机票预售价格和策略的数学模型

吴玉清 孟昭时 郭晓江

编者按：本文是 2006 年清华大学数学建模竞赛校内赛的论文，在该赛事中本文获得第一名。发表到本刊时作者做了删改。

摘要

本文对机票价格的波动规律以及对不同飞机型号时预售的票数进行了建模求解并对结果作了详细的讨论。

在问题 1 中，我们由粗到细分别建立了独立数据拟合模型、非平稳时间序列模型，并对后者采用了确定性和随机性两种分析方法。在随机性分析中，观察到数据有很强的周期性，我们建立 ARIMA（求和自回归移动平均）模型[1]。首先经过对序列的两次差分运算，将序列化为平稳序列，然后考察该平稳序列的自相关系数，偏自相关系数并对其进行白噪声检验，再用 BIC 准则定阶，建立比较合适的平稳序列的 ARMA（自回归滑动平均）模型，最后用 SAS 软件进行拟合。对机票价格序列拟合的模型为：$g_t = g_{t-1} + g_{t-7} - g_{t-8} + \varepsilon_{\mathrm{t}} + 0.30956\varepsilon_{\mathrm{t\text{-}1}}$ （t=9,10,11...）

用前九周的数据对第十周的数据进行检验得到误差基本小于 5%，这说明了该模型很好地符合了机票价格变动规律。我们用前十周的数据预测后两周的机票价格如下表：

	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
第 11 周	500	500	500	590	590	490	490
第 12 周	490	490	490	580	580	480	480

在问题 2 中，我们首先提出并分析了一个一般性的基本模型：已知客舱的容量n，求最佳预订票数m。通过 Matlab 数值计算此模型得到了很好地解决。通过计算，120 经济舱座位和 8 头等舱座位条件下得出公司纯利润为固定损耗的 67%。对于有三个客舱并优先考虑头等舱和公务舱利益的情况，提出了优先级原则，降级原则，又提出一种新的机票发售方式并证明了这种方式和经典的机票发售方式等价，从而将问题分解为 3 个上面基本模型的解，最终得到航空公司的纯利润值占成本的 66%~68%。以波音 747 飞机为例，求出了预售票方式的最佳解。随后，又详尽分析了公司利润对参数 b/g 和顾客误机概率 p 的灵敏度，绘出了不同的 p 下三个客舱最佳预售票张数的曲线。通过上述分析计算，定性的给出了航空公司在不同情况下应采取的措施，提出了自己的建议。

本文在最后比较了问题 1 中三种模型的优缺点并在问题 2 中提出并解决了一个推广的模型并通过化归方法解决，这两个讨论都很有实用和普遍价值。

（一） 问题的重述

问题背景：某航空公司每天都有一班航班飞往某著名旅游城市，该航班的所有机票均通过互联网来预订，这种预订具有很大的不确定性，旅客很可能由于各种原因取消预订或误机。航空公司制定了一系列的条约。首先，航空公司采用浮动价格在网上进行机票销售，其价格随市场需求情况进行调整，一般来说周末价格会比较高些。其次，合约规定：要求旅客在网上预订机票时先用信用卡预付机票价格的 20%作为定金。如果旅客在航班起飞前 24 小时前就取消预订，

定金将如数退还，否则（包括误机）定金将不再退还。

在旅游旺季，航空公司往往可以在网上预订出超过飞机容量的机票数，以减低旅客由于取消预订或误机时给航空公司所带来的损失。当然这样做可能会带来新的风险，因为万一届时有超出飞机容量的订票旅客出现，将有一部分旅客不能登机，这势必导致航空公司的声誉受损，并引起纠纷。因此，航空公司承诺，那些预先订购机票但不能飞走的旅客，可以不加任何费用乘坐下一班机或者退订，并付给一定的赔偿金。

问题一：试根据所给的十周内预售机票价格建立机票预售价格的数学模型，用模型说明价格变动的规律，并据此估计今后 2 周的经济舱机票销售的参考价格。

问题二：用小飞机载客的时候，如何确定经济舱和头等舱的预定票数量使得航空公司的总收益最大？

问题三：改用大飞机执行该航班任务时，如何制定合适的登机策略才能合理的保障头等舱和公务舱旅客的权益？在该登机策略下如何确定三种票的预售数量使得航空公司获得最大的利润？

（二）　基本假设

1. 在问题一中，我们假设不会出现突发事件而导致机票价格或订票乘客的数量有突然的改变；
2. 在问题二中，用小飞机载客时，我们假设不充分保证头等舱顾客的利益，即如果头等舱已经坐满，多出的持头等舱预订票的乘客不能进入经济舱，只能等待下一班飞机并获得赔偿；
3. 在问题二中，用大飞机载客时，我们假设头等舱和公务舱的乘客的利益能够得到充分的保证，即如果头等舱或公务舱已经坐满，那么持相应的预订票的乘客可以进入下一级的机舱并保证有座位的同时获得赔偿，无论下一级的机舱是否坐满；而持经济舱预订票的顾客如果所有座位都已经坐满，则要等待下一班飞机；
4. 我们假设这个模型在旺季中建立，即所有预售票都能售出。
5. 假设公务舱票价是经济舱的1.3倍，这一点可以从网上实际数据中得到验证。

（三）　本文用到的部分符号及说明

t：时间

g：飞机票票价

S_k：周期指数

n：座位个数

b：造成超员赔偿给每位乘客的钱

s：单次飞行公司的收益

r：飞行中的固定损耗

p：买票的人不能登机的概率

m：预售的票数

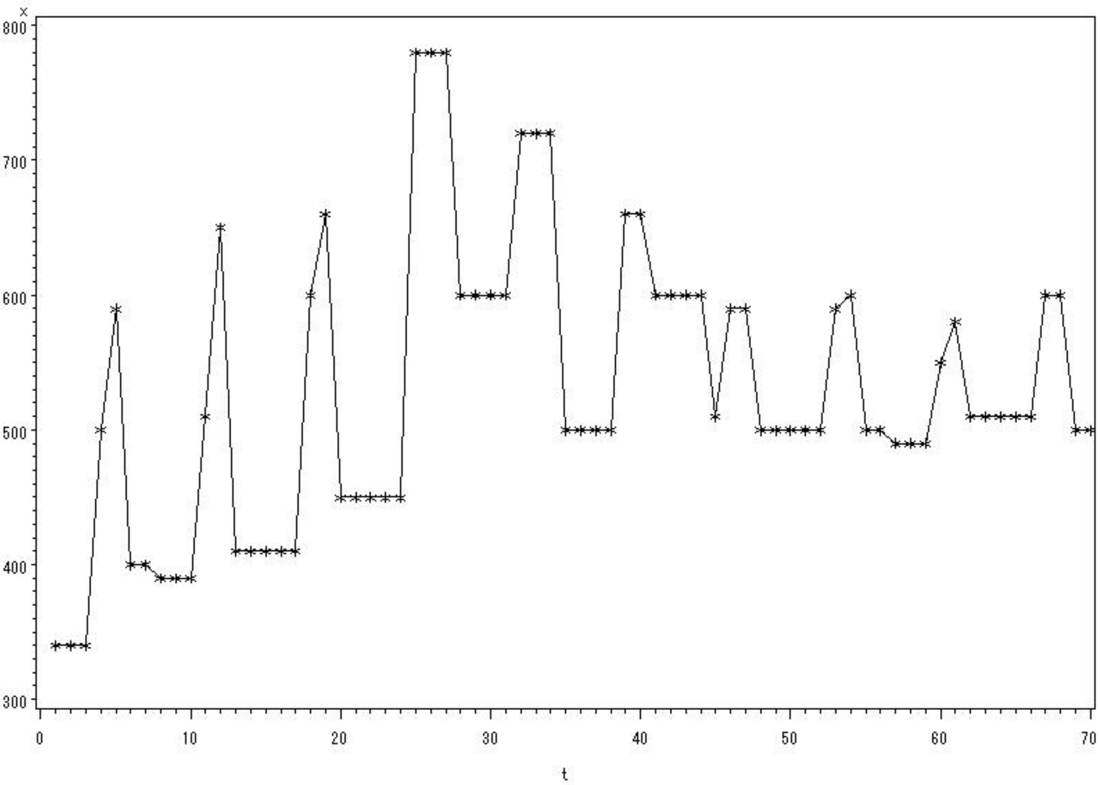
J：单次飞行公司所得到的纯利润占固定损耗的比例

bg：超员赔偿给顾客的钱和机票价格的比，即bg=b/g

其他的符号会在所出现处作具体说明。

（四） 问题一模型的建立、求解与检验

我们作出价格的时序图如下:



图一

观察可知价格随着时间的变化以 7 天为周期有明显的周期性波动趋势，同时每周的平均价格也有一个波动趋势，对这种比较复杂的变化规律，我们尝试用三种模型来分析和预测。

模型一：(略)
模型二：非平稳时间序列确定性分析模型(略)

模型三：非平稳序列的随机分析模型。

1. 模型的建立：我们考虑求和自回归移动平均模型[1]，简记为 ARIMA(p,d,q)模型：

$$\begin{cases}\Phi(\mathrm{B})\nabla^{\mathrm{d}} g_t = \Theta(\mathrm{B})\varepsilon_{\mathrm{t}} \\ \mathrm{E}(\varepsilon_{\mathrm{t}}) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_{\mathrm{t}}) = \sigma_{\varepsilon}{}^2, \mathrm{E}(\varepsilon_{\mathrm{t}}\varepsilon_{\mathrm{s}}) = 0, \mathrm{s} \neq \mathrm{t} \\ \mathrm{E}(\mathrm{g_s}\varepsilon_{\mathrm{t}}) = 0, \forall \mathrm{s}<\mathrm{t}\end{cases} \qquad (*)$$

式中：

∇ 为差分算子，B 为延迟算子：$\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$，$B x_t = x_{t-1}$，则 $\nabla^{\mathrm{d}} = (1-\mathrm{B})^{\mathrm{d}}$

$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$，为平稳可逆 ARMA(p,q)模型的自回归系数多项式

$\Theta(\mathrm{B}) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_{\mathrm{q}} B^{\mathrm{q}}$，为平稳可逆 ARMA(p,q)模型的移动平滑系数多项式

（*）也可简记为：

$\nabla^{d} g_t = \dfrac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$，式中，{$\varepsilon_t$}为零均值白噪声序列。

2. 用 SAS 软件对模型进行求解：

考虑到机票的价格的波动以 7 天为周期，所以对原序列作 7 步差分，差分后的时序图如图 8。

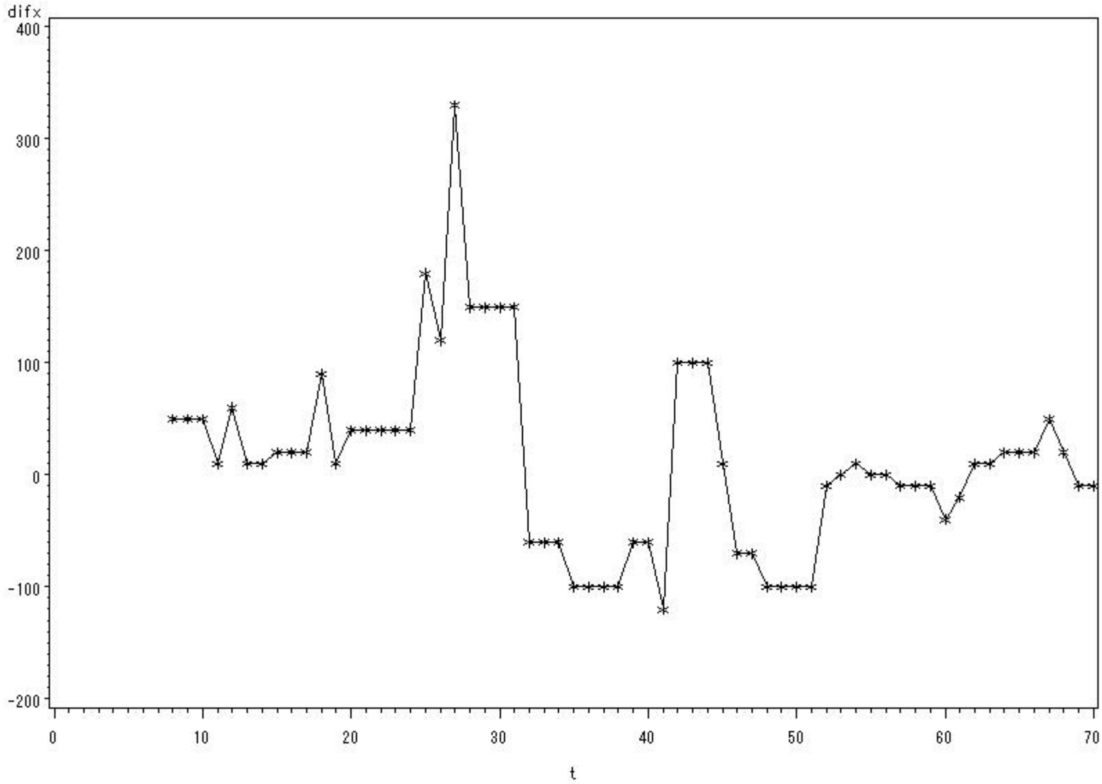


图 8

可见此时周期性已经被消除了，但是还有长期趋势，于是再做一阶差分，如图 9 所示。

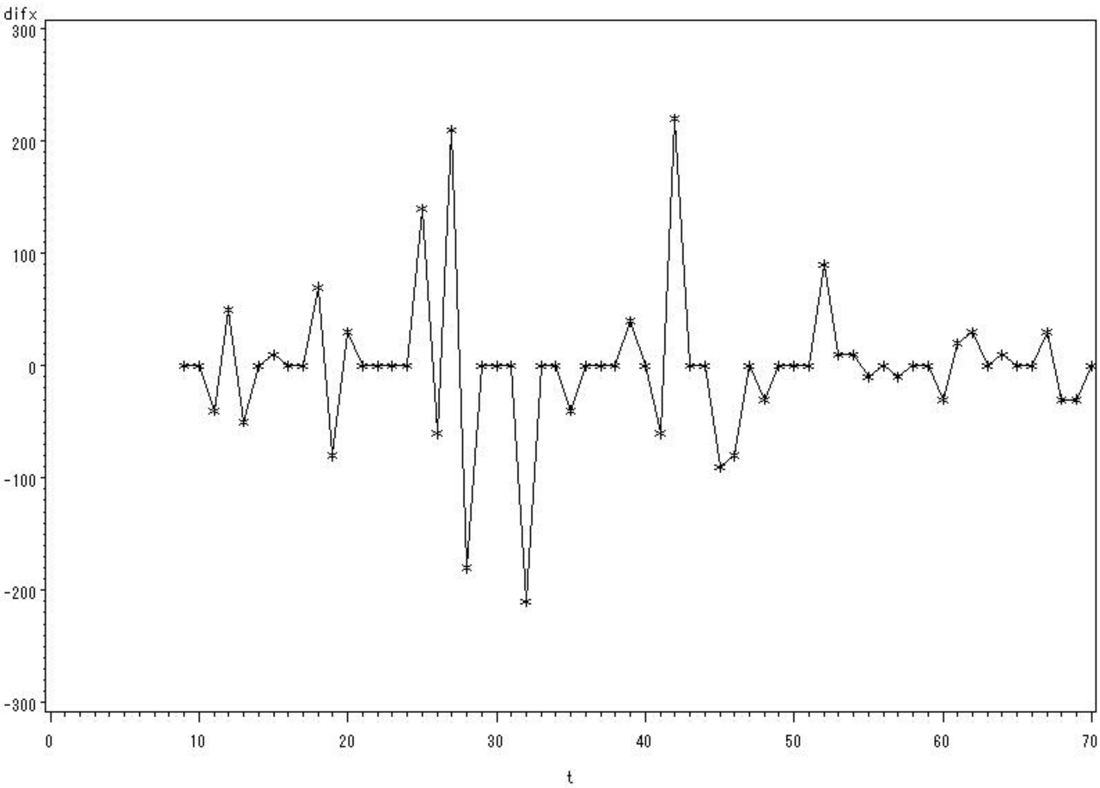


图 9

此时的时序图已无显著趋势或周期，随机波动比较平稳。可以用平稳序列 ARMA 模型进行处理。对差分后的序列计算 ACF（自相关系数）,PACF（偏自相关系数）如下图所示：

```
                                        Autocorrelations

 Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

   0      3979.709        1.00000    |                    |********************|              0
   1     -1233.210        -.30987    |              ******|   .                |       0.127000
   2       696.276        0.17496    |              .     |***  .              |       0.138660
   3      -388.131        -.09753    |              .   **|     .              |       0.142176
   4       308.993        0.07764    |              .     |**   .              |       0.143251
   5      -627.339        -.15763    |              .  ***|     .              |       0.143928
   6      -145.096        -.03646    |              .    *|     .              |       0.146686
   7      -640.584        -.16096    |              .  ***|     .              |       0.146832
   8      -543.825        -.13665    |              .  ***|     .              |       0.149651
   9       721.820        0.18138    |              .     |**** .              |       0.151650
  10      -586.051        -.14726    |              .  ***|     .              |       0.155110
  11      -106.930        -.02687    |              .    *|     .              |       0.157348
  12     23.231849        0.00584    |              .     |     .              |       0.157422
  13       874.830        0.21982    |              .     |**** .              |       0.157426
  14      -981.481        -.24662    |              .*****|     .              |       0.162301
  15      1158.826        0.29118    |             .      |******.             |       0.168237

                                  "." marks two standard errors
```

图 10

```
                         The ARIMA Procedure

                      Partial Autocorrelations

 Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   1       -0.30987    |                ******|      .                |
   2        0.08732    |                .     |**    .                |
   3       -0.02340    |                .     |      .                |
   4        0.03222    |                .     |*     .                |
   5       -0.12927    |                .  ***|      .                |
   6       -0.14266    |                .  ***|      .                |
   7       -0.20100    |                .****|       .                |
   8       -0.27788    |                ******|      .                |
   9        0.11128    |                .     |**    .                |
  10       -0.06279    |                .    *|      .                |
  11       -0.20197    |                .****|       .                |
  12       -0.12215    |                .   **|      .                |
  13        0.12425    |                .     |**    .                |
  14       -0.24942    |                 *****|      .                |
  15        0.06284    |                .     |*     .                |
```

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	Autocorrelations					
6	11.15	6	0.0839	-0.310	0.175	-0.098	0.078	-0.158	-0.036
12	18.56	12	0.0996	-0.161	-0.137	0.181	-0.147	-0.027	0.006

图 11

从白噪声检测结果来看，各阶延迟下 LB 统计量的 P 值都显著大于 0.05，可以认为这个拟合模型的残差序列属于白噪声序列。而从自相关系数和偏自相关系数图中可以看出，自相关系数显出明显的一阶截尾性质，而偏自相关系数显出明显的拖尾性，因此可以尝试使用 AR(1)模型来拟合。为了确保模型的最优化，用 Minic 命令来计算阶数小于等于 5 的 ARMA(p,q)模型的 BIC 信息量，并找出信息量达到最小的模型的阶数，输出结果如下：

Minimum Information Criterion

Lags	MA 0	MA 1	MA 2	MA 3	MA 4	MA 5
AR 0	8.261645	8.238426	8.266045	8.294116	8.360544	8.386607
AR 1	8.234224	8.296212	8.332421	8.35895	8.425157	8.447397
AR 2	8.268551	8.310909	8.371131	8.417919	8.484182	8.513046
AR 3	8.316378	8.355571	8.420425	8.48331	8.549783	8.570875
AR 4	8.381432	8.419988	8.485703	8.537203	8.58739	8.635322
AR 5	8.432667	8.467554	8.534009	8.571139	8.637662	8.700965

```
Error series model:  AR(8)
Minimum Table Value: BIC(1,0) = 8.234224
```

图 12

从结果可以看出用模型 AR(1,0)拟合为最优。使用条件最小二乘估计法，得到未知参数的估计值为：

Autoregressive Factors

```
Factor 1:  1 + 0.30956 B**(1)
```

图 13

即 $g_t = (1+0.30956B)\varepsilon_t$

综合考虑前面的差分运算，对机票价格序列拟合的模型为：

$$(1-B)(1-B^7)g_t = (1+0.30956B)\varepsilon_t$$

即 $g_t = g_{t-1} + g_{t-7} - g_{t-8} + \varepsilon_t + 0.30956\varepsilon_{t-1} \quad t = 9,10...$

3. 模型检验

我们用前九周的价格数据作拟合，并预测第十周的价格，列表如下：

表五　　　　　　　　　模型三对第十周价格的预测结果

	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
预测值	500	500	500	560	590	520	520
实际值	510	510	510	600	600	500	500
误差(%)	1.96	1.96	1.96	6.67	1.67	4.00	4.00

从上表中可以看出，用 ARIMA 模型所得到的结果和实际值误差很小，基本在 5%以内。因此，本模型是很优秀的，用来预测也是十分可信的。

将前十周的序列拟合值和实际值联合作图如下：

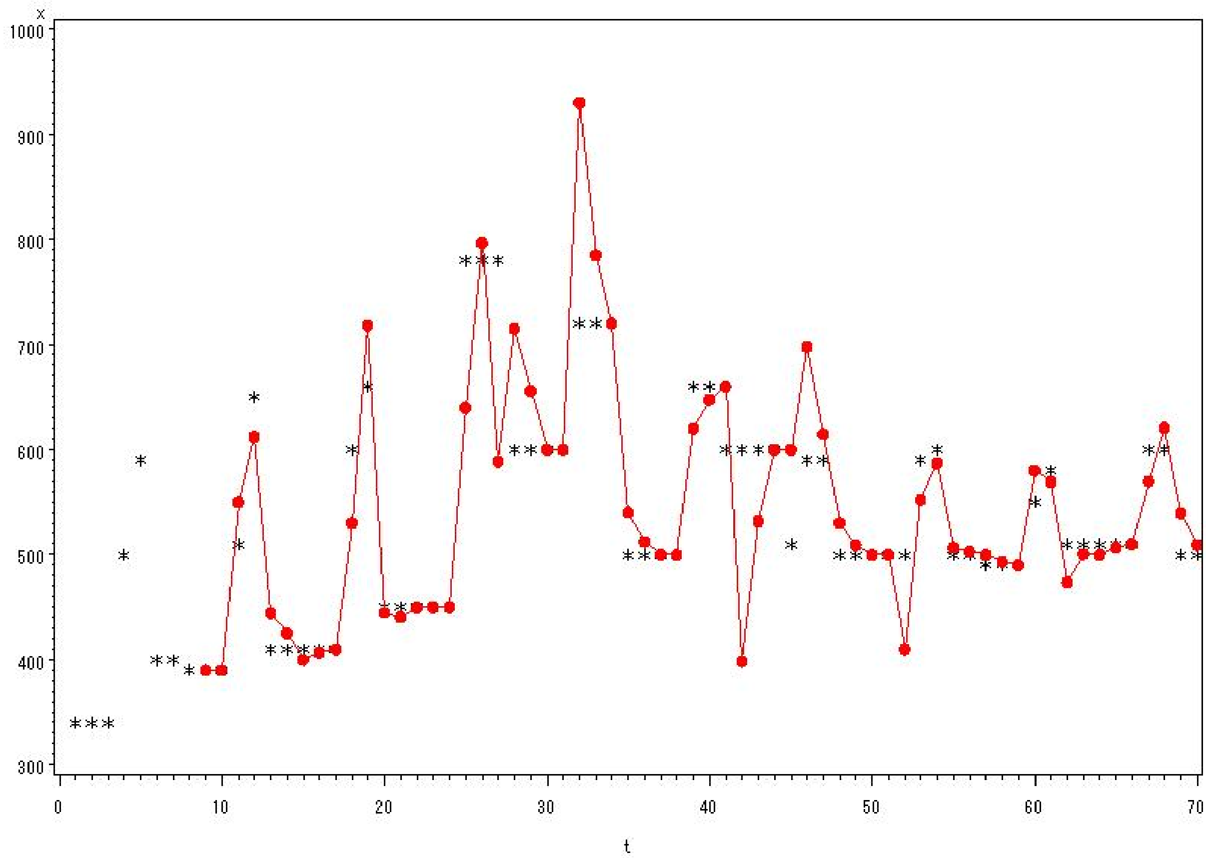


图 14

图中星号为实际值；曲线为拟合值。

从上图中可以看出，拟合曲线和每个点结合的也很不错

4. 预测

利用前十周的数据拟合后的模型对第十一，十二周进行预测，结果如下表：

表六　　　　　　　　　　模型三对十一十二周价格的预测

Obs	Forecast	Std Error	95% Confidence	Limits
71	500.0000	60.4830	381.4556	618.5444
72	500.0000	73.4987	355.9452	644.0548
73	500.0000	87.5420	328.4208	671.5792
74	590.0000	98.7812	396.3925	783.6075
75	590.0000	109.1008	376.1664	803.8336
76	490.0000	118.4582	257.8263	722.1737
77	490.0000	127.1480	240.7945	739.2055
78	490.0000	165.9637	164.7170	815.2830
79	490.0000	187.8259	121.8681	858.1319
80	490.0000	209.9188	78.5666	901.4334
81	580.0000	229.1729	130.8294	1029.1706
82	580.0000	247.1375	95.6195	1064.3805
83	480.0000	263.8217	-37.0810	997.0810
84	480.0000	279.5293	-67.8674	1027.8674

把预测后的曲线和实际值画成联合曲线如下图：

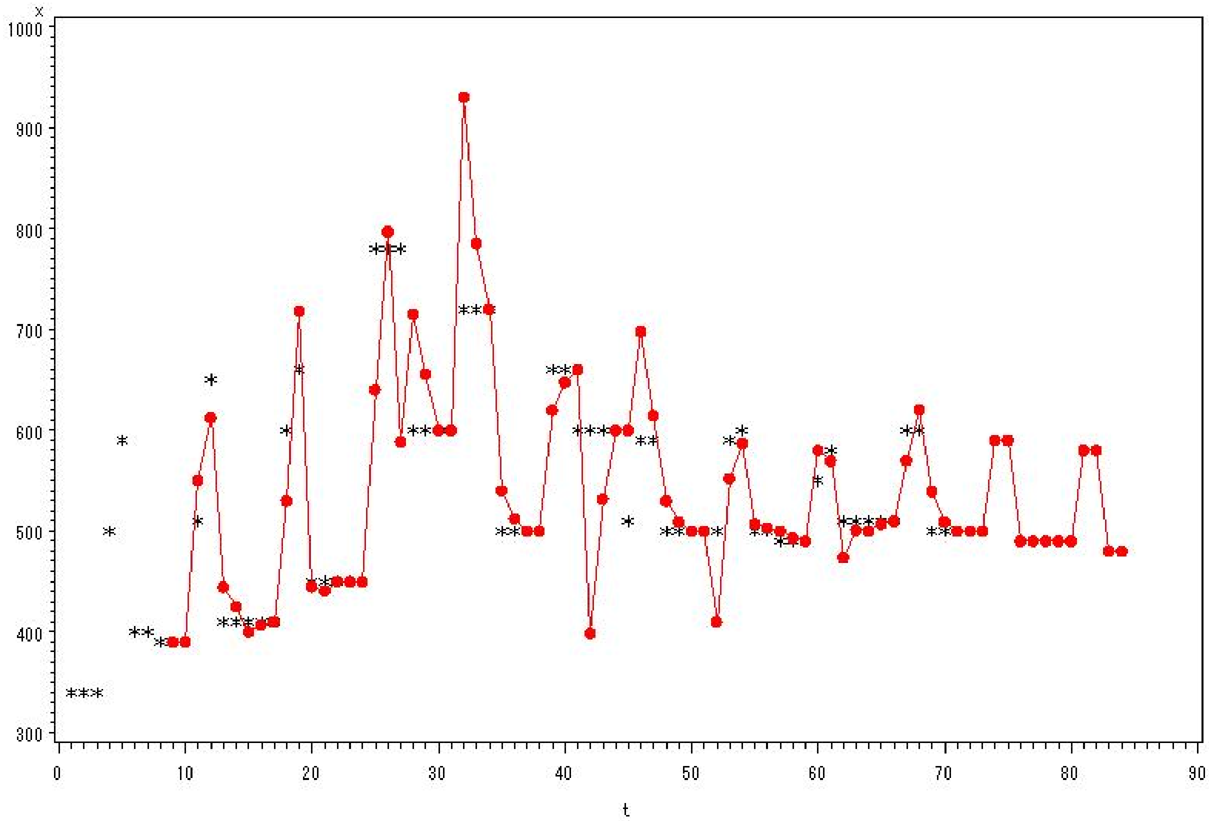


图 15

从整体的趋势来看，预测值是可信的。把预测结果整理如下：

表七　　　　　　　　　　　　　模型三对十一、十二周机票价格的预测结果

	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
第 11 周	500	500	500	590	590	490	490
第 12 周	490	490	490	580	580	480	480

（五）　问题二模型的建立、求解与检验

A. 一个基本的模型的求解

本问题中可以抽象出一个基本的问题，即：给定座位个数n，票价均为g，买票的人不能登机的概率为p，如果造成超员赔偿给每位乘客的钱是b，预售出多少张票m，可以使利润最大？我们把这种模型称为$P(p,bg,n)$模型（其中$bg=b/g$，在后面的分析中我们可以看到，模型只和b，g的比值有关）

问题的解：

公司的经济利益可以用总的收益s来衡量，设r为飞行中的固定损耗，当m位乘客中有k位不按时前来时：

$$s=\begin{cases}(m-k)g+\dfrac{1}{5}kg-r, & m-k\le n\\ ng-r-(m-k-n)b+\dfrac{1}{5}kg, & m-k>n\end{cases}\tag{1}$$

不按时前来登机的乘客数k符合二项分布，于是概率为

$$p_k=C_m^k p^k q^{m-k},\quad q=1-p\tag{2}$$

收益s的期望为

$$s(m)=\sum_{k=0}^{m-n-1}\left(ng-r-(m-k-n)b+\frac{1}{5}kg\right)p_k+\sum_{k=m-n}^{m}\left((m-k)g+\frac{1}{5}kg-r\right)p_k\tag{3}$$

化简上式，并注意到　$\sum_{k=0}^{m}kp_k=mp$　，可得

$$s(m)=qmg-(g+b)\sum_{k=0}^{m-n-1}(m-k-n)p_k-r\tag{4}$$

可以假设飞行中固定损耗r和满员的机票收入成一定的比例关系，即$r=\lambda ng$，(4)式两端同时除以r，得到：

$$J(m)={s(m)}/{r}=\frac{1}{\lambda n}\left[qm-(1+{b}/{g})\sum_{k=0}^{m-n-1}(m-k-n)p_k\right]-1\tag{5}$$

$J(m)$ 的经济意义是公司纯利润占固定损耗的比例。该模型没有解析解，但可以借助 Matlab 软件进行数值计算，求得最大值点。

B. 小飞机的情况

在这种情况下，根据假设不优先考虑头等舱乘客的利益（即如果头等舱已经坐满，多出的持头等舱票的乘客不能进入经济舱，只能等待下一班飞机并获得赔偿）。根据这个假设，我们便可以将经济舱和头等舱分开来考虑。利用参考文献中的数据[2]，我们可以认为 $\lambda = 0.6$，$p = 0.04$，$b/g = 0.2$ 是相对固定的。

i. 经济舱情况。$n_1 = 120$，将这组数带入基本模型中可求得当 $m = 127$ 时 $J(m)$ 有最大值为 $J_{1\max} = 0.6711$，m 和 $J(m)$ 关系图线如下：

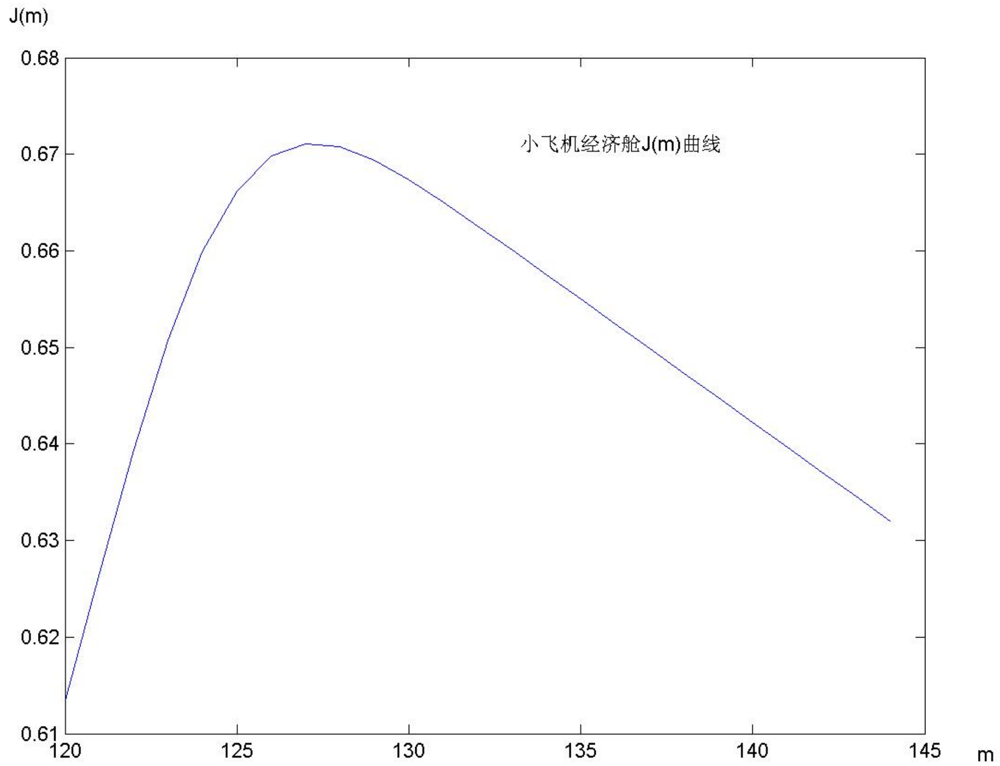


图 16

ii. 头等舱情况。和经济舱一样，取 $n = 8$，$b/g = 0.2/1.5 = 0.133$ 代入基本模型中可得 $m = 9$，$J_{2\max} = 0.6515$

综上，小飞机总的收入最大是在发出 127 张经济舱票，9 张头等舱的票，总的收益为 $J = \dfrac{(J_{1\max} \times n_1 g_1 + J_{2\max} \times n_2 g_2)}{n_1 g_1 + n_2 g_2} = 0.6693$，即纯收入为投入的 66.93%。

C. 小飞机改成大飞机后的模型求解

我们假设经济舱、公务舱、头等舱的座位个数分别 n_1, n_2, n_3，并且满足关系 $n_1 \geq n_2 \geq n_3$，

票价分别为 g_1, g_2, g_3，航空公司发出的票分别为 m_1, m_2, m_3 张。为了叙述方便，我们定义 4 个优先级别：头等舱（3 级），公务舱(2 级)，经济舱(1 级)，被挤下飞机(0 级)。假设使顾客享受降一级的服务时赔偿为 b。我们假设在高一级的舱位没有坐满时，低一级的乘客可以坐到高一级的舱位而不用额外付出代价(比如商务舱没有坐满而经济舱超员，当然可以让多出的经济舱的乘客坐到商务舱去，以避免付给赔偿金 b)，这符合公司追求利益最大化的原则，是合理而必要的。

1．优先级原则。

对于大飞机模型，要求充分考虑头等舱和公务舱乘客的利益，即如果高一级的客舱已满，则多出来的持该舱票的乘客优先享受次一级的待遇并得到赔偿。例如，如果一个持公务舱票的乘客发现公务舱(2 级)已经坐满，那么他最终会乘坐经济舱(1 级)，而不会被挤下飞机(0 级)，当然，为了达到这一点，很可能要挤下去一个经济舱的乘客。

2．降级原则。

下面证明，在实际情况中，在优先级原则下，任何优先级的人都不可能得到低两级的服务(比如说头等舱(3 级)的乘客不会乘坐经济舱(1 级)，他至少乘坐商务舱)。

证明：如果这种情况出现，必然是因为头等舱的乘客将头等舱和公务舱占满或者是公务舱的乘客将公务舱和经济舱占满。但这就要求 $m_3 \geq n_2 + n_3$ 或者 $m_2 \geq n_1 + n_2$，根据实际飞机的数据，n_1 至少是 n_2 的 6 倍，n_2 至少是 n_3 的 2 倍。如果这种情况出现，说明航空公司发出了 3 倍于头等舱座位个数的头等舱票或 7 倍于商务舱座位个数的商务舱票，这样风险极大，会使很多头等舱或商务舱乘客得不到满意的服务而使公司名誉下降，经济受损。因此可以断言，在实际背景下，所有人所得到的服务最多降一级，这就是降级原则。

3．改变机票的定义，利用等效性定理，化归为基本模型。

我们可以这样设想这样的一种预售票过程，航空公司分三次预售票票，每次售出的是“升级票”：买 1 级票可以从 0 级升到 1 级(经济舱)，买 2 级票可以从 1 级升至 2 级(公务舱)，依此类推。当然，买到低级的票才有资格购买高一级的票。1 级票 $m_1 + m_2 + m_3$ 张，价格为 $g_1 = g$；2 级票 $m_2 + m_3$ 张，价格为 $g_2 - g_1 = 0.3g$；3 级票 m_3 张价格为 $g_3 - g_2 = 0.2g$。三种票都要求误机违约金 20%以及承诺客满降级赔偿为 b。可以验证，在这种票的定义和原来票的定义下，乘客可以花相同的钱享受到相同级别的服务，只不过是票这种载体形式不同罢了。下面进一步证明(等效性定理)，公司的收入对于这两种票的定义，也是相同的。

证明：公司的收入分为以下四部分：误机违约金，票款收入，固定损耗，降级赔偿金。对于前三项，由于乘客享受相同级别所花的钱在两种定义下是相同的，它们的期望值也不会变。对于降级赔偿金，由降级原则知若购买到了 i 级票，则至少享受到 $i-1$ 级的服务，也就是说，他买的 $1 \sim i-1$ 级票都不会赔付降级赔偿金，而有一定的概率被赔付 i 级机票的降级赔偿金 b，而这个概率和(原始机票定义中)买 i 等级的票被赔付 b 的概率是相同的，都是 $\sum_{k=i}^{3} m_k$ 个乘客来不少于 $\sum_{k=i}^{3} n_k$ 人的概率。故降级赔偿金的期望亦相同，故公司总收入也相同。

由等效性定理可以得出该模型可以化为为三个基本模型的叠加，即 $P(p, b/g, m_1 + m_2 + m_3)$ $+P(p, b/0.3g, m_2 + m_3)$ $+P(p, b/0.2g, m_3)$，可以化为基本模型的

求解。至此，本问题在理论上圆满地解决了。

下面以大飞机（n_1=360，n_2=40，n_3=18)为例做定量的计算(取$\lambda=0.6$，b/g =0.2，p=0.04)：用 Matlab 作数值计算可以得到

$$m_1+m_2+m_3=440$$
$$m_2+m_3=61$$
$$m_3=19$$

此时公司利润取得最大值，可以解出$m_1=379$，$m_2=42$，$m_3=19$，即头等舱多发出 1 张票，公务舱多发出 2 张票，经济舱多发出 19 张票，所得的收益为$J=0.6693$，收益最大期望为飞行固定费用的 66.93%

4. 灵敏度分析。

变量λ是长期以来航空公司的经验值，所以可以认为它是一个常量，下面对b/g和p两个变量做灵敏度分析。

(1)最大收益期望值对b/g的灵敏度分析。

由于$bg=b/g$是公司制定的，因此，在大飞机座位个数确定的前提下，给定bg便可以算出此时公司的最大收益期望值。所以，以$bg=0.01\sim2.00$作为自变量，固定bg下最大收益期望值为因变量绘出图形如下：

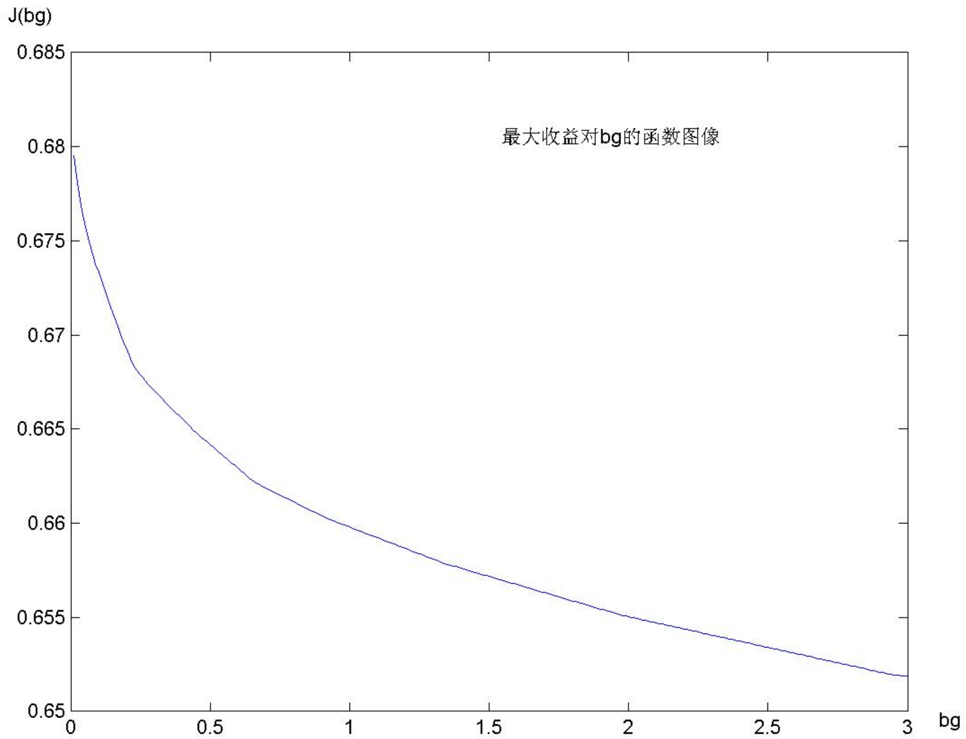


图 17

在图像上可以看出，随着bg的上升，刚开始的一段时间里利润下降的比较快，在$bg=0.7$以后，呈线性单调减少。这是因为如果航空公司赔付的比例越大，预售出的额外的座位也越少，机票收入损失的也越多，收益就小一些。但是当然不能定$bg=0$而使收益最大，因为公司同时得考虑其社会声誉，如果它是一毛不拔的铁公鸡，不能视顾客为上帝，就会间接的影响其利润。因此权衡利弊，将bg大约定在 0.2~0.4 范围内还是比较合适的。

下面给出在最优发票策略下，bg和m_1，m_2，m_3的关系，用 Matlab 软件对bg从 0.01 到 2.50 进行扫描，得到如下三条曲线。

(i)头等舱m_3对bg的曲线

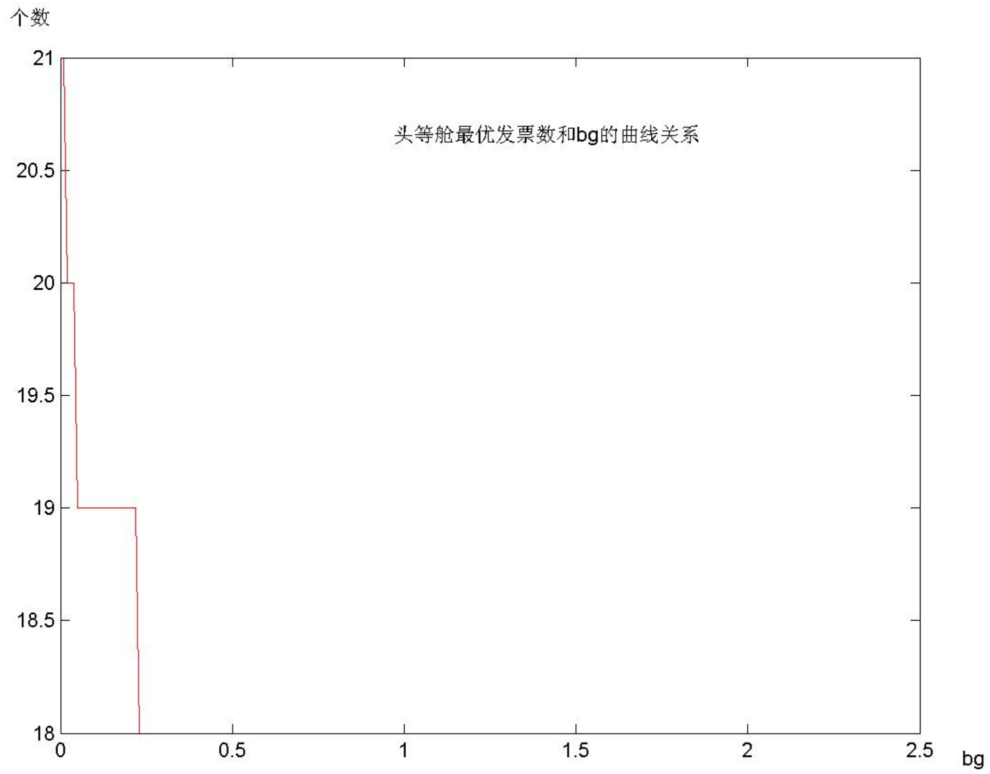


图 18

(ii)公务舱m_2对bg的曲线。

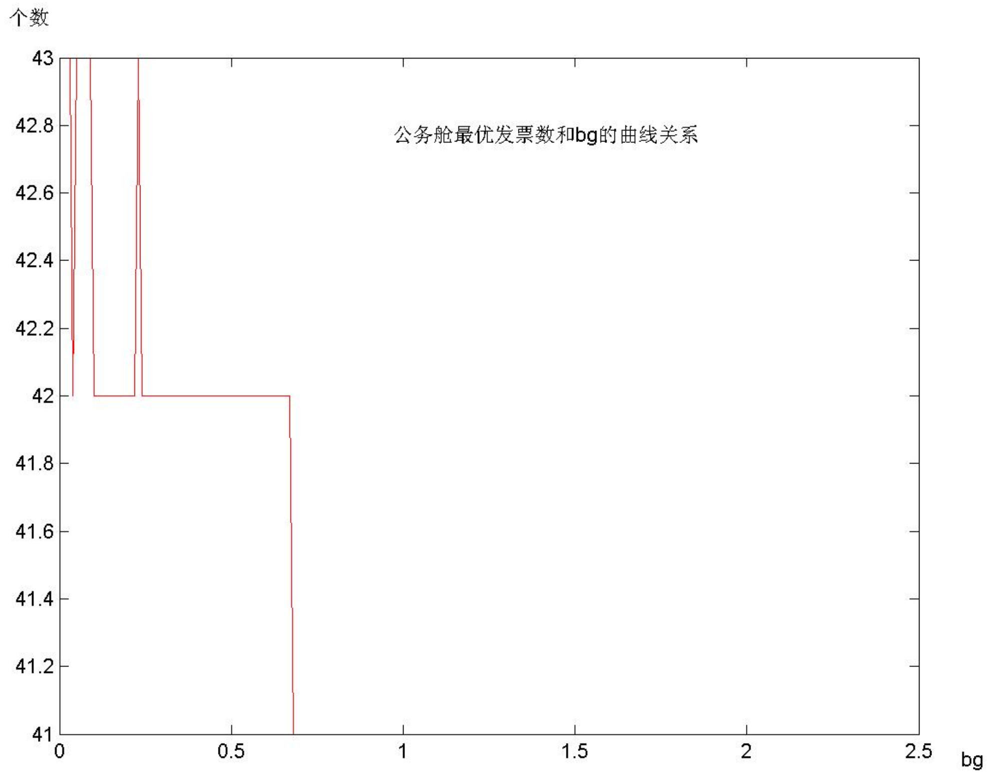


图 19

(iii)经济舱 m_1 对 bg 的曲线。

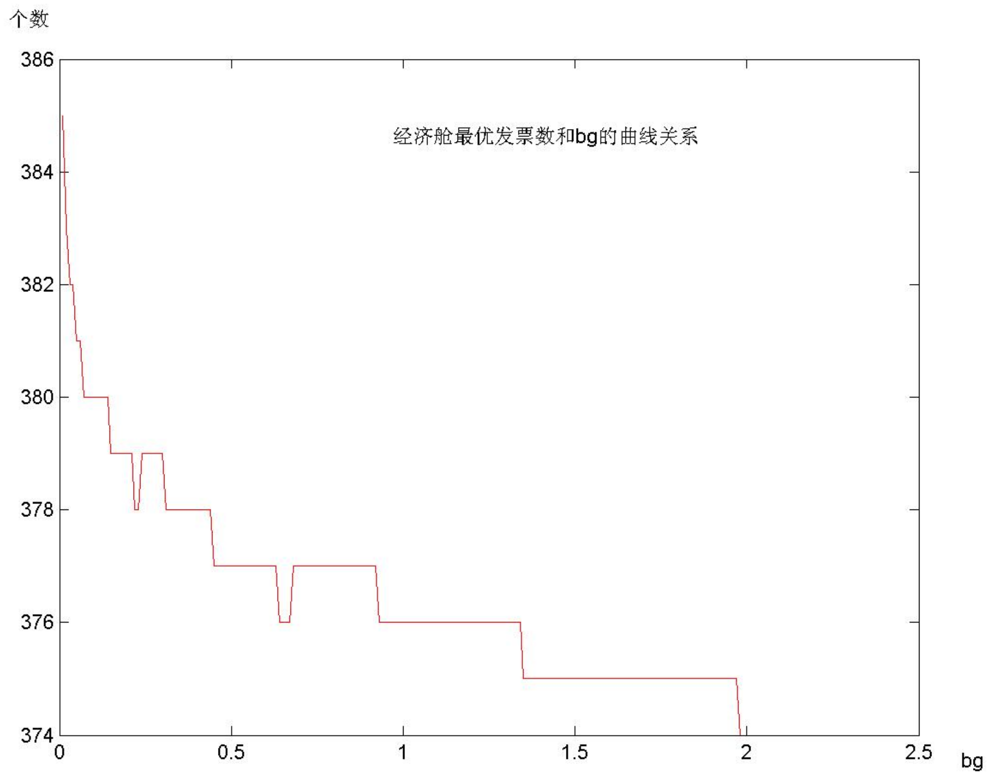


图 20

(2)最大收益期望值对顾客误机概率 p 的灵敏度分析。

由于 p 是航空公司估计的值，所以得知其灵敏度至关重要。我们取 $bg = 0.2$，其余数值同上，根据实际情况，知道 p 的值在没有重大事件冲击的时候应该在 0.2 以内，于是在 0~0.3 范围内做出最大收益期望值对于 p 的函数如下：

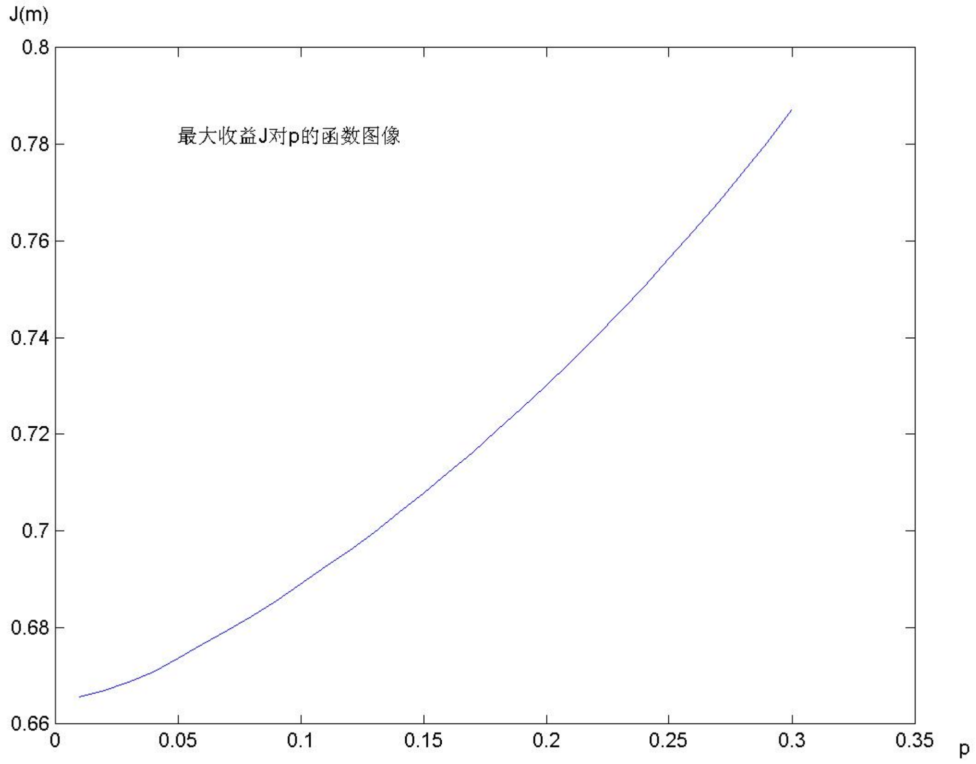


图 21

从图线上可以明显看出这是一个递增下凸的曲线，表明曲线随着 p 增长加速增长，但是比较实际的范围是p=0.05附近，在这个区域内，最大收益的变化值相对不是特别的明显。但是值得指出的是，和 bg 的相比，J 对 p 更加灵敏一些，这说明了航空业对外界的依赖性比较大，而自身的一些决策可能对利润影响不是特别的显著。

（六） 模型的优缺点和进一步讨论

A. 对问题一所建立的三个模型各自的优缺点总结如下：

1) 独立数据拟合模型操作简单，但十分粗糙，它无法提取出序列中足够的信息，从而也无法进行有效的拟合和合理的预测。但是作为粗略的估计，在有些情况下还是可以考虑的。
2) 非平稳序列的确定性分析模型操作也比较简捷，它能够有效的提取出序列的总趋势和周期波动趋势，但是对随机信息的浪费十分严重，往往残差数据点还具有一定的相关性。这种模型适合拟合总波动趋势十分强劲，随机信息的影响可以忽略的序列。

3) 非平稳序列的随机性分析有很多模型。本文用的ARIMA模型是一种经过多次差分消除序列中所有的相关性信息，从而转化为对一个稳定序列的分析。利用十分成熟的ARMA模型及其相应的检验准则和参数估计方法可以得到对原序列相当精确的拟合。这种方法虽然操作比较繁琐，而且往往建立的模型需要多次优化，对操作者的经验也有较高要求，但是这种模型可以适用于很多种波动规律的序列（因为非平稳序列经过差分总可以转化为平稳序列），而且拟合精度十分令人满意。在SAS等软件中，ARIMA模型可以很方便的实现，所以这种方法在当今社会的各个领域已经得到了越来越广泛的应用。

B. 对问题二中模型的推广。

本模型在降级原则下，可以推广至n个有不同优先级的等级(舱)的预售票收益最大问题。设n个等级为$0\sim n-1$级，分别固定有n_i个座位，票价分别为g_i，降级赔偿为b，违约金为$c\%$，求最佳预售票的策略。可以通过等效性原则将模型转化为n个基本模型之和，再通过数学软件对每个基本模型进行数值求解，最终得到模型的数值解，亦可以对不同的变量按照不同的需求作灵敏度分析。

C. 关于公司的声誉的讨论

在满足了以上的种种条件之后，公司应当考虑到不能让太多的旅客来了之后没有登机，当然这都是持经济舱票的旅客。这时我们应当限制总的预售票数量，也就是给出$m_1+m_2+m_3$的上限。我们考察的是当$m_1+m_2+m_3$取每个值的时候，至少有j个人来了但是无法登机的概率。这也就等价于有不多于$m_1+m_2+m_3-n_1-n_2-n_3-j$个人没有来，这个事件的概率为$P_j(m)=\sum_{k=0}^{m-n-j}p_k$。分别考察 b/g=0.2 和 0.4 以及 j=5 和 j=10 情况，用 Matlab 计算可以得到如下表格：

表八　　　　至少有 j 个人无法登机的概率及相应的收益

p=0.04

m	b/g=0.2	b/g=0.4	j=5	j=10
420.0000	0.6211	0.6211	0	0
422.0000	0.6288	0.6288	0	0
424.0000	0.6365	0.6365	0.0000	0
426.0000	0.6442	0.6442	0.0000	0
428.0000	0.6517	0.6517	0.0005	0.0000
430.0000	0.6589	0.6588	0.0042	0.0000
432.0000	0.6653	0.6649	0.0206	0.0001
434.0000	0.6703	0.6694	0.0687	0.0014
436.0000	0.6736	0.6720	0.1680	0.0087
438.0000	0.6753	0.6727	0.3215	0.0356
440.0000	0.6756	0.6718	0.5053	0.1027
442.0000	0.6751	0.6699	0.6814	0.2245
444.0000	0.6740	0.6674	0.8196	0.3933
446.0000	0.6727	0.6646	0.9101	0.5775
448.0000	0.6713	0.6617	0.9605	0.7405

450.0000	0.6698	0.6587	0.9846	0.8597
452.0000	0.6684	0.6557	0.9947	0.9331
454.0000	0.6669	0.6527	0.9983	0.9718
456.0000	0.6655	0.6497	0.9995	0.9894
458.0000	0.6640	0.6467	0.9999	0.9965
460.0000	0.6625	0.6437	1.0000	0.9989

p=0.1

m	b/g=0.2	b/g=0.4	j=5	j=10
420.0000	0.5407	0.5407	0	0
422.0000	0.5480	0.5480	0	0
424.0000	0.5553	0.5553	0.0000	0
426.0000	0.5626	0.5626	0.0000	0
428.0000	0.5698	0.5698	0.0005	0.0000
430.0000	0.5766	0.5765	0.0042	0.0000
432.0000	0.5826	0.5822	0.0206	0.0001
434.0000	0.5872	0.5864	0.0687	0.0014
436.0000	0.5901	0.5886	0.1680	0.0087
438.0000	0.5914	0.5889	0.3215	0.0356
440.0000	0.5914	0.5876	0.5053	0.1027
442.0000	0.5905	0.5853	0.6814	0.2245
444.0000	0.5890	0.5824	0.8196	0.3933
446.0000	0.5873	0.5792	0.9101	0.5775
448.0000	0.5856	0.5759	0.9605	0.7405
450.0000	0.5837	0.5726	0.9846	0.8597
452.0000	0.5819	0.5692	0.9947	0.9331
454.0000	0.5800	0.5658	0.9983	0.9718
456.0000	0.5782	0.5624	0.9995	0.9894
458.0000	0.5763	0.5590	0.9999	0.9965
460.0000	0.5745	0.5557	1.0000	0.9989

从表中可以看出，当 p =0.04，在最大利润时（ m =440）,5 个乘客不能乘飞机的概率为 50.53%，而 10 个乘客不能乘飞机的概率为 10.27%，有点偏大，但是同时可以看出当赔偿金加倍时（b/g=0.4），利润并没有很大损失，所以航空公司可以考虑用增加赔偿金的方式获得好的声誉。

D. 关于 p 值突变的讨论

通过 $J(m)\sim p$ 图象可以看出，对于一个确定的误机概率 p，航空公司应该制定合适的预订票数量 $m(p)$，使得总利润达到最大。但是如果 p 发生突变，航空公司来不及改变发售预订票的政策，就可能使利润大幅减少。下面以一组具体数据来说明：

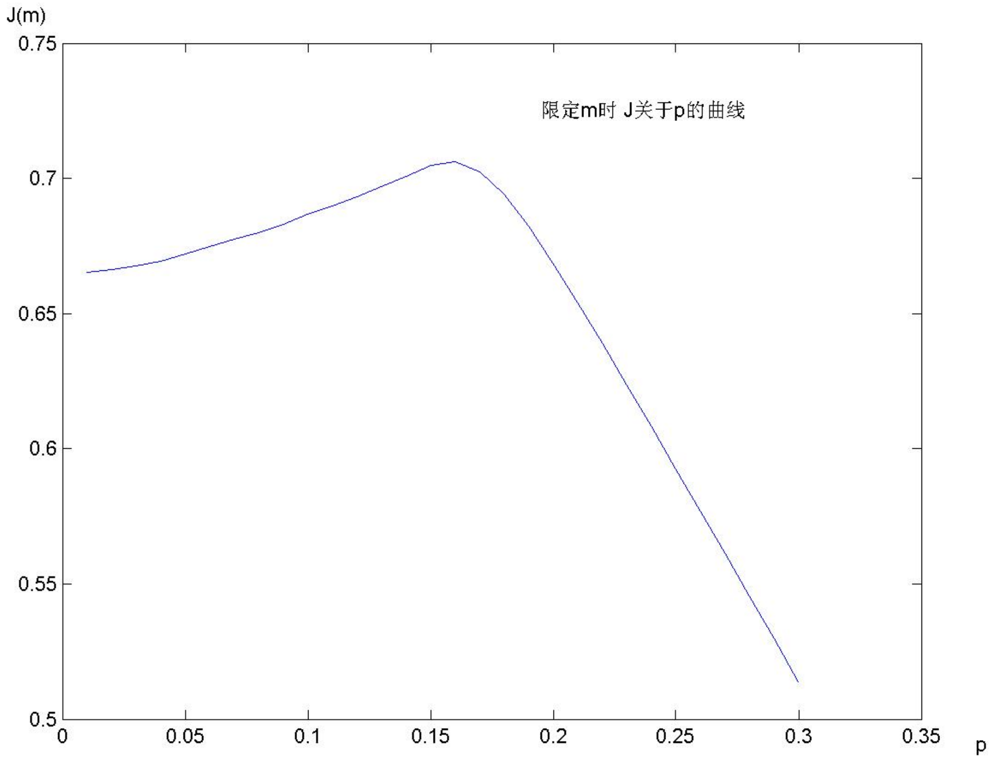


图 22 限定m不超过n的 20%情况下J关于p的变化曲线

从图中可看出当 p 大于某个值时利润开始下降，甚至有可能出现负值。

前几年发生的“911 事件”就可以看作这个讨论的现实背景，当“911 事件”发生后，乘客的误机概率会在极短时间内大幅上升，如果航空公司不作出及时调整，将会受到严重损失。这时航空公司可以减小飞行损耗（比如把大飞机换成小飞机），或者增加预订票数量m和赔偿金b来减少损失（这是建立在旺季顾客源充足的前提下的）。但是从现实情况来考虑，当发生了类似于“911 事件”的突发事件后，旺季模型已经不适用，此时航空公司可以采取的更现实的措施是设法减小p值，例如减小误机所付定金的百分比，增加顾客意外伤害的保险金额等等来吸引顾客。但这已经超出了本模型讨论的范围。

（七） 参考文献

[1] 王燕，应用时间序列分析，北京：中国人民大学出版社，2005。
[2] 姜启源，数学模型（第三版），北京：高等教育出版社，2003。
[3] 王炜（火斤），应用时间序列分析，桂林：广西师范大学出版社，1999。
[4] 张 卓，SAS 软件的应用，统计与信息论坛，第20卷第4期：104-107页，2005。
[5] 杨云霞，时间序列预测模型及其应用，太原师范学院学报(自然科学版)，第4卷第4期：4-7页，2005。

（八） 附录（略）