Jones多项式及其范畴化

宗正宇*
指导教师：周坚教授

摘　要

在本文中，我们首先介绍一下历史上一些重要的多项式类型的扭结不变量，使我们了解扭结理论的发展过程。之后，我们重点介绍Khovanov的文章 [1]，概述这篇文章中构造的上同调类型的扭结不变量。我们还将指出，这种上同调群比Jones多项式更为精细。之后，我们会讨论文章 [1] 中的构造与拓扑量子场论之间的关系。最后，我们将证明在一定的限制条件下，文章 [1] 中所涉及的代数A是唯一的。

关键词：范畴化；Jones多项式；拓扑量子场论

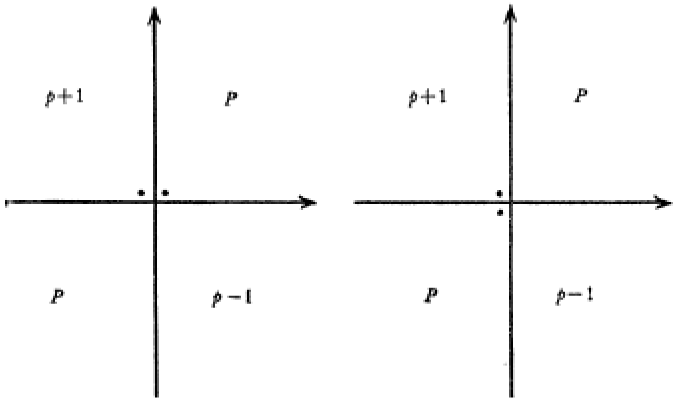
§1　引言

纽结理论来源于非常直观的想法，从人类学会用绳子系扣开始，人们就在与扭结打交道。而纽结理论就是用数学的方法来研究扭结。纽结理论的基本问题就是给扭结分类，也就是区分不同的扭结。要做到这一点，就要找到扭结的拓扑不变量。在1928年，J.W Alexander在文章 [2] 中构造了扭结的Alexander多项式，使得扭结理论取得了重大突破。Alexander多项式是纽结理论中第一个比较有效地多项式类型的不变量，而在这之前，人们研究扭结的方法主要是计算扭结在R^3中的补空间的基本群。

§1.1　Alexander多项式

关于这一节的内容，参见J.W.Alexander的文章 [2] 。我们现在来简要介绍一下在文章 [2] 中，作者是如何构造Alexander多项式的。作者将R^3中的定向扭结投影到平面上，得到一个平面图，并且这个平面图是一般位置的，即无三重交点、相切点和尖点。这样，对于平面图上的每一个交点，与它相邻的有四个区域。其中，沿着较低

*基数63



的分支的左侧的两个区域被画上两个点。此外，每个区域都被赋予了一个整数，并且满足对于每个交点，一三象限的整数相同（记为p），第二象限为$p+1$，第四象限为$p-1$（如图所示）。每个区域被赋整数称为这个区域的指标。

如果一个平面图有v个交点$c_i \quad i = 1,2,\cdots,v$，则由多面体的欧拉定理，它必有$v+2$个区域$r_j \quad j = 0,2,\cdots,v+1$。对于一个交点$c_i$，我们设与之相邻的四个区域为$r_j, r_k, r_l$和$r_m$。并且它们的顺序满足逆时针方向，而且$r_j, r_k$属于被画了点的两个区域。这样一来，对于每个交点$c_i$，我们将它对应一个线性方程：

$$c_i(r) = xr_j - xr_k + r_l - r_m = 0$$

这v个方程都被称为这个图的方程。如果我们将这些方程的系数组成一个矩阵M，那么这个矩阵将有v行、$v+2$列。我们有下面的定理：

定理 对于矩阵M，如果去掉它的两列得到一个方阵M_0，并且去掉的两列对应的区域的指标为两个相邻的整数p和$p+1$，那么M_0的行列式在相差一个形如$\pm x^n$的因子的意义下是独立于去掉的两行的选取的。

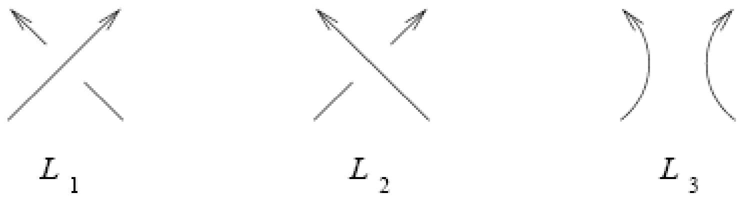
令$\pm\Delta_{pq}(x) = \pm\Delta_{qp}(x)$表示矩阵$M_{pq}$的行列式，其中$M_{pq}$为将$M$去掉任意两个指标分别为$p$和$q$的列而得到的矩阵。现在，我们将$\Delta_{r(r+1)}(x)$除以一个形如$\pm x^n$的因子，使得所得到的表达式$\Delta(x)$的最低次项是一个正的常数。那么，我们将有下面的定理：

定理 多项式$\Delta(x)$是扭结的拓扑不变量。

$\Delta(x)$被称为扭结的*Alexander* 多项式。

§1.2 Conway多项式

现在，我们来讨论Conway多项式，它是一个比Alexander多项式更加精细化的扭



结不变量。关于这一节的内容，参见J.H.Conway的文章 [3] 以及L.H.Kauffman的书 [4] 。Conway多项式是由以下的三条公理来确定的：

公理1 每一个定向的扭结或者连杆K，对应一个多项式$\nabla_K(z) \in \mathbb{Z}[z]$。并且等价的扭结和连杆对应相同的多项式：$K \sim K' \Rightarrow \nabla_K = \nabla_{K'}$。

公理2 如果$K \sim 0$（0表示平凡扭结），则$\nabla_K(z) = 1$。

公理3 如果三个扭结L_1, L_2, L_3在某个交点附近的区别如下图所示，那么则有$\nabla_{L_1}(z) - \nabla_{L_2}(z) = z \nabla_{L_3}(z)$

公理3有时也被称为交换恒等式。我们有下面的基本定理：

定理 以上的三条公理是协调的。

这样一来，Conway多项式就是一个扭结的拓扑不变量。下面，我们来看一看Conway多项式的一些基本性质，这些性质对于具体的计算是很有用的。

命题 如果L是一个分裂的连杆，则$\nabla_L(z) = 0$。（一个连杆被称为分裂的，如果它的平面图可以被分成两个非空的部分，使得它们分别处在两个不相交的邻域当中。）

定义 令L为任意的一个扭结或连杆。定义$C(L)$为

$$C(L) = \begin{cases} 1 & \text{如果}L\text{只有一个分支} \\ 0 & \text{如果}L\text{有多于一个的分支} \end{cases}$$

这样一来，$C(L)$是L的不变量，并且它区分了扭结和连杆。

命题 设a_0, a_1分别为K的Conway多项式中1和z前的系数，则有

$$(1) \quad a_0(K) = C(K) \quad \text{对于所有的扭结或连环K.}$$

$$(2) \quad a_1(K) = \begin{cases} lk(K) & \text{如果}K\text{有两个分支} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

这里，lk(K)表示K的连环数。

§1.3 Jones多项式

Jones多项式的出现是纽结理论的又一个重大突破，它能够有效地区分很多不同类型的扭结。有关这一节的内容，参见V.F.R.Jones的文章 [5] 。

Jones多项式最早是由分析特定的有限维von Neumann代数A_n得到的，其中A_n由恒等1和投射$e_1, \cdots, e_n$生成。它们满足下面的关系：

(1) $e_i^2 = e_i, e_i^* = e_i$

(2) $e_i e_{i\pm 1} e_i = t/(1+t)^2 e_i$

(3) $e_i e_j = e_j e_i$ if $\mid i - j \mid \geqslant 2$.

这里t是一个复数。人们已经证明，如果对于任意大的n这样的投射均存在，那么t就一定是一个实数或者是$e^{\pm 2\pi i/k}$的形式，其中$k = 3, 4, 5 \cdots$。当t是这些数的时候，对于每个n均存在代数A_n以及一个迹映射tr: $A_n \to \mathbb{C}$，其中tr完全由规范化条件tr(1)=1确定，并且满足

(4) tr(ab)=tr(ba),

(5) $\mathrm{tr}(we_{n+1}) = t/(1+t)^2 \mathrm{tr}(w)$ if w is in A_n,

(6) $\mathrm{tr}(a^* a) > 0$ if $a \neq 0$.

如果令$g_i = \sqrt{t}(te_i - (1 - e_i))$，那么我们可以得到$B_n$的表示$r_t$，其中$r_t$将$s_i$映到$g_i$，$B_n$是$n-$弦辫子群。

定义 如果L是一个驯服的连环，则对于任意满足$b^\wedge = L$的(b, n)（$b \in B_n$），定义$V_L(t)$为

$$V_L(t) = (-(t+1)/\sqrt{t})^{n-1} \mathrm{tr}(r_t(b))$$

我们有下面的基本定理：

定理 $V_L(t)$是一个扭结不变量。

$V_L(t)$被称为L的$Jones$多项式，下面是它的一些重要性质：

定理 $V_{L^\sim}(t) = V_L(1/t)$。

定理 $V_{L_1\#L_2} = V_{L_1}V_{L_2}$。

定理 $1/tV_{L_-} - tV_{L_+} = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})V_L$。

§2　Jones多项式的范畴化

在这一章中，我们重点介绍Khovanov的文章 [1] ，之后讨论这篇文章的结果与拓扑量子场论之间的关系。

§2.1　Khovanov的结果

M.Khovanov在他的文章 [1] 中，定义了扭结的上同调群并证明了这个上同调群是扭结的拓扑不变量。这个上同调类型的扭结不变量包含了比Jones多项式更多的信息，特别地，由这些上同调群可以得出扭结的Jones多项式。现在我们就来讨论这篇文章的内容。

令$R = \mathbb{Z}[c]$为$\mathbb{Z}$上的多项式环。在R上引入一个分次：deg(1)=0, deg(c)=2，从而R成为一个分次环。以R-mod_0表示分次R-模范畴，这是个Abel范畴。现在，设$M = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}M_j$是一个有限生成的分次$R$-模，定义它的分次Euler示性数$\widehat{\chi}(M)$为

$$\widehat{\chi}(M) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{Q}}(M_j \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})q^j$$

下面，我们来定义一个R上的代数A。设A是一个秩为2的自由R-模，其生成元为$\mathbf{1}$ 和X，并且定义分次deg($\mathbf{1}$)=1，deg(X)=-1。A的交换代数结构由下面的式子确定：

$$\mathbf{1}X = X\mathbf{1} = X, X^2 = 0.$$

从而$\mathbf{1}$为A的乘法单位元。定义单位映射$\iota: \quad R \to A$，其中$\iota(1) = \mathbf{1}$。下面，我们定义A中的余交换运算Δ，使A成为一个余交换代数:

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\otimes X + X\otimes \mathbf{1} + cX\otimes X, \quad \Delta(X) = X\otimes X$$

再定义余单位运算

$$\epsilon(\mathbf{1}) = -c, \quad \epsilon(X) = 1.$$

由以上的定义容易验证等式$\Delta\circ m=(m\otimes Id)\circ(Id\otimes\Delta)$成立，其中$m$为乘法。

命题1 每一个结构映射$\iota, m, \epsilon, \Delta$都使分次的，并且

$$\deg(\iota)=1,\quad \deg(m)=-1,\quad \deg(\epsilon)=1,\quad \deg(\Delta)=-1.$$

命题2 我们有R-模的直和分解

$$A\otimes A=(A\otimes\mathbf{1})\oplus\Delta(A)$$

现在，我们将A中的结构映射对应到拓扑量子场论中的六种基本的曲面。令$\mathcal{M}$表示一个范畴，$\mathcal{M}$中的对象为闭的一维流形，态射为由下图中的六种基本曲面生成的配边。从而，我们可以定义一个从$\mathcal{M}$到R-mod_0的函子F

$$F(\bar{n})=A^{\otimes n},\quad F(S_2^1)=m,\quad F(S_1^2)=\Delta,\quad F(S_0^1)=\iota,$$

$$F(S_1^0)=\epsilon,\quad F(S_2^2)=\mathrm{Perm},\quad F(S_1^1)=\mathrm{Id}.$$

其中，$\bar{n}$表示n个圆周的不交并，Perm：$A\otimes A\to A\otimes A$，$\mathrm{Perm}(u\otimes v)=v\otimes u$，Id为恒等映射。

由A的交换代数和余交换代数结构，以及等式$\Delta\circ m=(m\otimes Id)\circ(Id\otimes\Delta)$可知，$F$的定义是合理的。我们有下面的命题：

命题3 对于每个曲面$S\in\mathrm{Mor}(\mathcal{M})$，映射$F(S)$的次数等于$S$的Euler示性数。

下面，我们来介绍立方的概念。

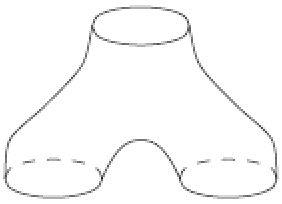
定义1 设$\mathcal{I}$是一个有限集，$\mathcal{B}$是一个范畴。一个取值在$\mathcal{B}$中的交换$\mathcal{I}$-立方V是指对每个$\mathcal{I}$的子集$\mathcal{L}$，指定一个对象$V(\mathcal{L})\in Ob(\mathcal{B})$，对每个$a\notin\mathcal{L}$指定态射

$$\xi_a^V(\mathcal{L}):V(\mathcal{L})\to V(\mathcal{L}a)$$

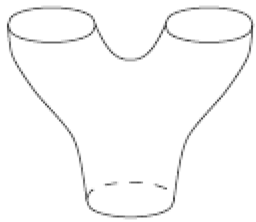
并且满足对于$\mathcal{I}$中任意的两个元素$a\neq b$，如果a,b不属于$\mathcal{L}$，则有等式

$$\xi_b^V(\mathcal{L}a)\xi_a^V(\mathcal{L})=\xi_a^V(\mathcal{L}b)\xi_b^V(\mathcal{L}).$$

S^1_2



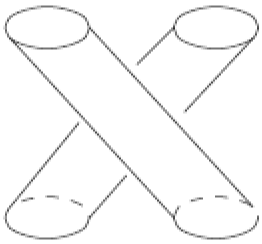
S^2_1



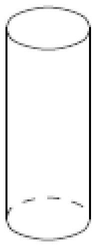
S^1_0

S^0_1

S^2_2



S^1_1



给定了两个$\mathcal{B}$上的$\mathcal{I}$-立方V,W，一个$\mathcal{I}$-立方映射$\psi : V \to W$指的是对于每个$\mathcal{I}$的子集$\mathcal{L}$给定一个态射$\psi(\mathcal{L}) : V(\mathcal{L}) \to W(\mathcal{L})$使得对每个$a \notin \mathcal{L}$，均有$\xi_a^W(\mathcal{L})\psi(\mathcal{L}) = \psi(\mathcal{L}a)\xi_a^V(\mathcal{L})$

对于一个有限集$\mathcal{I}$及$a \in \mathcal{I}$，令$\mathcal{I} = \mathcal{J} \sqcup a$。按以下方式定义$\mathcal{J}$-立方$V_a(*0), V_a(*1)$：

$$V_a(*0)(\mathcal{L}) = V(\mathcal{L}), \quad V_a(*1)(\mathcal{L}) = V(\mathcal{L}a)$$

$V_a(*0), V_a(*1)$的结构映射由V的结构映射所决定。结构映射ξ_a^V定义了一个$\mathcal{J}$-立方映射$V_a(*0) \to V_a(*1)$。从而$\mathcal{I}$-立方与$\mathcal{J}$-立方的映射是一一对应的。

定义2 设$\mathcal{I}$是一个有限集，$\mathcal{B}$是一个范畴。一个取值在$\mathcal{B}$中的反交换$\mathcal{I}$-立方V是指对每个$\mathcal{I}$的子集$\mathcal{L}$，指定一个对象$V(\mathcal{L}) \in Ob(\mathcal{B})$，对每个$a \notin \mathcal{L}$指定态射

$$\xi_a^V(\mathcal{L}) : V(\mathcal{L}) \to V(\mathcal{L}a)$$

并且满足对于$\mathcal{I}$中任意的两个元素$a \neq b$，如果a, b不属于$\mathcal{L}$，则有等式

$$\xi_b^V(\mathcal{L}a)\xi_a^V(\mathcal{L}) + \xi_a^V(\mathcal{L}b)\xi_b^V(\mathcal{L}) = 0.$$

在Khovanov的这篇文章中，作者固定了一个R-mod_0上的反交换$\mathcal{I}$-立方$E_{\mathcal{I}}$。之后，我们将用$E_{\mathcal{I}}$与交换$\mathcal{I}$-立方做张量积，从而得到反交换的$\mathcal{I}$-立方。

令$\mathcal{B}$是一个Abel范畴，V是$\mathcal{B}$上的一个反交换$\mathcal{I}$-立方。我们定义$\mathcal{B}$上的复形$\overline{C}(V) = (\overline{C}^i(V), d^i)$为：

$$\overline{C}^i(V) = \oplus_{\mathcal{L} \in \mathcal{I}, |\mathcal{L}| = i} V(\mathcal{L})$$

微分$d^i : \overline{C}^i(V) \to \overline{C}^{i+1}(V)$的定义为：对每个$x \in V(\mathcal{L}), |\ \mathcal{L}\ | = i$

$$d^i(x) = \sum_{a \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{L}} \xi_a^V(\mathcal{L})x.$$

我们有下面的命题

命题4 令$\mathcal{B}$是一个Abel范畴，V是$\mathcal{B}$上的一个反交换$\mathcal{I}$-立方。如果对于某个$a \in \mathcal{I}$以及任意的$\mathcal{L} \subset \mathcal{I} \setminus a$，映射$\xi_a^V(\mathcal{L})$是同构，那么复形$\overline{C}(V)$是非循环的。

命题5 设V是一个R-mod_0上的交换$\mathcal{I}$-立方，如果对某个$a \in \mathcal{I}$，$\xi_a^V : V_a(*0) \to V_a(*1)$是一个同构，则复形$\overline{C}(V \otimes E_{\mathcal{I}})$是非循环的。

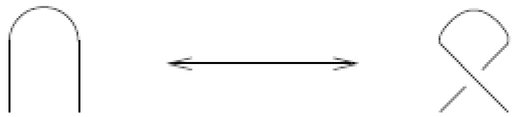


图 1 增加或去除左旋

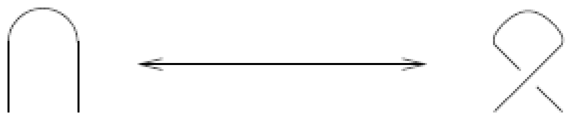


图 2 增加或去除右旋

命题6 我们有复形的典则分解

$$\overline{C}(V \oplus W) = \overline{C}(V) \oplus \overline{C}(W)$$

这里V和W是一个Abel范畴上的反交换$\mathcal{I}$-立方。

对于一个连杆L，我们可以将它以一般位置投影到一个平面上，得到一个平面图D。我们有下面的重要命题：

命题7 如果两个平面图D_1和D_2代表同痕的定向连杆，则D_1可以通过重复以下四种移动转化为D_2：1、增加或去除左旋，2、增加或去除右旋，3、相切移动，4、三重点移动。

固定一个定向连杆L以及它的平面图D。设$\mathcal{I}$是D的二重点的集合并且设$|\ \mathcal{I}\ | = n$。给定D的一个二重点，它有两种消去方法：0-消去和1-消去（见下图）。从而D有2^n种消去方法。对于每个$\mathcal{L} \subset \mathcal{I}$与之对应一种$D$的消去方法：属于$\mathcal{L}$中的点做1-消去，而

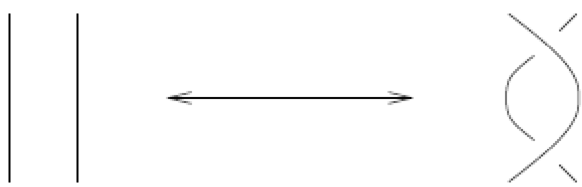


图 3 相切移动

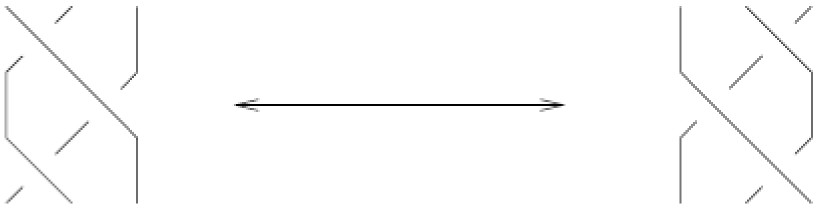
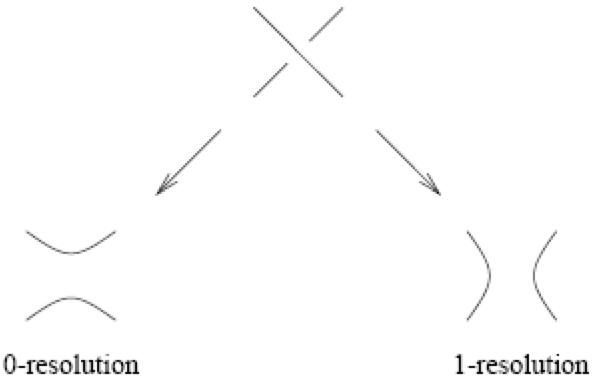


图 4 三重点移动



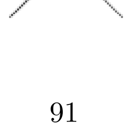
不属于$\mathcal{L}$的点做0-消去，得到的平面图记作$D(\mathcal{L})$。我们定义一个$\mathcal{I}$-立方V_D：

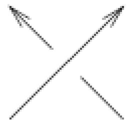
$$V_D(\mathcal{L}) = F(D(\mathcal{L}))\{- \mid \mathcal{L} \mid\}$$

对于平面图$D(\mathcal{L})$和$D(\mathcal{L}a)$，它们只在a的一个邻域U内不同，所以我们可以用之前介绍的6种基本曲面中的S_1^2或S_2^1将它们在U中相连接。而在a的邻域U外，用$(D(\mathcal{L})\setminus U)\times[0,1]$将它们连接。设得到的这个曲面为$S$，定义结构映射$\xi_a^V(\mathcal{L})$为$F(S)$。从而我们有下面的命题：

命题8 V_D是R-mod_0上的交换$\mathcal{I}$-立方。

现在，我们定义$\overline{C}(D) = \overline{C}(V_D \otimes E_{\mathcal{I}})$。我们设$x_D$为$D$中形如下图的双重点的个数 y_D为D中形如下图的双重点的个数 并且定义





$$C(D)=\overline{C}(D)[x(D)]\{2x(D)-y(D)\}$$

令$H^i(D)$为$C(D)$的第i个上同调群，它是一个有限生成的分次R-模。下面的定理是文章 [1] 中的主定理：

定理1 设D是一个定向连杆L的平面图，则对每个$i\in\mathbb{Z}$，$H^i(D)$的同构类是L的不变量。

定理1的证明方法是分别讨论在命题7中讨论的四种基本移动下$H^i(D)$是L的不变量，从而由命题7知定理1正确。记$H^i(L)$为$H^i(D)$的同构类。下面的命题证明了$H^i(L)$给出了比L的Jones多项式更多的信息。

命题9 对于一个定向连杆L，

$$K(L)=(1-q^2)\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(D))$$

其中$K(L)$为L的Kauffman括号。

事实上，令$V(L)$表示L的Jones多项式，则

$$V(L)_{\sqrt{t}=-q}=\frac{K(L)}{q+q^{-1}}$$

所以L的所有上同调群$H^i(L)$决定了它的Jones多项式。

§2.2 与拓扑量子场论的关系

在这一节中，我们简要介绍一下拓扑量子场论的基本概念，之后说明Jones多项式的范畴化与与拓扑量子场论的关系。有关这一节的内容，参见 [6] 和 [7] 。我们首先给出拓扑量子场论的定义。

定义1 固定一个域k，一个n维的拓扑量子场论指的是一个法则Z，它将每个紧的定向的$n-1$维流形Σ 对应到一个k-向量空间$Z(\Sigma)$,将每个定向的n维配边$M:\Sigma_0\Rightarrow$

Σ_1对应到从$Z(\Sigma_1)$到$Z(\Sigma_2)$的线性映射$Z(M)$。并且Z满足下面的五条公理：
A1: 两个等价的配边要有相同的像：

$$M_1 \cong M_2 \Rightarrow Z(M_1) = Z(M_2)$$

A2: 圆柱$\Sigma \times I$对应到$Z(\Sigma)$的恒等映射。
A3: 给定了配边的分解$M = M_1 M_2$则有

$$Z(M) = Z(M_1)Z(M_2)$$

A4: 如果$\Sigma = \Sigma' \coprod \Sigma"$则有$Z(\Sigma) = Z(\Sigma') \otimes Z(\Sigma")$。如果$M : \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma_1$是$M' : \Sigma_0' \Rightarrow \Sigma_1'$和$M" : \Sigma_0" \Rightarrow \Sigma_1"$的不交并，则有$Z(M) = Z(M') \otimes Z(M")$。
A5: 如果$\Sigma = \emptyset$则$Z(\Sigma) = k$。

在拓扑量子场论的定义当中，前三条公理实际上是在说Z是一个函子。为此，我们来用范畴的观点来给出拓扑量子场论的定义，在这个观点下我们可以更加清晰地看出文章 [1] 与拓扑量子场论的关系。

令**nCob**表示一个范畴，它的对象是$n-1$维流形，态射是n维配边在微分同胚意义下的同构类的集合。那么，$(\mathbf{nCob}, \coprod, \emptyset)$是一个对称的独异范畴。同样，以$Vect_k$表示$k$-向量空间范畴，则$(Vect_k, \otimes, k)$也是一个对称的独异范畴。从而拓扑量子场论可以定义如下：

定义1' 一个n维的拓扑量子场论指的是一个从$(\mathbf{nCob}, \coprod, \emptyset)$到$(Vect_k, \otimes, k)$的对称的独异函子$Z$。

有了这个定义，我们可以看出，文章 [1] 中定义的函子F实际上给出了一个2维的拓扑量子场论的类似物。只是在文章 [1] 中，A是一个环上的代数，而不是一个域上的向量空间，但是这篇文章的思想与拓扑量子场论是密切相关的。

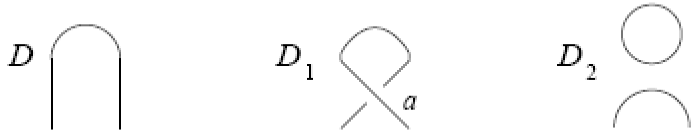


图 5

§2.3 一个新结果

在这一节中，将给出一个由我和朱光宇同学共同研究出的一个结果。这个结果在一定的条件下确定了文章 [1] 中的代数A的唯一性。本节的符号与 [1] 中的符号一致。

在文章 [1] 中，如果令交换环$R = \mathbb{Z}[c]$中的$c = 0$，这篇文章中的结果依然成立。在文章 [1] 的第七章中就应用$c = 0$时的结果给出了一些应用。此时A是一个$\mathbb{Z}$上的代数。现在，如果将$\mathbb{Z}$换成一个域k，那么 [1] 中的结果仍成立，并且此时F给出了一个域k上的2维拓扑量子场论。下面的定理是本节的主定理：

定理1 固定一个域k，设A是k上的分次代数（规定k中非零元素的次数均为0），如果A使得 [1] 中的定理1成立，那么A的结构是唯一的。

我们分几个步骤来证明这个定理。首先，我们来证明下面的引理。

引理1 A作为k-向量空间的维数等于2。

证明：设A的维数为n。将 [1] 中的定理1应用于平面图D是一个圆周的情况。此时，考虑 [1] 的5.1节中左旋的情况(如下图）此时，$V_{D_1}(*0) \cong V_{D_2} \cong A \otimes A, V_{D_1}(*1) \cong V_D\{-1\} \cong A\{-1\}, \iota_a(V_D) = \mathbf{1} \otimes A$。作为$k$-向量空间，令$V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus W$，则

$$V_{D_1} = V^{'} \oplus V^{"}$$

其中

$$V^{'}(*0) = W, \quad V^{'}(*1) = 0, \quad V^{"}(*0) = \iota_a(V_D), \quad V^{"}(*1) = V_{D_1}(*1)$$

由 [1] 中的命题12可知，复形$\overline{C}(V^{"} \otimes E_{\mathcal{I}'})$是非循环的，其中$\mathcal{I}' = \{a\}$。由于

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{\mathcal{I}'}) = \overline{C}(V^{'} \otimes E_{\mathcal{I}'}) \oplus \overline{C}(V^{"} \otimes E_{\mathcal{I}'})$$

并且

$$\overline{C}(V^{'} \otimes E_{\mathcal{I}'}) = [\cdots \to 0 \to W \to 0 \to \cdots]$$

$$\overline{C}(V_D \otimes E_{\mathcal{I}})\{1\} = [\cdots \to 0 \to A \to 0 \to \cdots]$$

其中$\mathcal{I} = \emptyset$。所以由 [1]中的定理1知必有$W \cong A$，特别地dim$W$=dim$A$=n。另一方面，由于$V_{D_2} \cong A \otimes A$并且$V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus W$，所以dim$W$=$n^2-n$。所以必有$n = 2$。（$n = 0$的情况是没有意义的。）

定理1的证明：首先取出A中的单位元$\mathbf{1}$及另一个齐次元X，使得$A = k\mathbf{1} \oplus kX$。若要使 [1] 中的定理1成立， [1] 中的关于结构映射的次数的命题1必须成立。所以有deg$m$=-1，其中m为乘法。所以由$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$知及deg$m$=-1知，$\mathbf{1}$为齐次元且deg($\mathbf{1}$)=1。由于deg$\epsilon$=1，而$k$中非零元素的次数均为0，所以只有$\epsilon(\mathbf{1}) = 0$。由余代数的定义

$$(\epsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \mathrm{Id}$$

所以$\epsilon(X)$一定不为0。所以由degϵ=1知deg$X$=-1。再由deg$m$=-1知，$X^2 = 0$。

通过将X乘以一个适当的常数，我们不妨设$\epsilon(X) = 1$。（否则，以$\frac{X}{\epsilon(X)}$代替X。）由于degΔ=-1，所以

$$\Delta(X) = aX \otimes X$$

其中a是一个常数。再由$(\epsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \mathrm{Id}$知$a = 1$。

由于degΔ=-1，所以

$$\Delta(\mathbf{1}) = a\mathbf{1} \otimes X + bX \otimes \mathbf{1}$$

由余交换性知$a = b$。最后，如果要使 [1] 中函子F的定义是合理的，就必须有等式$\Delta \circ m = (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)$成立。将这个等式两边作用上$X \otimes \mathbf{1}$可知，$a = 1$。至此，定理1证毕。

参考文献

[1] M. Khovanov. A categorification of the jones polynomial. *Duke Mathematical Journal*, 101(3):359–426, 2000.

[2] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30:275–306, 1928.

[3] J. H. Conway. An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties. *Computational Problems in Abstract Algebra*, pages 329–358, 1970.

[4] L. H. Kauffman. *On Knots*. Princeton University Press, Princeton, 1987.

[5] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots and links via von neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12:103–111, 1985.

[6] M. Atiyah. *The Geometry and Physics of Knots.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] J. Kock. *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.