随机过程的正则点与半椭圆方程的 Fichera 点

王竹海 [1]

指导教师：雍稳安教授

摘 要

随机微分方程理论在偏微分方程中的应用中，区域边界对某个 Ito 扩散（这一 Ito 扩散常常是由某个半椭圆微分算子所决定的随机微分方程的解）的正则点这一概念被引入。一般来说，正则点（从这儿开始，为了方便，所有的“正则点”即表示“对于给定区域和给定的半椭圆微分算子所定义的 Ito 扩散的正则点”）的判定需要根据具体的情况遵循其引入的步骤，并直接验证定义。也就是说，在一般的情形，正则点的判定并没有跳过求解 Ito 扩散过程这一困难的步骤。

本文受到偏微分方程理论中 Fichera 定理的启发，在作出某些合理假设的基础上，对有界凸区域光滑边界上的点的正则性判定提出并证明了一个定理，即在上述情形下，Fichera 点都是正则点

关键词：随机过程的正则点；Fichera 点

第 1 章 引言

1.1 问题的提出

在将随机微分方程理论应用到偏微分方程中的时候，对于一个给定的区域和给定的半椭圆微分算子（更准确地说是由这个算子所定义的一个 Ito diffusion），有“正则点”（regular points）的概念。其详细引入过程如下。

给定一个区域$\Omega \subset \mathbb{R}^m$，一个半椭圆微分算子$L \in C^2(W)$（其中$W \supset \bar{\Omega}$是开集，微分算子具有形式$L = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$）。“半椭圆”的定义即：矩阵

[1] 基数 62

$a(x)=\left(a_{ij}(x)\right)_{m\times m}$是对称的，即$\forall i,j=1,2,3\ldots\ldots m, a_{ij}(x)\equiv a_{ji}(x)$，并且该矩阵为非负定的，即其所有的特征值非负。我们进一步假设$b(x)=(b_i(x))^T$为 Lipchitz 连续的。可以对矩阵$a(x)$求平方根，即可以找到$\sigma(x)=\left(\sigma_j^i(x)\right)_{m\times m}$，使得$\frac{1}{2}\sigma\sigma^T=a$。由于$\left(a_{ij}\right)$的光滑性，我们可以要求$\left(\sigma_j^i\right)_{m\times m}$是 Lipchitz 连续的（参见 Avner Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications ,Volume 1, 第 131 页，Remark 1）。

对于给定的一个$x_0\in\partial\Omega$我们立刻得到一个从此出发的 Ito diffusion $\{X_t\}$，使得其特征算子是 L 的扩展，具体来说，其满足$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t$ 且 $X_0=x_0$（其存在性由$\sigma(x),b(x)$的 Lipchitz 连续性保证，相关定理和证明参见 Ioannnis Karatzas, Steven E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus,第 289 页）。从这里开始，如果不特别指出，文章所提到的概率测度和期望均是在 m 维布朗运动B_t所诱导的概率空间上相应的概率测度和期望。

这样，我们对任何一个边界点可以得到$\tau_\Omega=\inf\{t>0; X_t\notin\Omega\}$。由此，可以对给定的区域和算子（或者 Ito diffusion）定义正则点的概念。

定义 如果$x_0\in\partial\Omega$满足$P(\tau_\Omega=0)=1$，那么我们称这一边界点x_0为区域Ω关于$\{X_t\}$的正则点（regular points）。

用形象的语言来说，正则点意味着从这点出发的$\{X_t\}$一定会立即从给定的区域逃逸出去。另外，需要补充说明的是，事实上，经过证明，我们可以发现$P(\tau_\Omega=0)$可以取的值只能是 0 和 1。也就是说我们有如下的引理（详细证明和完整的表述参见 Bernt Øksendal,Stochastic Differential Equations 第 121-123 页）。

引理 1 $\forall x_0, P(\tau_\Omega=0)=1$或$P(\tau_\Omega=0)=0$ 。

这一引理的重要性在于在我们判别某个边界点是不是正则点时，我们并不需要严格判别上述概率是否是 1，我们只需要判别上述概率是不是大于 0。这将给后文中的定理证明带来很大的方便。

还需要说明的是，正则点在随机微分方程理论在偏微分方程中的应用这一领域是十分重要的。举例来说，我们有如下的定理。

定理 1 在以上所有假设的基础上，我们进一步假设算子 L 是一致椭圆的，即矩阵$a(x)$所有的特征值关于 x 一致地大于某一个固定的正数。Φ是定义在$\partial\Omega$上的有界连续函数。我们令$u(x)=E^{x_0}(\Phi(X_{\tau_\Omega}))$。则

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0 \text{ in } \Omega$$

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x\in\Omega}} u(x)=\Phi(y)\,, \forall y\in\partial\Omega, y \text{ regular}$$

这个定理说明如果我们不关心边界的情形，那么一致椭圆的偏微分方程的解可以有很简洁的随机表达形式。值得注意的是：一方面，在表达形式中，我们发现，只要知道了边界函数在正则点的值，解就被唯一地确定了；另一方面，在偏微分方程领域，我们常常关心的恰恰是边界的情形，在这里同样也恰恰是正则点的问题。

令人遗憾的是，至今为止，如果不加更多的假设，对于一般给定的边界和 Ito diffusion（即使是如同上述步骤给出的有一些好的性质的 Ito diffusion），要判断边界上的点是不是正则点，并没有简便的判别方法，只能根据具体情况，作类似其引入过程的计算，并根据定义来判断。而其中求解出 Ito 扩散这一步骤往往是困难的，有时候甚至是不能求出显式表达的。这就直接造成了验证定义的巨大麻烦。那么，我们可以退而求其次，如果加上了某些比较合理的假设之后，是否可以有一个比较直接和方便的判别方法呢？这就是本文所需要关注和讨论的问题。在我查阅了一些文献之后，似乎这样的结论也是几乎没有的，只在一些相关书籍的注记中有一维情形的简单讨论之类的零碎的结论，这些结论几乎都是平凡的。

1.2 一个有益的观察

正则点引入的过程和其应用，尤其是定理 1 使我们联想到偏微分方程理论中的 Fichera 定理。其具体的表述如下。

定理 2（Fichera）在 1.1 内容的基础上（仅仅要求算子是半椭圆的），假设$\partial\Omega$是光滑的，有单位内法向量$(n_1, n_2, \dots\dots, n_m)$，据此可将$\partial\Omega$分为四部分：$\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$。其中$\Gamma_3$是$\partial\Omega$的非特征部分，即

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) n_i n_j > 0, x\in\Gamma_3$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) n_i n_j = 0, x\in\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$$

定义 Fichera 函数

$$F(x)=\sum_i (b_i(x)-\sum_j \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j})n_i$$

并定义$\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2$如下：

$$F(x)\begin{cases}=0, x\in\Gamma_0,\\ >0, x\in\Gamma_1,\\ <0, x\in\Gamma_2.\end{cases}$$

则下述定解问题存在唯一解

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x), x\in\Omega$$

$$u(x)=g(x), x\in\Gamma_2\cup\Gamma_3$$

暂且不考虑定理 1 和定理 2 对于微分算子椭圆性的不同要求，以及定理 2 中对区域边界光滑性的要求，我们可以明显地发现，定理 1 中的正则点和定理 2 中的$\Gamma_2\cup\Gamma_3$内的点（即所谓的 Fichera 点）上的函数的边界值都决定了函数在区域内部的值。这一相似点，启发我们在作出一些合理的假设之后，尝试用定理 2 中对边界的划分方法解决 1.1 所提出的正则点的判定问题。

第 2 章 主要定理及证明

以下阐述本文的主要定理和相关注记推论，并给出具体的证明。

定理 3 给定一个有界凸区域$\Omega\subset\mathbb{R}^m$，$\partial\Omega$是光滑的，有单位内法向量$(n_1,n_2,\dots\dots,n_m)$。给定一个半椭圆微分算子$L\in C^2(W)$（其中$W\supset\overline{\Omega}$是开集，微分算子具有形式$L=\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$），进一步假设满足$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}=\mathbf{a}$的$\boldsymbol{\sigma}\in C^2(W)$。

则定理 2 中所划分出的 Fichera 点$(\Gamma_2\cup\Gamma_3)$都是正则点（regular points）。

注记 1 事实上，对区域的有界性要求只是为了满足证明过程中所出现的函数都是有界的，所以如果在具体的问题中，证明过程中函数的有界性都得到满足，那么对于区域的有界性要求可以去掉。另外，在证明的过程中，多次使用了相应函数的有界性，并多次使用了有界收敛定理，由于定理条件中的假设，相关的条件都可以得到满足，故在具体的证明过程中不再赘述。而对于区域边界的整体光滑性

要求也不是必须的，如果边界只有一部分是光滑的，那么我们取其边界的光滑部分，对这部分边界作类似定理 2 中的划分，由于定理 3 的证明只需要局部的光滑，故定理 3 的结论仍然成立。

注记 2 正如 1.1 中所述，理论上讲，对于σ光滑性，我们只可以要求 Lipchitz 连续。但是在实际的问题中，我们也会常常遇到σ能够满足定理条件假设的情形。所以，定理条件中的假设可以认为是合理的。

推论 1 如果定理 1 添加定理 3 中的假设，那么$\partial\Omega$上所有的点都是正则点。

推论 1 的证明：由微分算子的一致椭圆性立即可得。

定理 3 的证明：

步骤一（正则点的充分条件）：

$$\tau_\Omega = \inf\{t > 0; X_t \notin \Omega\}$$

其中$\{X_t\}$满足

$$X_0 = x_0$$

$$dX_t = \mathbf{b}(X_t)dt + \boldsymbol{\sigma}(X_t)dB_t \tag{1}$$

事实上，由于Ω 是凸集，$\partial\Omega$是光滑的，有单位内法向量$(n_1, n_2, \dots\dots, n_m)$，故

$\sum_i n_i(X_t^i - x_0^i) < 0 \Rightarrow X_t \notin \Omega$

从而以下条件可以是正则点的充分条件：

存在 T>0，0<N<1，使得任意 0<t<T，有$P\left(\sum_i n_i\left(X_t^i - x_0^i\right) < 0\right) > N$ (2)

其简要证明是：$P(X_t \notin \Omega) \geq P\left(\sum_i n_i\left(X_t^i - x_0^i\right) < 0\right) > N$

对于足够大的 n 有$P\left(X_{1/n} \notin \Omega\right) > N$，从而$P(\tau_\Omega > 1/n) < 1 - N$

$$\{\omega; \tau_\Omega(\omega) > 0\} = \bigcup_n \{\omega; \tau_\Omega(\omega) > 1/n\}$$

等式右端是不减的集列，故$P(\tau_\Omega > 0) < 1 - N$

由引理 1，可得$P(\tau_\Omega > 0)$=0，从而有$P(\tau_\Omega = 0)$=1，即x_0为正则点。

步骤二（Ito 公式的运用，展开与估计）：

式(1)的分量形式即

$$dX_t^i = b_i(X_t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_j^i(X_t)dB_t^j \quad ,\forall i \tag{1'}$$

式(1′)的积分形式即

$$X_t^i = x_0 + \int_0^t b^i(X_s)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^m \sigma_j^i(X_s)dB_s^j \tag{1''}$$

由于$\sigma_j^i \in C^2(W)$，故可对其使用 Ito 公式，可得

$$d\sigma_j^i(X_t) = \sum_k \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(X_t)dX_t^k + \frac{1}{2}\sum_{p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}(X_t)dX_t^p dX_t^q \tag{3}$$

由(1′)和$dtdt = dB_t dt$=0 $dB_t dB_t = dt$，可得

$$dX_t^p dX_t^q = 2a_{pq}(X_t)dt$$

和(1′)一起带入(3)可得

$$d\sigma_j^i(X_t) = \sum_{p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}(X_t)a_{pq}(X_t)dt + \sum_k \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(X_t)\,b_k(X_t)dt + \sum_{k,l}\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(X_t)\sigma_l^k(X_t)dB_t^l$$

其积分形式是

$$\sigma_j^i(X_s) = \sigma_j^i(x_0) + \int_0^s \sum_{p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}(X_\tau)a_{pq}(X_\tau)d\tau + \int_0^s \sum_k \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(X_\tau)\,b_k(X_\tau)d\tau +$$

$$\int_0^s \sum_{k,l}\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(X_\tau)\sigma_l^k(X_\tau)dB_\tau^l \tag{3'}$$

将(3′)带入(1′′)有$X_t^i = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$ (1′′′)

其中 $I_1 = x_0^i$ $\quad I_2 = \int_0^t b_i(X_s)ds \quad I_3 = \sum_j \int_0^t \sigma_j^i(x_0)dB_s^j$

$$I_4 = \sum_{j,p,q}\int_0^t\int_0^s \frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}(X_\tau)a_{pq}(X_\tau)d\tau dB_s^j$$

$$I_5 = \sum_{j,k}\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(X_\tau)b_k(X_\tau)d\tau dB_s^j$$

$$I_6 = \sum_{j,k,l}\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(X_\tau)\sigma_l^k(X_\tau)dB_\tau^l dB_s^j$$

以下将依次对需要估计的项进行估计

估计I_2:b_i有界，由有界收敛定理可得

$$\lim_{t\to 0} E^{x_0}\left(\left(\frac{\int_0^t b_i(X_S)ds}{t} - b_i(x_0)\right)^2\right) = 0$$

$$\forall\lambda_1, \exists t_1, \mathrm{s.t.}\,\forall 0 < t < t_1, \forall\varepsilon_1 > 0, P\left(\left|\int_0^t b_i(X_s)ds - b_i(x_0)t\right| > \varepsilon_1 t\right) < \frac{\lambda_1}{\varepsilon_1^2} \quad \text{(e1)}$$

估计I_4:同(e1)有

$$\forall\lambda_2,\exists t_2, s.t.\forall 0<s<t_2,\forall\varepsilon_2>0,$$

$$P\left(\left|\sum_{p,q}\int_0^s \frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(X_\tau)d\tau - s\sum_{p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)\right|>\varepsilon_2 s\right)<\frac{\lambda_2}{\varepsilon_2^2}$$

$\forall 0<t<t_2$ $\quad E^{x_0}\left(\left(I_4-\sum_{j,p,q}\int_0^t\int_0^s\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)d\tau dB_s^j\right)^2\right)$

$$\le E^{x_0}\left(m\sum_j\left(\int_0^t\left(\sum_{p,q}\int_0^s\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(X_\tau)d\tau - s\sum_{p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)\right)dB_s^j\right)^2\right)$$

$$=m\sum_j E^{x_0}\left(\left(\int_0^t\left(\sum_{p,q}\int_0^s\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(X_\tau)d\tau - s\sum_{p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)\right)dB_s^j\right)^2\right)$$

$$=m\sum_j E^{x_0}\left(\int_0^t\left(\sum_{p,q}\int_0^s\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(X_\tau)d\tau - s\sum_{p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)\right)^2 ds\right)$$

$$\le m\sum_j\int_0^t\left(M_1 s^2\frac{\lambda_2}{\varepsilon_2^2}+\varepsilon_2^2 s^2\right)ds\le m^2\left(M_1\frac{\lambda_2}{\varepsilon_2^2}+\varepsilon_2^2\right)\frac{1}{3}t^3$$

其中M_1为 $\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}$的界 。我们取$\varepsilon_2=1$，可得

$$E^{x_0}\left(\left(I_4-\sum_{j,p,q}\int_0^t\int_0^s\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)d\tau dB_s^j\right)^2\right)\le m^2(M_1\lambda_2+1)\frac{1}{3}t^3$$

又

$E^{x_0}\left(\left(\sum_{j,p,q}\int_0^t\int_0^s\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)d\tau dB_s^j\right)^2\right)=$

$\left(\sum_{j,p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)\right)^2 E^{x_0}\left(\left(\int_0^t s dB_s\right)^2\right)=\left(\sum_{j,p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)\right)^2\frac{1}{3}t^3=M_1'\frac{1}{3}t^3$

其中$M_1'=\left(\sum_{j,p,q}\frac{\partial^2\sigma_j^i}{\partial x_p\,\partial x_q}a_{pq}(x_0)\right)^2$为常数。

故有

$$\forall\eta > 0, P(|I_4| > \eta t) \le \frac{m^2(M_1\lambda_2+1)+M_1'}{\eta^2}\frac{1}{3}t \tag{e2}$$

估计I_5

同(e2)有

$$\forall\lambda_3 > 0, \exists t_3 > 0, s.t. \forall 0 < t < t_3, \xi > 0, P(|I_5| > \xi t) < \frac{m^2(M_2\lambda_3+1)+M_2'}{\xi^2}\frac{1}{3}t \tag{e3}$$

估计I_6

同样由等距定理有

$$E^{x_0}\left(\frac{1}{s}\left(\sum_{k,l}\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}\sigma_l^k(X_\tau)dB_\tau^l - \sum_{k,l}\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}\sigma_l^k(x_0)B_s^l\right)^2\right)$$

$$\le E^{x_0}\left(m\sum_l\left(\sum_k\int_0^s \frac{\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}\sigma_l^k(X_\tau) - \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}\sigma_l^k(x_0)}{\sqrt{s}}dB_\tau^l\right)^2\right)$$

$$= m\sum_l E^{x_0}\left(\frac{1}{s}\int_0^s\left(\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}\sigma_l^k(X_\tau) - \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}\sigma_l^k(x_0)\right)^2 d\tau\right) \to 0, s \to 0$$

从而

$$\forall\lambda_4 > 0, \exists t_4 > 0, s.t. \forall 0 < s < t_4, \forall j,$$

$$E^{x_0}\left(\frac{1}{s}\left(\sum_{k,l}\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}\sigma_l^k(X_\tau)dB_\tau^l - \sum_{k,l}\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}\sigma_l^k(x_0)B_s^l\right)^2\right) < \lambda_4$$

$$\forall 0 < t < t_4, E^{x_0}\left(\left(I_6 - \sum_{j,k,l}\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)dB_\tau^l dB_s^j\right)^2\right) \le m^2\int_0^t \lambda_4 s ds$$

$$= m^2\lambda_4\frac{t^2}{2}$$

$$\forall\varphi > 0, P\left(\left|I_6 - \sum_{j,k,l}\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)dB_\tau^l dB_s^j\right| > \varphi t\right) < \frac{m^2\lambda_4}{2\varphi^2} \tag{e4}$$

综合以上估计(e1)(e2)(e3)(e4)易知：

$$\forall\phi>0, P\left(\left|X_t^i - x_0 - b_i(x_0)t - \sum_j \sigma_j^i(x_0)B_t^j - \sum_{j,k,l}\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)dB_\tau^l dB_s^j\right| > \phi t\right) \to 0, t\to 0$$

$$\forall\phi>0, P\left(\left|\sum_i n_i\left(X_t^i - x_0^i\right) - \sum_i b_i(x_0)n_i t - \sum_{i,j} n_i\sigma_j^i(x_0)B_t^j - \sum_{i,j,k,l} n_i\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)dB_\tau^l dB_s^j\right| > \phi t\right) \to 0, t\to 0$$

上式即为步骤二的最终估计，设为(e)。这一估计说明，$\sum_i n_i\left(X_t^i - x_0^i\right)$可以用一个常数作某种意义上逼近，事实上，步骤三将分情况估计这一常数。

步骤三（分情形讨论）：

情形一：$x_0 \in \Gamma_3$,即$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)n_i n_j > 0$

由

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)n_i n_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\sigma_k^i(x_0)\sigma_k^j(x_0)n_i n_j = \frac{1}{2}\sum_k\left(\sum_i n_i\sigma_k^i(x_0)\right)^2 > 0$$

故$\exists j_{0,}\mathrm{s.t.}\sum_i n_i\sigma_{j_0}^i(x_0)\neq 0$ 不妨假设$\sum_i n_i\sigma_1^i(x_0)\neq 0$

由

$$E^{x_0}\left(\left(\int_0^t B_s^l dB_s^j\right)^2\right) = \frac{1}{2}t^2, \forall l, j$$

有

$$E^{x_0}\left(\left(\sum_{i,j,k,l} n_i\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)dB_\tau^l dB_s^j\right)^2\right) = \left(\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)\right)^2\frac{1}{2}t^2 = M_3 t^2$$

其中$M_3 = \left(\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)\right)^2/2$为常数。故有，$\forall\psi>0$,

$$P\left(\left|\sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)dB_\tau^l dB_s^j\right| > \psi t\right) \le \frac{M_3}{\psi^2}$$

另一方面，$\forall \psi, \phi > 0$,

$$P\left(\sum_{i,j} n_i \sigma_j^i(x_0) B_t^j < -\left(\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i\right) t\right)$$

$$\ge \prod_{j\neq 1} P\left(\sum_i n_i \sigma_j^i(x_0) B_t^j < 0\right) P\left(\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0) B_t^1\right.$$

$$\left. < -\left(\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i\right) t\right) \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{2} P(|B_t^1|$$

$$> |\frac{\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i}{\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0)}|t) \ge \left(\frac{1}{2}\right)^m (1 - |\frac{\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i}{\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0)}| \sqrt{\frac{2t}{\pi}})$$

综合上述两个估计有

$$P\left(\sum_{i,j} n_i \sigma_j^i(x_0) B_t^j + \sum_i b_i(x_0) n_i t + \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0) dB_\tau^l dB_s^j\right.$$

$$\left. < -(\phi + 1)t\right) \ge \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \left|\frac{\psi + \phi + 1 + \sum_i b_i(x_0) n_i}{\sum_i n_i \sigma_1^i(x_0)}\right| \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right) - \frac{M_3}{\psi^2}$$

固定ϕ，选择合适的ψ，可以使得 t 足够小时上述概率大于一个正常数。再结合步骤二中的最终估计(e)，可以发现，当 t 足够小时，

$$P\left(\sum_i n_i \left(X_t^i - x_0^i\right) < -t\right) \ge \text{某个常数} > 0$$

这满足了步骤一中的充分条件(2)，从而此时x_0是正则点。

情形二：$x_0 \in \Gamma_2$,即

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0) n_i n_j = 0, \sum_i (b_i(x_0) - \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x_0)) n_i < 0,$$

令 $L = \sum_i (b_i(x_0) - \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x_0)) n_i < 0$

由于

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)n_i n_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} \sigma_k^i(x_0)\sigma_k^j(x_0)n_i n_j = \frac{1}{2}\sum_k (\sum_i n_i\sigma_k^i(x_0))^2 = 0$$

从而只能是

$$\forall j, \sum_i n_i\sigma_j^i(x_0) = 0$$

由此

$$\sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x_k}(x_0)\sigma_l^k(x_0)dB_\tau^l dB_s^j$$

$$= \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j - \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)\sigma_j^i(x_0)dB_\tau^l dB_s^j$$

$$= \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j - \sum_{i,j} n_i\sigma_j^i(x_0)\sum_{k,l}\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j$$

$$= \sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j$$

步骤二的最终估计变成如下估计，设为(e′)

$$\forall\phi > 0, P\left(\left|\sum_i n_i(X_t^i - x_0^i) - \sum_i b_i(x_0)n_i t - \sum_{i,j,k,l} n_i\int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j\right| > \phi t\right)$$
$$\to 0, t \to 0$$

其中

$$\sum_{i,k,j=l} n_i \int_0^t\int_0^s \frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j = \sum_{i,k} n_i \sum_l \frac{\partial\sigma_l^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)\int_0^t\int_0^s 1\, dB_\tau^1 dB_s^1$$
$$= -\sum_{i,k} n_i\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}(x_0)t + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} n_i\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_j^k}{\partial x_k}(x_0){B_t^j}^2$$

设为式(4)。

$$\sum_{i,k,j\neq l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j$$

$$= \sum_{i,k,j>l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k,j<l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j$$

$$= \sum_{i,k,j>l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k,j<l} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) \int_0^t \int_0^s 1 dB_\tau^l dB_s^j$$

$$= \sum_{i,k,j>l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) dB_\tau^l dB_s^j + \sum_{i,k,j<l} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) B_t^l B_t^j$$

$$- \sum_{i,k,j<l} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) \int_0^t \int_0^s 1 dB_\tau^j dB_s^l$$

$$= \sum_{i,k,j<l} n_i \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0) B_t^l B_t^j + \sum_{i,k,j>l} n_i \int_0^t \int_0^s \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k}\right)(x_0) dB_\tau^l dB_s^j$$

设为式(5)。

$$\forall \omega, E\left(\left(\sum_{i,k,j>l} n_i \int_0^t \int_0^s \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k}\right)(x_0) dB_\tau^l dB_s^j\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t} |B_s^j| < \omega\sqrt{t}, \forall j\right)$$

$$= \sum_{j>l} E\left(\left(\sum_{i,k} n_i \int_0^t \int_0^s \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k}\right)(x_0) dB_\tau^l dB_s^j\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t} |B_s^j| < \omega\sqrt{t}, \forall j\right)$$

$$= \sum_{j>l} E\left(\left(\sum_{i,k} n_i \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k}\right)(x_0) \int_0^t \int_0^s 1 dB_\tau^l dB_s^j\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t} |B_s^j| < \omega\sqrt{t}, \forall j\right)$$

$$= \sum_{j>l} \left(\sum_{i,k} n_i \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k}\right)(x_0)\right)^2 E\left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t} \left|B_s^{1,2}\right| < \omega\sqrt{t}\right)$$

$$\le \sum_{j>l} \left(\sum_{i,k} n_i \left(\frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_l^i \sigma_j^k}{\partial x_k}\right)(x_0)\right)^2 \omega^2 t^2$$

(上式的最后一步用到了$E\left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}\left|B_s^{1,2}\right| < \omega\sqrt{t}\right) \le \omega^2 t^2$，其证明

过程见附录 B 这里不再赘述)

带入式(5)有

$$\forall\omega,\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i,k,j\neq l}n_i\int_0^t\int_0^s\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j\right)^2\middle|\max_{0\le s\le t}|B_s^j|<\omega\sqrt{t},\forall j\right)\le M_4\omega^2t^2$$

进而有

$$\forall\omega,\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i,k,j\neq l}n_i\int_0^t\int_0^s\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}n_i\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_j^k}{\partial x_k}(x_0){B_t^j}^2\right)^2\middle|\max_{0\le s\le t}|B_s^j|<\omega\sqrt{t},\forall j\right)$$

$$\le M_4^{'}\omega^2t^2$$

$$\forall\omega,\theta,\mathrm{P}\left(\left|\left(\sum_{i,k,j\neq l}n_i\int_0^t\int_0^s\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}n_i\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_j^k}{\partial x_k}(x_0){B_t^j}^2\right)\right|>\theta t\middle|\max_{0\le s\le t}|B_s^j|<\omega\sqrt{t},\forall j\right)$$

$$\le M_4^{'}\omega^2/\theta^2$$

$P\left(\max_{0\le s\le t}|B_s|<\omega\sqrt{t}\right)>0$大于零且与t无关（证明过程见附录 B），不妨设为$f(\omega)$，

结合上式有

$$P(\left|\left(\sum_{i,k,j\neq l}n_i\int_0^t\int_0^s\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}n_i\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_j^k}{\partial x_k}(x_0){B_t^j}^2\right)\right|<\theta t)$$

$$\ge f^m(\omega)(1-M_4^{'}\omega^2/\theta^2)$$

由式(4)有

$$\sum_{i,k,j\neq l}n_i\int_0^t\int_0^s\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}n_i\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_j^k}{\partial x_k}(x_0){B_t^j}^2$$

$$=\sum_{i,k,j,l}n_i\int_0^t\int_0^s\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j+\sum_{i,k}n_i\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}(x_0)t$$

故立即有

$$P(\left|\sum_{i,k,j,l}n_i\int_0^t\int_0^s\frac{\partial\sigma_j^i\sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j+\sum_{i,k}n_i\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}(x_0)t\right|<\theta t)$$

$$\ge f^m(\omega)(1-M_4^{'}\omega^2/\theta^2)$$

设为式(6)

由 L 的定义有

$$\sum_{i} b_i(x_0)n_i t+\sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j$$

$$=\sum_{i,k,j,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j+\sum_{i,k} n_i \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}(x_0)t+Lt$$

代入式(6)并取$\theta=-L/2$，可得

$$P(\sum_{i} b_i(x_0)n_i t+\sum_{i,j,k,l} n_i \int_0^t \int_0^s \frac{\partial \sigma_j^i \sigma_l^k}{\partial x_k}(x_0)dB_\tau^l dB_s^j < Lt/2) \geq \frac{1}{2} f^m(\frac{-L}{2}\sqrt{\frac{1}{2M_4'}})$$

作与情形一相似的讨论可知x_0也是正则点。

证毕。

注记 3 定理 3 的意义在于，一方面，对于定理所提出的假设下的情形，给出了正则点的一个充分的判定条件；一方面，证明了正则点和 Fichera 点的联系（当然产生这种联系的机制，有待我进一步的思考和研究）。

注记 4 在定理 3 中，即使增加了一些假设，我仍然不能对边界上剩下的点（即$\Gamma_0 \cup \Gamma_1$内的点）作出判别。不能判别前者的原因在于需要更精细的划分（比如需要加入a_{ij}的二阶导数作划分）；而不能判别后者的原因在于没有找到合适的估计方法，定理证明中适用于情形二（即Γ_2）的方法并不适用于Γ_1。我倾向于认为Γ_1中的点都不是正则点。但这些猜测需要以后作进一步的探索和研究。

第 3 章 算例

在本章中，我们将对具体的例子，先用 1.1 中验证定义的方法找出边界上的正则点，再应用定理 3 的结论进行计算。

算例 取$\Omega=[0,1]\times[0,1]$，微分算子$Lf(t,x)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};(t,x)\in\mathbb{R}^2$

要求$\partial\Omega$上的正则点。

计算：

本例中

$$b = (1 \quad 0)^T \quad a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

取

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

遵循 1.1 中的步骤

求解

$$dX_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

可得

$$X_t = \begin{pmatrix} t \\ B_t + x_0 \end{pmatrix}$$

从而$\partial\Omega$上除去$\{0\} \times (0,1)$剩下的部分都是正则点，$\{0\} \times (0,1)$上的点都是不正则的。

如果考虑应用定理 3，由注记 1，我们只能考虑$\partial\Omega \backslash \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$这些光滑的边界点。

不难验证，

$$(0,1) \times \{0,1\} \in \Gamma^3, \{0\} \times (0,1) \in \Gamma^1, \{1\} \times (0,1) \in \Gamma^2$$

故我们可以得出结论$(0,1) \times \{0,1\} \cup \{1\} \times (0,1)$上的点都是正则点。

算例的说明：上述算例一方面，反映了定理 3 对于处理某些问题时计算上的方便和快捷；一方面，正如注记 3 所说，反映了定理 3 并不能保证找出所有的正则点。

参考文献

[1] Ioannnis Karatzas, Steven E.Shreve. Brownian Motion and Stochastic Calculus.Second Edition. New York: Springer Science + Business Media, Inc, 1988,1991.

[2] Avner Friedman. Stochastic Differential Equations and Applications ,Volume 1. New York: Academic Press, Inc, 1975

[3] Bernt Øksendal.Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.

附录 两个补充证明

补充证明一：

$$E\left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}\left|B_s^{1,2}\right| < \omega\sqrt{t}\right) \le \omega^2 t^2$$

简要证明：

$$E\left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}\left|B_s^{1,2}\right| < \omega\sqrt{t}\right)$$

$$= E\left(\left(\lim_{\Delta t\to 0}\sum_i B_{t_i}^1\left(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2\right)\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}\left|B_s^{1,2}\right| < \omega\sqrt{t}\right)$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\sum_i E\left(\left(B_{t_i}^1\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}|B_s^1| < \omega\sqrt{t}\right) E\left(\left(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}|B_s^2| < \omega\sqrt{t}\right)$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{p\ne q} E\left(B_{t_p}^1 B_{t_q}^1 \middle| \max_{0\le s\le t}|B_s^1| < \omega\sqrt{t}\right) E((B_{t_{p+1}}^2 - B_{t_p}^2)(B_{t_{q+1}}^2 - B_{t_q}^2)| \max_{0\le s\le t}|B_s^2|$$
$$< \omega\sqrt{t})$$

由B_t的性质易得

$$E\left(\left(B_{t_i}^1\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}|B_s^1| < \omega\sqrt{t}\right) < \omega^2 t$$

$$E\left(\left(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}|B_s^2| < \omega\sqrt{t}\right) < (t_{i+1} - t_i)$$

$$E\left(B_{t_p}^1 B_{t_q}^1 \middle| \max_{0\le s\le t}|B_s^1| < \omega\sqrt{t}\right) \ge 0$$

$$E((B_{t_{p+1}}^2 - B_{t_p}^2)(B_{t_{q+1}}^2 - B_{t_q}^2)| \max_{0\le s\le t}|B_s^2| < \omega\sqrt{t}) \le 0$$

从而有

$$E\left(\left(\int_0^t B_s^1 dB_s^2\right)^2 \middle| \max_{0\le s\le t}\left|B_s^{1,2}\right| < \omega\sqrt{t}\right) \le \lim_{\Delta t\to 0}\sum_i \omega^2 t(t_{i+1}-t_i) = \omega^2 t^2$$

补充证明二：

$$P\left(\max_{0\le s\le t}|B_s| < \omega\sqrt{t}\right) > 0且与t无关$$

简要证明：

$$P\left(\max_{0\le s\le t}|B_s| < \omega\sqrt{t}\right) = P\left(\max_{0\le s\le t}\left|B_s/\sqrt{t}\right| < \omega\right)$$

定义随机过程$\{C_l\}$，$0 \le l \le 1$：$C_l = B_{lt}/\sqrt{t}$，其分布密度函数为

$$g(l, y) = (2\pi l)^{-1/2}e^{-y^2/2l}$$

与 t 无关（事实上$\{C_l\}$就是$\{B_s\}$，$0 \le s \le 1$）。

从而$P\left(\max_{0\le s\le t}|B_s| < \omega\sqrt{t}\right) = P(\max_{0\le l\le 1}|C_l| < \omega) > 0$

与 t 无关。