阿基米德的数学及其现代解法

张程业*
指导教师：肖杰教授

摘　要

在提出的阿基米德公理及诸多定律中，阿基米德采用了传统的"比例方法"、"穷竭法"和"归谬法"进行计算论证，这些方法在某些方面逻辑性不够强，原理也是比较初级的。

本论文首先综述了阿基米德定律中的圆周率估算、抛物线弓形面积、螺线所围的面积等几个命题。通过对比分析，总结出传统和现代科学手段在论证阿基米德定律方法的差异，进而有效证明用现代知识阐述传统定律的有效性和可行性。

关键词：阿基米德；数学史；分析

§1　引言

§1.1　阿基米德的数学成就

阿基米德 (Archimedes，约公元前 287 ~ 212) 是古希腊物理学家、数学家，静力学和流体静力学的奠基人。

阿基米德的数学成就在于他既继承和发扬了古希腊研究抽象数学的科学方法，又使数学的研究和实际应用联系起来。阿基米德确定了抛物线弓形、螺线、圆形的面积以及椭球体、抛物面体等各种复杂几何体的表面积和体积的计算方法。在推演这些公式的过程中，他创立了"穷竭法"，即我们今天所说的逐步近似求极限的方法，因而被公认为微积分计算的鼻祖。他用圆内接多边形与外切多边形边数增多、面积逐渐接近的方法，比较精确地求出了圆周率。面对古希腊繁冗的数字表示方式，阿基米德还首创了记大数的方法，突破了当时用希腊字母计数不能超过一万的局限，并用它解决了许多数学难题。

*基数 53

作为数学家，他写出了《论球和圆柱》、《圆的度量》、《抛物线求积》、《论螺线》、《论锥体和球体》、《沙的计算》等数学著作；作为力学家，他著有《论图形的平衡》、《论浮体》、《论杠杆》、《原理》等力学著作。

§1.2 阿基米德的研究方法

§1.2.1 比例的使用

无论在陈述命题或列写证明时，阿基米德的著作都存在应用比例的案例。事实上，古希腊的数学主要包含两种方法，一种是运用面积，另一种是运用比例。阿基米德主要是采用比例的方法进行定律推论和研究。在这里，阿基米德把一个复杂的数学关系表达为比例关系，这与当时其他数学家的研究方法大有不同。

§1.2.2 穷竭法

古希腊数学家阿基米德发明的一种求曲边形面积的方法，使用分块长方形逼近原曲边形的面积。

用穷竭法计算曲边形的面积时，对不同的曲边形，采用不同的直边形去逼近。并且计算的过程中采用了特殊的技巧，因而不具有一般性，无法向一般的曲边形推广。

§1.2.3 归谬法

“归谬法”即是反证法的一种特殊情形，首先假定推测答案的数值，然后假设真正的答案大于或小于该数，如果可以证明它们都会产生矛盾，便证明了该数值是答案。

§1.3 阿基米德研究方法的局限性

1. 在没有完备的数学定义的前提下，一切关于极限的应用都是不能 100% 站住脚的。在阿基米德的年代，不可能有极限的准确定义。因此，从现代数学的角度来讲，阿基米德的证明缺少极限存在的证明。

2. 阿基米德的计算过程虽然只涉及了加减乘除的计算，但是其计算过程十分复杂。就拥有强大计算工具的现代人来讲，这些数字上的计算都是无味的。因此，很难对其思路进行分析和推广。

这些局限性都会在下面的正文中得到体现。

§2　阿基米德的几个定理的综述

§2.1　圆周率问题

§2.1.1　背景

阿基米德用正 96 边形割圆术得出圆周率介乎 $3\frac{1}{7}$ 与 $3\frac{10}{71}$ 之间。

公元 263 年，中国数学家刘徽用“割圆术”计算圆周率，他先从圆内接正六边形，逐次分割为 12、24、48、96、192 边形。他说“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”（分割愈精细，误差愈少。分割之后再分割，直到不能再分割为止，它就会与圆周完全重叠，就不会有误差了），其中有求极限的思想。刘徽给出 $\pi = 3.141024$ 的圆周率近似值，并以 $\frac{157}{50} = 3.14$（徽率）为其分数近似值。

公元 466 年，中国数学家祖冲之将圆周率算到小数点后 7 位的精确度，这一纪录在世界上保持了一千年之久。同时，祖冲之给出了 $\frac{355}{113}$（密率）这个很好的分数近似值，它是分母小于 10,000 的简单分数中最接近 π 的。比它更接近 π 的下一个有理数是 $\frac{104348}{33215}$。

§2.1.2　阿基米德的证明方法

首先介绍一个命题，这个命题与 π 的计算并没有联系，但是其中很典型的用到了归谬法。

命题2.1. *任何一个圆面积等于一个直角三角形面积，它的夹直角的一边等于圆的半径，而另一边等于圆的边长。*

这个命题等价于圆的面积 $S = \frac{1}{2}rC$。若已知 $C = 2\pi r$, 则可直接导出 $S = \pi r^2$。

本命题与 π 的度量关系不大，但体现了阿基米德归谬法的思想，又在阿基米德原著中与 π 的计算相邻，故在此提及。

Proof. 设 $ABCD$ 是给定的圆，K 是所述直角三角形。

那么，如果圆的面积不等于 K，则必大于 K 或小于 K。

1. 如果圆的面积大于 K

   设一个内接正方形 $ABCD$，平分弧 AB, BC, CD, DA。如果需要，继续等分，使得内接多边形边上的弓形面积之和小于圆面积与 K 的差。

   这样多边形的面积大于 K。

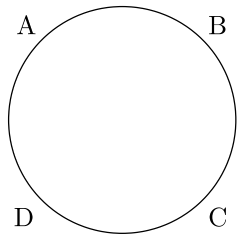


图 1 ABCD

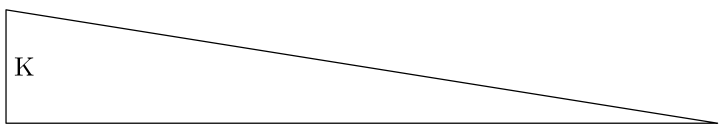


图 2 K

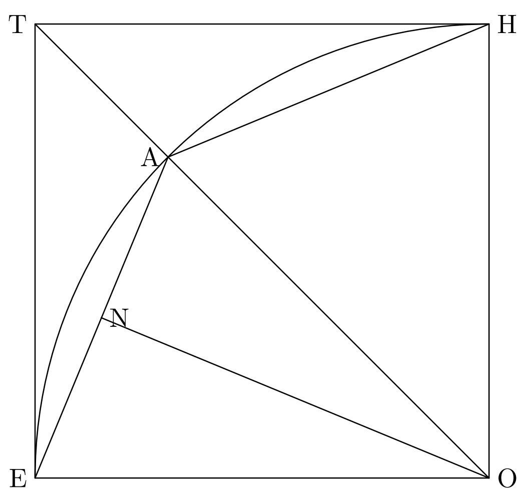


图 3 假设圆的面积大于 K，则可在圆内割出多边形，使之的面积大于 K

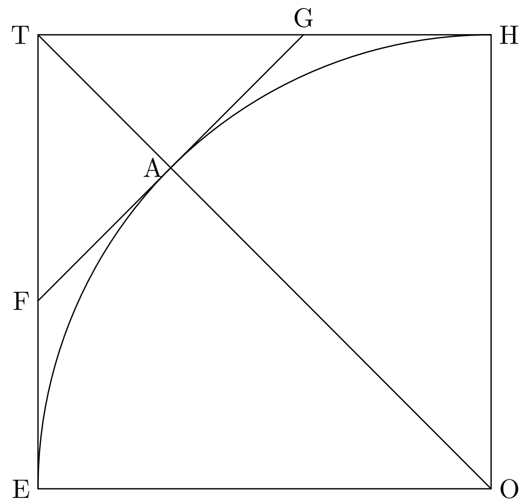


图 4 假设圆的面积小于 K，则可在圆外切出多边形，使之的面积小于 K

设 AE 是它任何一边，由圆心 O 作 ON 垂直于 AE，则 ON 小于圆的半径，且多边形的周长小于圆的周长。

所以多边形的面积小于 K，矛盾。

2. 如果圆的面积小于 K

作外切正方形，如图所示，则

$$TG > GA = GH$$

故三角形 FTG 的面积大于 $TEAH$ 的一半。

如此，继续这种作法，最终将作出一个外切多边形，在它与圆之间的空间之和小于 K 与圆面积之差。

这样一来，多边形的面积小于 K。

但是，由圆心 O 作多边形任意一边的直线，它等于圆的半径，这时多边形的周长大于圆的周长。于是得到的多边形的面积大于 K。矛盾。

因此，圆面积既不大于又不小于 K，它就等于 K。 □

可以看到，阿基米德并没有含糊不清说“当分割足够小时，内接多边形与圆就会足够接近”。而是用到了“它们的面积差小于任意给定的正数”。这里初步地用到了 $\varepsilon-\delta$ 语言，使得证明过程充满逻辑性。鉴于很多极限问题在趋近于零时比较好解决，阿基米德的方法充满了前瞻性。

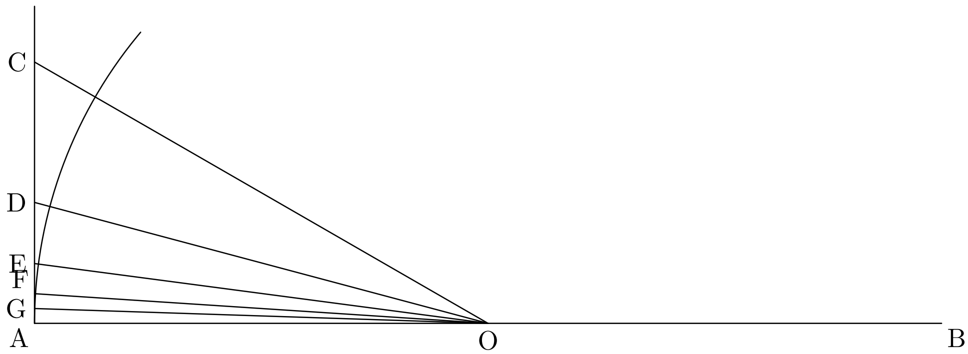


图 5 π 的上界的计算

定理2.1. 任何一个圆周与它直径的比小于 $3\frac{1}{7}$ 而大于 $3\frac{10}{71}$。

Proof. 1. 设 AB 是任意圆的直径，O 是中心，AC 是过 A 的切线；设角 AOC 是直角的三分之一。

则 $OA : AC = [\sqrt{3} : 1] > 265 : 153$ 又 $OC : CA = 306 : 153$

第一，设 OD 二等分角 AOC 且交 AC 于 D.

现在 $CO : OA = CD : DA$ 因此 $(CO+OA) : OA = CA : DA$ 或者 $(CO+OA) : CA = OA : AD$.

所以 $OA : AD > 571 : 153$

故 $OD^2 : AD^2 > 349450 : 23409$, 因此 $OD : DA > 591\frac{1}{8} : 153$.

第二，设 OE 二等分角 AOD，交 AD 于 E.

则 $DO : OA = DE : EA$, $(DO + OA) : DA = OA : AE$, 所以 $OA : AE > 1162\frac{1}{8} : 153$.

由此 $OE^2 : EA^2 > 1373943\frac{33}{64} : 23409$, $OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153$.

第三，设 OF 二等分角 AOE，交 AE 于 F.

所以 $OA : AF > 2234\frac{1}{4} : 153$.

由此 $OE^2 : EA^2 > 5472132\frac{1}{16} : 23409$, $OF : FA > 2239\frac{1}{4} : 153$.

第四，设 OG 二等分角 AOF，交 AF 于 G.

所以 $OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$.

此时 AOG 是直角的 $\frac{1}{48}$. 所以

$$AB : 96\text{边形的周长} > 4673\frac{1}{2} : 153 \times 96.$$

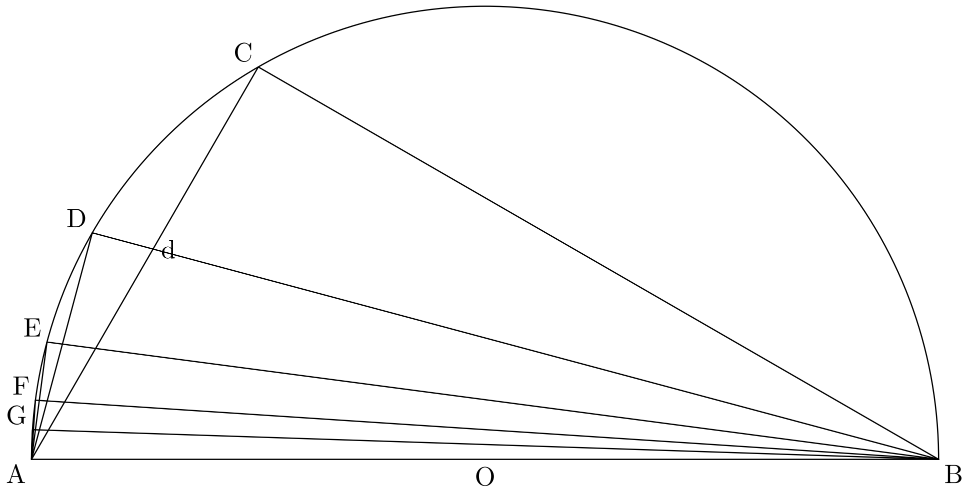


图 6 π 的下界的计算

但是

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7},$$

所以圆的周长更小于 $3\frac{1}{7}$ 乘以 AB.

2. 其次，设 AB 是圆的直径，且设 AC 交圆于 C，角 CAB 为直角的三分之一。

则

$$AC : CB < 1351 : 780.$$

第一，设 AD 二等分角 BAC 且交 BC 于 d, 交圆于 D，可得 ABD, ACd, BDd 是相似的。

所以

$$AD : DB = BD : Dd = AC : Cd = AB : Bd = (AB+AC) : (Bd+Cd) = (AB+AC) : BC.$$

所以 $AD : DB < 2911 : 780$, 这样

$$AB : BD < 3013\frac{3}{4} : 780.$$

依次类推，得到

$$\text{内接 96 边形的周长} : AB > 6336 : 2017\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}.$$

□

值得注意的是，阿基米德在自己的论文中提到，关于两条切线及中间夹的圆弧的长度比较，他无法做到完全的证明，因此以假设提出。可见阿基米德在两千多年前就已经初步地考虑到长度定义及收敛的问题。但明显的，历史使他无法对这个问题做出合适的定义和解答。

另一方面，可以看到，阿基米德的证明中用到了相当精确的开方表。在阿基米德的原著中没有明确提及这些数据从何而来，甚至没有给出计算过程。或许是阿基米德认为这种程度的计算水平已经属于常识。

§2.2 关于螺线

§2.2.1 螺线介绍

1. 如果一条直线在平面内绕一个固定的端点匀速旋转，而同时有一个点从固定的端点出发，沿着直线匀速移动，那么该点在平面上将描出一条螺线。

2. 固定的端点称为原点，直线开始旋转所处的位置是起始线。

§2.2.2 螺线的面积

定理2.2. *设 BC 为螺线的任何一圈上沿“正向”度量的一段弧，其长度不超过这个整圈，且以 O 为圆心，OC 为半径的圆与 OB 交于 B'，则*

$$OB\text{ 与 }OC\text{ 间螺线所围的面积} : \text{扇形}OB'C = (OC \times OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2) : OC^2$$

引理2.1. *假定 n 条线段 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 形成一个递增的算术级数，则*

$$(n-1)A_n^2 : (A_n^2 + \cdots + A_2^2) < A_n^2 : (A_n A_1 + \frac{1}{3}(A_n - A_1)^2),$$

但

$$(n-1)A_n^2 : (A_{n-1}^2 + \cdots + A_1^2) > A_n^2 : (A_n A_1 + \frac{1}{3}(A_n - A_1)^2).$$

把线段换成面积，上述引理仍然成立。

从阿基米德的叙述中可以看到，当时的数学并没有明确的实数概念。或者说，并没有把抽象出来的无单位的“数”作为常用的概念。与欧几里得一致，阿基米德依然将实数与线段的长度作为一体。

引理 2.1 不证。

Proof. 取一个圆，使其半径的平方等于

$$OC \times OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2.$$

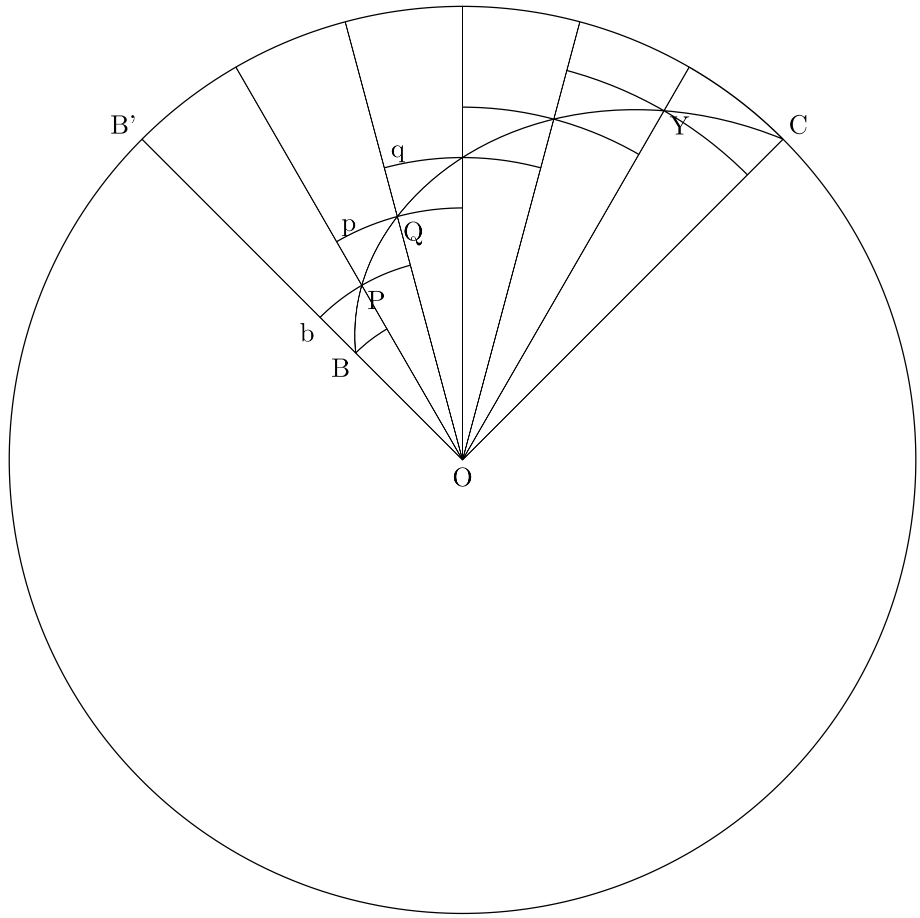


图 7 螺线的切割

令 σ 为其上的一个扇形，它的圆心角为 BOC。于是我们只需证明

$$\text{螺线 OBC 的面积} = \sigma.$$

若不然，螺线 OBC 的面积 S 一定大于或小于 σ。

1. 若 $S < \sigma$

   作面积 S 的外接图形，它由一此相似扇形所组成，设其面积为 F，则可以使得 $F - S < \sigma - S$，即 $F < \sigma$。

   作 n-1 个扇形，如图，则

$$(n-1)OC^2 : (OP^2+OQ^2+\cdots+OC^2) < OC^2 : (OC\times OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2) = \text{扇形}OB'C : \sigma.$$

   从而 $OB'C : F < OB'C : \sigma$. 因此 $F > \sigma$, 矛盾。

2. 若 $S > \sigma$

作内接图形，使它的面积为 f，则可以 $S - f < S - \sigma$, 即 $f > \sigma$。在此情况下，

$$(n-1)OC^2 : (OB^2 + OP^2 + \cdots + OY^2) > OC^2 : (OC \times OB + \frac{1}{3}(OC - OB)^2),$$

即

$$OB'C : f > OB'C : \sigma.$$

因此 $f < \sigma$，矛盾。

□

§2.3 求抛物线弓形的面积

定理2.3. *设 Qq 为抛物线弓形的底，q 点不比 Q 点距离抛物线的顶点更远，过 q 点作直线 qE 平行于抛物线的轴，与 Q 点的切线交于 E，则*

$$弓形的面积 = \frac{1}{3}EqQ.$$

在这个定理的过程中，阿基米德使用了数学与物理结合的方法，采用扛杆平衡原理来获得不等量。

引理2.2. *设杠杆 AOB 水平放置，支点 O 为其中点。梯形 $CDEF$ 的放置使它的两条平行边 CD, EF 是竖直的，并且 C 点位于 O 点下方，另外两边 CF, DE 交于 B。*

设 EF 交 BO 于 H, 梯形挂于 H, O 处，又设面积 Q 满足 $AO : OH = (CDEF) : Q$，若挂于 A 的面积 P 保持系统平衡，则

$$P < Q.$$

Proof. 由 K 划分 OH 使得 $HK : KO = (2CD + FE) : (2FE + CD)$，则梯形的重心 G 使 GK 平行于 OD。

于是 $AO : OK = CDEF : P$ 又 $OK < OH$，所以由此可得 $P < Q$。 □

引理2.3. *设 Qp 是弓形，Eq 垂直于对称轴，则*

1. $EqQ < 3(FO_1 + F_1O_2 + \cdots + E_nR_nQ)$,

2. $EqQ > 3(R_1O_2 + R_2O_3 + \cdots + R_nO_nQ)$.

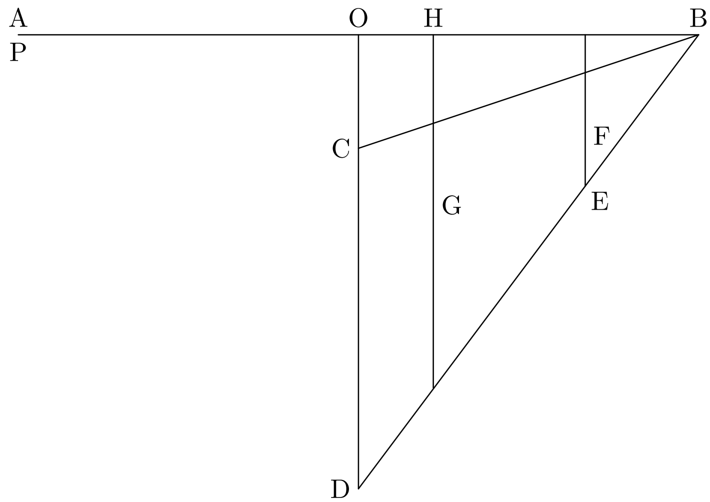


图 8 杠杆原理与几何证明

本引理为引理 2.2 的直接推论，证明略去。

Proof. 如果等式不成立，则弓形面积大于或小于 $\frac{1}{3}EqQ$。

1. 假设弓形面积大于 $\frac{1}{3}EqQ$, 则可找到 EqQ 的一个约量, 使其面积小于弓形与 $\frac{1}{3}EqQ$ 之差。即
$$\frac{1}{3}EqQ < \text{弓形} - FqQ,$$
如上图，所以
$$FqQ = (FO_1) + \cdots = (FO_1) + (F_1D_1) + \ldots$$
但弓形面积小于
$$(FO_1) + (F_1O_2) + \ldots$$
两式相减，得
$$\frac{1}{3}EqQ < R_1O_2 + R_2O_3 + \ldots,$$
矛盾。

2. 假设弓形面积小于 $\frac{1}{3}EqQ$，取内分量同理可证。

□

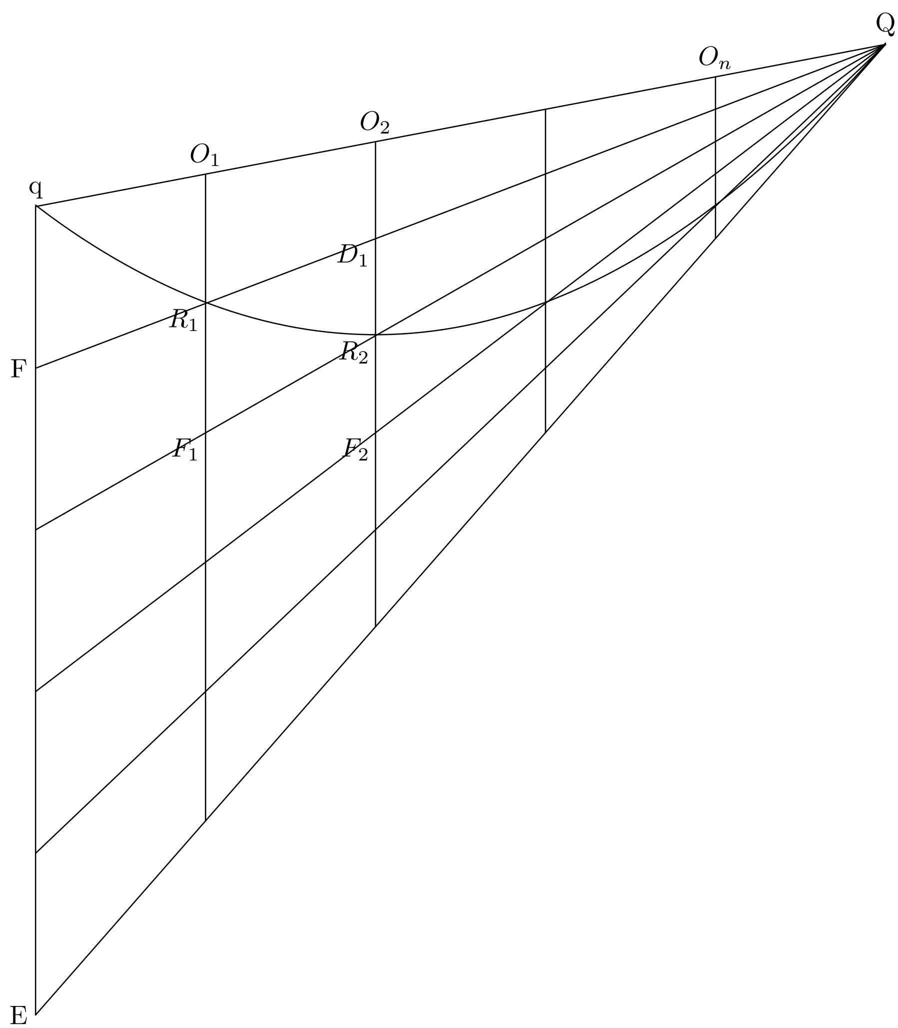


图 9 切割

§3 现代解法

§3.1 关于 π

关于 π 的计算，由于现在已经有了计算机这一强大工具，可以进行大规模的割圆法。具体结果如程序所示。

割圆次数	计算得到 π 的值	误差	相对误差
01	3.1058e+00	3.5745e-02	1.1378e-02
02	3.1326e+00	8.9444e-03	2.8471e-03
03	3.1394e+00	2.2227e-03	7.0750e-04
04	3.1411e+00	5.4089e-04	1.7217e-04
05	3.1415e+00	1.2036e-04	3.8311e-05
06	3.1416e+00	1.5220e-05	4.8448e-06
07	3.1416e+00	1.1064e-05	3.5219e-06
08	3.1416e+00	1.7636e-05	5.6136e-06
09	3.1416e+00	1.9278e-05	6.1365e-06
10	3.1416e+00	1.9689e-05	6.2672e-06
11	3.1416e+00	1.9792e-05	6.2999e-06
12	3.1416e+00	1.9817e-05	6.3081e-06
13	3.1416e+00	1.9824e-05	6.3101e-06
14	3.1416e+00	1.9826e-05	6.3107e-06
15	3.1416e+00	1.9826e-05	6.3108e-06
16	3.1416e+00	1.9826e-05	6.3108e-06

表 1 阿基米德的计算 π 的数值方法

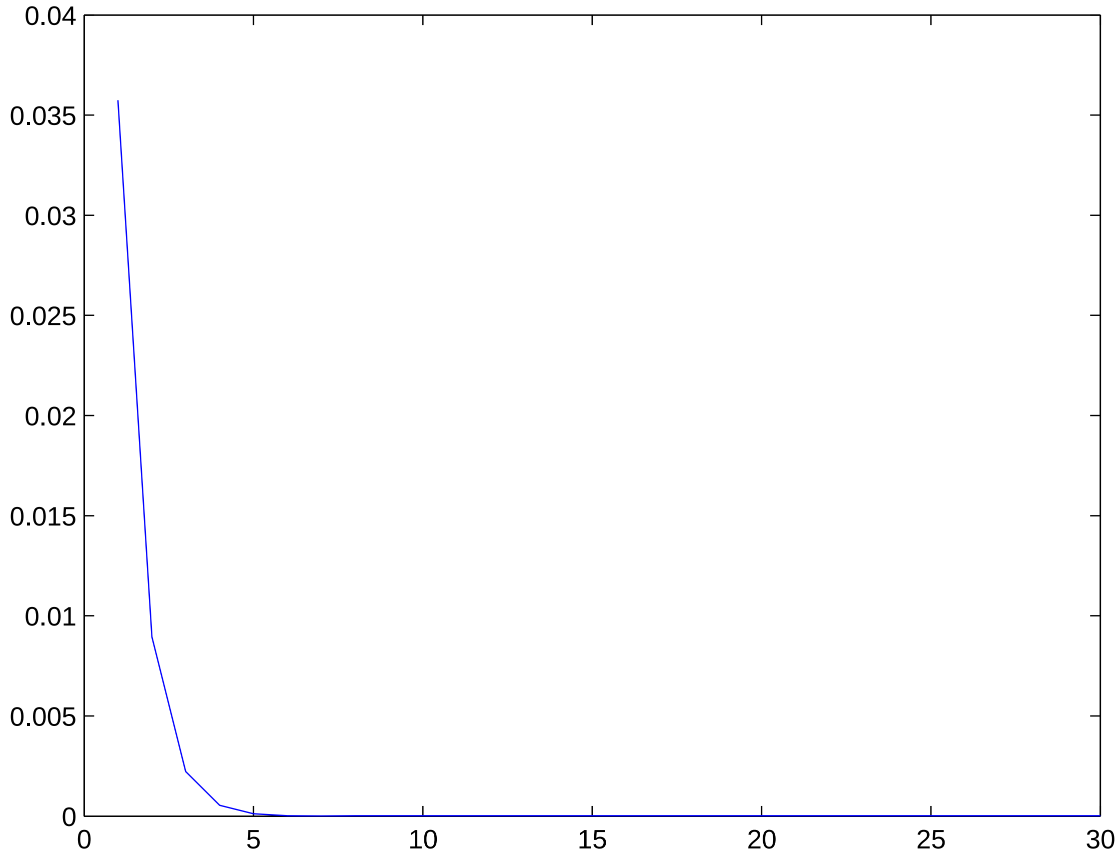
由表中可以看到，在第六次割圆之后，精度的提高停止了。在第十次割圆之后精度甚至有所下降。

这是由于该算法用到了很大的 2 的幂次，因此后来计算的误差掩盖了割圆所带来的误差。

§3.2 关于螺线

螺线的参数方程为 $\rho=\theta$，所以螺线的面积为

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}\rho^2 d\theta=\frac{1}{6}(\rho_2^3-\rho_1^3)$$



而相应的扇形面积为

$$\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\rho_2^2=\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)\rho_2^2$$

所以

$$\text{螺线面积}:\text{扇形面积}=(\rho_1\times\rho_2+\frac{1}{3}(\rho_1-\rho_2)^2):\rho_2^2$$

§3.3 关于抛物线面积

由于积分的存在和海伦公式，与 §3.2 一样，证明成为了显然。

§4 结论

我阅读了书籍 [1, 2]，查阅了网上的文章 [3, 4]，对阿基米德的生平经历，以及论

证特点有了一个初步的认识。

阿基米德的著作中绝大部分是他本人的全新发现，与阿波罗尼或欧几里德不同。他们的著作大都是“把早先的几何学家的个别努力所得到的结果和所用的方法”[5]加以系统化，并加以推广所形成的。

随着年代的久远，阿基米德的研究过程也逐渐难以澄清。阿基米德的著作中只留下了运算的结果，涵盖了大量的数字处理，但没有留下运算的过程。

因此，在佩服他的远见和天才的同时，我们也不得不赞赏他的超人的勤奋。这对现代拥有了“无敌”的计算机的数学家们是个很好的启示。

此外，对于他在“归谬法”中所用到的猜想的数值，也没有说明来自何处。一方面，可能是他在进行有限运算时得到的近似结果的“极限”。另一方面，我猜想，可能是他采用物理与数学结合的方法（例如用沙子的重量来代替面积）等，来获得初步的数据。鉴于阿基米德在数学和物理双方面的造诣，这个猜想可能很大。

总之，作为无可争议的有史以来贡献最大的三个数学家之一，阿基米德的著作是数学阐述的典范。他的每一篇论文都值得仔细阅读和研究，而我这篇短小的论文仅仅能展示他对数学宝库作出的贡献的冰山一角而已。

参考文献

[1] Victor J. Katz. 数学史通论. 高等教育出版社, 2004

[2] 热威尔内兹. 阿基米德羊皮书. 湖南科学技术出版社, 2008

[3] Archimedes. http://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes

[4] www.mcs.drexel.edu/ crorres/Archimedes/contents.html

[5] T. L. Heath. 阿基米德全集. 陕西科学技术出版社, 1998