不变集合和极值原理

马力*

引言: 这个小短文基本上是来自我在讨论班上的演讲材料。目的是通过阅读这些内容，读者可以看到不变集合，极值原理和LIUOVILLE型定理的密切关系。

最近BRENDLE-SCHOEN用HAMILTON的RICCI流（它是几何分析中的基本研究对象）解决了微分球定理。其中的基本手段就是找这个流的不变集合。我们利用这个机会谈微分方程的不变集合，它的特殊情况就是极值原理。我们谈到的主要内容有BONY的极值原理。这是一个深刻的数学定理，所以值得在这里好好谈谈。

由于几何分析的研究对象是来自几何和物理中的模型，大家自然要感兴趣这些模型的不变集合。对于热方程，不变集合就是极值原理，利用这个观念，Hamilton得到张量方程组的极值原理。但是对于波动方程来说，不变集合的观念需要有更多的思考。比如在新近我们研究的流形上的非线性SCHRÖDINGER方程，我们就是引入了新的不变集合，从而可以解决一些前人不能解决的问题。

我在这里挑选这么一个话题来讲给大家，主要的目的是希望同学们能深入理解微分学中的基本概念，这样在以后的数学研究中才可以做出更深刻的结果出来。

1 基本的微分不等式

很多同学都知道微分方程的比较原理。其实，这个原理是和（偏）微分方程的不变集合密切联系着的。微分方程的不变集合，它的特殊情况就是极值原理。大家都知道，利用极值原理可以得到解的梯度估计，然后就可以容

*清华数学系基础数学所教授

易的得到LIOUVILLE定理。这样就可以自然的得到一个代数基本定理的分析证明。

我们先来看怎么对LIPSCHITZ函数微分的问题[3]。

假定$h = h(t)$ 是一个LIPSCHITZ函数。我们定义它的DINI导数如下：

$$D^+h(t) = \lim\sup_{s \to 0^+} \frac{h(t+s) - h(t)}{s}$$

和

$$D^-h(t) = \lim\inf_{s \to 0^+} \frac{h(t+s) - h(t)}{s}$$

容易看出关系

$$D^+(e^{Ct}h(t)) = e^{Ct}(Ch(t) + D^+h(t))$$

这里C是一个常数。

这样我们就可以得到下面的引理

引理1： 假设$h(0) \leq 0$和$D^+h(t) \leq 0$，其中这里的t满足$0 \leq t \leq T$, 于是$h(T) \leq 0$.

证明：

取$\epsilon > 0$，我们来证明有

$$h(t) \leq \epsilon t$$

利用条件，

$$D^+h(t) \leq 0$$

我们有小时间段$[0, d]$, 使得

$$h(t) \leq \epsilon t$$

定义T_m为这种关系成立的最大区间。

利用连续性，我们有

$$h(t) \leq \epsilon t$$

对于$t \in [0, T_m]$成立。

如果$T_m < T$, 那么根据条件，

$$D^+h(t) \leq 0$$

我们得到$\delta > 0$,

$$h(t) \leq \epsilon t$$

对于$t \in [0, T_m + \delta)$成立。

所以有

$$h(t) \leq \epsilon t$$

对于$t \in [0, T)$成立。 **证毕。**

这个结果有好几个有意思的推论。

推论1. 假设$h(0) \geq 0$和$D^- h(t) \geq 0$，其中这里的$0 \leq t \leq T$, 于是$h(T) \geq 0$.

推论2. 假设$h(0) \leq 0$和$D^+ h(t) \leq Ch(t)$，其中这里的$0 \leq t \leq T$, 于是$h(T) \leq 0$.

这个推论的证明只需要一个变换，也就是我们要考虑$g = e^{-Ct} h$。

如果有$h = f - g$, 特别的，我们有下面的比较原理。

推论3. 假设$f(0) \leq g(0)$和$D^+ f(t) \leq D^- g(t)$，其中这里的$0 \leq t \leq T$, 于是$f(T) \leq g(T)$.

2 BONY的不变集合原理

假设D是R^n上的区域，$X : D \to R^n$ 是一个连续的向量场。F是D中的闭集合。我们研究微分方程$x'(t) = X(x(t))$ 解的轨迹。

我们说集合F是X的不变集合是说，对$x(0) \in F$,我们的解$(x(t)), t > 0$就一直在F里面。数学语言上说就是$x(t) \in F$, $t > 0$.

对于F中的点y来说，如果有一个球S使得y在S上，但是F中的其他点都不在S的内部的话，我们就可以定义F在y点的法向量为

$$\nu(y) = x - y$$

这里x是球S的球心。

定理（Bony）[1]：假设X和F满足以下条件，(1) 存在正常数L使得

$$|X(x) - X(y)| \leq L|x - y|$$

(2) 对F在$y \in F$处的法向量$\nu(y)$ 我们有

$$\nu(y) \cdot X(y) \leq 0$$

那么F是向量场X的不变集合。

证明；

如果这个结论不是真的，那么我们可以定义

$$h(t) = dist(x(t), F), \quad t \geq 0$$

这里$h(0) = 0$, $h(t) > 0$, $\ t > 0$. 固定$t > 0, s > 0$, $h(t) = dist(x(t), y)$, $y \in F$, 我们考察

$$h(t+s) = dist(x(t+s), F) \leq dist(x(t+s), y) = |x(t+s) - y|.$$

根据

$$|x(t+s) - y| - |x(t) - y| = \frac{|x(t+s) - y|^2 - |x(t) - y|^2}{|x(t+s) - y| + |x(t) - y|}$$

我们有

$$h(t+s) - h(t) \leq \frac{|x(t+s) - y|^2 - |x(t) - y|^2}{|x(t+s) - y| + |x(t) - y|}.$$

再根据

$$x(t+s) = x(t) + sX(x(t)) + o(s)$$

和

$$|x(t+s) - y|^2 - |x(t) - y|^2 = 2s(x(t) - y) \cdot X(x(t)) + o(s)$$

令$s \to 0^+$ 我们有

$$D^+h(t) \leq \frac{(x(t) - y) \cdot X(x(t))}{|x(t) - y|} \leq \frac{(x(t) - y) \cdot (X(x(t)) - X(y))}{|x(t) - y|}.$$

于是有

$$D^+h(t) \leq Lh(t).$$

利用上面的引理1的推论，我们就知道$h(t) = 0$.

这样就证明BONY的不变集合定理。

3 LIOUVILLE型定理和极值原理

下面的极值原理在几何分析中是非常有用的。所谓极值原理就是数学分析中的基本关系：如果$x \in D$是$u : D \to R$函数的极大值点，那么我们有x处的关系$\nabla u(x) = 0$ 和

$$D^2 u(x) \leq 0.$$

特别的，我们有$\Delta u(x) = trD^2u(x) \leq 0$.

我们先来看一个简单的应用，这是一个LIOUVILLE型定理。我们这里的论证用到REDHEFFER的一个想法。

定理: 假如我们有有界光滑函数$u = u(t), t \in R$满足

$$u_{tt} = f(u)$$

这里$f : R \to R$也光滑并且$f' > 0$. 那么u是常数。

证明：给定任意点x和$\epsilon > 0$，定义

$$w(t) = u(t) - u(x) + \epsilon - \epsilon|t - x|^2.$$

于是$w(x) = \epsilon > 0$ 和$w(t) \to -\infty$对$|t| \to \infty$. 所以有w的最大值点y，在这点处，$w(y) > 0$和$w_{tt}(y) \leq 0$,从而$u(y) > u(x) - \epsilon$和$u_{tt}(y) \leq 2\epsilon$。再利用

$$u_{tt}(y) = f(u(y)) \geq f(u(x) - \epsilon)$$

我们得到

$$f(u(x) - \epsilon) \leq 2\epsilon.$$

令$\epsilon \to 0$, 我们得到$f(u(x)) \leq 0$.

定义

$$v(t) = u(t) - u(x) - \epsilon + \epsilon|t - x|^2.$$

于是$v(x) = -\epsilon < 0$ 和$v(t) \to +\infty$对$|t| \to \infty$. 所以有v的最小值点z，在这点处，$v(z) < 0$和$v_{tt}(z) \geq 0$,从而$u(z) < u(x) + \epsilon$和$u_{tt}(z) \geq -2\epsilon$。再利用

$$u_{tt}(z) = f(u(z)) \leq f(u(x) + \epsilon)$$

我们得到

$$f(u(x) + \epsilon) \geq -2\epsilon.$$

令$\epsilon \to 0$, 我们得到$f(u(x)) \geq 0$.

这样就有$f(u(x)) = 0$.从而u是常数。

证毕。

最后我们给出

BONY的极值原理：假设D 是R^n的开集。假设X 是D上的光滑向量场。设$u = u(x), x \in D$ 是一个非负的光滑函数并满足

$$D^2u(x)(X, X) \leq -K \inf_{|\xi| \leq 1} (D^2u)(x)(\xi, \xi) + Ku,\ x \in D$$

这里K是一个正常数。定义$F=\{x\in D; u(x)=0\}$。设$\gamma:[0,1]\to D$ 是一个光滑曲线使得$\gamma(0)\in F$ 和

$$\gamma'(t)=f(t)X(\gamma(t))$$

这里$f(t)$ 是光滑函数。于是有$\gamma(t)\in F$, $t>0$.

由于这个定理论证比较长，我们这里就不证明了。读者可以去看文献中[2]的证明。

参考文献

[1] J.M.Bony, *principle du maximum, inegalite de harnack et unicite du probleme de Cauchy...*, Ann. Inst.Fourier (Grenoble), 19:1(1969)277-304.

[2] S.Brendle, R.Schoen, *Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures*, Acta mathematica, 200(2008)1-13.

[3] R.Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, Journal of Diff. geometry, 24(1986)153-179.

****

数学家趣闻

▲华裔数学家钟开莱（1917-2009）原本就读于清华大学（西南联大）物理系，当时西南联大理学院院长是吴有训先生。吴有训开设光学课，钟开莱听了几次课以后觉得他讲授的内容书上全都有，自己看书自学就可以，就开始逃课。可当时理学院听课的学生只有寥寥十来人，走了一个很现形，吴有训很快发觉钟开莱逃课的事实，大发雷霆。钟开莱担心今后的日子混不下去，所以转到了数学系。

钟开莱给人的印象那是牛逼哄哄的。甫列华氏门墙，一天华老爷子啰里八嗦讲了一大堆东西，钟开莱不服气回家折腾了十页的纲领性文字，第二天上课的时候扔给华罗庚，意思是你拿去看吧。华老爷子很不爽，说你不就是个毛头孩子吗，跟我玩这套，华罗庚也折腾了一晚上，硬是把这10页压缩成3页，回敬给钟开莱。当时（西南联大时期）学习氛围可见一斑。