哲学（natural philosophy）似更恰当。

[3] 此处的 den 在⑷中为 denen，前半句的 wie 为 und。

Trotzdem haben es alle Mathematiker abgelehnt, die Anwendungen als Wertmesser für die Mathematik gelten zu lassen. GAUSS spricht von dem zauberischen Reiz, den[4] die Zahlentheorie zur Lieblingswissenschaft der ersten Mathematiker gemacht habe, ihres unerschöpflichen Reichtums nicht zu gedenken, woran sie alle anderen Teile der Mathematik so weit übertrifft. KRONECKER vergleicht die Zahlentheoretiker mit den Lotophagen, die, wenn sie einmal von dieser Kost etwas zu sich genommen haben, nie mehr davon lassen können.

Der grosse Mathematiker POINCARÉ wendet sich einmal in auffallender Schärfe gegen TOLSTOI, der erklärt hatte, daß die Forderung „die Wissenschaft der Wissenschaft wegen" töricht sei. Die Errungenschaften der Industrie, zum Beispiel, hätten nie das Licht der Welt erblickt, wenn die Praktiker allein existiert hätten und wenn diese Errungenschaften nicht von uninteressierten Toren gefördert worden wären.

Die Ehre des menschlichen Geistes, so sagte der berühmte Königsberger Mathematiker JACOBI, ist der einzige Zweck aller Wissenschaft.

Wir dürfen nicht denen glauben, die heute mit philosophischer Miene und überlegenem Tone den Kulturuntergang prophezeien und sich in dem Ignorabimus gefallen. Für uns gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Losung:

Wir müssen wissen,

Wir werden wissen.

促成理论与实践、思想与观察之间的调解的工具，是数学；她建起连接双方的桥梁并将其塑造得愈加坚固。由此可见，我们的整个当代文化，就其心智上的洞察与对自然的利用而言，其根基见于数学之中。伽利略已经说过：只有了解了自然界用来与我们讲话的语言和标记的人，才能理解自然；而这种语言就是数学，它的标记就是数学符号。康德有句格言："我断言，在任何一门特定的自然科学中，只能遇到同其中所包含的数学一样多的科学真理。"事实上：我们直到把一门自然科学理论的数学内核剥出并完全地揭示出来，才算掌握它。没有数学，今天的天文学与物理学是不可能实现的；在其理论部分，这些科学几乎完全融入数学之中。正是归功于这些事实以及为数众多的其他应用，数学才在

[4] 此处的 den 在⑷中为 der。

一般公众当中享有如此之高的声望。

尽管如此，所有数学家都拒绝接受应用作为数学的价值尺度。高斯谈到使数论成为第一流数学家最喜爱的学科的迷人魅力，更不必提及她那远超过数学其余所有分支的取之不尽的丰富宝藏了。克罗内克把数论研究者比作吃过忘忧果的人，他们一次吃过这种果实就再也离不开它了。

托尔斯泰曾声称追求“为科学而科学”是愚蠢的，伟大的数学家庞加莱有一次以引人注目的尖锐措词反驳他。例如工业的成就，假如只有实践家存在而这些成就没有被不感兴趣的愚者所促进的话，将永远不见天日。

“人类心智的荣耀，”著名的柯尼斯堡数学家雅可比如此说过，“是所有科学的唯一目的。”

我们不可以相信现今那种人，他们带着一副深思熟虑的表情，以自命不凡的语调预言文化衰落，自我陶醉于“不可知”[5]当中。对我们而言没有什么“不可知”，并且按我的观点，对于自然科学也根本没有。相反，代替那愚蠢的“不可知”，我们的口号是：

我们必须知道，

我们必将知道。

（基数 53 班 杜升华 译）

参考文献

⑴C. Reid, *Hilbert*，中译本希尔伯特——数学世界的亚历山大，袁向东、李文林译，上海科学技术出版社，2006 年。

⑵J. T. Smith, *Hilbert's 1930 radio address*, http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio.pdf

⑶V. Vinnikov, *We shall know: Hilbert's apology*, Mathematical intelligencer, 21(1999): 42–46.

⑷D. Hilbert, *Naturerkennen und Logik*, Naturwissenschaften (1930): 959-963.

[5] Ignorabimus，指的是生理学家和哲学家 Emile DuBois-Raymond（1818-1896）及其追随者提出的“ignoramus et ignorabimus”（我们无知，并且将永远无知）。DuBois-Raymond 宣称人类的知识有预定的极限，因而存在人类的智慧甚至在原则上也无法解决的某些问题，其中包括物质和力的本质，运动的起源，感觉和意识的起源。参见⑶脚注 10。

漫谈微分几何

丘成桐

编者按：本文是丘成桐教授 1991 年 12 月 7 日在中国台湾东海大学的演讲。文中阐述了做学问所需要的态度。这篇演讲既涉及志向、兴趣之“虚”，更谈到勤奋、选题等“实”，具有相当程度的指导意义和参考价值。我们在此将此文刊出，希望可以引起读者的一些思考。文中黑体为编者所加。

今天很高兴能够在各位面前讲讲我做学问的经验，可以供大家参考一下。我讲“如何学好微分几何”的题目，主要是想跟大家讲讲有关于从前我做学问的态度，因为我是做几何的，所以我就讲做微分几何。很明显的，大部分的同学不会选几何，不过没有关系，其实就是讲讲我做学问的态度。

首先，讲讲我从前的一些经验。我从前在香港长大，在香港念中学、大学，然后到美国念研究所，所以至少在前一半跟大家的经验应该差不了太远，不过是时代有点不同。我在多年前念数学，你们现在念数学，看法上已经有许多不相同，事实上我也不太了解你们现在的想法。不过基本上，我们都是中国文化出生的，所以我想仍有一部分共同的地方。基本上我们是要讲怎么做科学研究，也就是纯科学的研究，我们要看的是我们的志向是怎样的。

假如我们想做一个好的科学家，当然我讲的是怎么做一个好的数学家。先说我自己的经验，我从前在香港培正中学念中学的时候，就开始对数学有兴趣。当然还有一些其它的课程，我对数学有兴趣，一方面是受到我家庭的影响，我父亲是做哲学的，所以对于念数学一直都相当鼓励，到了中学以后，我父亲去世了。不过也因此对于自然科学有很浓厚的兴趣。另一方面受老师的影响也很大。我想很重要的当我们开始要做一个学问，尤其是你真的要做一个出色的科学家，跟你的兴趣和你一开始所立下的志向有很大的关系。就是说，开始的时候你期望能够做到什么。**假如说开始的时候你根本不想做一个好的科学家，那么你就永远也不可能做一个好的科学家。**从前有位大学老师跟我讲说：“假如你不买马票，你永远也中不了。”倒不是说我鼓励你们去买马票，是说假如你不准备做好的科学家，就永远也做不了一个好的科学家。

不过是不是讲，你想做一个好的科学家，你就可以做个好的科学家呢？当然不是，你还要有很多其它的因素在里面，**我想第一点是要你将做人的目标先决定。**我在国外二十多年了，也教了不少的学生，有些在世界上算是很出名，但有些不是太行。从这方面来讲，比较好的学生和不好的学生我可以晓得不同的经验。我想好的学生大部分一开始就决定他要做到什么程度的科学家，从很早就可以看得出来，因为有了志向以后，才晓得怎么去用功、怎么去花时间在上面。这看起

来倒是老生常谈，因为你从小学、中学到大学，大概很多老师都跟你讲同样的意见，可能你听多了都觉得没有什么意思，但是事实上这是成功的第一个因素。

我的一位老师跟我讲，你要决定以后你想做什么，讲明了，不是为名就是为利。当时我很惊讶，老师为什么讲这一句话。我们不能否定大部分的想法不是为名就是为利，同时这个想法也推动了不少科学的研究。不过我们也晓得，单是为名为利不可能将科学达到最高峰的研究，我们一定要对这个科学有浓厚的兴趣。我们应当晓得，做科学，我们有一个很纯正的想法，就是对真理的追寻，在真理的背后有一个很漂亮的境界在里面，我们到了一个境界以后，对我们追求学问的人来讲，是无法抗拒的，就算是没有名没有利，我们也希望能够将这个真理搞清楚。举例来讲，如果你喜欢下棋的话，有时你会晓得下到一半的时候，结局会是怎样，你非为名也非为利，当然可以讲说你是为了好胜，但是有时候你总是想追求，想晓得怎么解决这个问题。在科学上来讲我们要追求的是比这个高的境界。

我为什么讲为名为利这个事实呢？举例来讲，我们这几年在哈佛大学里教了几个在大学里念数学念得很好的学生，可是到了毕业的时候，我晓得他们明明对数学有很大的兴趣，但是他们选取了完全不同的途径，他们有些人宁愿选取做生意或是到银行里面做事。我并不反对你们去做生意、赚大钱，我失望的缘故是因为这些学生明明是对做学问兴趣特别大，但是他们没有办法去抗拒赚钱的引诱而放弃了继续做学问的前途，有些人甚至过了几年赚了钱，又想重新再做学问，**但问题是无论你资质有多好，一般来讲你将做学问的机会放弃以后，再想重新做起将会遇到许多困难**。并不是说不可能，也曾有这种情形发生过，但是真正能够达到的情形，几乎是绝无仅有，做学问是不能中断的。

我遇见过很多朋友，有些甚至是很有名的数学家，他们有些人会讲我现在一方面做行政的工作，一方面可以做学问，可是事实上，这是没有办法可以达到两者兼顾的情形。我们晓得做学问几乎是全心全意的工作，当对证明追寻的时候，很难说受到其它外界的打扰，仍能够达到很高的成功的。以我的经验来讲，在想问题的时候，晚上睡觉也在想这个问题，躺在床上也在想，早上起床第一件事就是想这个问题。我并不是讲你们也要这样子，我是希望你们在遇到一个问题要解决的时候，你要全力以赴，不可能在中间慢慢想一点而在其它也可以花点功夫，这样精神不集中的态度是不可能做好学问的。

我想对大家做个建议，假如你想做个真正的好科学家的话，就不能够再往回走，假如你想做生意，那干脆一开始就不要想这个问题，并不是你要做个好的教员就要照我刚才讲的，要花这么多功夫，倒是要念好科学这是很重要的，所以这是第一点，立志很重要。

第二点我要讲的，我在国外多年，遇见过许多很出名的数学家，甚至许多有名的物理学家我也见过许多。**在我认为并没有一个是真正的像一般报纸上所讲的是天才，在我所亲身认识的大科学家，都是经过很大的努力，才能够达到他所达到的成就**。我的学生问我：“为什么你做的比我好？”，我说很简单，我比你用功。我在办公室或是在家里边，我天天在想问题，你们在外面玩，而我花了功

夫在解决想了很久的问题，我总比你不想、不花时间成就大一点。你可能去听个大科学家或大数学家演讲，你会觉得漂亮得不得了，怎么一个人能够讲得这么好！这个人是个天才！可是你有没有想到，他在后面准备花了多少时间想这个问题？

大概你们听过最出名的科学家费因曼，《费因曼物理》漂亮得不得了，所有出名的物理学家都这么讲，去听的人不是学生，都是老师或物理学家。费因曼在准备费因曼物理的时候是什么事都不做，就只有脑子在花功夫，整天在想这个问题，跟许多学生不停的在谈这个问题。费因曼是个有名的天才，可是他准备这个研究也花了许多不同的功夫。

我想很多出名的科学家在有所表现出不同的时候，你会觉得他是天才，事实上他用在后面的功夫都是很不少的。 有许多很聪明很厉害的人可能是研究生甚至是教授，往往你给他一个问题，他可以很快给你一个答案，同时是很不错的一个答案。可是很多这样出色的学生或是教授，过了很久以后，你总会觉得他没有做出很好的成绩出来。问题是，你解决的问题太容易了；没有再花很多精神去考虑这个问题。尤其在我们中国人最缺乏的，就是在做中学生或是大学生的时候，没有将一个问题从头到尾仔细考虑清楚，并没有真正的全部了解，这是个很重要的问题。从一个很小的问题，我们可以引发很多不同而且有意思的问题。思考要自己训练，不单是在联考或在大学的时候，老师出个题目，你考了一百分就完了，假如这样的话，你很容易就满足你自己，你不觉得问题有什么意思。

往往出名的研究是在很平凡的问题里面，不停的思考所找出来的，很多人因为很快将问题解决了，便不愿再想下去，所以不能够再启发新的东西。科学的研究，不是解决人家已经晓得的问题。当一个科学家问一个好的问题的时候，即是成功的一半。因为科学的推动是从不断的找寻新的问题，新的方向出来的，解决从前的问题虽是个重要的推动方向，可是我们还要找出新的方向，而不单是解决从前的问题。

我们知道在物理上解决问题的时候，往往大的或出名的公式是将前面固定的理论推翻，而找出新的路子。为什么大数学家或大物理学家能够做到这个地步呢？因为他们不断的问问题。有时候在一般人来讲很明显的问题，在出名的科学家看起来，就不见得很明显。为什么不明显呢？因为我们有不同层次的问题要一路考虑下去。问问题的能力是一个很重要的训练，并不是花很多功夫就可做到，我想在我们中国的小学、中学或大学里都没有很好的做到这一点，我想从小应该做到这一点的。

现在我们来看数学跟其它物理、化学或生物等实验科学有那些不同？物理或化学等科学是从一般实验、现象界所找的题目，最后再经过实验的证实，才能算是个成功的理论。理论物理学家可以发展很多不同漂亮的理论，但最后假如不能够在实验里做出来的话，对物理学家来讲就是一篇废话。数学家有个好处。就是说，我们做了学问，一方面大部分是从一般的科学里面产生给我们的，一方面可以当作文学作品来欣赏。我们的取材多采多姿，一方面是比较基本的，从自然界或物理上的基本粒子、广义相对论、重力场去拿出很多基本的大自然的问题。这

方面对近代几何学上的影响很大，另一方面可从比较没那么基本的理论里发生出来。所谓不基本，并不是说不重要。我们要了解到我们有些问题是从工业界来的，譬如说做飞机、做螺丝，甚至做流体变动的问题，都是可产生许多有趣的几何问题或是数学问题。例如说机械人手怎么去拿东西？这都可以看做是基本的几何问题，物理学家不一定有兴趣，可是数学家却有很大的兴趣。另外我们也可以对与实际问题不相近的问题产生兴趣，我们对一个图画得漂不漂亮，我们也可以在数学上研究。

几何在数学上的取材有三个不同方向：第一是从基本自然界里产生的问题。从基本粒子、重力场到电磁波基本上如何产生的种种重要几何问题，从表面上你看不出来为什么它跟几何有关，但事实上近代物理将很多这种基本场论的问题变成几何问题，对微分几何来讲有很大的贡献。第二是刚才所讲，工业界与古典力学出了很多很重要的几何问题。第三就是纯粹从美的观点来找问题。举例来讲，从数论里面找了许多很漂亮的问题，尤其是近十或二十年来，大部分重要的数论问题大多是用几何的方法来解决的，这是几何在数学上三个重要的取材方向。

我为什么讲取材的问题呢？**因为很多中学生或大学生在念几何或是某些数学课程的时候，认为我们念那个学科就念那个学科就够了，而不要念其它的学问，这是个很错误的观念。**因为数学里面每一门的学问都有密切关联的，不单是数学，其实所有的理论科学中间都有很密切的关系。例如我们刚刚所讲的，高能物理与数学的关系，或是化学甚至生物都跟数学有很大的关系，所以我想怎么学几何呢？第一点是当你决定好要做一个好的几何学家时，你一定要广泛的学不同的学问，基础要比较广，如微分方程、代数、物理学以及其它学科，至少在心理上有个准备，就是说这些学科将来是对你有帮助的。你听起来会觉得这是很困难的事情，你不可能学会这么多种不同的学问。这主要的分别就是你要有一个层次，你的专科是那一方面，就要多学一点，但不可忘掉其它的学科。有时在某个意义下，我们可以很惊讶的看到同一个学问、同一个命题，在两个不同的学科里面，可以以不同的方法出现，就是说以不同的方法证明。我想主要的原因是根本上这两个学科的分别并不是很大。

在几十年前有个出名的物理学家说数学有不可思议的力量。为什么数学能够在物理上有这么大的影响呢？因为从物理学家的看法，数学家只是在玩一些简单的符号，纯粹是在家里想一些自己的问题，与自然界的关系好像不大，其实这是个错误的想法。我们数学家研究的问题是很具体的，只是有不同的层次，所以有点不同而已。举例来说我们研究微分几何上一个最简单的图形——圆球，这圆球可以说是一个抽象的观念，我们也可以说它是自然界很具体的一部分。也就是说我们将所研究的圆球视为自然界的一部分，其实跟物理的现象差不了太远的。尤其在现代的高能物理里，我们研究基本粒子，尤其到了量子力学的观念以后，因为能量已经到了很高的地步，所以有很多根本没有办法做实验，所以基本上也是在家里或课堂里或办公室里用纸笔来算，这跟数学家想象的差不了太远。假如物理学家可以这么做，表示数学家也能够坐在家里面而对自然界达到某种程度的了

解。

为什么我要讲这些呢？这些与微分几何有什么关系呢？我要讲的是你在选题的时候，我们虽然有个自由度对于选题与自然界无关，但是我们也有一个限度在里面，**假如我们选的问题与现实相差太远，最后我们的命题会被淘汰掉。**在历史上出现很多不同的研究，过了十年、二十年后就完全被淘汰的。你看现在的图书馆里面有许多的文章出现，不过再过个十年八年以后，我想大部分的文章是会被淘汰掉的，根本在整个数学历史上起不了任何作用。这是因为很多的文章实在没有解决问题，其次是对我们研究的对象没有产生任何效果。所以虽然我们数学界不用时间来作证明，可是我们有某种程度的测试。一般来讲，证的很好的数学，二十年或五十年内都可以看到它在现实里出现帮助。我们晓得在这个二十年以来，从前许多不重要的问题，在今日的工程上发生很大的影响。

举例来讲，从前在数论里对于质数的搜查这个问题，这完全是一个无聊的命题。就是说一个很大的数，你怎么将它因子分解得很快。近十多年来，在国防科学上这问题变成一个重要的命题，有许多国防科学家在做这方面的研究，所以说数学上的选题很重要。为什么因子分解很重要呢？表面上看来跟真正的用途好象没有什么关联，可是它是一个很自然的问题，一个很大的整数它怎么分解，很快地，表面上并不重要，但可以帮助我们了解质数的分布情形，所以我说选题是一个很重要的问题。我记得从前我们在做大学生的时候，花了很多功夫去念一些文章与参考书，有些对数学来讲是很无意义的，可是反过来说因为花了很多功夫，所以可以了解到有些问题比较重要，有些问题比较不重要，所以花的功夫并没有白费。

其次我们讲做一个学生应该是怎么一个看法。对于做数学或做微分几何来讲，我觉得研究的气氛很要紧，尤其在中国的环境里，好象是不太容易培养出这种气氛来。假如你旁边的朋友或同学跟你谈的都是其它的问题，譬如说股票涨了或跌了或其它问题，久而久之，你大概对于做学问也没有很大的兴趣，所以培养做学问的态度与你交的朋友、跟的老师的关系很大。如果你们时常讨论学术上的问题，你就不会觉得自己很孤单，能够激励你对数学上有更大的兴趣。假如你自暴自弃，就是说你认为自己不能够在数学上做研究，不能够在数学上达到贡献的话，你永远也达不到，而且同时也影响到你旁边的朋友，使得大家都不能向前走。我们晓得许多出名的数学家甚至在牢里也可以写一些出名的文章，倒不是你永远关在牢里就能做好的文章，是说人在最困难的时候也可以做研究。

除了气氛很重要外，你也需要得到先进的支持，从前我们念中学的时候，念了很多关于做学问的方法，从前觉得很好笑，以后念书念得多了以后就觉得这些很重要，事实上这些是很重要的经验。有句话说“学而不思则罔，思而不学则殆”，你单是学而不想是不行的，你单是想而不学也是不行的，这两句话看起来很简单，其实就是怎么分配你的学习跟思想，这是一个很微妙很重要的问题。一个人无论你多用功多天才，你假如不将前人做过的东西去体验去学习，是不可能做好的。这道理很简单，一个人的智能有限，我们不可能与前面十年、五年所有人做过的

加起来的智能相比，我们要靠前人的经验，要靠他们的启发，才能够向前迈进，虽然有人自夸的讲比他们加起来都行，我不相信这种情形，也没见过这种情形。所以出名的贡献如爱因斯坦、牛顿的贡献，也是在前人的成果方面再向前走一大步或一小步。所以学是一定要的，可是如果你学过这个东西以后而不去思考，不去消化，就算你可以考第一，考一百分，但是你不想是绝对没有用的。我们看过很多出名的天才，十二岁就拿到学士学位，甚至拿了很高分，可是往往我们看不出他以后的成就。为什么很多所谓的天才在以后的科学发展里没有任何的贡献？这是因为他们没有思考，**没有思考在科学上完全不会引起任何的波澜、任何的贡献，对于整个科学完全没有好处。**所以学了以后一定要思考，怎么分配你的学习跟思考就往往要有导师的帮忙或是同学的帮忙。所谓的帮忙并不是说老师跟你讲你应当这么做或应当怎么做，这样往往是没有很大的效果，所以我刚刚讲的气氛很重要。从人家用功的程度或是讲话的态度的启发，或是讲话的时候能够去听，追根出什么东西来，从它而得到很大的帮助。

从前我到柏克莱去念研究所时，我花了很多功夫去听很多不同的科目，有些人觉得很奇怪，为什么我会去听那些课？我觉得这些课对我有好处，过了几十年后我还是觉得有好处。有些课在我去听的当时可能不懂，可是听了还是觉得有好处，因为一个人的脑袋的想法并不是那么简单的，有时候某些东西当时可能不懂，可是慢慢的就能领悟很多东西。

我举例来讲，我做博士论文的时候，我刚好要用到群论的东西，当时我问过许多专家，但是都不懂，我突然想到从前在某一课上听过一个有关这方面的论文，我忘了当时讲什么课，但我记得大概在那里可以找这方面的文章，所以我花了 2 天的时间在图书馆，结果给我找到差不多是我所要的文章。假如当初不去听这门课的话，我完全没有这个机会，所以有时候听一门不懂的课，有很多不同的帮助，所以很多研究生我跟他们讲，你们去听课不一定要懂，你坐在那边总比不坐在那边好，你不坐在那边的话，你完全不可能知道有其它的方法。

我想最后还是你对整个学问有多大兴趣的问题，假如你对这个学问兴趣不大的话，你没办法长年累月的坐在图书馆，坐在办公厅里，或是坐在一个课堂上听课，所以你一定要先决定你对这学问的兴趣有多大，当然做研究还有许多其它方面比较复杂的原因，以后有机会我们再讲下去。我想现在你们在大学的阶段，最要紧的是决定以后你要做什么东西，其它的可能就容易做到了。

有关 Lebesgue 可测的非 Borel 集的一个注记

李超*

使用集合论的工具来说明存在 Lebesuge 可测的非 Borel 集, 或许看起来远比构造单独一个例子来的强大, 因为我们将证明一个奇妙的事实: "**几乎所有的**"可测集均非 Borel 集. 许多文献都提到了类似的集合论论证(如 [6, 2, 4]), 但要么略去了证明, 要么简单的提及"每个集合都能通过有限次或可列次运算得到". 但问题在于, 通过开集出发经过可列次运算得到的集族关于可列并是否真的**封闭**呢?

在这里, 我们将用超限归纳法给出 Borel 集的完整构造, 并计算 Borel 集类的基数. 构造与计算本身并不复杂, 只是需要一系列的准备. 这里将关于所需要的基数运算, 序数, 超限归纳法的内容整理在前两节以保证自包含性. 因此如果熟悉集合论的话, 可以直接跳过前两节的准备而到第 3 节.

1 基数

记 $\operatorname{card} A$ 表示集合 A 的基数, 下面有关基数的结论是我们从 [1] 中熟知的.

定理1 (Schröder-Bernstein). *若 $\operatorname{card} A \le \operatorname{card} B$ 且 $\operatorname{card} B \le \operatorname{card} A$, 则 $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.*

为了计算集合的基数更加方便, 我们可以引入如下自然的基数算术运算.

定义1 (基数的算术运算). 设 A, B 为两个集合且 $A \cap B = \varnothing$, $\kappa = \operatorname{card} A$, $\lambda = \operatorname{card} B$, 则定义

$$\kappa + \lambda := \operatorname{card}(A \cup B),$$
$$\kappa \cdot \lambda := \operatorname{card} A \times B,$$
$$\kappa^{\lambda} := \operatorname{card} A^{B}.$$

其中 $A \times B$ 为 A, B 的 Cartesian 积, A^B 表示由 B 到 A 的所有函数构成的集合.

*基数 61.

容易验证如上的定义是可以定义好的. 如果我们将 n 个元组成的有限集的基数记为 n, 那么定义 1 下, $\mathscr{P}(A)$(集合 A 的幂集)的基数为 $2^{\operatorname{card} A}$ 就有了精确的含义, 同时也可以知道

$$\underbrace{\kappa + \cdots + \kappa}_{n\text{个}} = n \cdot \kappa,$$

可见加法和乘法符合的规则和一般数的运算相差不大, 下面的命题列出了一些基数运算的基本法则.

命题1 (基数的运算法则)**.** *设 κ, λ, μ 为三个基数, 则有:*

1° $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$;

2° $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$;

3° $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$;

4° $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$;

5° $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \mu$;

6° $\kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} = \kappa^{\lambda + \mu}$;

7° $\kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu} = (\kappa \cdot \lambda)^{\mu}$;

8° $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$;

9° 若 $\kappa \leq \lambda$, 则 $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$;

10° 若 $\kappa \leq \lambda$, 则 $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$;

11° 若 $\kappa \leq \lambda$, 则 $\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$;

12° 若 $\kappa \leq \lambda$, 则 $\mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$.

证明. 不难直接构造所需要的双射. □

命题2. *记 $\aleph_0 = \operatorname{card} \mathbb{N}$, $\aleph = \operatorname{card} \mathbb{R}$, 则*

1° $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$;

2° $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$;

3° $\aleph = 2^{\aleph_0}$;

4° $\aleph \cdot \aleph = \aleph$;

5° $\forall 0 < \kappa \leq \aleph$, $\kappa \cdot \aleph = \aleph$;

6° $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

证明. 1°, 2°, 3° 都是我们所熟知的, 对 4°, 由 3°, 1° 及命题 1 知

$$\aleph \cdot \aleph = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{2 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph.$$

对于 5°, 由于 $\kappa \cdot \aleph \leq \aleph \cdot \aleph = \aleph$ 及 $\aleph \leq \kappa \cdot \aleph$, 根据定理 1 可知 $\kappa \cdot \aleph = \aleph$.

对于 6°, 由 2° 及命题 1 可知

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph,$$

即得结论. □

在本节最后给出我们熟知的重要的 Cantor 定理.

定理2 (Cantor)**.** 对任意集合 A, $\operatorname{card} A < 2^{\operatorname{card} A}$.

2 序数

我们简单地介绍一下序数的理论, 序数的一些性质在 Borel 集的构造中起到十分重要的作用.

定义2 (序数)**.** 设 A, B 为两个线性序集, 若存在映射 $f : A \to B$ 为双射且保持序关系, 则称 A 和 B 是**序同构**的(易知是一个等价关系). 我们给 A 所属的序同构集类赋予一个记号 $\operatorname{ord} A$, 称为 A 的**序型**. 如果 A 还是良序集, 则称 $\operatorname{ord} A$ 为一个**序数**.

例2.1. 集合 $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ 可以赋予一个普通的序关系, 对应的序数 $\operatorname{ord} A_n$ 可记为 n. 我们记 $0 = \operatorname{ord} \varnothing$. 对 $\mathbb{N}$ 也赋予普通序关系, 可知 $\mathbb{N}$ 与 A_n 不是序同构的, 对应的序数 $\operatorname{ord} \mathbb{N}$ 记为 ω. 我们还可以给 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$($\infty$ 只是一个记号)定义一个序关系:

$$1 < 2 < 3 < \cdots < \infty,$$

对应的序数记为 $\omega + 1$, 注意此集与 $\mathbb{N}$ 也不是序同构的, 可知 $\omega \neq \omega + 1$. 类似还可以定义 $\mathbb{N} \cup \{\infty, \infty + 1\}$($\infty + 1$ 也只是一个记号) 上的序关系:

$$1 < 2 < 3 < \cdots < \infty < \infty + 1,$$

对应的序数记为 $\omega + 2$ 等等. 还有更多的序数, 例如

$$1 < 2 < 3 \cdots < \infty < \infty + 1 < \cdots < 2 \cdot \infty,$$

对应的序数可记为 $2 \cdot \omega$ 等等. 可见虽然只有一个可数基数 $\aleph_0$, 可数集对应的序数却不只一个.

下面我们要在全体序数中引入序结构, 就像我们对自然数所做的那样.

定义3 (初始段)**.** 设 A 为一个线性序集, 由 x 决定的**初始段** $A_x := \{y \in A \mid y < x\}$.

定义4 (序数的序关系)**.** 设 α, β 为两个序数, 称 $\alpha < \beta$, 若存在 $x \in B$ 使得 A 与 B_x 是序同构的. 称 $\alpha \le \beta$, 若 $\alpha < \beta$ 或 $\alpha = \beta$.

根据选择公理可以证明:

定理3 (序数的序结构)**.** *任意由序数组成的集合在定义 4 下构成线性序集.*

下一个定理看上去是很直观的.

定理4. *设 $\alpha > 0$ 为序数, 令 P_α 为所有小于 α 的序数构成的集合, 则 P_α 为良序集, 且 $\operatorname{ord} P_\alpha = \alpha$.*

证明. 设 A 满足 $\operatorname{ord} A = \alpha$, 构造序同构 $f : P_\alpha \to A$, $\forall \beta < \alpha$ 定义 $f(\beta) = x$, 其中 x 满足 $\operatorname{ord} A_x = \beta$(验证 x 是唯一的!). □

可以知道对任一个基数 κ, 都有序数 α, 使得 $P_\alpha = \kappa$. 因为设集合 A 的基数为 κ, 即 $\operatorname{card} A = \kappa$. 利用良序定理(任一个集均可良序化, 等价于选择公理), 在 A 上定义一个良序, 再由定理 4 即知 $\alpha = \operatorname{ord} A$ 对应的 P_α 满足 $\operatorname{ord} P_\alpha = \alpha = \operatorname{ord} A$, 从而 $\operatorname{card} P_\alpha = \operatorname{card} A = \kappa$. 在某些集合论的书中, 基数甚至就被定义为等势与已知集合的最小序数.

如下结果将在后面反复用到.

定理5. *记 ω_1 为最小的不可数序数(由上面的讨论知其存在性), 则*

1° *若序数 $\alpha < \omega_1$, 则 α 至多可数;*

2° *若序数 $\alpha_n < \omega_1 (\forall n = 1, 2, \ldots)$, 则存在 $\beta < \omega_1$, 使得 $\alpha_n < \beta (\forall n = 1, 2, \ldots)$.*

证明. 对于 1° 由 ω_1 的取法即知; 对于 2°, 令

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{\alpha_n},$$

则由定理 4 可知 P 为可数个可数集的并, 故也是可数集, 从而 $P_{\omega_1} \setminus P \neq \varnothing$, 在其中取一个 β 即可. □

最后, 由于后面构造的过程中牵扯到序数集, 需要使用超限归纳法, 我们也在这里给出其严格叙述. 超限归纳法是数学归纳法向比 $\mathbb{N}$ 更大的良序集合(例如基数或序数)的扩展, 它的证明其实并不需要选择公理(如其常常被误解的), 而如数学归纳法一样只需要良序集的性质，.

定理6 (超限归纳法)**.** *设 A 为一个良序集, $B \subseteq A$, 若 $A_x \subseteq B$ 就有 $x \in B$, 则 $B = A$.*

3 Borel 集的构造

我们首先构造一般的由 $\mathbb{R}$ 的任意包含空集的子集族 $\mathscr{F}_0$ 生成的 σ-代数. 对任意子集族 $\mathscr{F}$, 设 $\mathscr{F}^*$ 表示所有形如

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

的集合所构成的子集族, 其中的 A_n 满足要么 $A_n \in \mathscr{F}$, 要么 $A_n^c \in \mathscr{F}$. 设 ω_1 表示最小的不可数的序数, $\forall \alpha, 0 < \alpha < \omega_1$, 根据定理 4, 我们可用超限归纳法构造 $\mathscr{F}_\alpha$, 即构造

$$\mathscr{F}_\alpha = \left(\bigcup_{0 \le \beta < \alpha} \mathscr{F}_\beta \right)^*.$$

命题3. $\forall \alpha, 0 \le \alpha < \omega_1$, $\mathscr{F}_\alpha$ 如上定义, 令

$$\mathscr{F} = \bigcup_{0 \le \beta < \omega_1} \mathscr{F}_\alpha,$$

则 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}_0$ 生成的 $\mathbb{R}$ 的 σ-代数.

证明. 证明分为几条, 逐一验证定义:

1° $\mathscr{F}_0 \in \mathscr{F}$.

2° 由于 $\varnothing \in \mathscr{F}_0$, 可知

$$\mathbb{R} \in \mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}.$$

3° 若 $A \in \mathscr{F}$, 则必存在 $0 \le \alpha < \omega_1$, 使得 $A \in \mathscr{F}_\alpha$, 从而 $\forall \beta, \alpha < \beta < \omega_1$(由定理 5, 这样的 β 总是存在的),

$$A^c \in (\mathscr{F}_\alpha)^* \subseteq \mathscr{F}_\beta \subseteq \mathscr{F}.$$

4° 设可数个集合 $A_n \in \mathscr{F}$, 则 $\forall n, \exists 0 \le \alpha_n < \omega_1$, 使得 $A_n \in \mathscr{F}_{\alpha_n}$, 根据定理 5, 有 $\beta < \omega_1$, 使得 $\forall n, \alpha_n < \beta$, 于是

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\alpha_n} \right)^* \subseteq \mathscr{F}_\beta \subseteq \mathscr{F}.$$

由此即知 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}_0$ 生成的 $\mathbb{R}$ 的 σ-代数. □

下边我们考虑 $\mathscr{F}_0$ 为所有 $\mathbb{R}$ 上所有开集构成的子集族, 根据命题 3, 此时构造的 $\mathscr{F}$ 即为 Borel 集全体 $\mathscr{B}$.

定理7. $\boxed{\operatorname{card}\mathscr{B}=\aleph}$, *即 Borel 集全体有连续统基数.*

证明. 首先我们使用超限归纳法, 证明 $\forall\alpha, 0\le\alpha<\omega_1$, $\operatorname{card}\mathscr{F}_\alpha\le\aleph$.

1° 对于 $\alpha=0$, 由于 $\mathbb{R}$ 上的开集均为至多可列个开区间的并, 而 $\mathbb{R}$ 上开区间全体的基数为 $\aleph\cdot\aleph=\aleph$(命题 2-4°), 从而(命题 1-5°)

$$\operatorname{card}\mathscr{F}_0\le\aleph\cdot\aleph_0=\aleph.$$

2° 假设 $\forall\beta, 0\le\beta<\alpha$, 都有 $\operatorname{card}\mathscr{F}_\beta\le\aleph$, 则

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{0\le\beta<\alpha}\mathscr{F}_\beta\right)\le\aleph\cdot\aleph_0=\aleph,$$

从而(命题 2-6°)

$$\operatorname{card}\mathscr{F}_\alpha=\operatorname{card}\left(\bigcup_{0\le\beta<\alpha}\mathscr{F}_\beta\right)^*\le\aleph^{\aleph_0}=\aleph.$$

从而由超限归纳法证得 $\forall\alpha, 0\le\alpha<\omega_1$, $\operatorname{card}\mathscr{F}_\alpha\le\aleph$.

设 $\aleph_1$ 为 ω_1 对应的基数, 则由 $\aleph_1\le\aleph$ 及命题 2-4° 最终得到

$$\operatorname{card}\mathscr{B}=\operatorname{card}\bigcup_{0\le\beta<\omega_1}\mathscr{F}_\alpha\le\aleph\cdot\aleph_1=\aleph.$$

另一方面, 显然 $\operatorname{card}\mathscr{F}_0\ge\aleph$(例如考虑开区间族 $\{(-\infty,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$), 故 $\operatorname{card}\mathscr{B}\ge\aleph$, 由定理 2 即知 $\operatorname{card}\mathscr{B}=\aleph$. □

下面我们要转向我们的最初目标, 考虑 Borel 集和 Lebesuge 可测集之间的关系.

定理8. *设 Lebesgue 可测集全体记为 $\mathscr{L}$, 则* $\boxed{\operatorname{card}\mathscr{L}=2^\aleph}$.

证明. 设 C 为零测度的 Cantor 集, 则 $\operatorname{card}C=\aleph$, 且 C 的任一个子集均为可测集(零测集的子集), 故 $\operatorname{card}\mathscr{L}\ge 2^\aleph$. 而另一方面 $\mathbb{R}$ 的子集全体的基数为 $2^\aleph$, 故 $\operatorname{card}\mathscr{L}\le 2^\aleph$, 由定理 2 知 $\operatorname{card}\mathscr{L}=2^\aleph$. □

推论1. *存在 Lebesgue 可测的非 Borel 集.*

证明. 由定理 7, 8 及 1 即知. □

由基数的论证可以知道一个奇妙的事实: “**几乎所有的**” Lebesgue 可测集均非 Borel 集. 尽管构造出哪怕一个可测非 Borel 集都不是那么平凡的一件事.

参考文献

[1] V. A. Zorich 著; 蒋铎等译, *数学分析, 第一卷(第四版)*, 高等教育出版社, 北京, 2006.

[2] G. Klambauer 著; 陈冠初译, *实分析*, 湖南大学出版社, 长沙, 1986.

[3] 耿素云, 屈婉玲编, *集合论导引*, 北京大学出版社, 北京, 1990.

[4] 谢邦杰编著, *超穷数与超穷论法*, 吉林人民出版社, 长春, 1979.

[5] E. Hewitt, K. R. Stromberg 著; 孙广润译, *实分析与抽象分析*, 天津大学出版社, 天津, 1994.

[6] W. Rudin 著; 赵慈庚, 蒋铎译, *数学分析原理*, 机械工业出版社, 北京, 2004.

[7] T. Jech, *Set theory*, Academic Press, New York, 1978.

****

Mathematical Quotations

Oppenheimer, Julius Robert (1904 - 1967)

Today, it is not only that our kings do not know mathematics, but our philosophers do not know mathematics and – to go a step further – our mathematicians do not know mathematics.

Poincaré 群的表示及其物理意义

鲜于中之*

2009 年 4 月

1 前言

如所周知，数学和物理之间存在着奇妙的对应关系。本文试图通过一个例子来展示这种对应在具体问题中是如何实现的。按照 V.Arnold 的观点，即使再抽象的数学也有其直观的背景。本文可以作为这种观点的一个例证。

现代物理学的两大理论基础是相对论与量子力学。按照（狭义）相对论，在任何惯性参考系中，光速 c 不变。如果计入时间一维，则可在 $3+1$ 维时空流形上定义如下度量：

$$\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{1}$$

此即 Minkowski 度规，这是一个伪 Riemann 度规，它使得时空流形成为伪 Riemann 流形。相对论的光速不变原理保证，惯性参考系之间的坐标变换构成此流形的等距同构群。我们知道，如上度规的等距同构群即 Poincaré 群 P，它是 $SO(3,1)$ 群与时空平移群 $T \simeq \mathbb{R}^4$ 的半直积：

$$P = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3,1)\,. \tag{2}$$

另一方面，根据量子力学的基本假设，物理状态构成 Hilbert 空间。而时空对称性在此空间中的具体实现，正是相应的对称群在此空间中的表示。为了将这一表述严格化，我们引入定义：

定义 1 (射线) 在域 F 上的 Hilbert 空间 H 中引入等价关系：

$$x \sim y\,, \qquad 若\ x = \lambda y \qquad 其中\ x, y \in H\,,\ \lambda \in F\,.$$

称由此等价关系所给出的等价类为 H 中的射线。

定义 2 (射线的内积) 设 r 和 s 是 Hilbert 空间 H 中的射线，则它们的内积 $u(r,s)$ 可以定义为：

$$u(r,s) = \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle / \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

其中 $x \in r$, $y \in s$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 H 中的内积。

可以证明，$u(r,s)$ 与 x 和 y 的选取无关。

在此定义的基础上，我们有如下：

*清华大学物理系，xyzz06@mails.tsinghua.edu.cn

定理 1 (Wigner) 设 H 和 H' 是两个复 Hilbert 空间，σ 是从 H 到 H' 的可逆映射，且 σ 及其逆都保持内积。则:

1. H 和 H' 同构。

2. 存在从 H 到 H' 的映射 ϕ，使得在适当选取的基下，ϕ 可以被描述为:

$$x' = \phi(x)\,, \qquad x'_i = r_i f(x_i)\,, \quad i \in I$$

   其中，$r_i \in \mathbb{R}_+$，f 是复数域的自同构，x_i 是 x 在取定基下的分量，I 是基的指标集。

3. 如果进一步要求 σ 是保持射线内积 $u(r,s)$ 不变的映射，则 2 中的函数可被进一步描述为:

$$x' = \phi(x)\,, \qquad x'_i = f(x_i)\,, \quad i \in I$$

   其中 f 或者是恒等映射，或者是取复共轭函数。

4. ϕ 就是满足定理条件的映射 σ。

此定理的证明可见 [2]。在物理上，此定理给出限制：对称群在 Hilbert 空间中保持射线内积的表示必为酉表示或反酉表示。注意到对称群的单位元在 Hilbert 空间中的作用为恒等作用，因此我们需要的表示必为酉表示。

另一方面，我们注意到 $SO(3,1)$ 群同胚于 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$（详见下文），而后者作为 Lie 群是非紧的。我们知道，非紧群一定不存在有限维的酉表示。换言之，我们将要建立的表示空间 H 一定是无穷维表示。以下所用求表示的方法是数学中处理半直积群的经典方法之一：小群法。

以上是一般性的分析。下面介绍 Poincaré 群的结构。其中，平移部分 $\mathbb{R}^4$ 是平庸的。它的四个生成元 $P_\mu\,, (\mu = 0,1,2,3)$ 称为动量，由其生成的群元称为平移。而 $SO(3,1)$ 群的生成元可记作 $J_{\mu\nu}$，称为（广义的）角动量，而由其生成的群元称为转动。

2 平移

首先来看时空平移的作用。将群元表为生成元的指数映射：

$$U(e^{\omega}, \epsilon) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} + i\epsilon_\rho P^\rho}\,, \tag{3}$$

其中 ω 和 ϵ 是无穷小参数。可以写出在纯时空平移变换 $U(1,a)$ 下，有：

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma} = e^{ia_\mu P^\mu}\Psi_{p,\sigma} = e^{ia_\mu p^\mu}\Psi_{p,\sigma}\,. \tag{4}$$

可以用 P_μ 构造 Carsimir 算子（即与 Lie 代数中所有生成元皆对易的算子）$P^\mu P_\mu$。它对态 $\Psi_{p,\sigma}$ 的作用为：

$$P^\mu P_\mu \Psi_{p,\sigma} = p^\mu p_\mu \Psi_{p,\sigma} = M^2 \Psi_{p,\sigma}\,. \tag{5}$$

这里定义了“质量参数”$M \equiv p_\mu p^\mu$，可见质量是作为 Lorentz 不变量 P^2 的取值而被引入的，它与熟知的惯性或引力等概念都无关。

3 转动

我们现在来说明，$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ 仍然是动量算符 P^μ 的本征态：

$$\begin{aligned}P^\mu U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} =& U(\Lambda)[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)]\Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda)[U(\Lambda^{-1})P^\mu U^{-1}(\Lambda^{-1})]\Psi_{p,\sigma} \\ =& U(\Lambda)(\Lambda_\rho^{-1\mu}P^\rho)\Psi_{p,\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}\,.\end{aligned}$$

其中用到了动量算符的 Lorentz 变换性质：

$$U(\Lambda,a)P^\rho U^{-1}(\Lambda,a) = \Lambda_\mu^{\ \rho} P^\mu\,. \tag{6}$$

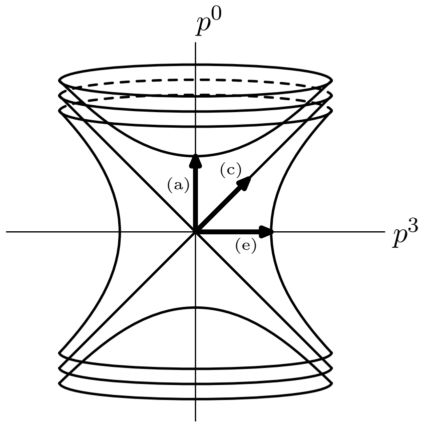
可见 $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ 作为动量算符的本征态，其本征值为 Λp。

另外可证，$p^2 \equiv g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ 和 p^0 的符号 (当 $p^2 \geq 0$ 时) 在 Lorentz 变换下不变，且任何两个具有同样的 p^2 值和 p^0 符号 (当 $p^2 \geq 0$ 时) 的动量必可以通过某个 Lorentz 变换相联系，可用这两个非齐次 Lorentz 变换的不变量标记不同的动量类。在每种动量类中，选出一个参考动量 k^μ 作为代表，则与之同类的动量 p^μ 皆可通过某一 Lorentz 变换 $L(p)$ 得到：$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu$。

下面列出按这种标准得到的态的种类，以及每种类别对应的一种参考动量 k^μ。当然，参考动量的选择在满足要求的前提下应当尽量简单。

		参考动量 k^μ	小群	物理意义
(a)	$p^2 = M^2 > 0\,, p^0 > 0$	$(M,0,0,0)$	$SO(3)$	有质量的正能态
(b)	$p^2 = M^2 > 0\,, p^0 < 0$	$(-M,0,0,0)$	$SO(3)$	有质量的负能态
(c)	$p^2 = 0\,, p^0 > 0$	$(\kappa,0,0,\kappa)$	$ISO(2)$	零质量正能态
(d)	$p^2 = 0\,, p^0 < 0$	$(-\kappa,0,0,\kappa)$	$ISO(2)$	零质量负能态
(e)	$p^2 = -N^2 < 0$	$(0,0,0,N)$	$SO(2,1)$	虚质量态
(f)	$p = 0$	$(0,0,0,0)$	$SO(3,1)$	真空态

按照上面的讨论，可以将 Lorentz 变换在动量空间中形象地表示出来。由于 Lorentz 变换在动量空间中保持 $p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2$ 不变，因此全动量空间可以被 Lorentz 变换划分为若干轨道，如图所示：



在 Lorentz 变换下，每个切片中的动量态跑遍其所在轨道中的每一点。具体而言：

有质量的态的轨道就是图中的双叶双曲面。每一个这样的双叶双曲面对应于一组具有相同质量的态，在 Lorentz 变换下它们可以在一个双曲面内自由运动；这组双曲面分为两叶，说明正的 Lorentz 变换不改变 p^0 的符号，即不会把一叶上的点变到另一叶，因此会有正能态和负能态之分。

无质量的态由图中的锥面表示，与正质量的情形相同，锥面也分为不连通的两叶（原点除外），因此也分为正能态和负能态。

虚质量态（也称为快子态，tachyon）对应于图中的单叶双曲面。显然，由于在 Lorentz 变换下态的动量可以抵达面内的任何点，因此与前两种情形不同，此时 p^0 的符号并不保持不变。

图中同时标示了 (a)、(c)、(e) 三个动量类中的标准动量。下面来研究使这些参考动量保持不变的 Lorentz 变换。不难证明，这样的变换构成群，它就是我们要找的小群。各种参考动量的小群已列在表中。这里只是列出结果，严格证明将在后面给出。不过可以想象，小群的结构与参考动量为零的分量所张空间的结构有关。例如表中的 (a)、(b)、(e) 对应的参考动量都仅有一个分量不为零。在这种情况下，小群就是零分量所张空间的对称群。其中 (a) 的小群更容易从图中看出：保持标准动量 (a) 不变的变换显然就是绕 p^0 轴的所有旋转，所以相应的小群就是 $SO(3)$。

而 (c)、(d) 的参考动量有两个相同或相反的非零分量。这种情况下，除了剩余的二维空间的对称群外，还存在其他保持这个动量不变的 Lorentz 变换，因此相应的小群比 $SO(2)$ 群大一点，是 $ISO(2)$ 群。可惜这个结论目前还没有直观的解释，Wigner 本人也承认这一点是不易想象的。后面我们将用严格的代数方法得到这一结论。

前面已知：$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ 是动量为 Λp 的态，考虑到简并，可以将其写成如下的线性组合：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,. \tag{7}$$

如果我们求出了 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$，就意味着已经找到了 Lorentz 变换齐次部分的表示，因此下面的任务是找出 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ 的结构。讨论的线索是从标准动量 k^μ 开始，再考虑一般动量 p^μ，最后看齐次 Lorentz 变换对动量的作用 Λp。首先，关系 $p^\mu = L^\mu{}_\nu k^\nu$ 在态空间的表达为：

$$U(L(p))\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(L(p), k)\Psi_{p,\sigma'}\,. \tag{8}$$

下面来证明，$C(L(p), k)$ 实际上是对角的矩阵。

为此，利用 $U(L(p))$ 的幺正性，可得：

$$\begin{aligned}
(\Psi_{k,\sigma}, \Psi_{k',\sigma})\delta_{\sigma\sigma'} =& (U(L(p))\Psi_{k,\sigma}, U(L(p))\Psi_{k',\sigma'}) \\
=& \Big(\sum_{\sigma_1} C_{\sigma_1\sigma}(L(p), k)\Psi_{p,\sigma_1}, \sum_{\sigma_1'} C_{\sigma_1'\sigma'}(L(p), k')\Psi_{p',\sigma_1'}\Big) \\
=& \sum_{\sigma_1} C^*_{\sigma_1\sigma}(L(p), k)C_{\sigma_1\sigma'}(L(p), k')(\Psi_{p,\sigma_1}, \Psi_{p',\sigma_1}) \\
=& (\Psi_{p,\sigma}, \Psi_{p',\sigma})\sum_{\sigma_1} C^*_{\sigma_1\sigma}(L(p), k)C_{\sigma_1\sigma'}(L(p), k')\,.
\end{aligned}$$

因此：

$$C^{\dagger}(L(p),k)C(L(p),k) = \frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}I\,. \tag{9}$$

这意味着 $\sqrt{\frac{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}}C(L(p),k)$ 是幺正的矩阵，因此存在可逆的线性变换（实际上也是幺正变换）S，使得 $\sqrt{\frac{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}}S^{-1}C(L(p),k)S$ 成为幺正矩阵的标准形式，即对角元素皆为单位模复数的对角阵 λ：

$$C(L(p),k) = \sqrt{\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}}S\lambda S^{-1}\,. \tag{10}$$

因此，如果用 S 作用于所有的单粒子态，则在所得的这组新的态下，$C(L(p),k)$ 取对角形式：

$$C_{\sigma'\sigma}(L(p),k) = \sqrt{\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}}\lambda_{\sigma}\delta_{\sigma'\sigma}\,. \tag{11}$$

再重新定义态的相角，把 λ_{σ} 吸进态的定义中，可得：

$$C_{\sigma'\sigma}(L(p),k) = \sqrt{\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}}\delta_{\sigma'\sigma}\,. \tag{12}$$

因此：

$$U(L(p))\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'}C_{\sigma'\sigma}(L(p),k)\Psi_{p,\sigma'} = \sqrt{\frac{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}}\Psi_{p,\sigma} \tag{13}$$

同时再定义 $\Psi_{p,\sigma}$ 为：

$$\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Psi_{p,\sigma},\Psi_{p',\sigma})}{(\Psi_{k,\sigma},\Psi_{k',\sigma})}}U(L(p))\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{14}$$

下面再考虑齐次 Lorentz 变换的表示 $U(\Lambda)$ 对一般动量态的作用：

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = N(p)U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} = N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{15}$$

作如此变形，是因为其中 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 恰好是不改变参考动量的变换：

$$[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)]^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu} = [L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)k]^{\mu} = [L^{-1}(\Lambda p)\Lambda p]^{\mu} = k^{\mu}\,. \tag{16}$$

因此 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 就是小群的群元，记之为 $W(\Lambda,p)$，并将其表示记作 $D(W(\Lambda,p))$，则对参考动量态，有：

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}\,. \tag{17}$$

对一般动量态，有：

$$\begin{aligned}U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} =&N(p)U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda,p))\Psi_{k,\sigma} = N(p)U(L(\Lambda p))\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{k,\sigma'}\\ =&\Big(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\Big)\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\end{aligned} \tag{18}$$

可见，计算表示 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$，实际上就是计算出：

$$\Big(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\Big)\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\,.$$

到目前为止，我们已经得到了时空转动的表示：

$$U(\Lambda,0)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,, \tag{19}$$

以及时空平移的表示：

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma} = e^{ia_\mu p^\mu}\Psi_{p,\sigma}\,. \tag{20}$$

使用乘法规则 $U(\Lambda_1,a_1)U(\Lambda_2,a_2)=U(\Lambda_1\Lambda_2,\Lambda_1 a_2+a_1)$ 将它们组合起来，就有：

$$\begin{aligned}U(\Lambda,a)\Psi_{p,\sigma} =&U(1,a)U(\Lambda,0)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))U(1,a)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\\ =&\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}e^{ia_\mu(\Lambda p)^\mu}\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\end{aligned} \tag{21}$$

接下来的步骤，就是找到小群表示 $D(W(\Lambda,p))$ 的具体形式。由于不同参考动量的小群不同，因此需分别讨论。在此，我们还要考察各个参考动量所在的动量类的物理意义。在前面的表中，(b)、(d)、(e) 和 (f) 不在今后的讨论范围。因为：物理上至今尚未发现负能态和虚质量态，而真空态是平庸的（至少看上去是如此），因此不予考虑。这样，需要仔细讨论的就只有 (a)、(c) 两种情况，分别是有质量和无质量的正能态。

在进入具体小群的讨论之间，可以给出量子数 σ 的意义。在我们选取的参考动量中，空间坐标的第 1、2 分量都是零。因而角动量算符 $\mathbf{J}$ 的第三分量 J^3 与动量算符 P^3 对易。

4 有质量的正能态

首先来看有质量的正能态。其参考动量为 $k^\mu=(M,0,0,0)$。将参考动量与任何此类中

的动量 p^μ 联系起来的 Lorentz 变换 $L(p)$ 可以取为：

$$L^i_k(p) = \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k \qquad \text{其中 } \hat{p}_i \equiv \frac{p^i}{|\vec{p}|}\,; \tag{22}$$

$$L^i{}_0(p) = L^0{}_i(p) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{p^i}{M}\,; \tag{23}$$

$$L^0{}_0(p) = \gamma \equiv \frac{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}{M}\,. \tag{24}$$

任何按以上形式给出的 $L(p)$ 均可分解成 $L(p) = R(\hat{p})B(|\vec{p}|)R^{-1}(\hat{p})$。其中，$R(\hat{p})$ 是将 z 轴转到 $\hat{p}$ 方向的的空间转动，而 $B(|\vec{p}|)$ 是沿 z 轴的推进：

$$B(|\vec{p}|) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\gamma^2-1} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{25}$$

三维转动群 $SO(3)$ 的所有不等价不可约的幺正表示可以用一个参数 j 来标记，$j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots$，相应表示 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}$ 的维数为 $2j+1$。其具体形式为：

$$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(e^\Theta) = (e^{\frac{i}{2}\Theta_{ik}J^{(j)}_{ik}})_{\sigma'\sigma}\,; \tag{26}$$

其中 Θ_{ik} 是 $SO(3)$ 的群元，实际上就是三维正交矩阵。而 $J^{(j)}_{ik}$ 是相应的生成元的表示矩阵：

$$-(J^{(j)}_{12})_{\sigma'\sigma} = (J^{(j),3})_{\sigma'\sigma} = \sigma\delta_{\sigma'\sigma}\,; \tag{27}$$

$$-(J^{(j)}_{23} \pm iJ^{(j)}_{31})_{\sigma'\sigma} = (J^{(j),1} \pm iJ^{(j),2})_{\sigma'\sigma} = \delta_{\sigma',\sigma\pm1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)} \tag{28}$$

其中 $\sigma = j, j-1, \cdots, -j+1, -j$。任何 $SO(3)$ 的表示都等价于某些不可约幺正表示的直和。我们称 j 为自旋。这些结果都是熟知的，但为了保持完整性，我们仍然简要给出对这个结果的推导：

根据角动量算符的对易关系，$[J^3, \mathbf{J}^2] = 0$，因此可以选择 $\mathbf{J}$ 和 J^3 的共同本征态，对应的本征值分别为 λ 和 σ。记这个态为 $\Psi_{\lambda,\sigma}$。

构造新的算符：$J_\pm = J^1 \pm iJ^2$，考察它们对 $\Psi_{\lambda,\sigma}$ 的作用。

$$J^3J_+\Phi_{\lambda,\sigma} = (J_+J^3 + J_+)\Phi_{\lambda,\sigma} = (\sigma+1)J_+\Phi_{\lambda,\sigma} \tag{29}$$

$$J^3J_-\Phi_{\lambda,\sigma} = (J_-J^3 - J_-)\Phi_{\lambda,\sigma} = (\sigma-1)J_+\Phi_{\lambda,\sigma}\,, \tag{30}$$

$$\mathbf{J}J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma} = J_\pm J^2\Phi_{\lambda,\sigma} = \lambda J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}\,. \tag{31}$$

由此得：

$$J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma} = C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}\,. \tag{32}$$

由归一化计算系数 $C_\pm$：

$$|C_\pm(\lambda,\sigma)|^2 = (C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}, C_\pm(\lambda,\sigma)\Phi_{\lambda,\sigma\pm1}) = (J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}, J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma}) = (\Phi_{\lambda,\sigma}, J_\mp J_\pm\Phi_{\lambda,\sigma})$$

因此：

$$C_{\pm}(\lambda,\sigma) = \sqrt{\lambda - \sigma(\sigma \pm 1)}\,. \tag{33}$$

即：

$$J_{\pm}\Phi_{\lambda,\sigma} = \sqrt{\lambda - \sigma(\sigma \pm 1)}\Phi_{\lambda,\sigma\pm 1}\,. \tag{34}$$

进一步利用

$$\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 = \frac{1}{2}(J_-^{\dagger}J_- + J_+^{\dagger}J_+)\,, \tag{35}$$

可得：

$$\lambda - \sigma^2 = (\lambda - \sigma^2)(\Phi_{\lambda,\sigma}, \Phi_{\lambda,\sigma}) = (\Phi_{\lambda,\sigma}, [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2]\Phi_{\lambda,\sigma}) = \frac{1}{2}(\Phi_{\lambda,\sigma}, [J_-^{\dagger}J_- + J_+^{\dagger}J_+]\Phi_{\lambda,\sigma}) \geq 0$$

它意味着 σ 有上限和下限值, 设此上限值为 j, 下限值为 j', 则 $J_+\Phi_{\lambda,j} = 0$,$J_-\Phi_{\lambda,j'} = 0$。

$$\begin{aligned} 0 =& J_-J_+\Phi_{\lambda,j} = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 - J^3]\Phi_{\lambda,j} = [\lambda - j(j+1)]\Phi_{\lambda,j} && (36)\\ 0 =& J_+J_-\Phi_{\lambda,j'} = [\mathbf{J}^2 - (J^3)^2 + J^3]\Phi_{\lambda,j'} = [\lambda - j'(j'-1)]\Phi_{\lambda,j'} && (37) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = j(j+1) = j'(j'-1)\,. \tag{38}$$

j' 可解出为 $j' = -j$ 或 $j' = j+1$;$j' = j+1$ 显然是没意义的。因此 σ 的取值范围为 $-j \leq \sigma \leq j$。同时要求这个变化范围 $j - (-j)$ 为整数，因此 j 只可能为整数或半整数。

总结以上结果，我们得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2\Phi_{j(j+1),\sigma} =& j(j+1)\Phi_{j,\sigma} && (39)\\ J^3\Phi_{j(j+1),\sigma} =& \sigma\Phi_{j(j+1),\sigma} && (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{\pm})^j_{\sigma',\sigma} \equiv& (\Phi_{j(j+1),\sigma'}, J_{\pm}\Phi_{j(j+1),\sigma}) = C_{\pm}(j(j+1),\sigma)(\Phi_{j(j+1),\sigma'}, \Phi_{j(j+1),\sigma\pm 1})\\ =& \sqrt{j(j+1) - \sigma(\sigma \pm 1)}\delta_{\sigma',\sigma\pm 1} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\delta_{\sigma',\sigma\pm 1} && (41)\\ (J^3)^j_{\sigma',\sigma} \equiv& (\Phi_{j(j+1),\sigma'}, J^3\Phi_{j(j+1),\sigma}) = \sigma(\Phi_{j(j+1),\sigma'}, \Phi_{j(j+1),\sigma}) = \sigma\delta_{\sigma',\sigma} && (42) \end{aligned}$$

由以上的讨论可知，有质量的正能单粒子态只能用 j 标记，因为 j 在 Lorentz 变换下不变，这对 σ 而言是不成立的。

5 无质量的正能态

无质量正能态的标准动量可取为 $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$。现在我们来找使它保持不变的 Lorentz 变换。前面已经提到，一切困难来源于 k^μ 有两个不为零的分量。然而我们可以通过坐标变换使得 k^μ 只剩一个不为零的分量。具体的做法就是引入光锥坐标系（light-cone coordinates）：

$$x^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 \pm x^0)\,. \tag{43}$$

而 x^1 和 x^2 保持不变。这样一来，标准动量就只剩下 k^- 分量不为零，其余分量皆为零。如果按 (x^+, x^2, x^3, x^-) 的顺序排列坐标，则使 $k^\mu = (0,0,0,\tilde{\kappa})$ 保持不变的坐标变换的一般形式为：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix} . \tag{44}$$

然而 Λ 作为 Lorentz 变换，须满足 $\Lambda g \Lambda^T = g$。注意到，度规在光锥坐标系下的矩阵为：

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{45}$$

由此给出 Λ 中各元素须满足的限制：

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = a_{13} = 0, \tag{46}$$

$$a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \qquad a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \qquad a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0\,, \tag{47}$$

$$a_{21} + a_{22}a_{42} + a_{23}a_{43} = 0, \qquad a_{31} + a_{32}a_{42} + a_{33}a_{43} = 0, \qquad 2a_{41} + a_{42}^2 + a_{43}^2 = 0\,. \tag{48}$$

由 (47) 诸式，可取 $a_{22} = a_{33} = \cos\theta$，$a_{23} = -a_{32} = \sin\theta$。而由 (48) 各式的限制，除了 θ 之外的自由变量只剩两个，不妨取之为 $\xi_1 = a_{42}$、$\xi_2 = a_{43}$。如此，则可得 $\Lambda(\xi,\theta)$，$\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 的一般形式：

$$\Lambda(\xi_1,\xi_2,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_1\cos\theta - \xi_2\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \xi_1\sin\theta - \xi_2\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -(\xi_1^2+\xi_2^2)/2 & \xi_1 & \xi_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

由此不难验证：

$$\Lambda(\xi,0)\Lambda(\bar{\xi},0) = \Lambda(\xi+\bar{\xi},0)\,. \tag{50}$$

$$\Lambda(0,\theta)\Lambda(0,\bar{\theta}) = \Lambda(0,\theta+\bar{\theta})\,. \tag{51}$$

$$\Lambda(\xi,\theta)\Lambda(\bar{\xi},\bar{\theta}) = \Lambda(R(\theta)\bar{\xi}+\xi,\theta+\bar{\theta})\,. \tag{52}$$

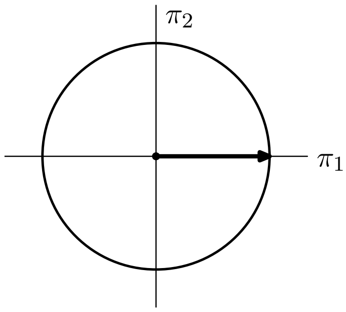
而以上三式说明，保持标准动量 k^μ 不变的 Lorentz 变换构成三参数群：$ISO(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$，即平面上的平移和旋转构成的群。其中 $\mathbb{R}^2$ 的两个参数对应于平移，$SO(2)$ 表示平面上的旋转。然而，这里的平面并非真实空间中的某个平面。前面已经说过，这个群在真实空间中没有很直观的对应。

现已证明，无质量正能态对应的小群是 $ISO(2)$ 群。下面求它的表示。由于 $ISO(2)$ 的结构和 Poincaré 群 $ISO(3,1)$ 几乎相同，因此可再次使用小群法。

定义群参数 ξ_1、ξ_2、θ 对应的生成元分别是 π_1、π_2、M。它们可以被分别解释成平面上的“动量”算符和“角动量”算子。由前面的群乘法规则可以写出生成元间的对易关系：

$$[\pi_1,\pi_2] = 0\,, \qquad [M,\pi_1] = i\pi_2\,, \qquad [M,\pi_2] = -i\pi_1\,. \tag{53}$$

仍然选取 π_1 和 π_2 的本征态作为表示基。在小群的作用下 $(\pi^1)^2+(\pi^2)^2$ 保持不变。则在现在的二维“动量”空间中，小群 $ISO(2)$ 的子群 $SO(2)$ 的轨道就是以原点为圆心的同心圆，以及原点：



任何不为零的“动量” $\pi=(\pi_1,\pi_2)$ 在 Lorentz 变换下都能转到“轨道”圆上的任何一点。故“动量”本征态在 M 的作用下可取任何本征值 θ。由于物理上未观察到这样的连续自由度，因此可以认为真实的物理对应于 $\pi=0$ 的情形。于是就只剩下 θ 一个自由度。回到普通坐标系，它恰对应于绕 x^3 轴的转动。因此，无质量正能态的唯一标记就是角动量在动量方向上的投影，或称为螺旋度 (helicity)。由此，可得：

$$U(W)\Psi_{k,\sigma}=e^{i\theta\sigma}\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{54}$$

或者：

$$D_{\sigma'\sigma}(W)=e^{i\theta\sigma}\delta_{\sigma'\sigma}\,. \tag{55}$$

接下来，我们研究 Poincaré 群的拓扑性质。它的一个重要结果是无质量正能态的螺旋度取分立的值。

首先，任何矢量 V^μ 都按如下规则对应于一个 2×2 的 Hermitian 矩阵：

$$V^\mu\to V^\mu\sigma_\mu=\begin{pmatrix}V^0+V^3 & V^1-iV^2\\ V^1+iV^2 & V^0-V^3\end{pmatrix}\equiv\nu\,. \tag{56}$$

注意到，$\det\nu=V^\mu V_\mu$，因此 Lorentz 变换在这种对应下表现为保持 ν 的行列式不变的变换。事实上，对任何行列式为 1 的 2×2 阶复矩阵 λ，$\det(\lambda\nu\lambda^\dagger)=\det\nu$ 并且 $\lambda\nu\lambda^\dagger$ 仍然是 Hermitian 矩阵。因此全体行列式为 1 的 2×2 阶复矩阵 $SL(2,\mathbb{C})$ 对应于全体齐次 Lorentz 变换 $SO(3,1)$。但是这个对应不是一一对应，因为容易验证 λ 和 $-\lambda$ 对应于同一个 Lorentz 变换。可以证明，在抹去这个“二对一”的条件下它们构成一一对应。因此可以写：$SO(3,1)\cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$。于是，可以通过研究 $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ 的拓扑结构来得到 $SO(3,1)$ 的拓扑结构。

对任何 $\lambda\in SL(2,\mathbb{C})$，可以将之写为 $\lambda=ue^h$，其中 u 是行列式为 1 的矩阵，h 是零迹的 Hermitian 矩阵：

$$u=\begin{pmatrix}d+ie & f+ig\\ -f+ig & d-ie\end{pmatrix}\,,\qquad d^2+e^2+f^2+g^2=1\,. \tag{57}$$

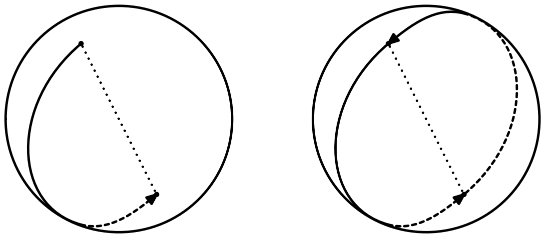
因此 u 的拓扑结构为 S_3，即三维球面。

$$h=\begin{pmatrix}c & a-ib\\ a+ib & -c\end{pmatrix}\,. \tag{58}$$

a, b, c 可取任意值，因此 h 对应的拓扑结构为 $\mathbb{R}^3$，是平庸的。

最后考虑到平移部分的拓扑 $\mathbb{R}^4$，可知 Poincaré 群的拓扑结构为 $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \times S_3/\mathbb{Z}_2$。其中只有 $S_3/\mathbb{Z}_2$ 具有非平凡的拓扑结构，即双连通性。亦即，它以 $\mathbb{Z}_2$ 为基本群。

我们用 $S_2/\mathbb{Z}_2$ 图示这个性质：



由于对径点被视作等同，因此左图的路径当然是一条闭合路径。显见它不能在球面内连续地缩成一点。但如果我们绕其两周，再次利用对径点等同的性质，可以将第二周转移到第一周的对径点上，从而绕两周的双圈变成了球面内的一条闭路。如右图所示，显然，它可以在球面内连续缩到一点。

为了解释非平凡的拓扑性质如何影响表示的行为，需要了解表示建立的方法。此处需要用到较多的数学。这里只作简述，而不过分追求数学的严格性。

对于任何以 θ 标记的群元素 $g(\theta)$，可以建立一条连接单位元 $e = g(0)$ 与 $g(\theta)$ 的路径 p。我们定义单位元的表示 $U(e)$ 就是单位映射，则 $g(\theta)$ 的表示可以通过单位元的表示沿着路径 p 的某种连续平移得到。如果群流形是单连通的，则连接单位元 e 与群元 $g(\theta)$ 的任何两条路径都同伦。但是，如果此群存在非平庸的基本群，则群上的所有路径将被分成若干道路（同伦）类。因此，如果从单位元 e 到 $g(\theta)$ 的两条路径 p_1 和 p_2 属于两个不同的道路类，则沿这两条道路得到的 $g(\theta)$ 的两个表示将相差一个相因子。这就是所谓投影表示（相差相因子的表示）的拓扑起源。事实上，投影表示的相因子本身形成了基本群的一维表示。

前面提到，双连通群的基本群就是 $\mathbb{Z}_2$，而 $\mathbb{Z}_2$ 的一维表示就是 ± 1。因此对于我们的 Lorentz 群而言，投影表示就是相差一个符号的表示。另一方面，双连通群中的任意双圈可缩为 1，即同伦于 0，因此按双圈平移的表示不含相因子。特别地，绕第三轴转 4π 的转动等于单位元。于是有 $e^{4i\pi\sigma} = 1$。因此，σ 只能取整数和半整数的值。

最后，我们来总结关于有质量与无质量的正能态的主要结果。

- 有质量的正能态的角动量第三分量 σ 在 Lorentz 变换下将发生变化，对于 $2j+1$ 维表示，一共有 $2j+1$ 个分量。这意味着这 $2j+1$ 个分量表示同一个单粒子态。

- 对于无质量正能态，角动量第三分量，亦即螺旋度，是 Lorentz 不变的。这意味着每个无质量正能态只有一种可能的态。但是正如我们将在后面看到的，空间反射会将螺旋度 σ 变成 $-\sigma$。如果我们认为能够通过空间反射联系起来的两个态也表示同一个单粒子态，则无质量的正能态至多有两个态，它们的螺旋度分别取 σ 和 $-\sigma$。

- 因此，对于自旋 0 和 1/2 的单粒子态，有质量与无质量的态的个数一样，但对于自旋 1 以及更高的单粒子态，有质量态的个数将超过无质量态。这一现象暗示，当我们研究无质量态时，将有质量态的结果取零质量极限的方法对于自旋 0 与 1/2 的粒子态也许成立，但对自旋为 1 以及更高的粒子态是有问题的。因为这一极限过程伴随着自由度的减少。如果我们希望自由度在零质量极限下变少，就需要某种对称性

以保证多余的自由度不能被观测到。这种对称性就是规范对称性。从另一方面看，如果自旋为 1 或更高的无质量态存在，则规范对称性的破坏必与质量有关，而与其它相互作用无关。

References

[1] 鲜于中之：《Seminar(1) 课程报告》，Chapter 2.

[2] S.Weinberg: *The quantum theory of fields*, Vol.1, Cambrige, 2002

****

Mathematical Quotation

Poincaré, Jules Henri (1854-1912)

Mathematics is the art of giving the same name to different things.

数学趣闻

Schwartz,Laurent 的岳父是 Levy,Paul，一个干瘪的法国老头，是 Hadamard 的学生。Functional analysis 这个词就是他最先引进的。有一次 Schwartz 问他是否知道 Lebesgue's theorem of density 的简单证明。”我见到过几个，但是现在都记不得了，不过我可以想一下找出一个证明。”半个小时以后，他给出了一个漂亮简洁的证明。6 个月后，当 Schwartz 再次向他提到这个证明时，他却说，”啊！多么好的想法！我从未想到过这个。”当 Schwartz 告诉他这就是他 6 个月前发现的证明，Levy 根本不相信。

一道数学分析习题的解答讨论和推广

张野平　王竹海

命题 1

设α是一个无理数

定义函数$T_\alpha:[0,1)\to[0,1)$如下 $T_\alpha(x)=\{x+\alpha\}$ （其中$\{.\}$表示取小数部分）

设$E\subseteq[0,1)$是一个区间

则$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}card\{n\,|\,0\le n<N,T_\alpha^n(0)\in E\}=length(E)$

引理 1

对于$\delta>0$，记$A_\delta(t)=\{k\cdot\delta+t\,|\,k\in Z,0\le k\cdot\delta+t<1\}$，

则对于任意区间$E\subseteq[0,1)$，当δ趋于 0 时，$\frac{card(E\cap A_\delta(t))}{cardA_\delta(t)}$一致收敛于 $length(E)$

证明：

这里构造的集合$A_\delta(t)$可以表示为更加直观的形式

$$A_\delta(t)=(t+\delta\cdot Z)\cap[0,1)$$

易证

$$(cardA_\delta(t)+1)\cdot\delta\ge1$$

$$(cardA_\delta(t)-1)\cdot\delta\le1$$

$$(card(A_\delta(t)\cap E)+1)\cdot\delta\ge length(E)$$

$$(card(A_\delta(t)\cap E)-1)\cdot\delta\le length(E)$$

因此

$$\frac{length(E)-\delta}{1+\delta}=\frac{length(E)\cdot\delta^{-1}-1}{\delta^{-1}+1}\le\frac{card(E\cap A_\delta(t))}{cardA_\delta(t)}\le\frac{length(E)\cdot\delta^{-1}+1}{\delta^{-1}-1}=\frac{length(E)+\delta}{1-\delta}$$

令 δ 趋于 0 即可
引理证毕

引理 2
如果 α 是一个无理数，

则 $\forall\tau > 0 \exists m \in N$ s. t. $T_\alpha^m(0) < \tau$

证明略

命题 1 的证明:

为简便，记 $T_\alpha^n(0) = a_n$，记 $S_n = \{a_i \mid 0 \le i < n\}$

对于任意 $\varepsilon > 0$

根据 Lemma1，存在 $\tau > 0$，使得对任意 $\delta \in (0,\tau)$，对于任意 $t \in R$ 有

$$\left|\frac{card(E \cap A_\delta(t))}{cardA_\delta(t)} - length(E)\right| < \varepsilon / 2 \qquad (1)$$

又由 Lemma2，存在 $m \in N$，使得 $a_m < \tau$

构造 S_n 的划分 $S_n = \bigcup_{j=0}^{m-1} T_{n,j}$，其中 $T_{n,j} = \{a_t \in S_n \mid t \equiv j (\mathrm{mod}\, m)\}$

则 $$\frac{card(E \cap S_n)}{cardS_n} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{cardT_{n,j}}{cardS_n} \cdot \frac{card(T_{n,j} \cap E)}{cardT_{n,j}} \qquad (2)$$

固定 j，$T_{n,j}$ 是这样一个有限长数列中所有元素的集合，该数列中相邻两个元素在模 1 的意义下相距 a_m。因此，可以将 $T_{n,j}$ 划分成一族形如 $A_{a_m}(t)$ 的集合和一个元素个数不超过 $2(1+1/a_m)$ 的集合。记这些集合为 $A_{a_m}(t_s)$ （$1 \le s \le l$）和 B
并且有

$$cardT_{n,j} = cardB + \sum_{s=1}^{l} cardA_{a_m}(t_s)$$

$$cardB \le 2(1+1/a_m)$$

那么

$$\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}=\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+\sum_{s=1}^{l}\frac{cardA_{a_m}(t_s)}{cardT_{n,j}}\cdot\frac{card(A_{a_m}(t_s)\cap E)}{cardA_{a_m}(t_s)} \qquad (3)$$

根据（1）

$$\left|\frac{card(A_{a_m}(t_s)\cap E)}{cardA_{a_m}(t_s)}-length(E)\right|<\varepsilon/2$$

将该结果代入（3），得

$$\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}\le\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+\sum_{s=1}^{l}\frac{cardA_{a_m}(t_s)}{cardT_{n,j}}\cdot(length(E)+\varepsilon/2)$$

注意到$\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+\sum_{s=1}^{l}\frac{cardA_{a_m}(t_s)}{cardT_{n,j}}=1$，有

$$\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}\le\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+(1-\frac{cardB}{cardT_{n,j}})\cdot(length(E)+\varepsilon/2) \qquad (4)$$

同理

$$\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}\ge\frac{cardB}{cardT_{n,j}}+(1-\frac{cardB}{cardT_{n,j}})\cdot(length(E)-\varepsilon/2) \qquad (5)$$

由（4）（5），存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时，$\left|\frac{card(T_{n,j}\cap E)}{cardT_{n,j}}-length(E)\right|<\varepsilon$

结合上式和（2）式，知

存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时，$\left|\frac{card(E\cap S_n)}{cardS_n}-length(E)\right|<\varepsilon$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{card(E\cap S_n)}{cardS_n}=length(E)$

也就是说 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}card\{n\,|\,0\le n<N,T_{\alpha}^{n}(0)\in E\}=length(E)$

证毕

这个命题的最终结论可以用另一种方式表示

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\chi_E(T_\alpha^k(0))=\int_0^1\chi_E(x)dx$$

其中 χ_E 是区间 E 的特征函数

这种表达形式具有更鲜明的意义，它将函数的积分和函数在一个序列上的平均值建立了联系。

由于极限和积分都具有线性性，我们可以用 χ_E 线性地表示出任意的阶梯函数，也就是下述命题

命题 2

设 α 是一个无理数

定义函数 $T_\alpha:[0,1)\to[0,1)$ 如下 $T_\alpha(x)=\{x+\alpha\}$

函数 φ 是定义在区间 $[0,1)$ 上的阶梯函数，那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(T_\alpha^k(0))=\int_0^1\varphi(x)dx$$

证明略

注意到阶梯函数可以单调地逼近黎曼可积函数（这里说的逼近是在 1-范数的意义下），命题可以被推广到更加一般的形式

命题 3

设 α 是一个无理数

定义函数 $T_\alpha:[0,1)\to[0,1)$ 如下 $T_\alpha(x)=\{x+\alpha\}$

函数 f 是定义在区间 $[0,1)$ 上的黎曼可积函数，那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(T_\alpha^k(0))=\int_0^1 f(x)dx$$

证明：

根据黎曼可积函数的定义，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在区间 $[0,1)$ 的一个分划 P，使得 $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$ （6）

其中$S(f,P)$和$s(f,P)$分别是函数对于分划P的达布上和与达布下和，具体得说，

如果设分划P为$(x_k)_{1\le k\le m}$

那么

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{m}\sup_{\tau\in[x_{k-1},x_k]}f(\tau)\cdot|x_k-x_{k-1}|$$

$$s(f,P)=\sum_{k=1}^{m}\inf_{\tau\in[x_{k-1},x_k]}f(\tau)\cdot|x_k-x_{k-1}|$$

构造阶梯函数ϕ和φ，使得ϕ在$[x_{k-1,}x_k)$上取值$\sup\limits_{\tau\in[x_{k-1},x_k]}f(\tau)$，$\varphi$在$[x_{k-1,}x_k)$上取值

$\inf\limits_{\tau\in[x_{k-1},x_k]}f(\tau)$

显然有$\varphi\le f\le\phi$　　　　　　　　（7）

并且

$$S(f,P)=\int_0^1\phi(x)dx \qquad (8)$$

$$s(f,P)=\int_0^1\varphi(x)dx \qquad (9)$$

由于ϕ和φ都可以表示为有限个区间的特征函数的线性组合，应用 Proposition

2

可得

$$\int_0^1\phi(x)dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(T_\alpha^k(0)) \qquad (10)$$

$$\int_0^1\varphi(x)dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(T_\alpha^k(0)) \qquad (11)$$

由（6）（8）（9）（10）（11）

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(T_\alpha^k(0))-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(T_\alpha^k(0))<\varepsilon$$

再根据（7），对于任意的 N

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(T_\alpha^k(0)) \le \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(0)) \le \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi(T_\alpha^k(0))$$

因此 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(0))$ 存在，并且 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(0)) = \int_0^1 f(x)dx$

证毕

事实上，遍历理论中 Birkhoff 定理与该命题有一定的联系，Birkhoff 定理中包含如下陈述:

如果(X,B,μ,T)是一个遍历的可测动力系统，那么对任意的 $\phi \in L^1(X,B,\mu)$ 序列 $\frac{1}{n}S_n\phi = \frac{1}{n}(\phi + \phi\circ T + \cdots + \phi\circ T^{n-1})$ 收敛到 $\int_X \phi d\mu$ （μ-几乎处处）

将该定理直接应用到本文讨论的问题，将得到如下命题

命题 4

设 α 是一个无理数

定义函数 $T_\alpha:[0,1)\to[0,1)$ 如下 $T_\alpha(x)=\{x+\alpha\}$

函数 f 是定义在区间 $[0,1)$ 上的勒贝格可积函数，那么对于几乎所有的 $t\in[0,1)$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(t)) = \int_0^1 f(x)dx$$

注意比较命题 3 和命题 4 的异同，由于在命题 3 的证明中没有任何一处利用了 0 点的特殊性，将命题 3 的证明稍加修改，就可以证明，对于黎曼可积分的 f，性质 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(t)) = \int_0^1 f(x)dx$，对于所有的 $t\in[0,1)$ 成立。

我们不能加强命题 4 的结论使之包含命题 3。反例是容易构造的：构造区间 $[0,1)$ 上的勒贝格可积函数 f，使得 f 在集合 $S=\{T_\alpha^n(0)\,|\,n\in N\}$ 上取值 1，在 S 外取值为零，S 是可数集，因此 $f=0$ $a.e.$，但是 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T_\alpha^k(0)) = 1$

测度论中的若干覆盖定理

喻伟

§1　测度的预备知识

§1.1　一般集合上的测度

称$(X, \mathcal{A}, \mu)$是一个可测空间，μ是X上的一个测度，如果：

1) μ的定义域$\mathcal{A}$是一个σ-代数。

2) $\mu \geq 0$在$\mathcal{A}$上成立。

3) μ具有可数可加性。

4) $\mu(E) < \infty$对于某个$E \in \mathcal{A}$成立。

§1.2　R^N上的Borel测度

称R^N上的测度μ为*Borel*测度，如果它的定义域（即上面的σ代数$\mathcal{A}$)包含了R^N上的*Borel*集，从而*Lebesgue*测度和计数测度都是*Borel*测度。[1]。

§1.3　R^N上的Radon测度

如果一个*Borel*测度在R^N的紧集上的测度是有限的，那么称这个测度为Radon测度。

显然，*Lebesgue*测度是*Radon*测度，而计数测度不是。

§1.4　由已知测度诱导的外测度

设μ是R^N上的测度，对任意的$E \subset R^N$，定义：

$$\mu_e(E) = inf\{\mu(O) | E \subset O,\ O\text{是}R^N\text{中的开集}\}.$$

不难验证，这样定义的外测度具有单调性和次可加性。

[1]与$\mathbb{R}$中的情况类似，R^N中的*Borel*集合指包含R^N中所有开集的最小σ代数。

§2 I型Vitali覆盖

§2.1 覆盖的定义

设$E \subset R^N$可测且测度有限[2]，$\mathcal{F}$是R^N中的一些方体组成的集族，每个方体的边界都是平行于坐标轴的。如果$\mathcal{F}$中方体的并包含了集合E，那么我们称集族$\mathcal{F}$是集合E的I型$Vitali$覆盖。值得注意的是，组成$\mathcal{F}$ 的方体并不要求是开的或者闭的。

§2.2 I型Vitali覆盖定理

设集合$E \subset R^N$的测度有限，$\mathcal{F}$是E的I型Vitali覆盖，那么，我们可以从$\mathcal{F}$中选出两两不交的可列个方体$\{Q_n\}$，使得$\frac{\mu(E)}{5^N} \leq \sum \mu(Q_n)$。

证明 记$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$，令：$2p_1 = sup\{l(Q)|Q \in \mathcal{F}_1\}$[3] 如果$p_1 = \infty$，那么就可以找到边长足够大的方体$Q$，使得$\mu(Q) \geq \frac{\mu(E)}{5^N}$，工作到此结束；如果$p_1 < \infty$，从$\mathcal{F}_1$中选出方体$Q_1$，使得其边长$l_1 > p_1$，同时把$\mathcal{F}_1$分成两个集合：

$$\mathcal{F}_2 = \{Q \in \mathcal{F}_1 | Q \bigcap Q_1 = \phi\};\ \mathcal{F}_2^{'} = \{Q \in \mathcal{F}_1 | Q \bigcap Q_1 \neq \phi\}.$$

记$Q_1^{'}$是与Q_1同心，边长为$5l_1$的方体，从而，由这个构造可知：$\bigcup\{Q|Q \in \mathcal{F}_2^{'}\} \subset Q_1^{'}$。如果$\mathcal{F}_2$是空集，那么$E \subset Q_1^{'}$，并且$\frac{\mu(E)}{5^N} \leq \mu Q_1^{'}$。

如果$\mathcal{F}_2$不是空集，令：$2p_2 = sup\{l(Q)|Q \in \mathcal{F}_2\}$。从$\mathcal{F}_2$中选出方体$Q_2$，使得其边长$l_2 > p_2$，同时可以将$\mathcal{F}_2$分成两个集族$\mathcal{F}_3$和$\mathcal{F}_3^{'}$。归纳的选择下去，我们得到：

$$\mathcal{F}_n = \{Q \in \mathcal{F}_{n-1} | Q \bigcap Q_{n-1} = \phi\},$$

以及

$$2p_n = sup\{l(Q)|Q \in \mathcal{F}_n\},$$

其中Q_n是从$\mathcal{F}_n$中选出的边长$l_n > p_n$的方体，$Q_n^{'}$是与Q_n同心且边长为$5l_n$的方体。

如果$\mathcal{F}_{n+1}$对于某个$n \in \mathbb{N}$是空集，那么$E \subset \bigcup_{i=1}^n Q_i^{'}$，并且$\frac{\mu(E)}{5^N} \leq \sum_{j=1}^n \mu(Q_j)$。

如果对于任意的$n \in \mathbb{N}$，都有$\mathcal{F}_n$不空，那么考虑级数$\sum \mu(Q_n)$，如果它发散，命题显然成立；如果它收敛，那么必有$p_n \to 0, n \to \infty$。在这种情形下，可以断言，每个$Q \in \mathcal{F}$属于某个Q_n,（否则它将属于每一个$\mathcal{F}_n$，从而导致其边长为0），故有$E \subset \bigcup Q_n^{'}$，并且$\mu(E) \leq \sum \mu(Q_n^{'}) = 5^N \sum \mu(Q_n)$。

[2]这里的测度指Lebesgue测度

[3]$l(Q)$指方体的边长

§2.3 推论

在定理条件被满足的情况下，对任意的$\varepsilon > 0$，可以找到$\mathcal{F}$中两两不交的有限个方体$\{Q_i, 1 \le i \le m\}$，使得

$$\frac{\mu(E)}{5^N} - \varepsilon \le \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j).$$

§3 II型$Vitali$覆盖

§3.1 覆盖的定义

称R^N中的非平凡闭方体集族$\mathcal{F}$是集合$E \subset R^N$的II型$Vitali$覆盖，如果对于任意的$x \in E$和任意的$\varepsilon > 0$，都存在一个方体$Q \in \mathcal{F}$，使得$x \in Q$并且$D(Q) < \varepsilon$，其中$D(Q)$表示方体Q的直径。

§3.2 II型$Vitali$覆盖定理

设E是R^N中的有界集合，$\mathcal{F}$是它的II型$Vitali$覆盖，那么存在$\mathcal{F}$中的可列多个方体$\{Q_n\}$，它们两两不内交（即至多边界相交），并且$\mu^*(E - \bigcup Q_n) = 0$，其中$\mu^*$为$Lebesgue$外测度。

思路 与课堂上证明R上的$Vitali$覆盖定理的想法一致，我们先从覆盖$\mathcal{F}$中有条件的（即对方体的直径作出限制）找出可列个$\{Q_n\}$，再利用直径的关系用反证法证明$\{Q_n\}$满足我们的要求。

证明 不失一般性，设定集合E和集族$\mathcal{F}$中的方体都被包含于一个大的方体W中。

令$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$，从$\mathcal{F}_0$中取出一个方体$Q_0$。如果$Q_0$已经覆盖了$E$，那么我们的工作结束。否则，定义集族：

$$\mathcal{F}_1 = \{Q \in \mathcal{F}_0 | Q\text{和}Q_0\text{不内交}\}.$$

如果Q_0没有覆盖E，那么$\mathcal{F}_1$不空，令$d_1 = sup\{D(Q) | Q \in \mathcal{F}_1\}$。从$\mathcal{F}_1$中选取直径大于$\frac{1}{2}d_1$的方体$Q_1$，如果$Q_0 \bigcup Q_1$覆盖了$E$，那么命题成立；否则定义

$$\mathcal{F}_2 = \{Q \in \mathcal{F}_1 | Q\text{和}Q_1\text{不内交}\},\ \ d_2 = \sup\{D(Q) | Q \in \mathcal{F}_2\}.$$

归纳的选择下去，得到

$$\mathcal{F}_n = \{Q \in \mathcal{F}_{n-1} | Q\text{ 与 }Q_{n-1}\text{不内交}\},\ \ \text{以及 } d_n = \sup\{D(Q) | Q \in \mathcal{F}_n\}.$$

其中Q_n是从$\mathcal{F}_n$中选出的直径大于$\frac{1}{2}d_n$ 的方体。这些Q_n两两不内交，并且它们都被包含在大方体W中，从而

$$\sum(\frac{D(Q_n)}{\sqrt{N}})^N = \sum\mu(Q_n) < \infty,$$

级数的收敛说明$\lim_{n\to\infty} D(Q_n) = 0$。

下面用反证法说明命题是成立的。

设存在$\varepsilon > 0$，使得$\mu(E - \bigcup Q_n) \le 2\varepsilon$。对于每个$Q_n$，我们构造同心方体$Q_n^{\cdot}$，使得

$$D(Q_n^{\cdot}) = (4\sqrt{N} + 1)D(Q_n).$$

由级数的收敛性可知存在$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$使得

$$\mu(\bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n^{\cdot}) \le \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} \mu(Q_n^{\cdot}) \le \varepsilon,$$

从而

$$\mu((E - \bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon} - \bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n^{\cdot}) \ge \mu(E - \bigcup Q_n) - \mu(\bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n^{\cdot}) \ge \varepsilon.$$

这说明存在元素$x \in (E - \bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n) - \bigcup_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} Q_n^{\cdot}$。从而$x$不属于前$n_\varepsilon$个方体的并，而后者是有界闭集合，从而存在包含$x$的方体$Q_\delta$，它和前$n_\varepsilon$个方体都不相交，从而它是$\mathcal{F}_{n_\varepsilon+1}$中的一个方体。但同时由于$\lim_{n\to\infty} D(Q_n) = 0$，方体$Q_\delta$必定和某个$Q_n, n > n_\varepsilon$内交。令$m$是最小的整数，使得$Q_\delta$和$Q_m$内交。从而

$$Q_\delta \in \mathcal{F}_m,\ \ \delta \le d_m,$$

但Q_δ不属于$\mathcal{F}_{m+1}$，同时x不属于$Q_m^{\cdot}$，因此

$$\delta = D(Q_\delta) > \frac{D(Q_m^{\cdot}) - D(Q_m)}{2\sqrt{(N)}},$$

即$d_m \ge \delta > d_m$，得出矛盾。

§3.3 推论

当定理的条件被满足时，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在有限个方体$\mathcal{F}_\varepsilon = \{Q_1, Q_2 \ldots Q_{n_\varepsilon}\}$，其中$Q_i \in \mathcal{F}$，它们两两不内交，并且

$$\sum\mu(Q_n) - \varepsilon \le \mu(E) \le \mu(\bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon}(E\bigcap Q_n)) + \varepsilon.$$

§4 I型Besicovtch覆盖

§4.1 覆盖的定义

设$E \subset R^N$，$\mathcal{F}$是由R^N中非平凡闭球组成的集族。称$\mathcal{F}$ 是E的一个I型$Besicovtch$ 覆盖，如果对于任意的$x \in E$，都存在以x为球心的闭球$B(x)$属于集族$\mathcal{F}$.

§4.2 I型Besicovtch覆盖定理

§4.2.1 定理陈述

$E \subset R^N$是一个有界集合，$\mathcal{F}$是E的一个I型$Besicovtch$覆盖。则存在可列个点$\{x_n\}$和$\mathcal{F}$中对应的可列个闭球$\{B_n\}$，使得$E \subset \bigcup B_n$ 其中$B_n = B_{p_n}(x_n)$是中心在x_n 半径为p_n 的闭球.进一步的，存在一个与E和$\mathcal{F}$无关、只和维数N有关的正整数c_N，使得我们可以把$\{B_n\}$ 分成c_N组：

$$\mathfrak{B}_1 = \{B_{n_1}\},\ \mathfrak{B}_2 = \{B_{n_2}\},\ \ldots\ldots \mathfrak{B}_{c_N} = \{B_{n_{c_N}}\},$$

其中每组中的闭球都不相交。

§4.2.2 证明提要

定理第一部分的证明相对而言是比较简单的，证明的想法和前面证明I、II型$Vitali$覆盖定理的想法一致，对半径有限制的选出可列个闭球，再证明这个选择的正确性。定理后一部分的证明是不平凡的，为此先是引入了一个更强的结论，这个结论的成立保证了定理后一部分的成立，而在证明这结论时，分解出两个重要的引理，而这两个引理的得证使得一切水到渠成。

§4.2.3 前一部分的证明

不失一般性，我们设E和$\mathcal{F}$中的闭球都被包含在一个足够大的闭球B_0中。设

$$E_1 = E,\ \mathcal{F}_1 = \{B(x) \in \mathcal{F} | x \in E_1\},\ \ r_1 = sup\{r(B) | B \in \mathcal{F}_1\}.$$

选择$x_1 \in E_1$，$B_1 = B_{p_1}(x_1)$，使得$p_1 > \frac{3}{4}r_1$。归纳的选择下去，得到

$$E_n = E - \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j, x_n \in E_n,$$

$$\mathcal{F}_n = \{B(x) \in \mathcal{F} | x \in E_n\},$$

$$r_n = sup\{r(B) | B \in \mathcal{F}_n\},$$

$$B_n = B_{p_n}(x_n),\ \ p_n > \frac{3}{4}r_n.$$

如果$m > n$，那么$p_n > \frac{3}{4}r_n \geq \frac{3}{4}r_m \geq \frac{3}{4}p_m$.(*)

从而说明$B_{\frac{1}{3}p_n}(x_n)$是两两不交的，这是因为x_m不属于B_n，导致

$$|x_n - x_m| > p_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}p_n \geq \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}p_m,$$

而这些闭球都被包含在闭球B_0中，从而有$p_n \to 0, n \to \infty$。此时，如果存在$x \in E - \bigcup B_n$，则会有闭球$B_p(x) \in \mathcal{F}$，它属于任意的$\mathcal{F}_n$，从而有$0 < p \leq r_n \to 0$，这和$p > 0$矛盾。

§4.2.4 后一部分的加强型结论

存在一个只和维数N有关的正整数c_N，使得对于任意的$k \in \mathbb{N}$，在$\{B_1, B_2 \ldots\ldots B_{k-1}, B_k\}$中至多有$c_N$个球与$B_k$相交。

由这个结论推导定理的后一部分是平凡的。

对于固定的正整数k，考虑下面两个集合：

$$\mathcal{G}_1 = \{B_j | B_j \bigcap B_k \neq \emptyset, p_j \leq \frac{3}{4}Mp_k\},\ \ \mathcal{G}_2 = \{B_j | B_j \bigcap B_k \neq \emptyset, p_j > \frac{3}{4}Mp_k\},$$

其中M是一个待定的正整数。

如果能证明上面两个集合的元素个数是有限的，且只和维数N有关，那么我们就可以完成定理的证明了，而下面的两个引理就是由此展开的。

§4.2.5 引理1

引理 $\mathcal{G}_1$中球的个数不超过$4^N(M+1)^N$。

证明 为简单起见，设$\mathcal{G}_1 = \{B_{p_j}(x_j)\}$。则球$\{B_{\frac{1}{3}p_j}(x_j)\}$互不相交且都被包含在$B_{(M+1)p_k}(x_k)$中，这是因为$B_j \bigcap B_k \neq \emptyset$，故$|x_j - X_k| \leq p_j + p_k \leq (\frac{3}{4}M + 1)p_k$。从而对于任意的$x \in B_{\frac{1}{3}p_j}(x_j)$，

$$|x - x_k| \leq |x - x_j| + |x_j - x_k| \leq \frac{1}{3}p_j + \frac{3}{4}M + 1)p_k \leq (M+1)p_k.$$

记v_N是R^N中单位球的体积，那么我们有

$$\sum_{j:Bj \in \mathcal{G}_1} v_N(\frac{1}{3}p_j)^N \leq v_N(M+1)^N p_k^N.$$

而$j < k$说明$\frac{1}{3}p_j > \frac{1}{4}p_k$，因此

$$\sharp(\mathcal{G}_1)v_N(\frac{1}{4}p_k)^N \leq v_N(M+1)^N p_k^N.$$

引理得证！[4]

[4] $\sharp(A)$表示集合A中元素的的个数

§4.2.6 引理2

为了估计$\mathcal{G}_2$中元素个数的上限，考虑从x_k出发射到各个x_j的射线，下面的引理将会告诉我们任意两条射线之间的夹角都不小于θ_0，由此射线的条数，从而$\mathcal{G}_2$中元素个数，将被控制，这正是我们想要的。

引理 设$B_{p_m}(x_m)$和$B_{p_n}(x_n)$是集合$\mathcal{G}_2$中的两个球，设θ是$\overrightarrow{x_kx_n}$和$\overrightarrow{x_kx_m}$之间的夹角，那么可以选择适当的M（注意：M是待定的!），使得$\theta > \theta_0 = arccos\frac{5}{6}$。

证明 不妨假定$n < m < k$，从而$|x_n - x_m| > p_n$（因为x_m不属于$B_{p_n}(x_n)$），类似得到$p_n < |x_n - x_k|$，$p_m < |x_m - x_k|$。而由$\mathcal{G}_2$的定义可知：

$$\frac{3}{4}Mp_k < p_n \le |x_n - x_k| \le p_n + p_k,\ \ \frac{3}{4}Mp_k < p_m \le |x_m - x_k| \le p_m + p_k,$$

从而

$$\begin{aligned} cos\theta &= \frac{|x_n - x_k|^2 + |x_m - x_k|^2 - |x_n - x_m|^2}{2|x_n - x_k||x_m - x_k|} \le \frac{(p_n + p_k)^2 + (p_m + p_k)^2 - p_n^2}{2p_np_m} \\ &\le \frac{1}{2}\frac{p_m}{p_n} + \frac{p_k}{p_n}\frac{p_k}{p_m} + \frac{p_k}{p_m} + \frac{p_k}{p_n} \le \frac{1}{2}\frac{p_m}{p_n} + (\frac{4}{3})^2\frac{1}{M^2} + \frac{8}{3}\frac{1}{M}, \end{aligned}$$

由于$m > n$，回到定理第一部分证明中的(*)式，我们得到$p_n > \frac{3}{4}p_m$，因此有

$$cos\theta \le \frac{2}{3} + (\frac{4}{3})^2\frac{1}{M^2} + \frac{8}{3}\frac{1}{M},$$

从而可以选取适当的M，使得$cos\theta \le \frac{5}{6}$。证明结束!

§4.2.7 定理后一部分的证明

如果$N = 2$，那么由$\theta > \theta_0$可知射线的条数（同时也是$\mathcal{G}_2$的个数）至多为$\frac{2\pi}{\theta_0}$。如果$N \ge 3$，设$C(\theta_0)$表示R^N中以原点为顶点、对称轴和侧棱夹角为$\frac{1}{2}\theta_0$的圆锥。设$\sigma_N(\theta_0)$表示该圆锥和单位球所交的区域的面积，而单位球的面积记为w_N，现在，我们终于能够确定c_N了：

$$c_N = \sharp(\mathcal{G}_1) + \sharp(\mathcal{G}_2) \le 4^N(M+1)^N + \frac{w_N}{\sigma_N(\theta_0)}.$$

§5 II型Besicovtch覆盖

§5.1 覆盖的定义

称R^N中一些非平凡闭球组成的集族$\mathcal{F}$是集合$E \subset R^N$的II型$Besicovtch$覆盖，如果对于任意的$x \in E$和$\varepsilon > 0$，总是存在$\mathcal{F}$中的闭球$B_p(x)$，它以x为球心，半径$p < \varepsilon$。

§5.2 II型Besicovtch覆盖定理

设$\mathcal{F}$是R^N中的有界集合E的II型$Besicovtch$覆盖，μ为R^N的$Radon$测度，μ_e是其诱导的外测度。那么我们可从$\mathcal{F}$中选出可列个闭球$\{B_n\}$，使得$\mu_e(E-\bigcup B_n)=0$。

证明 不妨假设$\mu_e(E)>0$，并且E和$\mathcal{F}$中的闭球都包含在足够大的闭球B_0中。沿用I型$Besicovtch$覆盖中的记号：

$$\mathfrak{B}_1=\{B_{n_1}\},\ \mathfrak{B}_2=\{B_{n_2}\},\ \ldots\ldots\ \mathfrak{B}_{c_N}=\{B_{n_{c_N}}\}.$$

从而我们有：

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{c_N}\bigcup_{n_j=1}^{\infty}B_{n_j},$$

进一步有

$$\mu_e(E\bigcap\bigcup_{j=1}^{c_N}\bigcup_{n_j=1}^{\infty}B_{n_j})=\mu_e(E)>0.$$

因此存在$j\in\{1,2,\ldots,c_N\}$，使得

$$\mu_e(E\bigcap\bigcup_{n_j=1}^{\infty}B_{n_j})\geq\frac{1}{c_N}\mu_e(E).$$

而由于闭球都被包含在足够大的闭球B_0中，于是我们能够找到m_1，使得

$$\mu_e(E\bigcap\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j})\geq\frac{1}{2c_N}\mu_e(E),$$

由于闭球的有限并是μ可测的(回忆一下前面$Radon$测度的定义)，故由$Caratheodory$公式得

$$\mu_e(E)=\mu_e(E\bigcap\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j})+\mu_e(E-\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j})\geq\frac{1}{2c_N}\mu_e(E)+\mu_e(E-\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j}),$$

[5] 从而我们有

$$\mu_e(E-\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j})\leq v\mu_e(E),v=1-\frac{1}{2c_N}\in(0,1).$$

设$E_1=E-\bigcup_{n_j=1}^{m_1}B_{n_j}$，如果$\mu_e(E_1)=0$，那么工作结束；否则，我们把$\mathcal{F}$中和$\bigcup_{n_j=1}^{m}B_{n_j}$不交的闭球取出来做成集族$\mathcal{F}_1$，从而$\mathcal{F}_1$是集合$E_1$的II型$Besicovtch$覆盖。像对待$E$那样，我们把上述工作在$E_1$上完成，会得到

$$\mu_e(E_1\bigcup_{n_l=1}^{m_2}B_{n_l})\leq v\mu_e(E_1)\leq v^2\mu_e(E).$$

[5]学习了抽象测度理论后，第一个等号是很自然的

由于前m_1和现在的m_2个闭球是不交的，我们把他们并起来得到$\mathcal{F}$中的$s_2 = m_1 + m_2$个闭球。归纳下去，我们会得到$\mu_e(E - \bigcup_n^{s_k} B_n) \le \nu^k \mu_e(E)$。如果存在某个$k$，使得$\mu_e(E - \bigcup_n^{s_k} B_n) = 0$，那么命题得证，否则令$k \to \infty$，同样命题也得证。

§6 5r覆盖定理

§6.1 预备概念

记$tB := B(x, tr)$，其中$B = B(x, r) = \{y | d(x, y) \le r\}$。称一个度量空间$X$是有界紧的，如果它的任意有界闭子集都是紧集。$R^N$就是一个有界紧空间。

§6.2 定理陈述

设X是一个有界紧的度量空间，$\mathfrak{B}$是一些闭球组成的集族，满足

$$\sup\{d(B) | B \in \mathfrak{B}\} < \infty.$$

则我们可以选出至多有限个不交的闭球$B_i \in \mathfrak{B}$，使得：$\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \subset \bigcup_i 5B_i$。

§6.3 弱化后定理的证明

为使证明简洁一些，我们先对$\mathfrak{B}$对一些限制（从而弱化了定理）。令$\mathfrak{B} = \{B(x, r(x)) | x \in A\}$，其中$A \in X$是一个有界集。设定

$$M = sup\{r(x)) | x \in A\},\ \ A_1 = \{x \in A | \frac{3M}{4} < r(x) \le M\}.$$

任取$x_1 \in A_1$，归纳下去，有$x_{k+1} \in A_1 / \bigcup_{i=1}^k B(x_i, 3r(x_i))$。(**)

如果$A_1 / \bigcup_{i=1}^k B(x_i, 3r(x_i)) \neq \phi$，那继续下去。注意到$A$是有界的，从而我们的工作必将在有限步之后停下来，因为选出的闭球的半径都是大于$\frac{3M}{4}$的。从而得到$A_1 \subset \bigcup_{i+1}^{k_1} B(x_i, 3r(x_i))$。同时，由于$r(x) \le 2r(x_i)$，其中$x \in A_1, i = 1, 2 \ldots, k_1$。这告诉我们

$$\bigcup_{x \in A_1} B(x, r(x)) \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 5r(x_i)).$$

设

$$A_2 = \{x \in A | (\frac{3}{4})^2 M < r(x) \le \frac{3}{4} M\},$$

$$A_2' = \{x \in A_2 | B(x, r(x)) \bigcap \bigcup_{i=1}^{k_1} B(B(x_i, r(x_i)) = \phi.$$

如果$x \in A_2/A_2'$，那么存在$1 \le i \le k_1$，使得$B(x,r(x)) \bigcap B(x_i,(r(x_i)) \neq \phi$，从而有$d(x,x_i) \le r(x)+r(x_i) \le 3R(x_i)$，这表明$A_2/A_2' \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i,3r(x_i))$。就像对待$A_1$那样，归纳的从$A_2'$中选出$x_{k_1+1}$，到有限步终止，我们将会得到

$$\bigcup_{x\in A_2} B(x,r(x)) \subset \bigcup_{i=1}^{k_2} B(x_i,5r(x_i)).$$

归纳下去，我们就完成了弱化后定理的证明!

§6.4 定理的证明

回顾一下上面的证明中对$\mathfrak{B}$的限制：$\mathfrak{B}=\{B(x,r(x))|x\in A\}$，其中$A\in X$是一个有界集。可以看出，我们对$\mathfrak{B}$进行了如下两个方面的限制：对于任意的$x\in A$，仅有一个闭球$B(x,r(x))\in\mathfrak{B}$；$A$是有界的。为此，也应该从这两个方面来改进证明。

对于前者，从所有以x为中心的闭球中取出$B(x,r(x))$，满足$r(x) > \frac{14}{15}sup\{r|B(x,r)\in \mathfrak{B}\}$。此时，只需将上面证明过程中的（**）式的3改为$\frac{8}{3}$即可。

对于后者，我们来考虑上面证明中的A_1，对于$A_1^k = A_1 \bigcap B(0,k)$，从$k=1,2\ldots$，可以按次序选择有限个闭球，使其半径扩充三倍后覆盖A_1^k，并且第k步选择的闭球是在前$k-1$步已经选好的闭球的基础上选择的。从而有$A_1 \in \bigcup_{i+1}^{k_1} B(x_i,3r(x_i))$，至多$k_1=\infty$。

§7 小结

在对五个覆盖定理总结之前，先定义一个概念：称集合A在测度意义下B覆盖，如果$\mu(B-A)=0$，类似的，可以定义外测度意义下的覆盖。

下面的表是对前四个覆盖的总结（因为它们都是在R^N中的）：

覆盖名称	I型*Vitali*覆盖	II型*Vitali*覆盖
覆盖中的元素	平行于坐标轴的方体	非平凡闭方体
是否对半径， 边长，直径有要求	无	有
对空间R^N的 要求	装备了Lebesgue测 度的度量空间	装备了Lebesgue 测度的度量空间
定理的结论	存在可列不交方体， 其测度可控制其 所覆盖的集合测度	存在可列 （Lebesge外测度 意义下的）覆盖
覆盖名称	I型*Besicovtch*覆盖	II型*Besicovtch*覆盖
覆盖中的元素	非平凡闭球	非平凡闭球
是否对半径， 边长，直径有要求	无	有
对空间R^N的 要求	度量 空间	装备了*Radon*测度 的度量空间
定理的结论	存在可列覆盖，且可将 将其分为不交子类，子类 的组数仅和维数有关	存在可列 （*Radon*外测度 下意义的）覆盖

而最后一个覆盖定理5r覆盖定理只要求度量空间是有界紧的，覆盖中的元素为闭球（其实这里它并不是一个覆盖，而是后面选出的子集），而对直径的限制是上限（这一点不同于一般的覆盖），结论是存在可列不交半径扩充5倍后的闭球覆盖以前的所有闭球。

§8　参考文献

- Emmanuele DiBenedetoo，Real Ananlysis(影印版)，高等教育出版社，北京，2007

- Pertti Mattila ，Geometry of set and Measures in Euclidean Spaces，Cambridge University Press 1999

一个组合恒等式

周坚*

本文将证明如下等式对$g \geq 1$成立：

$$\sum_{k=1}^{g} \frac{(-1)^k}{k!}(2g+1+k) \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=g \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \binom{2g+k}{2m_1+1,\ldots,2m_k+1} = (-1)^g 2^{2g}(g!)^2, \tag{1}$$

其中我们用了如下记号：若$n_1,\ldots,n_k$为非负整数, $n = n_1+\cdots+n_k$, 则

$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}. \tag{2}$$

证明. 记(1)式左边为LHS. 先用(2)式改写LHS为:

$$\mathrm{LHS} \quad = \quad \sum_{k=1}^{g}(-1)^k \prod_{j=1}^{2g+1}(k+j) \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=g \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \frac{1}{(2m_1+1)!}\cdots\frac{1}{(2m_k+1)!}.$$

为了前进，当先求出

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=g \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \frac{1}{(2m_1+1)!}\cdots\frac{1}{(2m_k+1)!}. \tag{3}$$

这启发我们使用级数及其乘积：令

$$f(z) = \sum_{m>0} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

则(3)式为级数$f(z)^k$的z^{2g+k}项的系数。注意到$f(z)$是一个在全复平面上解析的函数，事实上，

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) - z = \sinh z - z.$$

再回顾复变函数论中，一个Laurent级数所定义的亚纯函数

$$g(z) = \sum_{n \geq m} a_n z^n$$

*清华大学数学科学系基础数学研究所教授

的z^{-1}项的系数a_{-1}即$g(z)$在原点处的留数，所以我们可以将(3)式写成：

$$\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{1}{z^{2g+1+k}}f(z)^k. \tag{4}$$

故有

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS} &= \sum_{k=1}^{g}(-1)^k\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{1}{z^{2g+1+k}}f(z)^k\\ &= \mathrm{Res}_{z=0}\big(\sum_{k=1}^{g}(-1)^k\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\frac{1}{z^{2g+1+k}}f(z)^k\big).\end{aligned}$$

下一步自然是对k求和。如果没有那个$\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\frac{1}{z^{2g+1+k}}$，求和就很简单。为此我们注意到：

$$\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\frac{1}{z^{2g+1+k}}=-z\partial_w^{2g+1}w^{-k-1}|_{w=z},$$

此处∂_w为对w求导，所以我们得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{g}(-1)^k\prod_{j=1}^{2g+1}(k+j)\cdot\frac{1}{z^{2g+1+k}}f(z)^k=-\sum_{k=1}^{g}(-1)^k z\partial_w^{2g+1}w^{-k-1}f(z)^k\Big|_{w=z}\\ =\;& -z\partial_w^{2g+1}\sum_{k=1}^{g}(-1)^k w^{-k-1}f(z)^k\Big|_{w=z}=z\partial_w^{2g+1}\frac{w^{-2}f(z)(1-(-1)^g w^{-g}f(z)^g)}{1+w^{-1}f(z)}\Big|_{w=z}\\ =\;& z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)}{w(w+f(z))}+(-1)^{g+1}\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}.\end{aligned}$$

走到这一步，有所收获：(1)式中的两重复杂的求和变没了, 只需证明：

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)}{w(w+f(z))}+(-1)^{g+1}\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}\right)=(-1)^g2^{2g}(g!)^2. \tag{5}$$

先来求

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)}{w(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}\right).$$

直接对w求导显然不好。注意到$f(z)=(w+f(z))-w$我们有：

$$\frac{f(z)}{w(w+f(z))}=\frac{1}{w}-\frac{1}{w+f(z)},$$

此时对w求导极易：

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)}{w(w+f(z))}\right)\Big|_{w=z}\right) \\
= & \mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}(\frac{1}{w}-\frac{1}{w+f(z)})\Big|_{w=z}\right) \\
= & (2g+1)!\,\mathrm{Res}_{z=0}\left(z(\frac{1}{(w+f(z))^{2g+2}}-\frac{1}{w^{2g+2}})\Big|_{w=z}\right) \\
= & (2g+1)!\,\mathrm{Res}_{z=0}\,(\frac{z}{(z+f(z))^{2g+2}}-\frac{1}{z^{2g+1}}) \\
= & (2g+1)!\,\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{z}{(\sinh(z))^{2g+2}}.
\end{aligned}$$

此时已得到一个相对较熟悉的函数的留数计算问题。直接展开为Laurent级数不现实，但由于：

$$\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{z}{(\sinh(z))^{2g+2}}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{z}{\sinh^{2g+2}z}dz,$$

故尝试变量代换。令$u=\sinh z$。在$z=0$的一个小邻域内，此变换为一一对应，有逆映射$z=\operatorname{arcsinh}u$, 故$dz=(1+u^2)^{-1/2}du$。因而,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_z\frac{z}{\sinh^{2g+2}z}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_u\frac{1}{u^{2g+2}}\cdot\operatorname{arcsinh}u\cdot(1+u^2)^{-1/2}du.$$

此时我们只要将$\operatorname{arcsinh}u$和$(1+u^2)^{-1/2}$展开为幂级数, 得到乘积$\operatorname{arcsinh}u\cdot(1+u^2)^{-1/2}$的$u^{2g+1}$的系数即可。一个直接的做法是利用Newton的推广二项式展开公式：

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n, \tag{6}$$

此处,

$$\binom{a}{n}=\begin{cases}1, & n=0,\\ a(a-1)\cdots(a-n+1)/n!, & n>0,\end{cases}$$

我们得到：

$$(1+u^2)^{-1/2}=\sum_{g=0}^{\infty}\binom{-1/2}{g}u^{2g}.$$

两边对u积分:

$$\operatorname{arcsinh}(u)=\sum_{g=0}^{\infty}\binom{-1/2}{g}\frac{u^{2g+1}}{2g+1}.$$

这里用到：

$$\frac{d}{du}\operatorname{arcsinh} u = (1+u^2)^{-1/2}.$$

所以我们得到:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\oint_u \frac{1}{u^{2g+2}}\cdot \operatorname{arcsinh} u \cdot (1+u^2)^{-1/2} du \\
= & \frac{1}{2\pi i}\oint_u \frac{1}{u^{2g+2}} \sum_{g_1=0}^{\infty} \binom{-1/2}{g_1} u^{2g_1} \cdot \sum_{g_2=0}^{\infty} \frac{1}{2g_2+1} \binom{-1/2}{g_2} u^{2g_2+1} du \\
= & \sum_{g_1+g_2=g} \binom{-1/2}{g_1} \cdot \frac{1}{2g_2+1} \binom{-1/2}{g_2}.
\end{aligned}$$

这里又有难看的求和，结果不理想。可以尝试直接化简。这里给出另一个做法。令:

$$\operatorname{arcsinh} u \cdot (1+u^2)^{-1/2} = \sum_{g=0}^{\infty} a_g u^{2g+1}, \tag{7}$$

两边对u求导得:

$$\begin{aligned}
& \sum_{g=0}^{\infty}(2g+1)a_g u^{2g} = -u(1+u^2)^{-3/2}\cdot \operatorname{arcsinh} u + (1+u^2)^{-1} \\
= & (1+u^2)^{-1}(1-\sum_{g=0}^{\infty} a_g u^{2g+2}),
\end{aligned}$$

等价地,

$$1-\sum_{g=0}^{\infty} a_g u^{2g+2} = (1+u^2)\sum_{g=0}^{\infty}(2g+1)a_g u^{2g}.$$

比较两边的系数:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_{g+1} &= -\frac{2g+2}{2g+3}a_g, \quad g \geq 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

由此递归关系得到:

$$a_g = \frac{(-1)^g}{(2g+1)!}2^{2g}(g!)^2. \tag{9}$$

故已证明了

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_u \frac{1}{u^{2g+2}}\cdot \operatorname{arcsinh} u \cdot (1+u^2)^{-1/2} du = \frac{(-1)^g}{(2g+1)!}2^{2g}(g!)^2. \tag{10}$$

作为副产品我们也得到了等式:

$$\sum_{g_1+g_2=g}\binom{-1/2}{g_1}\cdot\frac{1}{2g_2+1}\binom{-1/2}{g_2}=\frac{(-1)^g}{(2g+1)!}2^{2g}(g!)^2.$$

(如上提到，可以直接化简证明此式。但上面的证明更有趣。)

为证明(5)此时只需证明:

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left(z\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\bigg|_{w=z}\right)=0.$$

事实上, 我们将证明

$$\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\bigg|_{w=z}$$

在$z=0$处解析。我们用Leibnitz公式：

$$\frac{d^n}{dx^n}(\varphi(x)\cdot\psi(x))=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i}{dx^i}\varphi(x)\cdot\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}\psi(x), \tag{11}$$

得到：

$$\begin{aligned}
&\partial_w^{2g+1}\left(\frac{f(z)^{g+1}}{w^{g+1}(w+f(z))}\right)\bigg|_{w=z}\\
=\;& f(z)^{g+1}\sum_{i=0}^{2g+1}\binom{2g+1}{i}\partial_w^i\left(\frac{1}{w^{g+1}}\right)\cdot\partial_w^{2g+1-i}\left(\frac{1}{w+f(z)}\right)\bigg|_{w=z}\\
=\;& f(z)^{g+1}\sum_{i=0}^{2g+1}\binom{2g+1}{i}\cdot\frac{(-1)^i\prod_{j=1}^{i}(g+j)}{z^{g+1+i}}\cdot\frac{(-1)^{2g+1-i}(2g+1-i)!}{(z+f(z))^{2g+2-i}}\\
=\;& -(f(z)/z^3)^{g+1}\sum_{i=0}^{2g+1}\binom{2g+1}{i}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{i}(g+j)\cdot(2g+1-i)!}{(1+f(z)/z)^{2g+2-i}}.
\end{aligned}$$

由$f(z)$的定义知:

$$\begin{aligned}
1+f(z)/z&=1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\frac{z^5}{7!}+\cdots,\\
f(z)/z^3&=\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}+\cdots
\end{aligned}$$

在$z=0$处解析, 因而证明完成。

后记

1. 式(1)左边很复杂，右边很简单，这个等式自当有其精妙之处。我们没有寻求初等证明，而是以退为进，引进函数 $f(z)$，将问题化为留数问题。此无他，乃素常所喜之法也。余皆步步为营，水到渠成。用了几种常用的方法，与大家分享。

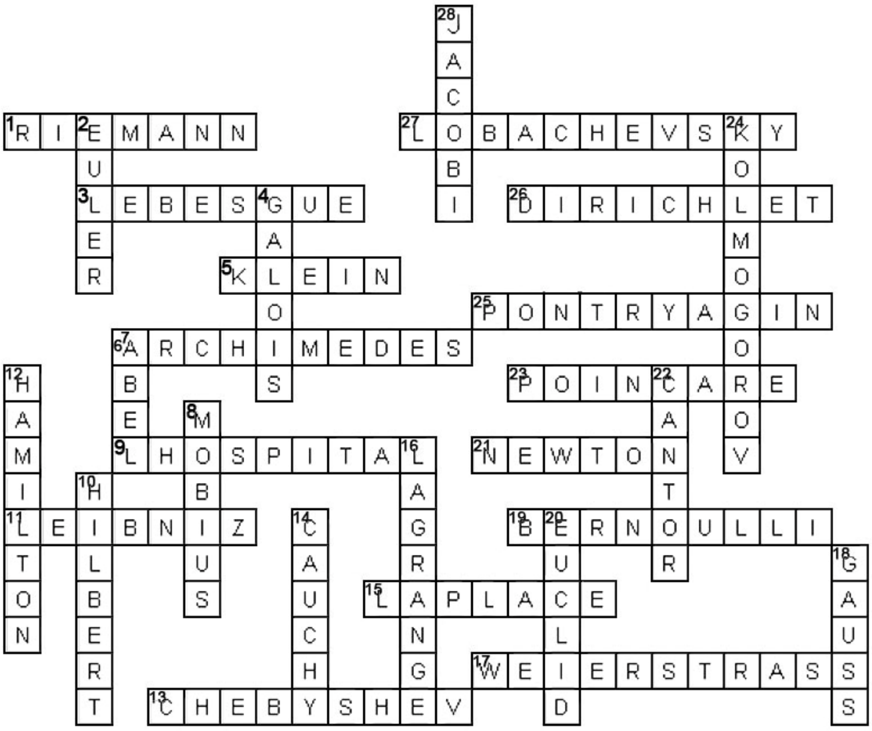
2. 上面没有解释如何发现这个等式的，这是更有趣的事情。事实上，我是在南开大学 bbs 的数学版上看到有人在问这个等式。我看出提问者是浙江大学研究代数几何中模空间上的相交理论的一位青年学者徐浩，就把以上证明告诉了他。他告诉我这个等式是模空间理论中一个猜想的特殊情形，Zagier 在一篇文章提到，但没有给出证明。他问了些搞组合的人没有得到证明，就在 bbs 上提问。

3. 为学大处着眼，小处着手，乃“眼高手低”之异解。良莠不分，有顿落下乘之患；取法先贤，免盲人瞎马之弊。沉迷技巧，难免坐井观天；好高骛远，终亦无所能为。拙文雕虫小技，不足为训，谨怀自娱娱人之意，慎戒自愚愚人之失。先哲云：“一切有为法，如梦幻泡影，如雾亦如电，应作如是观。”

****

Crossword 答案

（题目见上期）



注：“klein”在德语中意思是“小的”。

波动方程的一种极限问题

雍稳安*

考虑波动方程

$$\epsilon(u_{tt}-u_{xx})+au_t+bu_x=0, \qquad (x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,\infty), \tag{1}$$

的初值问题。其中$\epsilon>0$是一小参数，a和b是实常数。显然我们应该假定a和b不全为零。这个方程是一类奇异极限问题的典型例子，有着十分广泛的应用背景（见本文结尾部分）。

由于方程(1)依赖于ϵ, 其解自然也依赖于ϵ, 记为$u^\epsilon=u^\epsilon(x,t)$. 我们感兴趣的是当$\epsilon$趋于零时，解$u^\epsilon$的极限行为。即什么情况下极限存在？若存在，极限是什么？形式地看，若极限u^0存在，它（在分布意义下）满足如下方程

$$au_t^0+bu_x^0=0. \tag{2}$$

首先我们说明这个极限不总是存在的。事实上，$u^\epsilon=\epsilon(e^{-at/\epsilon}-1)$ 是方程(1)的解。当$a<0$时，对任意$t>0$, $\lim_{\epsilon\to0}u^\epsilon(t)=+\infty$. 若$a=0$, 那么由假设$b\neq0$，而

$$u^\epsilon=-\frac{bt^2}{2\epsilon}+x$$

是方程(1)的解。显然这时极限也不存在。下面我们总假设$a>0$. 另一方面，根据波动方程的有限传播速度性质，在三角形区域

$$\{(x,t):|x|\le1-t,t\in(0,1]\}$$

中，解u^ϵ完全由方程和初值函数在区间$|x|\le1$中的值来决定。这样，如极限u^0存在，它也应由这些决定。另一方面，若$|b/a|>1$, 由特征线法知道，u^0在上述三角形区域的某个子集内的值与其初值函数在区间$|x|\le1$中的值无关！这些简单的讨论说明前述极限存在的一个必要条件是

$$|b|\le a. \tag{3}$$

*清华大学周培源应用数学研究中心

（学过数值分析的同学知道，这个条件与差分格式理论中著名的CFL条件之获得完全一样。）

本文的主要目的是说明条件（3）是前述极限存在的充分条件。由于$a > 0$, 我们不妨假定

$$a = 1.$$

由于

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t u_t(x,s)ds,$$

我们只须讨论u_t^ϵ和u_x^ϵ的极限行为。引入

$$v = u_x, \qquad w = u_t,$$

方程（1）转化为

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t - v_x &= -\tfrac{w+bv}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{4}$$

处理这样的线性常系数方程组之初值问题的一个方便工具是Fourier变换。回忆$u = u(x)$的Fourier变换为

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x)dx.$$

u是x的速降函数当且仅当$\hat{u} = \hat{u}(\xi)$是ξ的速降函数；由于Parseval恒等式，Fourier变换对所有平方可积函数u有定义；进而，u是x的平方可积函数当且仅当$\hat{u}$是ξ的平方可积函数。

在Fourier变换下，方程组（4）变成了

$$\begin{aligned} \hat{v}_t + i\xi\hat{w} &= 0, \\ \hat{w}_t + i\xi\hat{v} &= -\tfrac{\hat{w}+b\hat{v}}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{5}$$

从这个以ξ为参数的常微分方程组我们解出

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^\epsilon(\xi,t) \\ \hat{w}^\epsilon(\xi,t) \end{pmatrix} = e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon} \begin{pmatrix} \hat{v}^\epsilon(\xi,0) \\ \hat{w}^\epsilon(\xi,0) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -i\xi \\ -i\xi - b & -1 \end{pmatrix}.$$

为了说明条件（3）的充分性，我们先建立

命题1：对于每个$(t,\xi)\in(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon} \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{i\xi bt} & 0 \\ -be^{i\xi bt} & 0 \end{pmatrix}.$$

证明：设$\lambda_\pm=\lambda_\pm^\epsilon$是二阶矩阵$A(\epsilon\xi)$的两个特征值。那么它们解一元二次方程$\lambda^2+\lambda+\epsilon^2\xi^2-ib\epsilon\xi=0$，其表达式是

$$\lambda_\pm=\frac{-1\pm\sqrt{1+4i\epsilon\xi b-4\epsilon^2\xi^2}}{2}.$$

简单的计算说明

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lambda_+^\epsilon=0, \qquad \lim_{\epsilon\to 0}\lambda_-^\epsilon=-1, \qquad \lim_{\epsilon\to 0}\lambda_+^\epsilon/\epsilon=ib\xi. \tag{7}$$

另一方面，对于$\epsilon\xi\neq\pm 1/2$, $\lambda_+\neq\lambda_-$. 这时矩阵$A(\epsilon\xi)$有下列分解（若$\epsilon\xi\neq 0$）

$$A(\epsilon\xi)=\frac{i\xi\epsilon}{\lambda_+-\lambda_-}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon} & -\frac{\lambda_-}{i\xi\epsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_-}{i\xi\epsilon} & -1 \\ \frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon} & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon} &= \tfrac{i\xi\epsilon}{\lambda_+-\lambda_-}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon} & -\frac{\lambda_-}{i\xi\epsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t\lambda_+/\epsilon} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_-/\epsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_-}{i\xi\epsilon} & -1 \\ \frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\begin{pmatrix} \lambda_+e^{t\lambda_-/\epsilon}-\lambda_-e^{t\lambda_+/\epsilon} & i\xi\epsilon(e^{t\lambda_-/\epsilon}-e^{t\lambda_+/\epsilon}) \\ \frac{\lambda_+}{i\xi\epsilon}\lambda_-(e^{t\lambda_+/\epsilon}-e^{t\lambda_-/\epsilon}) & \lambda_+e^{t\lambda_+/\epsilon}-\lambda_-e^{t\lambda_-/\epsilon} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

不难看出，这个表达式在$\epsilon\xi\to 0$时也成立。矩阵$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$的这个表达式和式（7）中的极限立即导致了命题的结论。注意$t>0$被用来说明$e^{t\lambda_-/\epsilon}\to 0$. 证毕

这个证明用到了$a=1>0$而非条件(3)，下一个命题本质性地用到条件(3).

命题2：在条件（3）下，矩阵$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$的$L^2$模有个与$t,\epsilon$和$\xi$都无关的上界。

证明：对于$|b|=a=1$的情形，$\lambda_+=i\xi\epsilon b, \lambda_-=-1-\lambda_+$. 这时我们可以利用$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$的前述表达式把其分解为

$$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}=\frac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\lambda_+-\lambda_-)e^{t\lambda_+/\epsilon} & i\xi\epsilon(e^{t\lambda_-/\epsilon}-e^{t\lambda_+/\epsilon}) \\ 0 & (\lambda_+-\lambda_-)e^{t\lambda_-/\epsilon} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

由于

$$|\frac{i\xi\epsilon}{\lambda_+-\lambda_-}|=\frac{|i\xi\epsilon|}{|1+2i\xi\epsilon b|}=\frac{|\xi\epsilon|}{\sqrt{1+4\xi^2\epsilon^2}}<1/2,$$

$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$是一致有界的。

对于$|b|<a=1$的情形，用$(b\hat{w}+\hat{v})$和$(\hat{w}+b\hat{v})$的复共轭分别乘常微分方程组（5）的第一、第二个的方程再求和并取实部，我们得到

$$\left(|\hat{v}|^2+|\hat{w}|^2+b(\hat{v}\bar{\hat{w}}+\bar{\hat{v}}\hat{w})\right)_t+\frac{2|\hat{w}+b\hat{v}|^2}{\epsilon}=0.$$

由于$|b(\hat{v}\bar{\hat{w}}+\bar{\hat{v}}\hat{w})|\leq|b|(|\hat{v}|^2+|\hat{w}|^2)$, 积分上述等式我们得到

$$\begin{aligned}
& (1-|b|)(|\hat{v}(\xi,t)|^2+|\hat{w}(\xi,t)|^2) \\
\leq\ & |\hat{v}(\xi,t)|^2+|\hat{w}(\xi,t)|^2+b(\hat{v}(\xi,t)\bar{\hat{w}}(\xi,t)+\bar{\hat{v}}(\xi,t)\hat{w}(\xi,t))+2\epsilon^{-1}\textstyle\int_0^t|\hat{w}+b\hat{v}|^2ds \\
=\ & |\hat{v}(\xi,0)|^2+|\hat{w}(\xi,0)|^2+b(\hat{v}(\xi,0)\bar{\hat{w}}(\xi,0)+\bar{\hat{v}}(\xi,0)\hat{w}(\xi,0)) \\
\leq\ & (1+|b|)(|\hat{v}(\xi,0)|^2+|\hat{w}(\xi,0)|^2).
\end{aligned}$$

所以

$$|\hat{v}(\xi,t)|^2+|\hat{w}(\xi,t)|^2\leq\frac{1+|b|}{1-|b|}(|\hat{v}(\xi,0)|^2+|\hat{w}(\xi,0)|^2).$$

由于$\hat{v}(\xi,0)$和$\hat{w}(\xi,0)$的任意性，结合表达式（6）我们立即从这个结论看出

$$|e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}|\leq\sqrt{\frac{1+|b|}{1-|b|}}.$$

证毕

注记1：若$v(x,0)$和$w(x,0)$是平方可积（或速降）的，根据Fourier变换的性质$\hat{v}(\xi,0)$和$\hat{w}(\xi,0)$ 也是平方可积（或速降）的。由命题2，$\hat{v}^\epsilon(\xi,t)$和$\hat{w}^\epsilon(\xi,t)$关于ξ 是平方可积（或速降）的。这样它们关于ξ的Fourier逆变换$v^\epsilon(x,t)$和$w^\epsilon(x,t)$有定义并且是关于x平方可积（或速降）的。这个讨论简要地说明了一阶方程组（4）之初值问题的适定性。应该提到：固定$\epsilon>0$，方程组（4）之初值问题的适定性是不依赖于条件(3)的，因为可以证明矩阵$e^{tA(\epsilon\xi)/\epsilon}$的$L^2$模有个与$\xi$无关的上界。有兴趣的同学可以试着证一下，这里不在赘述。

有了命题2和3，我们来说明条件（3）的充分性。我们假定方程组（4）的初值$v(x,0)$和$w(x,0)$是平方可积的。命题2说明对于任意$(t,\xi)\in(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$,

$$\lim_{\epsilon\to0}|(\hat{v}^\epsilon,\hat{w}^\epsilon)(\xi,t)-(e^{i\xi bt}\hat{v}(\xi,0),-be^{i\xi bt}\hat{v}(\xi,0))|^2\longrightarrow0.$$

记

$$(\hat{v}^0,\hat{w}^0)=(e^{i\xi bt},-be^{i\xi bt})\hat{v}(\xi,0).$$

经由Fourier逆变换得到的$v^0(x,t)$和$w^0(x,t)$显然满足$w^0(x,t)+bv^0(x,t)=0$. 进而，$v^0(x,t)$是方程(2)的解$(a=1)$！命题3说明存在与t,ξ和ϵ都无关的常数C使得

$$\begin{aligned}
|(\hat{v}^\epsilon,\hat{w}^\epsilon)-(\hat{v}^0,\hat{w}^0)|^2\leq\ & 2|(\hat{v}^\epsilon,\hat{w}^\epsilon)|^2+2|(\hat{v}^0,\hat{w}^0)|^2 \\
\leq\ & 2C|(\hat{v}(\xi,0),\hat{w}(\xi,0))|^2+2(1+b^2)|\hat{v}(\xi,0)|^2\equiv g(\xi).
\end{aligned}$$

因为$v(x,0)$和$w(x,0)$关于x是平方可积的, 对于任意有限$T>0$, $g(\xi)$在$(t,\xi)\in(0,T)\times(-\infty,+\infty)$上可积。这样利用Parseval恒等式和Lebesgue 控制收敛定理我们得到

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|(v^\epsilon-v^0,w^\epsilon-w^0)(x,t)|^2dx \\ = & \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|(\hat{v}^\epsilon-\hat{v}^0,\hat{w}^\epsilon-\hat{w}^0)(\xi,t)|^2d\xi=0. \end{aligned}$$

至此我们已经说明了条件(3)的充分性。

注记2：这个收敛性结果是针对平方可积的初值函数的，它没有考虑解的初始层行为（注意方程(1)需要两个初值，而方程(2)只需要一个）。对于更正规的初值函数，类似的分析能建立更强的收敛性结果，初始层行为也能处理。这里不再赘述。

注记3：前面已经提到条件(3)与差分格式理论中CFL条件的相似性。在有些文献中条件(3)被称为Leray的separation条件（或称time-like条件），在有些文献中被称为Whitham的子特征条件，因为它说方程(2)的特征线把方程(1)的两条特征线分开了。

注记4：方程组（4）是一个带有零阶源项的一维一阶双曲偏微分方程组，其一般形式是

$$u_{kt}+\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{n}a_{jkl}(u_1,u_2,\cdots,u_n;x,t)u_{lx_j}=q_k(u_1,u_2,\cdots,u_n;x,t)/\epsilon, \tag{8}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_d), k=1,2,\cdots,n$. 这样的非线性偏微分方程组描述了自然界中大量的非平衡现象，典型的例子来源于局部非平衡气动力学、伴有化学反应的气动力学、辐射流体力学、神经科学、动力学理论（Boltzmann方程）、非线性关系、交通流动等众多不同的学科。对于这样一般的非线性奇异极限问题，已有若干系统的结果，特别条件(3)的各种推广形式已经找到。对于方程组(8)来说，这些推广形式中的有些类似于H定理对于Boltzmann方程，有些类似于非平衡热力学中的Onsager 倒易关系。关于这些的详细讨论，有兴趣的同学可以查阅下面两篇拙作:

1. Wen-An Yong, *Basic aspects of hyperbolic relaxation systems*, Freistühler, Heinrich (ed.) et al., Advances in the Theory of Shock Waves. Boston, MA: Birkhäuser. Prog. Nonlinear Differ. Eqns. Appl. **47** (2001), pp. 259–305.

2. Wen-An Yong, *An interesting class of partial differential equations*, J. Math. Phys. **49** (2008), 033503.

黎曼猜想与黎曼ζ函数简介

——纪念黎曼猜想发表150周年

杜升华

2009年5月

今年是伟大的德国数学家Bernhard Riemann发表黎曼猜想（Riemann Hypothesis，又称黎曼假设）150周年。在这样一个特别的年份里，我们想对这个著名的问题作些初步的介绍。

黎曼猜想是希尔伯特第8问题的一部分，又是Clay数学所七个“百万美金”问题之一。不过真正的数学家是不会为了金钱而投身数学的；这笔奖金的作用，或许更多地在于提高重要数学问题在公众当中的知名度。在Clay数学所的网站上，人们可以看到如下一段对黎曼猜想的简介[1]：

... The distribution of such prime numbers among all natural numbers does not follow any regular pattern, however the German mathematician G.F.B. Riemann (1826 - 1866) observed that the frequency of prime numbers is very closely related to the behavior of an elaborate function

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$$

called the Riemann Zeta function. The Riemann hypothesis asserts that all interesting solutions of the equation

$$\zeta(s) = 0$$

lie on a certain vertical straight line. This has been checked for the first 1,500,000,000 solutions. A proof that it is true for every interesting solution would shed light on many of the mysteries surrounding the distribution of prime numbers.

这种过于“大众化”的介绍很难让具备一点高等数学知识的人满意。事实上，黎曼猜想的确切表述是：

黎曼ζ函数$\zeta(s)$的全部非平凡零点都落在直线$\mathbf{Re}s = \frac{1}{2}$上。

我们马上会注意到一个问题：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$的收敛区域是半平面$\mathrm{Re}s > 1$，那么为什么要研究直线$\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$？所谓“非平凡”零点（以及相应地，“平凡”零点）指的

又是什么？这就涉及黎曼ζ函数的**解析延拓**。本文将介绍一种解析延拓的过程和与黎曼猜想相关的一些事实，希望使学过复分析的读者都能对此有一个初步然而较为确切的了解。因作者水平所限，这里不能提供黎曼猜想及其进展的更深入的信息。对此有兴趣的读者可参阅中国数学会网站[2]的专题栏目及Clay数学所网站上的“官方”问题介绍[3][4]。

1859年8月，黎曼被选为柏林科学院通讯院士。作为感谢，他于同年10月向柏林科学院提交了一篇论文[5]：*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*（论小于给定大小的素数个数）。这篇论文，黎曼所发表的唯一一篇数论论文，确立了他作为现代意义下的解析数论奠基者的地位，其重要性不仅在于提出了黎曼猜想，更在于深刻地揭示了处理连续对象的分析与处理离散对象的数论之间的奇妙联系。

黎曼在开篇提到，这篇论文以欧拉发现的ζ函数与素数的联系（欧拉乘积公式）为出发点：

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

其中左边p取遍所有素数。

这个公式的发现是等比级数求和公式与算术基本定理的一个精彩应用。欧拉乘积公式第一次把ζ函数与素数联系起来，为数论的研究提供了解析的工具。由于当s趋于1时$\zeta(s)$趋于无穷（因为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散），素数有无穷多个这一事实就成为欧拉乘积公式的一个推论。不仅如此，这一公式还提供了有关素数分布的定量信息，例如素数比数列$\{n^2\}$要密集，因为后者的倒数和收敛。事实上，素数的分布规律一直是吸引着众多数学家的一个谜团；19世纪，这方面的一个中心课题是高斯和勒让德所猜想的素数定理[1]：

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad 当x \to +\infty,$$

其中$\pi(x)$等于不超过x的素数个数。

欧拉的$\zeta(s)$和乘积公式只是对实数叙述的；正是黎曼把它推广到复变量s（而且指出只有当s的实部大于1时收敛），命名公式的两端为$\zeta(s)$，并给出了两种解析延拓的方法。对于复变量，欧拉乘积公式可借助绝对收敛级数的性质来证明，或者考虑到如下命题：两个定义在复平面上一个区域内的解析函数，若在一个有极限点的集合上相等，则它们恒等。这是非零解析函数的零点没有聚点这一事实的推论。特别地，这还意味着解析延拓的唯一性。

[1]素数定理亦可表述为$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$,当$x \to +\infty$，其中$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\epsilon}\frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^{x}\frac{dt}{\log t}\right)$为对数积分函数。容易验证两种形式是等价的。

下面参照Stein的[6]第6章来介绍黎曼的论文中给出的ζ函数的一种延拓方法。为此先简单介绍欧拉Γ函数的解析延拓。

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

上述表达式在半平面$\mathrm{Re}s > 0$内定义了一个解析函数，因为上述积分是在每个带状区域$\{\delta < \mathrm{Re}s < M\}$内一致收敛的，其中$0 < \delta < M < \infty$。

利用分部积分推出，当s实部大于0时，

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^s dx \\ &= -e^{-x} x^s|_{x=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-x} s x^{s-1} dx \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

由此可将Γ延拓到$\mathrm{Re}s > -1$上，即定义

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

然后类似地延拓到任意半平面$\mathrm{Re}s > -m$上，其中m为正整数：

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s}.$$

这样，$\Gamma(s)$就延拓为在整个复平面上亚纯的函数，仅在非正整数$0, -1, -2, \ldots$处有单极点。而函数$1/\Gamma(s)$是一个整函数，仅在非正整数$0, -1, -2, \ldots$处有单零点。[2]

[5]和[6]中对ζ函数作解析延拓的关键是下列等式：当$\mathrm{Re}s > 1$时，

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx, \qquad (1)$$

其中$\psi(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}$。

首先注意到x趋于$+\infty$时$\psi(x)$的指数衰减：

$$\psi(x) \le \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n x} = \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}}.$$

然后作变量代换$t = \pi n^2 x$，

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx = (\pi n^2)^{-\frac{s}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s},$$

[2]事实上Γ函数满足关系式$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$，由此可得$\Gamma(s) \neq 0$及所需结论。详见[6]第6章第1节。

并交换无限求和与积分的次序即可证明(1)式。

令$\vartheta(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}=2\psi(x)+1$。黎曼的论文引用了Jacobi关于$\vartheta$函数的一个结果[3]：

$$\vartheta(x)=x^{-\frac{1}{2}}\vartheta(x^{-1}).$$

由此得到

$$\psi(x)=x^{-\frac{1}{2}}\psi(x^{-1})+\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}.$$

把它代入(1)式右端，得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx &= \int_0^1 \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx\\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left[x^{-\frac{1}{2}}\psi(x^{-1})+\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\right]dx+\int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx\\ &= \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.\end{aligned}$$

将(1)式两端记为$\xi(s)$，则有

$$\xi(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx. \tag{2}$$

由于$\psi(x)$的指数衰减，(2)式定义了一个在全复平面内亚纯的函数，仅在0和1处有单极点，且关于直线$\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}$对称：$\xi(s)=\xi(1-s),\ \forall s\in\mathbb{C}$。

这样，可由Γ与ξ给出解析（更确切地说，是亚纯）延拓到全复平面的ζ函数的表达式[4]：

$$\zeta(s)=\pi^{\frac{s}{2}}\frac{\xi(s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

由于$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$在$s=0,-2,-4,\ldots$处有单零点，$\xi(s)$在$s=0,1$处有单极点，所以$\zeta(s)$仅在$s=1$处有单极点，在负偶数$-2,-4,\ldots$处有明显的零点（即平凡的零点），其余零点（非平凡零点）与$\xi(s)$的零点一一对应。进一步，由$\xi(s)=\xi(1-s)$知$\zeta(s)$的非平凡零点的分布是关于直线$\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}$对称的。

此外，当$\mathrm{Re}s>1$时，由欧拉乘积公式可知$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}$没有零点[5]。所以$\zeta(s)$的非平凡零点都分布在带状域$0\leq\mathrm{Re}s\leq 1$内。

[3]这个结果可由Poisson求和公式推出，详见[6]第4章第2节。

[4]若想了解黎曼ζ函数的更多解析延拓方式，可参阅[7]。

[5]这里用到无穷乘积的一个性质：当$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$时，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛，且该无穷乘积收敛到0当且仅当其某一因子为0。详见[6]第5章第3节。

有趣的是，黎曼ζ函数非平凡零点的分布与素数的分布有微妙的联系，甚至仅仅把上述区域中的等号排除即可导致一个重大的成果——素数定理的证明。1896年，法国数学家Hadamard与比利时数学家de la Vallée Poussin几乎同时给出了素数定理的证明。在他们的证明中，关键的一步就是证明$\zeta(s)$在直线$\mathrm{Re}s = 1$上没有零点（这等价于$\zeta(s)$的非平凡零点都分布在$0 < \mathrm{Re}s < 1$内）。详见[6]第7章。

由此不难预料黎曼ζ函数与黎曼猜想对于素数分布的重大意义，而后者正是黎曼的论文[5]的主要目的。在[5]中，黎曼采用了与这里略有不同的记号：$\Pi(s) = \Gamma(s+1)$，$\xi(t) = \Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$，其中$s = \frac{1}{2}+ti$。他指出$\xi(t)$只有当$t$的虚部在$\frac{1}{2}i$与$-\frac{1}{2}i$之间时才会等于零，以及$\xi(t)$的实部介于0与$T$之间的零点个数约为

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi},$$

接下来便提出了著名的黎曼猜想：

Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind.

(One finds now in fact about so many real zeros inside this domain, and it is very likely that all the zeros are real.)

这句话实际上是两个猜想。前半句相当于说ζ函数的位于临界线$\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$上的零点在所有非平凡零点中的比例等于1，一个比一百五十年来所证明的关于ζ函数零点分布的所有结果都要强的命题，然而这里是以完全肯定的语气叙述的！黎曼的论文[5]中有不少一笔带过的地方，其详细证明后人在几十年后才做得出来，由此也印证了他的天才（[8]中有非常生动和详尽的介绍）。虽然不知道对这一命题黎曼是否给出过正确的证明，但遗留下的手稿表明他的每个论断都是有大量的计算和推理作为基础的，决不仅仅靠直觉和猜测。后半句就是广为人知的黎曼猜想，只不过表述的形式与目前普遍采用的有所不同。注意，黎曼在此用了猜测性的词语“sehr wahrscheinlich”（很可能），然后评论道：

Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

(For this a rigorous proof would certainly be desired; I have however set this exploration aside after several quick unsuccessful attempts, as it seemed for the next purpose of my investigation unnecessary.)

可见这个问题是如此之难，以至连黎曼都放弃了证明的尝试。这里提到的“den nächsten Zweck”（紧接着的目标）是，利用ζ函数给出素数分布的精确公式。论文得到的结果为：

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\alpha} \left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0),$$

其中α为Riemann论文中$\xi(t)$的实部大于0的零点（$\frac{1}{2}+\alpha i$就是ζ函数在上半平面的非平凡零点），$f(x)$定义为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{\frac{1}{n}})}{n}.$$

由此得出$\pi(x)$的表达式[6]：

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{\frac{1}{n}}),$$

其中μ为Möbius函数：

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{当} n = 1; \\ (-1)^k, & \text{当} n \text{为} k \text{个不同素数乘积}; \\ 0, & \text{当} n \text{有重因子}. \end{cases}$$

黎曼ζ函数的零点明显地出现于以上公式中，这就揭示了ζ函数零点的分布与素数分布之间的联系。事实上，黎曼猜想与素数定理跟素数实际分布的偏差有密切关系：1901年，瑞典数学家von Koch证明了，假如黎曼猜想成立，那么素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差为$O(\sqrt{x}\ln x)$。

下面简单列举一些黎曼猜想研究历程中的重要结果(详细的介绍和更多信息可参见[8]和[9])：

- 1914年，Bohr-Landau定理：对于任何$\delta > 0$，位于$\mathrm{Re}s \geq \frac{1}{2} + \delta$ 的非平凡零点所占的比例为无穷小。

- 1914年，Hardy定理：黎曼ζ函数有无穷多个非平凡零点位于临界线$\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$上。

- 1942年，Selberg临界线定理：存在常数$K > 0$及$T_0 > 0$，使得对所有$T > T_0$，黎曼ζ函数在临界线上$0 \leq \mathrm{Im}s \leq T$的区间内的非平凡零点数目不小于$KT\ln T$。这表明黎曼$\zeta$函数在临界线上的零点在全部非平凡零点中所占的比例大于零。

- 1974年，Levinson证明了黎曼ζ函数至少三分之一的非平凡零点位于临界线上；1989年，Conrey把这一数字推进到五分之二。

- 截至2004年，人们已验证了黎曼ζ函数的至少前10^{13}个非平凡零点位于临界线上。

[6]这里在$\pi(x)$的间断点x处（即x为素数时）取值为左极限和右极限的平均。

从数值验证结果来看，黎曼猜想的正确性确实是“sehr wahrscheinlich”。这些验证也一次又一次在人们普遍产生怀疑的时候带来了信心。然而对**有限**个零点所作的数值验证，毕竟无法构成对涉及**无限**多个零点的黎曼猜想的证明。整整一百五十年来，黎曼猜想仍然像一座高不可攀的山峰，考验着人类智慧的极限，尽管已有无数杰出的数学家沿着陡峭的山路努力攀登，同时开辟出山后的一大片美丽园地：据粗略统计，当今数学文献中已有超过一千条命题或“定理”以黎曼猜想的成立为前提。可以预计，黎曼猜想的证明必将极大地丰富人们对数学世界的认识，为翻天覆地的理论发展创造可能，这将是即使百万美金也无法衡量的**人类心智的荣耀**。

据说，希尔伯特有一次被问到如果能在去世500年后重返人间，他最想问的问题是什么。回答是，最想知道是否已有人解决了黎曼猜想。那么，但愿434年之后的人们能有一个肯定的答案吧！

参考文献

[1] http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis

[2] http://www.cms.org.cn

[3] E. Bombieri, *The Riemann Hypothesis*, http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/riemann.pdf

[4] P. Sarnak, *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis (2004)*, http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/Sarnak_RH.pdf

[5] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

[6] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

[7] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, 1986, 2nd Ed.

[8] http://www.changhai.org/articles/science/mathematics/riemann_hypothesis

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

概率论感觉测试

王子卓[1]

1. 假设考试周为 1 个礼拜（周一到周日），且考试时间为均匀分布，假使你有 3 门考试，则最后一门考试大约在：
A 周五
B 周六
C 周日

2. 如果你去参与一项赌博，每次的回报为正态分布，假设你赌了 100 把发现赢了 10000 块（明显是很小概率事件，但假设确实发生了），那么你觉得你最有可能是因为：
A 有一把赢了巨多
B 一直在慢慢的赢
C 两种情况都有可能

3. 有一根密度不均匀的绳子，你想通过测量多点的密度来估计他的重量（你知道截面积）。则如果给你 n 次测量密度的机会的话，如果 n 很大，（估算质量就通过这些点取平均然后乘以截面积）：
A 则按规律选取测量点会测得准些
B 随机选取测量点会测得准些
C 两种方法差不多

4. 台湾大选，假定马英九最终得到 600000 票，谢长廷得到 400000 票，如果一张一张的唱票，则过程中马英九一直领先谢长廷的概率为：
A 0.1
B 0.2
C 0.3
D 0.4

5. 你拿 10 块钱去赌场赌大小，你有两种玩法，一种是每次赌 10 块，一种每次赌 1 块，你决定都是输光或者赢到 100 块就走，则：
A 两种方法输光的概率一样

[1] 数学系 03 级师兄,现就读于斯坦福大学

B 第一种输光的概率较大
C 第二种输光的概率较大

6. 100 个球随机的放在 100 个箱子里，最后空箱子的数量大约是：
A. 0-0.1
B. 0.1-0.2
C. 0.2-0.3
D. 0.3-0.4

7、打 10000 副拱猪，总共持有 9500-10500 个 A 的概率大约在：
A. 80%-90%
B. 90%-95%
C. 95%-99%
D. 99%以上

8. 有以下几个国家,每个国家有自己的习俗。问哪个国家长期以后男人最多：
A. 每个家庭不断的生孩子直到得到第一个男孩为止
B. 每个家庭不断的生孩子直到得到第一个女孩为止
C. 每个家庭不断的生孩子直到得到一男一女为止
D. 以上几个国家最后男女比例基本一样

9. 实验室测试灯泡的寿命。在灯泡坏的时候立刻换新灯泡。灯泡寿命约为 1 小时。考察 10000 小时时亮着的那个灯泡：
A. 那个灯泡的寿命期望也约为 1 小时
B. 那个灯泡的寿命期望约为其他灯泡的 2 倍
C. 那个灯泡的期望寿命约为其他灯泡的 1/2
D. 以上说法都不对

10. 如果一个群体里，每个个体以 0.2 的概率没有后代，0.6 的概率有 1 个后代，0.2 的概率有两个后代，则：
A. 这个群体最后会灭绝
B. 这个群体最后将稳定在一个分布，即种群大小在一定范围内震荡
C. 这个群体最后将爆炸，人口将到无穷
D. 不一定会发生什么

11. 给一个 1-n 的排列，与原来位置相同的数字的个数的期望大约是 （如 n=5 则 51324 与原来位置只有 3 是相同的）：
A. 1

B. log n
C. ln n

12. 如果有 3 个门，有一个背后有大奖。你选中一个，主持人知道哪个门后面有奖，并且总会打开另外两个中的某个没奖的。现在你有一次换得机会，你应该：
A. 换
B. 不换
C. 换不换都一样

13. 以下那件事情发生的期望时间最短：
A. 在第 0 秒，一个物体从原点出发，每一秒以概率 1/2 向左走，1/2 向右走，第一次回到原点的时间
B. 一只猴子，每秒种随便按键盘上的一个键，第一次打出"Beijing WelcomesYou"的时间
C. 在第 0 秒，一个物体从原点出发，每一秒以概率 1/2 向左走，1/2 向右走，第一次到达 1 的时间

14, 美国的 25 分硬币共有 50 种，上面有 50 个州的图案，如果我们每次得到的硬币是随机的，则大约收集多少可以收集全：
A. 200
B. 300
C. 400
D. 500

15. 假设有 1000 次 100m 短跑大赛，每次比赛的冠军成绩都在 9.7-10 之间均匀分布，问期望有多少次比赛比赛能够破纪录：
A. 7
B. 10
C. 15
D. 32

16. 在打桥牌的时候，如果你和对家共持有某门花色的 9 张牌，则剩余的 4 张牌怎样分布的概率最大：
A. 2-2
B. 3-1
C. 4-0

17. 如果一个物体在 3 维随机游动，也即每一刻他可以向左，右，上，下，前，

后等概率的走，长久来看，则会发生什么情况：
A. 此物体无穷多次回到原点
B. 此物体无穷多次回到任何一条坐标轴上，但不会无穷多次回到原点
C. 此物体不会无穷多次回到任何一条坐标轴上

18. 扔 10000 次硬币，其中最长一次连着正面的次数大约会是多少：
A. 100
B. 13
C. 9
D. 4

19. 有一支股票，初始价为 1，每天的价值变化率独立同分布，且期望为 0，不恒为 0。则：
A. 股票在任何时刻期望价值为 1
B. 股票以概率 1 变成 0
C. A 和 B 都对
D. A 和 B 都不对

20. 当我们考虑一种可能重复发生的事件时，哪种方式更科学：
A. 按照第一次发生这个事件的时间作为一个起点，考虑从其本身出发之后的性质
B. 按照最后一次发生这个事件的时间作为一个起点，考虑从其本身出发之后的性质
C. 以上都可以
D. 以上都不可以

概率论感觉测试答案

1.Answer: B. 一般的讲, 在[0,1]之间 n 个均匀分布的随机变量最大值期望为 n/(n+1)，也就是可以认为这 n 个随机变量分别大约在 1/(n+1),2/(n+1),...,n/(n+1)。这道题通过这个方法算一下答案大约是周六的上午。

2.Answer: B. 也许答案对很多人有些出乎意料。在这种情况下，可能有人觉得能够连续赢很多把很难，但是实际上赢一把大的更难。这个问题是随机问题中的长尾和短尾的问题(Heavy Tail vs Light Tail)。长尾的意思就是取大的值的概率不是很小，而短尾正好相反（具体的定义为短尾分布的密度函数是指

数下降的）。容易验证题目中的正态分布属于短尾，因此答案是 B。如果稍微改一下题目中的分布，使其成为长尾的分布。则有可能是因为一次赢了很大而最后赢的。另外跑题说一句，有一本书叫《长尾理论》，里面说明了现在的经济中有很多分布是长尾的，比如说一年销量排在 100000 名之后的歌曲仍然能占据市场的一部分。这是电子商务流行的很重要原因，因为不必支付储存这个长尾的 cost。

3. Answer: A. 也许这个答案也略有些意外。对于一维的情况，方法 A 要好于方法 B。不过在高维的情况下方法 A 就一般情况下不如方法 B 了，原因是要想获得相同的效果，这个"有规律的点"需要选取太多。这是所谓的 Quasi-Monte Carlo Sampling 和 Monte Carlo Sampling 之间的关系。

4. Answer: B. 直觉上讲这个概率并不会太大，而且尤其是在前面几张的时候多少会出现一些反复。实际上这个结果跟一共多少人投票没什么关系，如果得票比例为 a:b(a>b),则这个概率为(a-b)/(a+b)。

5. Answer: A. 不管什么赌法都不会改变这个概率。我认为这是随机过程中一个比较简单但是很有意义的结论，意思就是说 you can't beat the system。这件事情说明了对于像股市，赌博这种系统，如果你假设了随机性，则其实怎么操作结果都是一样的。因此重要的在于发掘其中的非随机性。另外，到 100 的概率很容易计算，因为初始值是 10，假设到 100 的概率为 p，则有 100*p+0*(1-p)=10，也即 p=0.1。

6. Answer: D.这个题可以用简单的概率论计算。结论是不管多少个球，c*n 个球放到 n 个箱子里，最后空箱子的个数约为 e^(-c)，现在的情况是箱子数和球数一样多，那么就约为 e^(-1)。

7. Answer: D. 这个可以用中心极限定理计算。事实上这个题也不需要计算，只是要考察大家的一个感觉，实际上这个概率大于 0.99...9，一共有 9 个 9，尽管有时候我们打牌仍然觉得牌总是很差, 只是我们不注意我们抓好牌的时候罢了。

8. Answer: D. 我们只需要考察一个家庭最后产生多少男孩和女孩即可以。用概率的方法可以得到不管哪个方法都是 1:1。事实上，我们只是把一个很长的男女的序列按照不同的方式来截断。当然这个序列本上包含多少男女是不变的。我每次都愿意以另外一个例子来说明，那就是如果我们在网上下棋，可以每天下到第一盘输为止或是第一盘赢为止或是有输有赢为止，显然不管怎样，因为你的实力是恒定的，你永远都是你本来应有的胜率。

9.Answer:B. 这个题可能稍难。如果具体的计算需要一点本科高年级的知识。不过我们仍然可以从直觉得到结果。事实上，当每个灯泡或是我们观测的事物的生命是随机的时候。在时间足够久以后的一点，那个事物的寿命要长于这个事物本身平均的寿命。原因是比较直观得——正是因为它寿命长导致我们容易观测到。简单的说，如果灯泡有两种，一种只能坚持 1 小时，一种能坚持 100 小时，那我们在后面观测到的 99%都可能是 100 小时那个。所以观测到的对象平均寿命要比这个对象整体的平均寿命要长。通常我们认为灯泡的寿命是指数分布的，在这个情况下，答案应该是恰好 2 倍。对于一般的分布，甚至有可能平均寿命有限，而观测的那个寿命期望是无限的。 这个问题还有另外一个背景——在美国一次监狱调查中被发现，被调查的囚犯的平均判刑年数要远大于全美平均判刑的年数。

10.Answer:A. 这是个简单的人口模型。这个可能直觉比较困难，但是这个实际上和后面的一道题道理是一样的。注意到每一代的期望总是 1。因此根据上次的答案，这个群体最后会灭绝。对于这种模型，当每一代的期望小于等于 1 时，最后的结果都是会灭绝。对于期望大于 1 的情况，我们也可以很简单的通过解方程得到灭绝的概率。

11.Answer: A. 这个题要去算具体有几个数字和位置相同的概率是很困难的，不过实际上有一个很简单的方法。在第 1 个位置，这个排列的第 1 个数字为 1 的概率为 1/n，而期望是可加的，所以总共与原来位置相同的数字的个数的期望应该是 1。也就是说不管是多少的数字，平均总是有一个数与顺序是相同的。期望的可加性看似简单，但是实际中非常有用，很多时候都会忽略这个简单的方法。另外，这个题会非常经常出现在考试和习题中。

12.Answer: A. 这个是网上非常经典的一个问题了。不换正确的概率是 1/3，换正确的概率是 2/3。我比较喜欢这样去想，试想一下如果有 100 个门，你先选定 1 个，然后主持人打开 98 个空的，然后给你机会换不换。我想如果这样，你不难做出正确的选择。

13.Answer:B. A 和 C 两个事件发生的时间的期望都是+inf. 只有 B 是有限的。A 和 C 说明了等概率的赌博不可能赢钱（如果 C 是有限的则参加赌大小的游戏总能赢钱了）。而 B 说明的是另外一条概率上的定理,"What always stands a reasonable chance of happening will almost surely happen, sooner rather than later",也就是说从任何时刻开始，总有一个固定的概率发生的事情(比如一个猴子打出 beijing welcomes you, 这个概率可能是 1/26^20 左右)，不管这个概率是多少，这件事情早晚能发生。

14.Answer: A. 这是所谓的收集硬币问题。具体解法不是很容易。不过结论是要收集齐 n 种硬币，需要大约 nlogn 个。大约思路是收集第 k 个时候需要大约 n/(n-k)次。平时我们收集一些食品里的卡片，也都遵循这个规律，不过多数时候每种卡片的数量都是很不同的。还记得小时候可乐里收集到苹果加蜡烛可以得到到头等奖，不过最后也没收集到任何一个苹果。

15.Answer: A. 这是所谓的破纪录问题。假设均匀分布,则最后 n 次比赛之后这 n 个成绩形成一个排列。第 k 次创纪录的概率是这个排列中第 k 个在前 k-1 个之前的概率，也即 1/k，所以 n 次比赛大约有 1+1/2+1/3+...1/n 次破纪录，也即约为 logn 次。

16.Answer:B. 可以简单计算得到这个结果。3-1 的概率应该是 50%。2-2 的概率是 37.5%。4-0 的概率是 12.5%。但是如果有奇数张，则最平均的就是最可能的。

17.Answer: B. 1 维和 2 维的随机游动是常返的，也就是说会无穷多次回到起点（尽管回来的平均时间不是有限的），而 3 维以上的随机游动是非常返的。因此对于 2 维的某个坐标，此物体会无穷多次经过，但是不会无穷多次经过原点。

18.Answer: B.这也是一个特殊的概率问题，叫做 Head Runs.答案应该是 log2^n，大约为 13。

19.Answer: C. 这个可以参见网上的一篇文章 The Flaw of Average. 对于很多投机的东西，平均值总是不变的，但是多数人都会倾家荡产。其实仔细想想很有道理，比如说你的股票第一天涨 10%。第二天跌 10%或是第一天跌 10%，第二天涨 10%，最后的结果都是跌了 1%。所以要保持增长所需要的是远大于 0 的平均变化率，这个是一般人难以做到的。

20.Answer: A. 这个问题深一些的背景在于 Kolmogorov 向前向后微分方程。很多人知道向后微分方程更通用，但是并不知道原因。事实上，向后微分方程是基于 A 的方法对事件进行分解得到的，而向前微分方程是基于 B 的方法对事件进行分解的。但是有很多重复发生的事情会越发生越频繁，以致没有最后一次发生的事件。但是我们总能找到第一次发生的时间。所以相对来说 A 更科学。

访谈

采访对象： 张贤科老师
记者： 张野平 孙望儒

Q：张老师，您能否给我们讲述一下您的求学经历？

我们当时的条件与你们现在相比，那是差了很多。我从小很喜欢数学，但是当时那个年代，面临过许多困难，最大的考验有两个：一是经济上的困难，二是文革的影响。

我上学那会儿是五十年代，建国不久，全国学习知识建设祖国的热情都非常高，气氛很好。我小学时候有个外号叫“数学系”，当时都是小孩都不知道什么意思，感觉数学好的人，就这样叫。但后来，到中学时，国家折腾，我们就很困难了，我好几次差点辍学；我的同学辍学的很多，一路能学下来的屈指可数，也因为那时考初中、高中和大学的录取率都非常低，尤其是我们那几届初中正值各种政治运动三年困难时期，饿死很多人，考上高中的特别少。高中时候我父亲去世了，极端困难。之所以能冲破难关继续上学，是因为太爱学习了，无论如何要上学。初中时候很多次是由于三好学生奖励的课本。 但有一次没奖励课本，到期中考试了我还没有课本，照样考试。高中时，整个高考期间我一直连政治课本也没有。记得有一个老师把他政治学习的一张报纸借给我看了一天又要回去了，上面有一篇“九评”批苏修的文章。 现在想想还后怕，政治少考几分就考不上大学了。你们可以想象，我们当时的学习条件有多么艰苦。 记得初中时写了《梅竹松》的小令自勉，其中有：“竹，铁骨钢筋青铜肤，不屈节，任凭北风怒”。

当时我考取中国科学技术大学时，我印象特别深的是，送录取通知书的人离很远很远的地方就大喊：张贤科啊，毛主席来叫你了！因为当时科大在北京。 我乍一听还不知怎么回事呢，没和考大学联系起来。当时中科大在玉泉路，同学穿着都很简朴，但有一种拼命三郎的精神，通宵教室 24 小时亮着。流传着一句话叫“穷北大，富清华，不要命的上科大”。当时华罗庚是副校长和系主任，我们学的是“华龙”，就是按华罗庚的一系列课程学习。当时热情很高，其乐无穷。

但文革来了，国家的各项事业都中断了。中国中断了不止十年，前后影响有 20 年的断代，当然文革中也不是每天都在搞运动的，我在文革中先后还是看了些诗词，文史哲，相对论，再后期也看了点英语，数学书。文革最盛时，苏联的核入侵威胁使当时的中国处于极度危险之中，当时的中国（连同文革）实际上快维持不下去了，到处在疏散备战。中科大几经辗转最后搬迁到安徽，我们也几经

辗转，到过南京的某部队去劳动锻炼，最后到县里党校和做社教工作等。一路辗转我都是珍藏着我的大学课本，主要是华罗庚的几本厚书，是我精神上的宝贝，但也有一丝哀愁，不知道这些书和知识今生还能不能用上。当时盛行“读书无用论”，多少人早把书丢了或者烧了。我的同学很多都分配去农村做农民，做乡村会计，卖饭票，卖肉，你数学系会算账嘛。我在县里遇到高中同学，大家都感慨，拉我喝酒抽烟。科学和数学离我渐渐远去了，我的心很痛。记得当时还写了一首抽烟诗。我关起门来躺在床上拼命抽烟，我被烟雾完全埋起来，一边吟我的抽烟诗一边泪水痛流。这个抽烟诗我没保留下来，但当时的其它诗里反映了这种痛苦甚至绝望的心境。例如，赠中学好友吴安勤的：

识君青龙隈，辞君去燕北。

十年一相见，语君声欲悲。

仰首望征鸿，指点说云飞。

案前共红色，杨岸紫骝肥。

有“声欲悲”的悲情，有“望征鸿”的向往，也有“案前共红色（红酒），杨岸紫骝肥（要走）”的自我期许。

后来在林彪折戟沉沙之后，气氛好转，刘达在科大举办进修班，要招我们这些人进修留校作教师。我拼命要回校进进修班。因为当时我已经结婚生子，按规定是不行的了。记得我给当时系党委书记吕兢写了一首诗，后四句是这样：

三岁未凋天地色，一冬几冷男儿肠。

万端总赖东君意，绿我青春鬓上霜。

好不容易回校上了进修班，当时文革尚未结束，还有很多反复。后来终于粉碎四人帮，大家学习和研究的积极性一下子爆发出来了，当时科大很多人，年纪轻轻就倒下了。我也病了多次，当时我被人说成是“每发表一篇文章就进一次医院”——这话基本准确。有好几次是半夜紧急被送医院。为什么闹病呢，就是没日没夜的太用心了。当时我有这样的诗句：

十冬过尽是佳春，好化痴心作赤心。

风暴万机旋昼夜，雷霆三界觅梦魂。

又说“笔下功底犹恐浅，枕上追索梦里寻”。

当然，这样的日夜追索也多少让我补回了文革的岁月荒废，能在代数数论这样一个很抽象很现代的学科得到一些成果，能从自己喜欢的工作中体味好心情。少年时代的艰苦追求，文革时代的痛苦梦寐，远而视之，倒都成了甜美的回忆：

回首来时风雨路，都在云影画图中。

Q：您当时为什么选择数学系、选择从事数学研究？

当时我们报考专业纯粹是自己兴趣，老师也不太管。当时我学习很多科目都不错，对于数学尤其喜欢。中学时候特想当天文学家，听说爱因斯坦的一个方程可以决定宇宙的有限和无限，感觉很神。有一次暑假作业做周记，阳光透过树叶照到笔记本上，仿佛看到 x、y 在跳动，当时就觉得心中突然有一种神圣感。年轻人偶有梦想，希望能成为希尔伯特、爱因斯坦那样的大数学家、科学家。

那时有一个流行口号：“学好数理化，走遍天下都不怕”。 提到科学技术大家第一个印象就是数理化；所谓高中学习好，主要就是数学好；理科好的人语文一般也好。其实我当时想报数学，也想报物理，还想过报文科。我们的教导主任看到了，不让我报文科。当时我对于有什么大学所知不多，一开始我没有报中国科技大学，一个同学推荐我，说科大是培养科学家的摇篮，华罗庚就在那里。 就是这样，我选择了科大的数学系。那个同学连报了 4 个科大数学系志愿，后来却去上海学化学了。

后来我选择代数数论，是有一定偶然性的。上过我的课的人可能听我说过，大学时一般学生会觉得微积分比代数学得好，我也是这样。代数抽象，一下子不容易有感觉。后来文革时期，搞理论像犯罪，说你脱离实际。但我们心中都向往数学的魅力。当时大家很多人都在搞编码，因为在军事等方面都有很多应用。 我也做过编码，还发表过文章。后来文革结束了，做编码的人就渐渐做到代数数论去了，因为在做编码的时候已经学了代数数论相关的东西了，编码的基础主要是代数数论。

按照我对物理、天文那些体会，“物理，物理，就是要讲理”，那种“对事物机理的理解”的思维意向，对我学习和研究代数数论是很有帮助的。事物是有共性的。数学虽然抽象（代数更抽象），但也是“讲理”的，与其它学科有相通之处。而且，要难学大家都难学，所得结果就更难能可贵。所以不要畏惧抽象和难学。难和易的关系是辩证的。

Q：张老师，您对于现在的同学们学数学和做数学有没有自己的一些建议？

首先，不要把目标定低了。目标低了就局限了自己，放松了自己，不能激发出自己的潜能。年轻人潜力大，要有追求。这不是冒险。我给你们说过，“敲门，门就会开”。人的一生，不光取决于他的聪明才智，更大的是取决于他的追求和毅力，执著的追求。就是我常给你们说的“大志是成功的基因”。退一步说，你学通了一些较难的数学理论之后，即使不在这个方面继续研究，也可以做应用方

面的工作——所谓“法乎其上，得乎其中”，如果你一开始就避开理论学习，那应用也搞不好，因为应用离不开理论，而且搞应用的人里边有理论基础强的，那你自然就比不过人家了。人的志向要像植物的向阳趋光性那样，要不懈地追求光明，不管千折百挠，一旦有机会就拼命向光明生长。几个志趣相投的同学，可以互相交流，互相激励，形成小气候。爱看类似的书，爱谈有关的话题，共同进步。

有些东西固然很难，但一步一步学，一步一步做，也未必难；我常常举原子弹和金字塔的例子，这些都是大工程吧？人们往往望之兴叹。可是分解成很多步骤，就不难了。人类的科学成就都是这样逐步达到的。相对论也不是凭空发现的。成功之后，人们会在自己的创造面前惊叹，甚至不相信是自己创造的。很多人说金字塔是外星人造的。有人佩服爱因斯坦，惊为神人，也有人说爱因斯坦其实什么也没做，只是重复（顶多是改述）了别人的结果，是个骗子，丢了德国的脸。——这都充分证明了，人类的成就都是一小步一小步得来的。量变引发质变。积土成山，风雨兴焉，积水成渊，蛟龙潜焉。同学们，当你们将来功成之时，你们中的许多人也会在自己的成就面前吃惊，“它胜过你当初所有的梦想！”所以年轻人，要有梦想，要展开翅膀，要把目标定得高远一些。

代数数论，当初不少人，包括我的大学老师，劝我不要学，说是难，毕竟文革耽误的太多了。但后来呢，我学了几个月之后就做出了第一篇文章，当然是“算”得特别多的那种，但结果挺好。所以现在我总是问我的研究生们，难道一篇文章真有那么难做么？其实论文也有几种：一种可以戏称为“劳动密集型”的，一种是“知识密集型”的；年轻人写论文做研究，和大师相比，知识深度广度肯定不行，洞察力也不行，那就得多下功夫了，在心力和时间上要花的多。花了功夫做出来的东西，也是很可贵的，别人难以花那么多功夫。如果你花了好多晚上或数个月，云里梦里才想出来的，好多个晚上每次都只突破一点点，逐步积累解决了一个问题，那几乎肯定是有价值的结果。你按部就班套公式得到的结果，肯定价值不大。 因为理科的科研，就是要“到人所未到之境，悟人所未悟之理”，是要有很厚的积累才能达到的。所谓“勤奋是成功的度量”，也就是这个意思。当然这是就社会平均来说的，具体的一个研究当然是有方法和窍门（know-how）的。

另外，关于选择专业的问题，我支持同学们早定目标。年轻人要集中精力，适当早有偏爱。这个在学术界并不是所有人都这样主张的，有的人主张大学乃至于硕士学习的时候，都是所谓“素质”或者“通才”教育，就是说，将来干什么都行。这个对于理科学习，尤其是数学，是不行的。清华基科班的同学，在某种意义上，就是要培养科学的国家队，科学的登山队，要登上科学的高峰的。像国家乒乓球队员那样的，日日月月主要就是练乒乓球，其它的只能为辅。当然专业有广义狭义之分，有一级、二级学科，开始不一定特别明确到底，只是一种偏向。

选专业，首先是根据自己的思维性情特点，看适合学什么。是适合学工，还是适合学理；是适合数学，还是物理；是适合理论，还是应用。其次，要根据自己的志趣爱好（注意这点和前一点是不同的，前者是客观存在的，后者是主观感受的，是心向往之）。然后才考虑其它因素。最好要排除一些功利的因素。因为你们现在所处的时代非常好，愿望往往都能实现，正是展现个人能力、理想，实现自身价值的好时机，一个历史上难遇的机会。

有了想法，可以抽空跟有关老师谈一谈，了解专业情况，进而看一点老师推荐的书。甚至可以参加有关老师的讨论班。也可以自己找有关的书看，开始要看很浅的那种。这样可以很早就对一个专业有渐深的了解。最好的情况下，本科毕业的时候就可以写出论文了，硕士和博士继续深入，会很快成长起来。

现在大环境好，国家处于上升期，鼓励学习和科研，国家的崛起需求将促使在各行各业都有大的创造成就，各行各业都将涌现出一批大师级人物。这个趋势从世界历史上看将不可阻挡。在科学领域中尤其如此。现在国家很缺乏高端人才，文革造成了人才大断层。对于有志青年，是很好的一个机遇，只要有心，那结果往往比你梦想的还要好。

Q：张老师，您在多年的学习研究中有没有自己的一些心得，比如如何学习，如何创新？

当年有一个学生问万哲先，说代数书看不懂怎么办？万哲先先生说：抄。他说自己就抄过。我主要喜欢做笔记，算是变相地抄吧。每一个学科都有一些书，是你必须认认真真看，消化透彻的。那要认认真真做笔记，笔记最起码是简写一下，把书上的东西变换综合，最起码是从书上搬到了你的笔记上，那下一步再设法搬到你的脑子里，血液中。读书需要有消化的过程，也有创造的过程，笔记一定要改写，不要照抄，尽量用自己的语言、符号、图表表达。笔记本上要留地方写自己的注释，评论，尽量理解、改进定理的证明，简化证明，或另给出证明，尽量举例子，尽量推广等等。这就是创造思想的萌芽，这些萌芽可能会成长，最好的情况下会成长为你的研究成果。看书可能要有好几遍笔记，可能后来的笔记会渐渐简略，其实知识就进到脑子里去了。“理解是记忆之父，重复是记忆之母”，小路多走几遍就成了大路。要给大脑强刺激，反复刺激，要努力把逻辑思维链接的小路，开辟成高速公路。如果一个人遇到了一次车祸，差点没命了，那车祸的情景他将一辈子难忘，历历在目。为什么呢，刺激强啊。所以人在学习的时候，要抱着一种兴奋的心态：啊，这个好！这个有趣！太妙了！旁证举例等加深刺激理解，就能学进去了。人对感兴趣、迷的东西，是不觉得累的，是效率最高的。

另外，我的体会，学了东西一定要设法做些东西出来，只有自己做出了东西来的知识，才是你理解得好、不会忘记的。

那这样学习是不是很艰苦呢？其学习领会新鲜优美的理论是很愉快的事。有一句话叫“学海无涯苦作舟”，我很反对这句话，因为它把学习说成了一个苦海无边的景象。学习应当是很甜蜜的。这种甜蜜还表现在另一方面，你在一个地方下了功夫，以后其余的地方就可能势如破竹，高屋建瓴，快意舒畅。

读书当然不是为读而读，主要是为了创造。这个我们一代人受华罗庚影响很大，他是很注重做一些东西的。我们的校训，自强不息，就是要我们永远要积极向上，要有作为。要有做出创新成果的强烈意识，强烈冲力。

理科的创新，重要的是动脑筋。平时看书看文献总要琢磨。要举一反三， 触景生情，由此及彼，小中见大，换位思考。要勇于异想天开，一厢情愿，无中生有，起死回生。比如它是几何问题，我用代数做行不行。它是数的问题，我看多项式怎样，或者反方向考虑。这个有例子，著名的伊瓦萨瓦理论就是有限域上函数域性质到数域的联想；反方向，2002 年的菲尔兹奖就是这样考虑的朗兰兹纲领。横看成岭侧成峰，远近高低各不同。不同的角度，联想、分析和综合，就可能得到创造的萌芽。按辩证法来说，新事物都是孕育脱胎于旧事物的，发展是由量变到质变。所以，旧事物的适当“运动”就引发了新事物的诞生。原来有一句话是“龙生龙，凤生凤，数学系（或言华罗庚）的学生会打洞”。 这个打洞的广义就是“运动”（不外乎分化组合和量变的积累），就产生创新。

关于理论学科的研究创新，再说一点最重要的，就是一定要多看文献，深看文献。上面说了，创新是有本原的，是脱胎于旧事物的。科学的发展有其自身的承继性和规律。牛顿说过他是站在巨人肩上的。要看文献，你先要有专业知识，先要读基础理论，才能看懂文献。还要有志向兴趣，才能去钻研文献。所谓深看，就是要分析联想创造了。看文献不是看小说，文献有看不懂的时候，就要追踪其它或更原始的文献，或查书，或思考解决。我们常说科技前沿，在数学界，这个前沿和界在哪里呢，在纽约吗，在贝克莱吗，不。科技前沿和数学界，就在文献之中。期刊文献还是最先进的国际科技函授大学，它定期地把最新最高最丰富的科研函授材料准时发来，培养着世界上最优秀的一批人。对于理科的科研，可以这样说，“只有好好看文献，才能做出研究；只要好好看文献，定能做出研究”。就是说，看文献是做出成果的充分必要条件了——这话看似武断或玩笑，其实道理是很严肃的：好好地（就是说大量的，长期的，而且有重点带分析思考地）看文献，就能不断重复地加深你的基础，就能不断提高你的专业知识，就能知道研究前沿的情况，就能知道研究什么和怎样研究，就能在文献和科研的相互促进中不断成长发展起来。最后，也是最重要的是，好好地看文献就能不断激发你的创

新热情，激发你生活工作的勇气和志向。

数学研究比起实验物理，生物等等，有自己的好处：不太需要实验，不太需要大量人力物力，而且结果没有时限，甚至随着时间的推移结果会越发经典。数学，思想自由，少受羁绊，少受环境制约，永不过时。 数学家们思维敏捷，海阔天空，自由驰骋，不为五斗米而折腰，“力恶其不出于身也”，简直可以说是先期“大道之行”了，是很潇洒的，往往是最有才气的一群人。所以数学实在是很好的 career。与之比肩的我现在只能想到理论物理了。

Q：张老师，我们都知道您多年来一直给大一本科生讲授高等代数学，我们想问一下您这么多年的教学有什么体会（比如，多次的重复是否会觉得枯燥）？

年轻人都比较喜欢搞研究，有些人不太愿意多花时间讲课，因为我有体会，搞科研的人往往感觉一辈子都不够用，恨不得用两辈子、三辈子的时间。教学对一些人多多少少感觉有负担。 当然也不都是这样的，有人的确对于教学是比较有兴趣的，比如华罗庚，就很喜欢讲课，也喜欢带学生，培养了许多学生。我也是比较喜欢讲课的，从小就将教师和文化文明联系在一起，对于孔夫子就有些崇拜，对于“大成至圣先师文宣王”的称号早就知道，虽然我们那时候很少宣传孔子。所以年轻时候讲课也很认真。在科大的时候是研究生的课和高等代数等课程轮换教的。来清华后很长一段时间也讲研究生的课和专题课等，但要和高等代数同时讲，因为大家的教学任务都很重。清华大学的教学任务比科大要重，可能比北大和其它综合性大学都要重，主要是因为清华的系多学生多，都要上数学课，数学教师又不多——这有清华历史上的原因。所以我是一直主张清华的数学系要扩展为数学学院的，起码也要再增加大约一半教师的样子。 否则对青年教师的压力太大，同时也不利于整个学校的发展。没有强且大的数学系支撑，一流大学在世界上好像还没有先例。更何况清华有这样多的学生，这样多的理科、工科和基础研究项目，而且国内同类大学都在发展强大的数学系（比如北大，浙大，复旦等等）。

但同时讲两门课是比较累的。大学讲课可不是只是课堂上那两小时的事（除非是糊弄学生的平方的立方）。所以后来我讲研究生课就少了，当然还带研究生和讨论班。高等代数课由于很重要，学校、老师、同学都很重视，我也感觉这些年来起码对于清华学生的这块基础的夯实作了应有的努力，起了好的作用，可以问心无愧地说这 16 年来的学生的高等代数基础在世界上相比是不差的。 这个课程和教材，在校内和国内也有积极的辐射作用。所以感到自己的努力是有价值的。这也是教育的规律，人间香火总是要传承下去的，还要兴旺发达，这就要求一部

分有研究工作经验的教授从事基础教学。年龄稍大的教授更应承担起这个责任。

一般来说，讲课要讲得好，首先要求专业知识有一定高度，并且要做过科研的。所谓“从血管里流出来的都是血”。我大学时候听的一些课，和几个报告，至今记忆犹新，终生难忘。讲同样一个问题，怎么去理解这个问题，角度很不一样。另外好的老师对于学生的启发性，煽动性，鼓动性很不一样，比如华罗庚讲课，可能就常常暗示你们以后会搞科研，这种语气和说话的角度潜移默化，给人无形烙印。讲课当然还需要其他东西，比如对学生和教育的爱，激情，相关学科（例如物理）的知识，个人的志趣修养，文史哲知识，表达能力乃至于表演能力。总的来说，我觉得作为大学老师，培养学生是很重要的。

Q：张老师，最后想问您一下，对于数学系同学自己创办的《荷思》有没有一些建议或寄语？

《荷思》我看过，想问一下你们多长时间出一期？（暂时每学期一期——记者）我感觉你们出得太少了，可以不用搞得太过于严重、严肃。比如平时征稿，科学趣味啊，好的习题啊，好的感悟啊，都可以往上面发表。活泼点，制造个小氛围，刺激兴趣。人才往往是成批涌现的，志同道合的人多交流，惺惺相惜嘛，多交流，多写稿子，不要搞得太严肃，对文章的要求不要一律，“不拘一格降人才”。在这个上面发表，可能意义不亚于你的第一篇正式发表的文章，因为这就是一个萌芽。可能这就激发了兴趣。人是社会的人，需要交流，需要欣赏。你们大多是独生子，不要把人事间的关系看待太重，平常心处之。“我见青山多妩媚，料青山见我应如是”——要拿这样的心境对他人。所谓立志和兴趣也是一个动态过程，要不断培养。

以前在中科大，班上有个“练拳园地”，因为华罗庚常说“拳不离手，曲不离口”，数学也要这样。系里学生有一份《蛙鸣》，校里有一个《科大学生学报》。我写的“治学法与辩证法七题”[1]先被学生连载在《蛙鸣》，后又载在学生学报，都是发后告诉我的。清华理学院有一本《探索》，我曾为之写贺词，引一段献给《荷思》：

千里之行，始于足下。/ 鹏程万里，怒化垂天之翼。/ 青春时代的些些积累，点点创造，往往影响着终身的成就。/ 大学时代的小园地，小中有大。/理想在此萌芽，云翼在此孕育。/ 愿大志送你高飞，创新伴你远航！

从各方面看，《荷思》这样一个杂志都是很有意义的。祝愿《荷思》越办越好！

---

[1] 见张贤科老师的个人主页：http://faculty.math.tsinghua.edu.cn/~xzhang/rensheng-zhixue.htm

征稿及致谢

《荷思》是清华大学数学系学生自主创办的数学学术刊物，主要面向各个院系中对数学感兴趣的本科生。

本刊欢迎全校师生任何与数学有关的投稿，无论是长篇的论述，还是精彩的小品，抑或学习/教学的心得、习题的妙解。在原作者的允许下，推荐他人的作品也同样欢迎。

为了编辑方便，建议投稿者能够提供电子版，并且采用 Word 或 LATEX 排版。来稿请注明作者，联系方式。

投稿请寄： THUmath@googlegroups.com

本刊创办一年以来，得到老师和同学们的大力支持。近日，基科 7 字班“高等分析”课程上，卢旭光老师主动提出捐出本门课程的所有讲义费来支持我们年轻的刊物，这一行为也感动了学习该课程的同学们，师生共同为本刊捐款 150 元。在此，我们对卢老师和“高等分析”课程的全体同学致以最真诚的谢意！也对一年来所有热心支持本刊的读者表示由衷的感谢！

《荷思》编辑部
2009-5

联系本刊：THUmath@googlegroups.com
北京市 海淀区 清华大学 紫荆 9 号楼 404B
010-515-31883

我们所做的事可能是渺小的，

但它具有某些永恒的性质。

——[英] G.H.哈代

清华大学

数学科学系