方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$ 初值问题的解*

杜升华　林印　刘立达　王子卓

考虑如下方程的定解问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,\ x\in\mathbb{R},\ t\in(0,\infty). \tag{1}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

其中 a 为正的常数。

(i) 找出一种解 (1)-(2) 的方法或找出问题 (1)-(2) 的一个解 $u(x,t)$。

(ii) 试找出关于 ϕ 和 ψ 的最优的充分条件，使得（你找到的）$u(x,t)$ 属于 $C^{4,2}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ 或 $C^{0,1}(\mathbb{R}\times[0,\infty))\bigcap C^{4,2}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$。

(iii) 对于问题 (1)-(2) 在 $C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ 中定义一种广义解。该广义解是唯一的吗？

(iv) 对于问题 (1)-(2) 是否有任何最大值原理成立？解释你的理由。

(i) 对方程 (1)-(2) 关于 x 作 Fourier 变换：

$$\hat{u}_{tt}(\xi,t)+a^2\xi^4\hat{u}(\xi,t)=0,$$

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{\phi}(\xi),\quad \hat{u}_t(\xi,0)=\hat{\psi}(\xi).$$

解得

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{\phi}(\xi)\cos a\xi^2 t+\frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi^2}\sin a\xi^2 t. \tag{3}$$

令

$$K_1(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi x}\cos at\xi^2 d\xi,$$

$$K_2(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi x}\frac{\sin at\xi^2}{a\xi^2}d\xi.$$

对 (3) 两边作 Fourier 逆变换，得

$$u(x,t)=(\phi*K_1)(x,t)+(\psi*K_2)(x,t).$$

而

$$K_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\sin\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right),$$

*本文是 2008 年春季学期偏微分方程课程的 project 报告。作者均为基数 53 班同学。

$$K_2(x,t)=\frac{x}{2a}\left[S\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi at}}\right)-C\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi at}}\right)\right]+\sqrt{\frac{t}{\pi a}}\sin\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right).$$

其中 S，C 为菲涅尔（Fresnel）函数：

$$S(z)=\int_0^z \sin\frac{\pi s^2}{2}ds,\quad C(z)=\int_0^z \cos\frac{\pi s^2}{2}ds.$$

于是得到形式解 $u(x,t)$ 的表达式：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty} K_2(x-\xi,t)\psi(\xi)d\xi \qquad (4)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\sin\left[\frac{(x-\xi)^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right]\phi(\xi)d\xi \\ &\quad +\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{x-\xi}{2a}\left[S\left(\frac{x-\xi}{\sqrt{2\pi at}}\right)-C\left(\frac{x-\xi}{\sqrt{2\pi at}}\right)\right]+\sqrt{\frac{t}{\pi a}}\sin\left[\frac{(x-\xi)^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right]\right\}\psi(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

(ii)K_1、K_2 的各阶导数如下：

$$\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t}=-\frac{x^2\cos\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{8at^2\sqrt{\pi at}}-\frac{\sin\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{4t\sqrt{\pi at}} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 K_1(x,t)}{\partial t^2}=\frac{12atx^2\cos\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)+(12a^2t^2-x^4)\sin\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{32\sqrt{\pi}t^2(at)^{5/2}} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial x}=\frac{x\cos\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{4at\sqrt{\pi at}} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 K_1(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\cos\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{4at\sqrt{\pi at}}-\frac{x^2\sin\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{8a^2t^2\sqrt{\pi at}} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^3 K_1(x,t)}{\partial x^3}=-\frac{x^3\cos\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{16a^3t^3\sqrt{\pi at}}-\frac{3x\sin\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{8a^2t^2\sqrt{\pi at}} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^4 K_1(x,t)}{\partial x^4}=\frac{-12atx^2\cos\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)+(x^4-12a^2t^2)\sin\left(\frac{x^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)}{32\sqrt{\pi}(at)^{9/2}} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial K_2(x,t)}{\partial t}=\frac{\cos\frac{x^2}{4at}+\sin\frac{x^2}{4at}}{2\sqrt{2\pi at}} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2 K_2(x,t)}{\partial t^2}=\frac{-(2at+x^2)\cos\frac{x^2}{4at}+(-2at+x^2)\sin\frac{x^2}{4at}}{8a^{3/2}\sqrt{2\pi}t^{5/2}} \qquad (12)$$

$$\frac{\partial K_2(x,t)}{\partial x}=\frac{S\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi at}}\right)-C\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi at}}\right)}{2a} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 K_2(x,t)}{\partial x^2}=\frac{t\left(-\cos\frac{x^2}{4at}+\sin\frac{x^2}{4at}\right)}{2\sqrt{2\pi}(at)^{3/2}} \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^3 K_2(x,t)}{\partial x^3}=\frac{tx\left(\cos\frac{x^2}{4at}+\sin\frac{x^2}{4at}\right)}{4\sqrt{2\pi}(at)^{5/2}} \qquad (15)$$

$$\frac{\partial^4 K_2(x,t)}{\partial x^4} = \frac{t\left[(2at+x^2)\cos\frac{x^2}{4at} + (2at-x^2)\sin\frac{x^2}{4at}\right]}{8\sqrt{2\pi}(at)^{7/2}} \tag{16}$$

由 (6)、(10)、(12)、(16) 可见 K_1 和 K_2 满足方程 (1)。而 $K_1(x-\xi,t)$ 和 $K_2(x-\xi,t)$ 关于 x 和 t 的各阶导数均能被关于 ξ 的不超过 4 次的多项式控制，根据积分号下求导的控制收敛定理，当 ϕ 和 ψ 满足

$$\phi(x), \psi(x) \in C(-\infty,+\infty), \quad x^4\phi(x), x^4\psi(x) \in L(-\infty,+\infty) \tag{17}$$

时（易见此时 $x^k\phi(x), x^k\psi(x), k=0,1,2,3$ 也是可积的），有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 K_1(x-\xi,t)}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 K_1(x-\xi,t)}{\partial x^4}\right)\phi(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 K_2(x-\xi,t)}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 K_2(x-\xi,t)}{\partial x^4}\right)\psi(\xi)d\xi \\ &= 0,\end{aligned}$$

即由 (4) 式给出的 u 满足方程 (1)；并且 $u \in C^{4,2}(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$。

为验证满足初值条件，注意到由 (4) 给出的 u 等价于对 (3) 作 Fourier 逆变换：

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\left(\hat{\phi}(\xi)\cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi^2}\sin a\xi^2 t\right)d\xi. \tag{18}$$

若要求

$$\hat{\phi}(\xi), \hat{\psi}(\xi) \in L(-\infty,+\infty), \tag{19}$$

则当 $0<t<1$ 时，被积函数能被 $|\hat{\phi}(\xi)| + |\hat{\psi}(\xi)|$ 控制。从而由控制收敛定理和反演公式得

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi = \phi(x).$$

若进一步要求

$$\xi^2\hat{\phi}(\xi) \in L(-\infty,+\infty), \tag{20}$$

则可对 (18) 式关于 t 在积分号下求导：

$$u_t(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\left(-a\xi^2\hat{\phi}(\xi)\sin a\xi^2 t + \hat{\psi}(\xi)\cos a\xi^2 t\right)d\xi. \tag{21}$$

再由控制收敛定理和反演公式得

$$\lim_{t\to 0+} u_t(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi = \psi(x).$$

综上所述，当 ϕ,ψ 满足条件 (17)、(19)、(20) 时，由 (4) 式给出的 $u(x,t)$ 是原问题在 $C^{0,1}(\mathbb{R}\times[0,\infty))\bigcap C^{4,2}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ 中的解。

此外，若 $\hat{\phi},\hat{\psi}$ 满足

$$\xi^4\hat{\phi}(\xi), \xi^2\hat{\psi}(\xi) \in L(-\infty,+\infty), \tag{22}$$

则可对 (18) 式在积分号下关于 x 求直到 4 阶导、关于 t 求直到 2 阶导，即有 (21) 和如下等式成立：

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(-a^2\xi^4\hat{\phi}(\xi)\cos a\xi^2 t - a\xi^2\hat{\psi}(\xi)\sin a\xi^2 t\right) d\xi. \tag{23}$$

$$u_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} ie^{ix\xi} \left(\xi\hat{\phi}(\xi)\cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi}\sin a\xi^2 t\right) d\xi. \tag{24}$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} -e^{ix\xi} \left(\xi^2\hat{\phi}(\xi)\cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a}\sin a\xi^2 t\right) d\xi. \tag{25}$$

$$u_{xxx}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} -ie^{ix\xi} \left(\xi^3\hat{\phi}(\xi)\cos a\xi^2 t + \frac{\xi\hat{\psi}(\xi)}{a}\sin a\xi^2 t\right) d\xi. \tag{26}$$

$$u_{xxxx}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\xi^4\hat{\phi}(\xi)\cos a\xi^2 t + \frac{\xi^2\hat{\psi}(\xi)}{a}\sin a\xi^2 t\right) d\xi. \tag{27}$$

由此可见，在条件 (22) 下，以上各式中的被积函数均有控制函数，从而由控制收敛定理知 u 的各阶导数均连续，即此时由 (4) 式给出的 u 属于 $C^{4,2}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$。

(iii) 设 $Q_T = (-\infty,+\infty)\times[0,T]$。在条件 (22) 下，易见 u 的各阶导数均在 Q_T 上有界。设 $\zeta \in C^{4,2}(Q_T)\cap L(Q_T)$ 满足

$$\lim_{x\to\pm\infty} \zeta(x,t) = 0, \quad \forall t\in[0,T] \tag{28}$$

将方程 (1) 两边乘以 ζ 并在 Q_T 上积分，得

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty} (u_{tt} + a^2 u_{xxxx})\zeta dxdt = 0.$$

分部积分，得

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty} u(\zeta_{tt} + a^2\zeta_{xxxx})dxdt \\ +\int_{-\infty}^{+\infty}(u_t(x,T)\zeta(x,T) - \psi(x)\zeta(x,0) - u(x,T)\zeta_t(x,T) + \phi(x)\zeta_t(x,0))dx = 0.\end{gathered}$$

若限定

$$\zeta(x,T) = 0, \quad \zeta_t(x,T) = 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}, \tag{29}$$

则有

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty} u(\zeta_{tt} + a^2\zeta_{xxxx})dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty}(\phi(x)\zeta_t(x,0) - \psi(x)\zeta(x,0))dx = 0. \tag{30}$$

令 $\mathcal{D} = \{\zeta \in C^{4,2}(Q_T)\cap L(Q_T) | \quad \zeta(x,T)=0, \quad \zeta_t(x,T)=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\zeta(x,t) = 0, \quad \forall t\in[0,T]\}$，定义问题 (1)-(2) 的广义解如下：

称 $u(x,t)\in C(Q_T)$ 为 Cauchy 问题 (1)-(2) 的广义解，如果对任意的 $\zeta(x,t)\in\mathcal{D}$，积分等式 (30) 总成立。

由上述推导过程可以看出，在条件 (22) 下，原问题的古典解一定是广义解。下面证明广义解的唯一性。

记微分算子 $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}$。设 $u_1(x,t)$、$u_2(x,t)$ 同是 Cauchy 问题 (1)-(2) 的广义解，即它们都满足等式 (30)。作差后得到

$$\iint_{Q_T} (u_1 - u_2) \Box \zeta dxdt = 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

设 $g(x,t) \in C_0^\infty(Q_T)$，考虑定解问题

$$\begin{cases} \Box \zeta = g(x,t), \\ \zeta(x,T) = \zeta_t(x,T) = 0. \end{cases}$$

对它关于 x 作 Fourier 变换，得

$$\begin{cases} \hat{\zeta}_{tt}(\xi,t) + a^2 \xi^4 \hat{\zeta}(\xi,t) = \hat{g}(\xi,t), \\ \hat{\zeta}(\xi,T) = \hat{\zeta}_t(\xi,T) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\hat{\zeta}(\xi,t) = \int_t^T \cos a\xi^2(t-\tau) \int_\tau^T \hat{g}(\xi,s) ds d\tau. \tag{31}$$

记 $S_T = \{\zeta \in C^\infty(Q_T) | \sup\limits_{(x,t)\in Q_T} |x^\alpha \frac{\partial^{\beta+\gamma}\zeta(x,t)}{\partial x^\beta \partial t^\gamma}| < \infty, \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}\}$ 为 Q_T 上的速降函数空间。易见 S_T 中函数满足 (28) 式。由于 $g(x,t) \in C_0^\infty(Q_T)$，从而 $g(x,t) \in S_T$，故 $\hat{g}(\xi,t) \in S_T$。因此 (31) 式右边属于 S_T，从而 $\zeta(x,t) \in S_T$。这样我们证明了存在 $\zeta(x,t) \in \mathcal{D}$ 使得 $\Box\zeta = g(x,t)$ 成立。

由此可知

$$\iint_{Q_T} (u_1 - u_2) g dxdt = 0, \quad \forall g \in C_0^\infty(Q_T),$$

从而 $u_1 = u_2$。

(iv) 因为在 u 的极值点处 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ 并不具有确定的符号，所以我们猜想对方程 (1) 没有极值原理成立（但尚未找到反例）。不过对于 Cauchy 问题 (1)-(2)，我们有如下的最大模估计：

在条件 (19) 之下，由 (18) 式得

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^\infty \left| e^{ix\xi} \right| \left| \hat{\phi}(\xi) \cos a\xi^2 t + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{a\xi^2} \sin a\xi^2 t \right| d\xi \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^\infty \left(|\hat{\phi}(\xi)| + t|\hat{\psi}(\xi)| \right) d\xi \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\|\hat{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R})} + T\|\hat{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R})} \right), \quad \forall (x,t) \in Q_T \end{aligned} \tag{32}$$