Gauss曲率方程的blow-up性质

高挺然*

指导教师：李宇翔副教授

摘　要

本文考虑$\mathbb{R}^2$中有界区域Ω上的一系列Gauss曲率方程$-\Delta u_k = V_k e^{u_k}$在条件$\sup_k(\|V_k\|_{C^1(\Omega)} + \int_B e^{u_k}) < +\infty$下的收敛情况。利用该方程的$\epsilon-$正则性可知，如果$u_k$的blow-up点集$S$非空，则对任意的$\Omega \subset\subset B \setminus S$，$u_k$减去一个常数后在$\Omega$上$C^1$收敛到Green函数$G$，它满足方程

$$-\Delta G = \sum_{p\in S} 8\pi\delta_p$$

此时，我们有

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega V_k e^{u_k} = \sum_{\Omega\cap S} 8\pi$$

该结果有鲜明的几何意义。熟悉偏微分方程领域里的一些常用技巧亦是本综合论文训练的重要目的。

关键词：Gauss曲率方程, blow-up分析, L^p估计, $\epsilon-$正则性

§1　引言

令f是Riemann流形(Σ, g)到$\mathbb{R}^n$的共形嵌入，记g_f是f诱导的度量，并设

$$g_f = e^{2u}g \tag{1-1}$$

则我们有**Gauss曲率方程**和**平均曲率方程**

$$\begin{aligned} -\Delta_g u &= K_f e^{2u} - K_g \\ \Delta_g f &= e^{2u} H_f, \end{aligned} \tag{1-2}$$

*基数61

其中K_g和K_f分别是度量g和g_f下的Gauss曲率，H_g和H_f分别是度量g和g_f下的平均曲率。上述方程的每一个解将给出Riemann流形上的一个共形坐标系，且在此坐标系下Gauss曲率为K_f。通过考察此方程，我们可以利用Gauss曲率K（以及平均曲率H）研究共形嵌入f的性质。比如，我们经常需要考虑共形嵌入序列f_k的收敛，使得在这一系列方程中的Gauss曲率和平均曲率收敛到预先给定的Gauss曲率和平均曲率。在这方面，Brezis[1]，李岩岩[2]，林长寿[3]等多名数学家及其合作者曾做出过许多深刻的结果。

在本文中，我们只考虑Gauss曲率对u的影响。在(1-2)中，作变换$v=2u$，则易见

$$-\Delta_g v = -2\Delta_g u = 2K_f e^{2u} - 2K_g = 2K_f e^v - 2K_g$$

特别地，当g为标准欧氏度量$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2$时，$\Delta_g=\Delta$，$K_g=0$，记$2K_f=V$，于是(1-2)化为

$$-\Delta v = Ve^v$$

所以我们只需要考察上述形式的方程。

本文考虑$\mathbb{R}^2$中有界区域Ω上的方程序列

$$-\Delta u_k = V_k(x)e^{u_k}, \quad x\in\Omega\subset\subset\mathbb{R}^2 \tag{1-3}$$

的blow-up性质。我们的工作将基于如下假设：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |V_k|e^{u_k} < \Lambda_1 \quad 对任意k\in\mathbb{N}成立\\
&||V_k-V_0||_{C^\infty(\Omega)}\to 0, \quad k\to\infty\\
&0<a<|V_0|<b<\infty, \quad \forall x\in\Omega
\end{aligned} \tag{1-4}$$

并且存在实数$q\in(1,2)$使得

$$r^{q-2}\int_{B_r(p)}|\nabla u_k|^q\mathrm{d}x<\Lambda_2, \quad \forall r\in\mathbb{R},\forall p\in\Omega \tag{1-5}$$

条件(1-4)中第一式是Ω上的全Gauss曲率积分，而第三式是一个结构性的假设，目的是为了简化下面将要进行的分析。条件(1-5)的一个显著优点是它的左端在伸缩变化下保持不变，具体地说，如果令$v_k(x)=u_k\left(\frac{x}{\lambda}\right)$，则$\nabla v_k(x)=\frac{1}{\lambda}\nabla u_k\left(\frac{x}{\lambda}\right)$，因此我们有

$$\begin{aligned}
(\lambda r)^{q-2}\int_{B_{\lambda r}(p)}|\nabla v_k(x)|^q\mathrm{d}x &= (\lambda r)^{q-2}\cdot\frac{1}{\lambda^q}\int_{B_{\lambda r}(p)}|\nabla u_k\left(\frac{x}{\lambda}\right)|^q\mathrm{d}x\\
&= (\lambda r)^{q-2}\cdot\frac{\lambda^2}{\lambda^q}\int_{B_r(p)}|\nabla u_k(t)|^q\mathrm{d}t = r^{q-2}\int_{B_r(p)}|\nabla u_k(t)|^q\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

当我们考虑一般紧无边Riemann流形上的相应方程时，条件(1-5)将自然地被满足。进入下一章的分析之前，我们的考虑暂时还不需要条件(1-5)。

前面已经提到，我们希望考虑一个序列，当Gauss曲率V_k光滑地收敛到某个已知的Gauss曲率V_0，且曲面的面积（亦即$\int e^u$）有界时，方程的解序列的收敛情况。在比较一般的情况下，解序列$\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$未必收敛，这是因为我们只能从方程中得到$\|\Delta u_k\|_{L^1}$有界，这不足以得到u_k的C^0估计。但我们的方程有一个很好的性质：可以找到一个足够小的正数ϵ_0，当$\int_B e^u < \epsilon_0$时，u_k就有C^0估计。我们一般把这种性质称为$\epsilon-$正则性。对于满足$\epsilon-$正则性的方程序列，我们往往可以建立一套完善的blow-up分析理论，非常清晰给出u_k的收敛情况。

一般地，blow-up分析包含三个部分。

1. **Blow-up点集和blow-up点附近的bubble**

   blow-up点集就是满足

   $$A(p) = \lim_{r\to 0}\liminf_{k\to+\infty}\int_{B_r(p)} e^{u_k} > 0$$

   的所有点p所成之集合。Blow-up点破坏了方程正则性，在它们附近u_k不会收敛。但在在blow-up点p附近，我们往往能找到一些序列$x_k \to p$，$r_k \to 0$，使得$u_k(x_k + r_k x)$减去某个常数列后有很好的收敛性质，它们所收敛到的极限一般被称为bubble。

   具体到我们的方程，我们可以考虑一个小区域$B_\delta(p)$上的方程(1-3)，其中$B_\delta(p)\cap S = \emptyset$。Gauss曲率方程的$\epsilon-$正则性将给我们提供$B_\delta(p)$中的一个点列$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，满足

   $$u_k(x_k) = \sup_{B_\delta(p)} u_k \longrightarrow +\infty, \quad k\to\infty x_k \to p, \quad k\to\infty$$

   首先，根据极大值原理，若在某个小邻域内恒有$V_0 < 0$，则u_k在此邻域内的最大值必在边界上取到，从而在此邻域内部将不会有blow-up点。故在blow-up点p一定有$V_0(p) > 0$。此时，如果令

   $$m_k = u_k(x_k), \quad r_k = e^{-\frac{m_k}{2}}$$

   并考虑

   $$v_k(x) = u_k(x_k + r_k x) - m_k$$

   其中v_k的定义域为

   $$\Omega_k = \{x : |x_k + r_k x - p| < \delta\}$$

   则v_k将满足方程

   $$-\Delta v_k = V_k(x_k + r_k x)e^{v_k}, \quad x \in \Omega_k$$

利用[1]的正则性结果以及[4]中的一个重要结果，可知对任意的$R > 0$,$u_k(x_k + r_k x) - m_k$在$B_{Rr_k}(x_k)$上光滑收敛到一个函数

$$w = -2\log\left(1 + \frac{V_0(p)}{8}|x-p|^2\right)$$

它满足

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_0(p)e^w \mathrm{d}x = 8\pi \tag{1-6}$$

2. **弱极限**

　　由条件(1-5)，u_k减去一个合适的常数列c_k后将在$W^{1,q}(\Omega)$中弱收敛。进一步，在$B_\delta(p)$之外（更一般地，在任意的$\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$上），由Gauss曲率方程的$\epsilon-$正则性，可以知道成立

$$u_k \rightrightarrows \infty, \quad k \to \infty$$

从而由Poincaré不等式和条件(1-5)，可以证明存在趋向于∞的常数列$\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得$u_k - c_k$在Ω'上光滑地收敛到一个Green函数。

3. **脖子**

　　在blow-up分析中，区域$B_\delta \setminus B_{Rr_k}(p)$被称为脖子，它往往是blowup分析中最为困难的部分。一般而言，我们很难弄清楚脖子的细节。但脖子的边界是清楚的，所以我们需要采取一些技巧，把对脖子的讨论转化为对脖子边界的讨论。我们这里借助于一个Pohozaev型恒等式，可以计算出$A(p) = 8\pi$，并且通过证明

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{R\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\int_{B_\delta(x_k)\setminus B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k}\mathrm{d}x = 0$$

将得到

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\Omega'} V_k e^{u_k}\mathrm{d}x = \sum_{p\in\Omega'\cap S} 8\pi. \tag{1-7}$$

上述这些结果都有非常直观的几何解释。

1. 由于方程(1-3)的右端是恒大于零的L^1函数，故我们可以将其理解为Ω上的有限正Borel测度，亦即某种能量分布。粗略地说，blow-up点集就是能量聚集的点，其中的每个blow-up点就对应于这个测度的原子。整个blow-up分析的过程实际上指出，只有在“能量聚集”的点上才会发生blow-up现象。

2. 由Gauss-Bonnet定理，在一个二维球面S^2上应有

$$\int_{S^2} K \mathrm{d}A = 2\pi\chi(S^2) = 4\pi$$

而在我们的情况下，$V = 2K$，因此相应的积分应为8π。因此，对于S中的点p，$A(p) = 8\pi$事实上暗示，在极限情形下blow-up点上就像是连接着一个二维球面一样，而在blow-up点集之外曲面是平坦的；而且每个blow-up点必然仅连接着一个二维球面，不会出现几个球面连接在同一个blow-up点上的情形。因此我们将这个极限称为“bubble”，它是对上述情形的一个形象的刻画。

3. (1-7)一般被称为能量恒等式，它的几何意义是说在整个极限过程中能量守恒的，所有能量最终聚集到blow-up点集上。

至此，我们可以将本文的主要结果总结成以下定理。

定理1.1. $\forall k \in \mathbb{N}$，设u_k是方程

$$-\Delta u_k = V_k(x)e^{u_k}, \quad x \in \Omega \subset\subset \mathbb{R}^2 \tag{1-8}$$

的解。另外设

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |V_k|e^{u_k} < \Lambda_1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &||V_k - V_0||_{C^\infty(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty \\ &0 < a < V_0 < b < \infty, \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{1-9}$$

并且存在实数$q \in (1,2)$使得

$$r^{q-2}\int_{B_r(p)} |\nabla u_k|^q \mathrm{d}x < \Lambda_2, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall p \in \Omega \tag{1-10}$$

则有且仅有以下三种情形之一发生:

1. u_k在Ω的任意紧子集上有界;

2. u_k在Ω的任意紧子集上一致收敛到$-\infty$;

3. 存在有限点集$S = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \subset \Omega$，使得

$$\lim_{r\to+\infty} \liminf_{k\to+\infty} \int_{B_r(a_i)} V_k e^{u_k} \mathrm{d}x = 8\pi$$

此时，u_k在任意的$\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$上一致收敛到$-\infty$，而且存在常数列$c_k \to -\infty$，使得$u_k - c_k$在$W^{1,q}(\Omega)$中弱收敛、在任意的$\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$上一致收敛到$Green$函数$G$，$G$满足方程

$$-\Delta G = \sum_{i=1}^{m} 8\pi \delta_{a_i}$$

且对任意的$\Omega' \subset\subset \Omega$，我们有

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\Omega'} V_k e^{u_k} \mathrm{d}x = \sum_{p \in S \cap \Omega'} 8\pi$$

这一定理的原始版本的表述形式最早出现在[1]中。

§2 Gauss曲率方程的$\epsilon-$正则性

§2.1 方程$-\Delta u = f \in L^1(\Omega)$的正则性

设Ω为$\mathbb{R}^n$上的开集。当方程

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega$$

的右端$f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$时，利用Calderon-Zygmund分解和Marcinkiewicz插值，我们有经典的L^p估计[5]

$$\begin{aligned} ||u||_{W^{2,p}(\Omega')} &\le C(||u||_{L^p(\Omega)} + ||f||_{L^p(\Omega)}), \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega \\ C &= C(n, p, \Omega, \Omega') \end{aligned}$$

但当$f \in L^1(\Omega)$时，一般得不到上述估计。对这种情形，[1]中给出了如下结果

引理2.1. 令$f \in L^1(\Omega)$，$u \in W_0^{1,2}(\Omega)$是方程

$$-\Delta u = f \tag{2-11}$$

的弱解，则对任意的$\epsilon \in (0, 4\pi)$和$q \in (1, 2)$，我们有

$$\begin{aligned} \int_\Omega e^{(4\pi - \epsilon)\frac{|u|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} &< C(\Omega, \epsilon) \\ \|\nabla u\|_{L^q}(\Omega) &< C(\Omega, \epsilon)\|f\|_{L^1} \end{aligned} \tag{2-12}$$

Proof. 我们应用Struwe[6]的办法。令

$$u_t = \max\{0, \min\{u, t\}\}$$

则有

$$\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx = \int_\Omega f u_t$$

所以

$$\int_{0\le u\le t} |\nabla u|^2 \le t\|f\|_{L^1(\Omega)}$$

令u_t^*是u_t的重排。设$|B_R| = |\Omega|$，$|B_\rho| = |\{u \ge t\}|$，则

$$u_t^*|_{B_\rho} = t, \quad u_t^*|_{\partial B_R} = 0$$

由于$1 \le p < \infty$时，

$$u \in W_0^{1,p}(B_R) \Leftrightarrow u \in W^{1,p}\text{且在}\partial B_R\text{上}Tu = 0\text{（}T\text{为迹算子）}$$

故有

$$\inf_{u\in W_0^{1,2}(B_R), u|_{B_\rho}=t} \int_{B_R\setminus B_\rho} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \inf_{v\in W^{1,2}(B_R), v|_{\partial B_R}=0, v|_{\partial B_\rho}=t} \int_{B_R\setminus B_\rho} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x$$

但为人所熟知的事实是，通过对

$$\int_{B_R\setminus B_\rho} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x$$

做变分，可知这个极小值必然在$\triangle v = 0$时取到。利用区域$B_R \setminus B_\rho$上满足特定边值条件的调和函数的唯一性，可设极小值在

$$w = A\log r + B$$

处取到，其中A, B的值可用边值条件唯一确定。直接计算可知

$$A = \frac{t}{\log\rho - \log R}$$
$$B = -\frac{t\log R}{\log\rho - \log R}$$

此时有

$$w = \frac{t\log r}{\log\rho - \log R} - \frac{t\log R}{\log\rho - \log R}$$
$$\nabla w = \frac{t}{\log\rho - \log R} \cdot \frac{1}{r^2}(x_1, x_2)$$

故达到的极小值应为

$$\begin{aligned}\int_{B_R\setminus B_\rho} |\nabla w|^2 \mathrm{d}x &= \frac{t^2}{(\log R - \log\rho)^2} \int_0^\pi \int_\rho^R \frac{1}{r^2} \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\frac{(\log R - \log\rho)t^2}{(\log R - \log\rho)^2} = 2\pi\frac{t^2}{\log R - \log\rho}\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
2\pi\frac{t^2}{\log R-\log\rho} &= \inf_{v\in W^{1,2}(B_R),v|_{\partial B_R}=0,v|_{\partial B_\rho}=t}\int_{B_R\setminus B_\rho}|\nabla v|^2\mathrm{d}x \\
&\le \int_{B_R\setminus B_\rho}|\nabla u^*|^2 \le \int_{0\le u\le t}|\nabla u|^2 \le t\|f\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

而这等价于

$$
\left|\frac{R}{\rho}\right| \ge e^{\frac{2\pi t}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}
$$

故有

$$
|\{u\ge t\}| = \pi|\rho|^2 \le |\Omega|e^{4\pi\frac{-t}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}
$$

由此我们得到如下估计

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^\infty\int_{k\le u\le k+1}e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{k=0}^\infty\int_{k\le u}e^{(4\pi-\epsilon)\frac{k+1}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{k=0}^\infty|\{u\ge k\}|e^{(4\pi-\epsilon)\frac{k+1}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} \\
&\le |\Omega|\sum_{k=0}^\infty e^{4\pi\frac{-k}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\cdot e^{(4\pi-\epsilon)\frac{k+1}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} \\
&= |\Omega|e^{\frac{4\pi}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\sum_{k=0}^\infty e^{\frac{-\epsilon(k+1)}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} < C(\Omega,\epsilon)
\end{aligned}
\tag{2-13}
$$

类似地，对方程

$$
-\Delta(-u) = -f
$$

重复上面的步骤，可得估计

$$
\int_\Omega e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^-}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x < C(\Omega,\epsilon) \tag{2-14}
$$

通过对函数e^x的级数展开式中各项使用三角不等式，可以知道

$$
e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} + e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^-}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}} \ge e^{(4\pi-\epsilon)\frac{|u|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}
$$

因此(2-13)和(2-14)给出

$$
\int_\Omega e^{(4\pi-\epsilon)\frac{|u|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x \le \int_\Omega e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x + \int_\Omega e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^-}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x < C(\Omega,\epsilon) \tag{2-15}
$$

这就证明了(2-12)的第一式。

为了估计$||\nabla u||_{L^q(\Omega)}$，我们分别估计$||\nabla u^+||_{L^q(\Omega)}$和$||\nabla u^-||_{L^q(\Omega)}$。由Young不等式

$$\begin{aligned}
\left|\nabla u^+\right|^q &= \frac{|\nabla u^+|^q}{[(1+u^+)(1+2u^+)]^{\frac{q}{2}}} \cdot \left[(1+u^+)(1+2u^+)\right]^{\frac{q}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2/q}\left(\frac{|\nabla u^+|^q}{[(1+u^+)(1+2u^+)]^{\frac{2}{q}}}\right)^{\frac{q}{2}} + \left(1-\frac{1}{2/q}\right)\left(\left[(1+u^+)(1+2u^+)\right]^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{2}{2-q}} \\
&\leq C\left[\frac{|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)} + \left((1+u^+)(1+2u^+)\right)^{\frac{2}{2-q}\cdot\frac{q}{2}}\right] \\
&= C\left[\frac{|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)} + \left((1+u^+)(1+2u^+)\right)^{\frac{q}{2-q}}\right]
\end{aligned} \tag{2-16}$$

我们需要分别估计上式右端的两项在Ω上的积分。第二项的积分是容易控制的，因为我们已经证明了对任意的$\epsilon > 0$有

$$\int_\Omega e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x < C(\Omega,\epsilon)$$

由于$\epsilon > 0$，$q \in (0,1)$，故$\mu = \frac{(4\pi-\epsilon)(2-q)}{q\|f\|_{L^1(\Omega)}} \geq 0$，因此

$$e^{\mu u^+} \geq 1 + \mu u^+ + \frac{\mu^2}{2}(u^+)^2$$

进而可以得到估计

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left((1+u^+)(1+2u^+)\right)^{\frac{q}{2-q}}\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(1+3u^+ + 2\left(u^+\right)^2\right)^{\frac{q}{2-q}}\mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega \left(e^{\mu u^+} + \frac{3}{\mu}e^{\mu u^+} + \frac{4}{\mu^2}e^{\mu u^+}\right)^{\frac{q}{2-q}}\mathrm{d}x \\
&= \left(1+\frac{3}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\right)^{\frac{q}{q-2}}\int_\Omega \left(e^{\mu u^+}\right)^{\frac{q}{2-q}}\mathrm{d}x \\
&= C(\epsilon)\int_\Omega e^{\frac{(4\pi-\epsilon)(2-q)}{q\|f\|_{L^1(\Omega)}}\cdot\frac{q}{2-q}u^+}\mathrm{d}x \\
&= C(\epsilon)\int_\Omega e^{(4\pi-\epsilon)\frac{u^+}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}}\mathrm{d}x \\
&< C(\Omega,\epsilon)
\end{aligned} \tag{2-17}$$

为控制第一项，只要在(2-11)两边同乘上$\log\frac{1+2u^+}{1+u^+}$，并注意到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)}\mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{(2+2u^+-1-2u^+)|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)}\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{2|\nabla u^+|^2}{1+2u^+}\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|\nabla u^+|^2}{1+u^+}\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\Omega} \nabla u^+ \cdot \log(1+2u^+) + \int_\Omega \nabla u^+ \cdot \nabla \log(1+2u^+) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \nabla u^+ \cdot \log(1+u^+) - \int_\Omega \nabla u^+ \cdot \nabla \log(1+u^+) \\ &= \int_\Omega (-\triangle u)\cdot \log(1+2u^+) - \int_\Omega (-\triangle u)\cdot \log(1+u^+) \\ &= \int_\Omega (-\triangle u)\cdot \log\frac{1+2u^+}{1+u^+} \\ &= \int_\Omega f \cdot \log\frac{1+2u^+}{1+u^+} \\ &= \int_\Omega f\cdot \left(\log 2 - \frac{1}{1+u^+}\right) \\ &\le \log 2 \cdot \int_\Omega f \\ &\le \log 2 \cdot ||f||_{L^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{2-18}$$

对(2-16)式两端在Ω上积分，并利用(2-18)和(2-17)，就得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla u^+\right|^q \mathrm{d}x &\le C\int_\Omega \left[\frac{|\nabla u^+|^2}{(1+u^+)(1+2u^+)} + \left((1+u^+)(1+2u^+)\right)^{\frac{q}{2-q}}\right]\mathrm{d}x \\ &< C\log 2\cdot ||f||_{L^1(\Omega)} + C\cdot C(\Omega,\epsilon) < C(\Omega,\epsilon)\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^q \mathrm{d}x < C(\Omega,\epsilon) \tag{2-19}$$

故由三角不等式立知

$$\int_\Omega |\nabla u|^q\mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla u^+|^q\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u^-|^q \mathrm{d}x < C(\Omega,\epsilon)$$

这就证明了(2-12)的第二式。 □

注记2.1. 事实上上述的结论对弱方程

$$-(a_{ij}u_i)_j = f$$

也成立，其中

$$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2$$

引理2.1的估计带给我们两条推论。

推论2.1. 令$f \in L^1(\Omega)$，则对任意的$q \in (1,2)$，方程*(2-11)*在$W_0^{1,q}(\Omega)$中的解存在且唯一。

Proof. 唯一性由区域上调和函数的唯一性立得，故只需证明存在性。取一列$f_k \in \mathcal{D}(\Omega)$趋向$f$：

$$\|f_k - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty$$

令u_k满足方程

$$-\Delta u_k = f_k, \quad u_k|_{\partial\Omega} = 0$$

则对任意的$\epsilon \in (0, 4\pi)$，Poincaré不等式和引理2.1给出

$$\|u_k - u_m\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \le C(\Omega, \epsilon)\|f_k - f_m\|_{L^1(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty$$

所以$\{u_k\}$是$W_0^{1,q}(\Omega)$中Cauchy列，它收敛到方程(2-11)的解$u \in W_0^{1,q}(\Omega)$。 □

推论2.2. 令$f \in L^1(\Omega)$，$f \ge 0$，$q \in (1,2)$。设$u \in W_0^{1,q}(\Omega)$满足方程*(2-11)*，则$u \ge 0$，*a.e.* $x \in \Omega$。

Proof. 令$f^A = \min\{f, A\}$，则$0 \le f^A \le A$，$f^A \in L^\infty(\Omega) \subset L^3(\Omega)$。利用$L^p$估计($p = 3$)及Sobolev嵌入$W^{2,3}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\Omega)$，可得$u^A \in C^1(\Omega)$满足方程

$$-\Delta u^A = f^A$$

令$A \to +\infty$，f^A逐点单调收敛到f，于是单调收敛定理和引理2.1使得

$$||u^A - u||_{W_0^{1,q}(\Omega)} \to 0, \quad A \to \infty$$

但由极大值原理知$u^A \ge 0$，$\forall x \in \Omega$，$\forall A \ge 0$。故$u \ge 0$，a.e. $x \in \Omega$。 □

§2.2 Gauss曲率方程的$\epsilon-$正则性

对Gauss曲率方程$-\Delta u = Ve^u$运用引理2.1，我们可以得到如下非常重要的$\epsilon-$正则性。

定理2.1. 记B为$\mathbb{R}^2$中的单位圆盘。若u满足方程

$$-\Delta u = Ve^u, \quad x \in B \tag{2-20}$$

其中

$$|V| < b < \infty, \quad x \in B \tag{2-21}$$

则对任意的$q \in (1,2)$，存在$\epsilon_0 > 0$，当

$$\int_B e^u \mathrm{d}x < \epsilon_0 \tag{2-22}$$

时，我们有

$$\|\nabla u\|_{W^{1,\frac{2q}{2-q}}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leq C\left(\epsilon_0, b\right)\left(1 + \|\nabla u\|_{L^q(B)}\right) \tag{2-23}$$

Proof. 令v满足方程

$$-\Delta v = Ve^u$$

$$v|_{\partial B} = 0$$

则由定理条件以及引理2.1可知，对任意$0 < \epsilon_1 < 4\pi$，我们有

$$\int_B e^{\frac{4\pi - \epsilon_1}{||Ve^u||_{L^1(B)}}|v|} \mathrm{d}x < C(\epsilon_1)$$

固定这个ϵ_1，取$\epsilon_0 = \frac{4\pi - \epsilon_1}{b} \cdot \frac{2-q}{2q}$，则当

$$\int_B e^u \mathrm{d}x < \epsilon_0 \tag{2-24}$$

时，由Hölder不等式得

$$\int_B e^{\frac{2q}{2-q}|v|} \mathrm{d}x = \int_B e^{\frac{4\pi - \epsilon_1}{b\epsilon_0}|v|} \mathrm{d}x \leq \int_B e^{\frac{4\pi - \epsilon_1}{||Ve^u||_{L^1(B)}}|v|} \mathrm{d}x < C \tag{2-25}$$

由不等式

$$e^{|v|} \geq 1 + |v|$$

以及$q \in (1,2)$时

$$\frac{2q}{q-1} > q > 1$$

可得一系列估计

$$\int_B |v| \mathrm{d}x < C(\epsilon_0, b), \quad \int_B |v|^q \mathrm{d}x < C(\epsilon_0, b), \quad \int_B |v|^{\frac{2q}{2-q}} \mathrm{d}x < C(\epsilon_0, b)$$

由于我们有方程

$$-\Delta(u - v) = 0$$

故由调和函数的平均值性质，对任意的$x \in B_{\frac{3}{4}}$

$$u(x) - v(x) = \frac{1}{|B_{\frac{1}{4}}|} \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} (u - v) \mathrm{d}x$$

但由Jensen不等式

$$\int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} u\mathrm{d}x \le \log \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} e^u \mathrm{d}x < \log \epsilon_0$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} (u-v)\mathrm{d}x &\le \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} |u-v|\mathrm{d}x \\ &\le \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} |u|\mathrm{d}x + \int_{B_{\frac{1}{4}}(x)} |v|\mathrm{d}x < C(\epsilon_0, b)\end{aligned}$$

于是前面的平均值性质给出

$$\forall x \in B_{\frac{3}{4}} \quad u(x) - v(x) < C(\epsilon_0, b)$$

所以我们有

$$\int_{B_{\frac{3}{4}}} e^{\frac{2q}{2-q}u}\mathrm{d}x = \int_{B_{\frac{3}{4}}} e^{\frac{2q}{2-q}v} e^{\frac{2q}{2-q}(u-v)}\mathrm{d}x < C(\epsilon_0, b)$$

在$B_{\frac{3}{4}}$上应用L^p估计$\left(p = \frac{2q}{2-q}\right)$以及Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式，立得

$$\begin{aligned}\|\nabla(u-\bar{u})\|_{W^{1,\frac{2q}{2-q}}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} &\le C\left(\left(\int_{B_{\frac{3}{4}}} e^{\frac{2q}{2-q}u}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2-q}{2q}} + \left(\int_{B_{\frac{3}{4}}} |u-\bar{u}|^{\frac{2q}{2-q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2-q}{2q}}\right) \\ &\le C(\epsilon_0, b)\left(1 + \|u-\bar{u}\|_{W^{1,q}\left(B_{\frac{3}{4}}\right)}\right) \\ &\le C(\epsilon_0, b)\left(1 + \|\nabla u\|_{L^q\left(B_{\frac{3}{4}}\right)}\right)\end{aligned}$$

□

由Morrey不等式，上述定理有以下直接的推论：

推论2.3. 在与定理*2.1*相同的条件下，我们有

$$\|\nabla u\|_{C^{0,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \le C(\epsilon_0, b)(1 + \|\nabla u\|_{L^q(B)}) \tag{2-26}$$

对某实数$0 < \alpha < 1$成立。

注记2.2. 注意到在定理*2.1*的证明中我们构造性地给出了ϵ_0的形式。事实上，为使关键的*(2-25)*成立，由*Hölder*不等式可知只要$\frac{2q}{2-q} \le \frac{4\pi-\epsilon_1}{b\epsilon_0}$成立即可。由于$\epsilon_1 \in (0, 4\pi)$，$q \in (1, 2)$，我们自然地对$\epsilon_0$的取值有一个估计

$$0 < \epsilon_0 < \frac{2\pi}{b}$$

§3 方程$-\Delta u_k = V_k e^{u_k}$的blow-up分析

本章我们在假设(3-28)和(3-29)下考虑方程(1-3)的解的blow-up性质。

§3.1 Blow-up点集及其基本性质

§3.1.1 Blow-up点集

下面我们考虑(1-3)。对任意B中的点p，定义

$$A(p) = \lim_{r\to 0} \liminf_{k\to +\infty} \int_{B_r(p)} V_k e^{u_k} \mathrm{d}x$$

一列方程$-\Delta u_k = V_k e^{u_k}$ $(k \in \mathbb{N})$的**blow-up点集**S定义为

$$S = \{p \in B : A(p) > 0\}$$

事实上，$A(p)$可以被理解为某种"质量"。精确地说，由于$\{V_k e^{u_k}\}$在$L^1(\Omega)$中有界，故它在弱$*$拓扑下存在一个子列收敛到某个有限带符号测度μ。在blow-up点集中的任意点p上，有$\mu(\{p\}) \geq A(p) > 0$，亦即p是μ的原子。

§3.1.2 一个下界估计：最简单的blow-up分析

首先假设V_k在$C^\infty(\Omega)$中的极限V_0具有正的下界。在这种情形，§2.2中的$\epsilon-$正则性立即给出$A(p)$的一个正的下界：

定理3.1. *$\forall k \in \mathbb{N}$，设u_k是方程*

$$-\Delta u_k = V_k(x) e^{u_k}, \quad x \in \Omega \subset\subset \mathbb{R}^2 \tag{3-27}$$

的解。另外设

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |V_k| e^{u_k} < \Lambda_1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &||V_k - V_0||_{C^\infty(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty \\ &0 < a < V_0 < b < \infty, \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{3-28}$$

并且存在实数$q \in (1,2)$使得

$$r^{q-2} \int_{B_r(p)} |\nabla u_k|^q \mathrm{d}x < \Lambda_2, \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall p \in \Omega \tag{3-29}$$

若$p \in S$，则$A(p) \geq a\epsilon_0$，其中ϵ_0如定理2.1所述。

Proof. 若不然，设$A(p) < a\epsilon_0$，则存在$\delta > 0$，使得对足够大的k恒有

$$a\int_{B_\delta(p)} e^{u_k} < \int_{B_\delta(p)} V_k e^{u_k} < a\epsilon_0$$

因此

$$\int_{B_\delta(p)} e^{u_k} < \epsilon_0$$

此时由推论2.3和条件3-29可知

$$\|\nabla u_k\|_{C^{0,\alpha}\left(B_{\frac{\delta}{2}}(p)\right)} < C(\epsilon_0,b)(1+\|\nabla u\|_{L^q(B_\delta(p))}) < C(\epsilon_0,b)(1+C||V_k e^{u_k}||_{L^1(B_\delta(p))}) < C(\epsilon_0,b)$$

所以由Newton-Leibniz公式可知

$$\operatorname*{osc}_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k < C(\epsilon_0,b) \tag{3-30}$$

我们断言，此时对足够大的k必有

$$\sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k < C < \infty \tag{3-31}$$

其中C为某正常数。从而

$$A(p) = \lim_{r\to 0}\liminf_{k\to+\infty}\int_{B_r(p)} V_k e^{u_k}\mathrm{d}x \le \lim_{\delta\to 0}\liminf_{k\to+\infty}\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} V_k e^{C}\mathrm{d}x \le be^C\lim_{\delta\to 0}\frac{\pi\delta^2}{4} = 0$$

与$A(p) > 0$矛盾。

为证明断言(3-31)，首先注意到Jensen不等式给出

$$\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k\mathrm{d}x \le \log\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} e^{u_k}\mathrm{d}x < C(\epsilon_0) \tag{3-32}$$

若

$$\sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \to +\infty, \quad k\to\infty \tag{3-33}$$

则由(3-30)，我们亦有

$$\inf_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \to +\infty, \quad k\to\infty \tag{3-34}$$

从而

$$\int_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k\mathrm{d}x \ge \frac{\pi\delta^2}{4}\cdot\inf_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \to +\infty, \quad k\to\infty \tag{3-35}$$

与(3-32)矛盾。这就完成了证明。 □

注记3.1. 在上述证明中，实际上我们指出了如下事实：若$p \in S$，则对足够小的δ，必有

$$\sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \to \infty, \quad k \to \infty$$

而不论V_0是否有正的下界。这就是*"blow-up"*字面上的意思。

注记3.2. 正如引言所说，若$V_0 \neq 0$且$p \in S \neq \emptyset$，则必有$V_0(p) > 0$。事实上，若$V_0(p) < 0$，由于V_k光滑收敛到V_0，必存在p的小邻域Ω_1，使得在Ω_1上对一切足够大的k均有$V_k < 0$。固定这个Ω_1，将所有的方程*(3-27)*限制到Ω_1上加以考虑。由于$V_k \in C^\infty(\Omega_1)$，根据标准的椭圆方程的正则性估计，我们可以得到$u_k \in C^\infty(\Omega)$，而且对任意的$k$，成立有

$$\sup_{\Omega_1} u_k = \sup_{\partial\Omega_1} u_k$$

但我们知道函数列$\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的极大值点列$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$在$k \to \infty$时趋向于p，因此对充分大的k，u_k的最大值将在Ω_1的内部达到。因此由强极大值原理，可以得知对足够大的$k \in \mathbb{N}$，在Ω_1上恒有$u_k = \text{const}$。但现在我们假设着$V_0(p) < 0$，在Ω_1上对一切足够大的k均有$V_k < 0$，因此方程*(3-27)*在Ω_1上将无法被满足。

注记3.3. 在$V_0(p) = 0$的情形，我们没有第二章中建立的$\epsilon-$正则性，考虑u_k的收敛情况将遇到更大的困难。因此本章中的大部分技巧都建立在$V_0(0) > 0$的假设下。对$V_0(p) = 0$的情形，目前相关的工作也非常少，本文不予讨论。

推论3.1. 在定理*3.1*的条件下，S是孤立点集。

Proof. 这由定理3.1和$\int_\Omega |V_k|e^{u_k} < \Lambda_1$立即可得。 □

推论3.2. 在定理*3.1*的条件下，S是有限点集。

Proof. 这是因为$\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$。 □

§3.2 Blow-up点附近的bubble和下界的改进

在上一节中我们建立了$A(p)$的一个下界估计$A(p) \geq a\epsilon_0$。根据第一章最后的注记，我们大概可以看到这个下界有多大：

$$0 < a\epsilon_0 < \frac{a}{b}2\pi < 2\pi$$

下面我们通过分析blow-up点附近的bubble来将这个下界提升至8π。

定理3.2. 在与定理*3.1*相同的条件下，我们有

$$A(p) \geq 8\pi$$

我们将这个定理的证明分为四步。

引理3.1. *在与定理3.1相同的条件下，对S中的任意点p，存在一列点$x_k \to p, k \to \infty$使得$u_k(x_k) \to \infty, k \to \infty$。*

Proof. 设$p \in S$，由S中点的孤立性，可取$\delta > 0$，使得$B_\delta(p) \cap S = \{p\}$。由注记3.2，必有$\sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k \to +\infty$。令

$$u_k(x_k) = \sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k$$

并设$x_0 \in \overline{B_{\frac{\delta}{2}}(p)}$使得$x_k \to x_0, k \to \infty$。我们断言必有$x_0 = p$。若不然，则存在$\delta_1 > 0$使得$B_{\delta_1}(x_0) \cap S = \emptyset$。由于$A(x_0) = 0$，可以找到$\delta_2 > 0$，满足$\delta_2 < \delta_1$，且类似于我们在定理3.1中的断言(3-31)，对足够大的k有

$$\sup_{B_{\frac{\delta_1}{2}}(x_0)} u_k < C < \infty$$

特别地，$u_k(x_k) < C$对足够大的k成立，与$u_k(x_k) \to \infty, k \to \infty$矛盾。 □

下面我们令

$$m_k = u_k(x_k), \quad r_k = e^{-\frac{m_k}{2}}$$

易见

$$m_k \to +\infty, \quad k \to \infty$$

$$r_k \to 0, \quad k \to \infty$$

再令

$$v_k(x) = u_k(x_k + r_k x) - m_k$$

其中v_k的定义域为

$$\Omega_k = \{x : |x_k + r_k x - p| < \delta\}$$

由于$r_k \to 0, \quad k \to \infty$，故$\Omega_k$单调上升地趋于$\mathbb{R}^2$。易知在$\Omega_k$上有

$$v_k \leq 0, \quad \forall x \in \Omega_k$$

$$v_k(0) = \sup_{\Omega_k} v_k = 0$$

v_k满足方程

$$\begin{aligned} -\Delta v_k(x) &= r_k^2 \cdot (-\Delta u_k (x_k + r_k x)) \\ &= V_k(x_k + r_k x) e^{u_k(x_k + r_k x)} \cdot e^{-m_k} \quad = V_k(x_k + r_k x) e^{v_k(x)} \end{aligned}$$

亦即

$$-\Delta v_k = V_k(x_k + r_k x)e^{v_k}, \quad x \in \Omega_k \tag{3-36}$$

对任意固定的$R > 0$，由于$\Omega_k \nearrow \mathbb{R}^2$，故对一切足够大的$k$，我们可以将方程(3-36)全部限制到$B_R$上加以考虑。

引理3.2.

$$\|v_k\|_{L^\infty(B_R)} \leq C(R) \tag{3-37}$$

其中$C(R)$是某仅依赖于R的正常数。

Proof. 令v'_k满足

$$-\Delta v'_k = V_k(x_k + r_k x)e^{v_k}, \quad x \in B_{2R}$$
$$v'_k\big|_{\partial B_{2R}} = 0$$

v'_k的存在性由推论2.1保证。在与定理3.1相同的条件下，$V_k e^{v_k} \in L^1(B_{2R})$，$V_k e^{v_k} \geq 0$，故由推论2.2，$v'_k \geq 0$，a.e. $x \in B_{2R}$。因此由(2-12)的第一式可知必有

$$\|v'_k\|_{L^\infty(B_{2R})} \leq C(R) \tag{3-38}$$

注意到

$$\Delta(-v_k + v'_k) = 0, \quad x \in B_{2R}$$

因此，重复定理2.1的证明的前半部分，可知

$$\left|-v_k + v'_k\right| < C < \infty, x \in B_R$$

由此可知，(3-38)蕴含着(3-37)。 □

从上面构造的L^∞有界序列中抽取一个光滑收敛子列的技术是常用的。我们将其写入下面的引理。

引理3.3. *存在$\{v_k\}$的一个子列光滑收敛到某函数w。w满足方程*

$$-\Delta w = V_0(p)e^w \tag{3-39}$$

且

$$w(0) = \sup_{B_R} w = 0 \tag{3-40}$$

Proof. 对任意的实数$1 < p < \infty$，引理3.2指出$V_k e^{v_k} \in L^p(B_R)$。由L^p估计，可知序列$\{v_k\}$在$W^{2,p}(B_R)$中有界。由于$p > 1$时$W^{2,p}(B_R)$是自反的，故存在$\{v_k\}$的一个子列（不妨仍记为$\{v_k\}$）在$W^{2,p}(B_R)$中弱收敛于某函数w。

注意到方程(3-36)右端含有v_k，故我们可以对(3-36)两端求各种二阶广义导数，然后再次使用L^p估计，推知$\{v_k\}$在$W^{4,p}(B_R)$中有界。重复这一过程，我们知道事实上对任意的整数$m > 0$，$\{v_k\}$在$W^{m,p}(B_R)$中有界。由经典的Sobolev嵌入定理（例如[7]§5.6.3，Theorem 6），$\{v_k\}$在$C^\infty(B_R)$中有界。特别地，$\{v_k\}$在B_R上是一致有界和等度连续的，因此由Arzelà-Ascoli定理可知存在$\{v_k\}$的一个子列（不妨仍记为$\{v_k\}$）在B_R上一致收敛。由强收敛和弱收敛同时成立时极限的唯一性，这个一致收敛的极限必为w。类似地，对$\{v_k\}$的各阶导数分别使用Arzelà-Ascoli定理，可知v_k实际上是光滑地收敛到w的。由此我们可以在方程(3-36)两端取极限，进而得到(3-39)和(3-40)。 □

最后我们来完成定理3.2的证明。

定理3.2的证明. 由上述诸引理，我们有

$$\int_{B_R} V_0(p)e^w \mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int_{B_R} V_k(x_k + r_k x)e^{v_k}\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int_{B_{Rr_k}(x_k)} e^{-m_k}V_k(x)e^{u_k}\mathrm{d}x < C \tag{3-41}$$

其中用到$m_k \to +\infty$以及$\int_{\Omega_k}|V_k|e^{u_k} < \Lambda_1$。由此可见，常数$C$与$R$无关。在(3-41)两端同时令$R \to \infty$并利用$V_0(p) > a > 0$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^w \mathrm{d}x \le C < +\infty \tag{3-42}$$

[4]利用活动平面法证明了在条件(3-42)下方程(3-39)有唯一解

$$w = -2\log\left(1 + \frac{V_0(p)}{8}|x-p|^2\right)$$

且它满足

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^w \mathrm{d}x = \frac{8\pi}{V_0(p)} \tag{3-43}$$

注意到，对任意固定的$r > 0$，由于

$$r_k \to 0, \quad x_k \to p, \quad k \to \infty$$

故对一切足够大的k总能有$B_{Rr_k}(x_k) \subset B_r(p)$。因此

$$\begin{aligned}
A(p) = \lim_{R\to\infty} A(p) &= \lim_{R\to\infty} \lim_{r\to 0} \liminf_{k\to\infty} \int_{B_r(p)} V_k e^{u_k} \mathrm{d}x \\
&\geq \lim_{R\to\infty} \lim_{r\to 0} \liminf_{k\to\infty} \int_{B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k} \mathrm{d}x \\
&\geq \lim_{R\to\infty} \lim_{r\to 0} \lim_{k\to\infty} \int_{B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k - m_k} \mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{v_k} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} V_0(p) e^{w} \mathrm{d}x = 8\pi
\end{aligned}$$

其中用到$e^{-m_k} \to 0, k \to \infty$以及(3-43)。至此我们证明了$A(p) \geq 8\pi$。 □

注记3.4. *在(3-41)中，通过一个极限过程，对足够大的k我们可以将任何B_R压缩到Ω_k中。这里R的任意性使得我们可以对R取极限，进而得到(3-42)。*

§3.3 u_k在$\Omega \backslash S$上的收敛

经过上一节对blow-up点集的讨论，我们可以完整地刻画u_k在Ω上的收敛情况。当$p \notin S$时，对任意的$\epsilon > 0$，我们可以找到$\delta > 0$，使得当k足够大时，总有

$$\int_{B_\delta(p)} V_k e^{u_k} \mathrm{d}x < \epsilon_0 \tag{3-44}$$

同定理3.1中的(3-30)和(3-31)，我们有

$$\operatorname*{osc}_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k < C < \infty, \qquad \sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(p)} u_k < C$$

所以，对任意的$\Omega' \subset\subset \Omega \setminus S$，应用紧覆盖可得

$$\operatorname*{osc}_{\Omega'} u_k < C(\Omega, \Omega'), \qquad \sup_{\Omega'} u_k < C(\Omega, \Omega')$$

以下我们讨论两种可能性，并指出u_k在$\Omega \setminus S$上的收敛不会有其他的情况。

§3.3.1 情形一：存在$x_0 \in \Omega \setminus S$，使得$u_k(x_0) \to -\infty$

此时，由

$$\operatorname*{osc}_{\Omega'} u_k < C(\Omega, \Omega')$$

可知，在任意的$\Omega' \subset\subset \Omega$上

$$u_k \rightrightarrows -\infty, \quad k \to \infty$$

取$\delta>0$，使得$B_\delta(x_0)\cap S=\emptyset$。令$\bar{u}_k=\frac{1}{|B_\delta(x_0)|}\int_{B_\delta(x_0)}u_k dx$。我们有

$$
\begin{aligned}
|u_k(x_0)-\bar{u}_k| &= \left|\frac{1}{|B_\delta(x_0)|}\int_{B_\delta(x_0)}(u_k(x_0)-u_k)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \frac{1}{|B_\delta(x_0)|}\int_{B_\delta(x_0)}|u_k(x_0)-u_k|\,\mathrm{d}x \\
&\le \operatorname*{osc}_{B_\delta(x_0)} u_k < C(\Omega,\Omega')<\infty
\end{aligned}
$$

由Poincaré不等式以及估计(3-29)，我们有

$$
\|u_k-u_k(x_0)\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le C+\|u_k-\bar{u}_k\|_{W^{1,q}(\Omega)}\le C'(1+\|\nabla u_k\|_{L^q(\Omega)})<C''
$$

因此我们可以设

$$
u_k-u_k(x_0)\rightharpoonup G,\quad k\to\infty\quad \text{in}\quad W^{1,q}(\Omega)
$$

对任意的$\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$，用一个“approximation identity”式的手段，我们有

$$
\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega \nabla u_k\nabla\varphi\mathrm{d}x=\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega V_k e^{u_k}\varphi\mathrm{d}x=\sum_{p\in S}A(p)\varphi(p)
$$

其中我们用到之前的结论：在任意$\Omega'\subset\subset\Omega\backslash S$上，$u_k\rightrightarrows-\infty,\quad k\to\infty$，因此在$S$之外上述积分收敛到0。因此，我们找到的$G$类似于Green函数，在分布意义下满足下面的方程

$$
-\Delta G=\sum_{p\in S}A(p)\delta_p
$$

对任意固定的$\Omega'\subset\subset\Omega\backslash S$，由于$\operatorname*{osc}_{\Omega'}u_k<C(\Omega,\Omega')$，故有$\|u_k-u_k(x_0)\|_{L^\infty(\Omega')}<C(\Omega,\Omega')$，因而$e^{u_k}=e^{u_k-u_k(x_0)+u_k(x_0)}$在任意的$L^p$中有界。类似于引理3.3的手段，可以知道函数列$\{u_k-u_k(x_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$实际上在任意$\Omega'\subset\subset\Omega$中光滑地收敛到$G$。

§3.3.2 情形二：存在点$x_0\in\Omega\setminus S$，使得$u_k(x_0)>-M$

在这种情形下，对任意的$\Omega'\subset\subset\Omega$，类似于情形一的讨论，我们知道：

1. $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega')}<C$；
2. u_k在$W^{1,q}(\Omega)$中弱收敛到一个函数u_0满足方程

$$
-\Delta u_0=V_0e^{u_0}+\sum_{p\in S}A(p)\delta_p
$$

且u_k在Ω'上光滑收敛到u_0.

下面我们证明，此时必有$S=\emptyset$，从而u_k在Ω上内闭光滑收敛到u_0。

若不然，取$p\in S$，由S中点的孤立性，可取$\delta>0$ 使得$B_\delta(p)\cap S=\{p\}$。令v满足方程

$$-\Delta v = V_0 e^{u_0}$$

$$v|_{\partial B_\delta(p)} = 0$$

由推论2.2，$v\geq 0$。在$B_\delta(p)$上我们有

$$-\Delta(u_0 - v) = A(p)\delta_p$$

因此

$$-\Delta\left(u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p|\right) = 0, \quad x\in B_\delta(p) \tag{3-45}$$

我们知道，当$p<2$时，$\log|x-p|\in W^{2,p}(B_\delta(p))$。现在$q\in(1,2)$，因此对方程(3-45)用$L^q$估计即知

$$u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p| \in W^{2,q}(B_\delta(p))$$

而由条件(3-29)和估计(2-12)的第二式，我们有

$$\|\nabla(u_0-v)\|_{L^q(B_\delta(p))} \leq \|\nabla u_0\|_{L^q(B_\delta(p))} + \|\nabla v\|_{L^q(B_\delta(p))} < +\infty$$

故

$$\left\|\nabla\left(u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p|\right)\right\|_{L^q(B_\delta(p))} \leq \|\nabla(u_0-v)\|_{L^q(B_\delta(p))} + \left|\frac{A(p)}{2\pi}\right| \|\nabla(\log|x-p|)\|_{L^q(B_\delta(p))} < \infty$$

因此，我们可以对方程(3-45)两端同时求一阶广义导数后再做一次L^q估计，从而得到

$$\nabla\left(u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p|\right) \in W^{2,q}(B_\delta(p))$$

故

$$u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p| \in W^{3,q}(B_\delta(p))$$

根据$q\in(1,2)$，我们有Sobolev嵌入$W^{3,q}(B_\delta(p))\hookrightarrow C^1(B_\delta(p))$，因此

$$u_0 - v + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p| = O(1), \quad B_\delta(p)\ni x\to p \tag{3-46}$$

这样我们就有

$$
\begin{aligned}
\int_{B_\delta(p)} e^{u_0}\mathrm{d}x &= \int_{B_\delta(p)} e^{u_0-v}e^{v}\mathrm{d}x \geq \int_{B_\delta(p)} e^{u_0-v}\mathrm{d}x \\
&\geq C\int_{B_\delta(p)} \exp\left(\log|x-p|^{-\frac{A(p)}{2\pi}}\right)\mathrm{d}x \\
&= C\int_{B_\delta(p)} \frac{1}{|x-p|^{\frac{A(p)}{2\pi}}}\mathrm{d}x \\
&\geq C\int_{B_\delta(p)} \frac{1}{|x-p|^{\frac{8\pi}{2\pi}}}\mathrm{d}x \\
&= C\int_{B_\delta(p)} \frac{1}{|x-p|^4}\mathrm{d}x = +\infty
\end{aligned} \tag{3-47}
$$

其中用到定理3.2的结论$A(p) \geq 8\pi$，以及$e^v \geq 1$（因为$v \geq 0$）。然而，另一方面，由Fatou引理易知

$$
\int_{B_\delta(p)} V_0 e^{u_0}\mathrm{d}x < \Lambda_1
$$

这与(3-47)矛盾。这样，我们就说明了在情形二下必有$S=\emptyset$。此时u_k在Ω上内闭光滑收敛到u_0。

§4 Blow-up点集的进一步刻画

§4.1 一个Pohozaev型恒等式

Pohozaev型恒等式是椭圆方程中常用的工具。本章我们将主要使用如下的Pohozaev型恒等式。

引理4.1. 记B为$\mathbb{R}^2$中的单位圆盘。若$u \in C^2(B)$是方程

$$
-\Delta u = Ve^u, \quad x \in B \tag{4-48}
$$

的解，则对任意的实数$\rho \in (0,1)$，在B中成立恒等式

$$
\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\bigg|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta+4\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=\rho}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\bigg|_{r=\rho}\mathrm{d}\theta-2\int_0^{2\pi}Ve^u\bigg|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta+\int_{B_\rho}2\frac{\partial V}{\partial r}re^u\mathrm{d}x \tag{4-49}
$$

Proof. 由方程(4-48)我们有

$$
\int_{B_\rho} -r\frac{\partial u}{\partial r}\Delta u\mathrm{d}x = \int_{B_\rho} Ve^u\frac{\partial u}{\partial r}r\mathrm{d}x \tag{4-50}
$$

一方面，由Green公式可知

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} -r\frac{\partial u}{\partial r}\Delta u\mathrm{d}x &= \int_{B_\rho} \nabla\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\nabla u\mathrm{d}x - \int_{\partial B_\rho} r\frac{\partial u}{\partial r}\left(\nabla u\cdot\gamma\right)\mathrm{d}S \\ &= \int_{B_\rho} \frac{\partial u}{\partial r}\nabla r\cdot\nabla u\mathrm{d}x + \int_{B_\rho} r\frac{\partial\nabla u}{\partial r}\cdot\nabla u\mathrm{d}x - \int_{\partial B_\rho} r\frac{\partial u}{\partial r}\left(\nabla u\cdot\gamma\right)\mathrm{d}S \\ &= \int_{B_\rho} \left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x + \int_{B_\rho} r\frac{\partial\nabla u}{\partial r}\cdot\nabla u\mathrm{d}x - \int_{\partial B_\rho} r\frac{\partial u}{\partial r}\left(\nabla u\cdot\gamma\right)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

其中，球面的单位外法向γ可写为

$$\gamma = \left(\frac{x^1}{r}, \frac{x^2}{r}\right) = \nabla r$$

在极坐标变换下，恒有

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \sum\frac{\partial u}{\partial x^i}\cdot r\frac{\partial x^i}{\partial r} = \sum\frac{\partial u}{\partial x^i}x^i$$

而通过分部积分可知

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} r\frac{\partial\nabla u}{\partial r}\cdot\nabla u\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\int_0^\rho \frac{1}{2}r^2\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial r}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2\Big|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^\rho r\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2\Big|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta - \int_{B_\rho}\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} -r\frac{\partial u}{\partial r}\Delta u\mathrm{d}x &= \int_{B_\rho}\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2\Big|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta - \int_{B_\rho}\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x - \int_{\partial B_\rho} r\frac{\partial u}{\partial r}\left(\sum\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{x^i}{r}\right)\mathrm{d}S \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2\Big|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta - \int_{\partial B_\rho} r\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}S \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2\Big|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta - \int_{\partial B_\rho} r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\mathrm{d}S \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2\Big|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\Big|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{4-51}$$

另一方面，同样借助于分部积分，注意到

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho} Ve^u \frac{\partial u}{\partial r} r\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\int_0^\rho V\frac{\partial e^u}{\partial r} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} Ve^u\Big|_{r=\rho} \rho^2\mathrm{d}\theta - \int_{B_\rho} 2Ve^u\mathrm{d}x - \int_{B_\rho}\frac{\partial V}{\partial r} re^u\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} Ve^u\Big|_{r=\rho} \rho^2\mathrm{d}\theta + \int_{B_\rho} 2\Delta u\mathrm{d}x - \int_{B_\rho}\frac{\partial V}{\partial r} re^u\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中，由散度定理可以算得

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}\Delta u\mathrm{d}x &= \int_{B_\rho}\nabla\cdot(\nabla u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial B_\rho}\nabla u\cdot\gamma\mathrm{d}S \\ &= \int_{\partial B_\rho}\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=\rho}\rho\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

代入前一式即可得到

$$\int_{B_\rho} Ve^u\frac{\partial u}{\partial r} r\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} Ve^u\Big|_{r=\rho}\rho^2\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} 2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=\rho}\rho\mathrm{d}\theta - \int_{B_\rho}\frac{\partial V}{\partial r} re^u\mathrm{d}x \tag{4-52}$$

最后注意到

$$|\nabla u|^2\Big|_{r=\rho} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\Big|_{r=\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\Big|_{r=\rho} \tag{4-53}$$

将(4-51)和(4-52)代入(4-50)，并利用(4-53)，我们就完成了证明。 □

§4.2 $A(p) = 8\pi$

定理4.1. *在假设(1-4)和(1-5)下，若$V_0(p) > a > 0$，则我们有*

$$A(p) = 8\pi$$

Proof. 不失一般性，假设S仅含一点p。设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{R}}$如引理3.1所述。

对固定的$\delta > 0$，在$B_\delta(x_k)$上应用Pohozaev型恒等式(4-49)，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{2\pi}\left(\rho\frac{\partial u_k}{\partial r}\Big|_{r=\rho}\right)^2\mathrm{d}\theta + 4\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial u_k}{\partial r}\Big|_{r=\rho}\mathrm{d}\theta\right)_{\rho=\delta} &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u_k}{\partial\theta}\right)^2\Big|_{r=\rho=\delta}\mathrm{d}\theta - 2\int_0^{2\pi}\rho^2 e^{u_k}V_k\Big|_{r=\rho=\delta}\mathrm{d}\theta \\ &\quad + O\left(2\delta\left\|\frac{\partial V_k}{\partial r}\right\|_{L^\infty(B_\delta(x_k))}\right)\int_{B_\delta} e^{u_k}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4-54}$$

其中根据我们的假定，V_k在$B_\delta(x_k)$上光滑收敛到V_0，故

$$\left\| \frac{\partial V_k}{\partial r} \right\|_{L^\infty(B_\delta(x_k))} < \infty$$

因此

$$O\left(2\delta \left\| \frac{\partial V_k}{\partial r} \right\|_{L^\infty(B_\delta(x_k))}\right) = O\left(\delta\right)$$

由之前§§3.3.1和§§3.3.2的讨论，我们知道若$S \neq \emptyset$，则必存在$x_0 \in \Omega \setminus S$，使得$u_k(x_0) \to -\infty$，$k \to \infty$。此时在任意的$\Omega' \subset\subset \Omega$上成立有

$$u_k \rightrightarrows -\infty, \quad k \to \infty$$

因此，重复§§3.3.1中的证明，我们知道存在一列实数$\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，满足

$$c_k \to -\infty, \quad k \to \infty$$

使得$u_k - c_k$光滑地收敛到某个Green函数G满足

$$-\Delta G = A(p)\delta_p$$

因此我们有

$$-\Delta\left(u_k - c_k + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p|\right) \to 0, \quad k \to \infty \tag{4-55}$$

由于c_k是常数，因此我们可以利用条件(3-29)和

$$\text{当}p < 2\text{时} \log|x-p| \in W^{2,p}(B_\delta(p))$$

这一事实对方程

$$-\Delta\left(G + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p|\right) = 0, \quad x \in B_\delta(p)$$

以及对其两端同时求一阶广义导数后得到的方程做L^q估计。类似于§§3.3.2中使用Sobolev嵌入定理的手段（事实上这个嵌入在§§3.3.1的情形下亦能成立），我们得到

$$G + \frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p| \in W^{3,q}(B_\delta(p)) \hookrightarrow C^1(B_\delta(p))$$

因此，我们可以得到比(3-46)更具体的展开式

$$u_k - c_k \to G = -\frac{A(p)}{2\pi}\log|x-p| + \Theta(p) + \sum_{i=1,2} a_i\left(x^i - p^i\right) + O(|x-p|^2), \quad k \to \infty, x \to p$$

其中$c_k \to -\infty$，$\Theta(p), a^i (i=1,2)$均为常数。至此，一方面我们有

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(\rho\frac{\partial u_k}{\partial r}\bigg|_{r=\rho}\right)^2 \mathrm{d}\theta + 4\int_0^{2\pi}\rho\frac{\partial u_k}{\partial r}\bigg|_{r=\rho}\mathrm{d}\theta\right)_{\rho=\delta} = \left(-\frac{A(p)}{2\pi}\right)^2 - 4\cdot\frac{A(p)}{2\pi} + O(\delta), \quad \delta\to 0$$

另一方面，首先借助于极坐标变换的表达式，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial u_k}{\partial\theta}\right|^2\bigg|_{r=\rho=\delta}\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\left(-a_1\delta\sin\theta + a_2\delta\cos\theta\right)^2\mathrm{d}\theta + O(\delta)\\ &= O(\delta), \quad \delta\to 0\end{aligned}$$

其次由条件$\int_\Omega |V_k|e^{u_k} < \Lambda_1$，我们知道

$$\int_0^{2\pi}\rho^2 e^{u_k}V_k\bigg|_{r=\rho=\delta}\mathrm{d}\theta = \delta^2\int_0^{2\pi}e^{u_k}V_k\bigg|_{r=\rho=\delta}\mathrm{d}\theta = O(\delta), \quad \delta\to 0$$

此外由于$V_0 > a > 0$，故条件$\int_\Omega |V_k|e^{u_k} < \Lambda_1$蕴含着对足够大的$k$有

$$\int_\Omega e^{u_k} < C < \infty$$

从而

$$O\left(2\delta\left\|\frac{\partial V_k}{\partial r}\right\|_{L^\infty(B_\delta(x_k))}\right)\int_{B_\delta}e^{u_k}\mathrm{d}x = O(\delta)\int_{B_\delta}e^{u_k}\mathrm{d}x = O(\delta), \quad \delta\to 0$$

因此，将上面分析的各项代入(4-54)，我们得到

$$\left(-\frac{A(p)}{2\pi}\right)^2 - 4\cdot\frac{A(p)}{2\pi} = O(\delta), \quad \delta\to 0$$

令$\delta\to 0$，我们就得到$A(p) = 8\pi$。 □

有了这个定理，我们就可以对$S\neq\emptyset$情形下函数列$\{u_k\}$的收敛有更详尽的刻画。

推论4.1. *在定理4.1的假设下，对任意的*$\Omega' \subset\subset \Omega$，*我们有*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\Omega'}V_k e^{u_k}\mathrm{d}x = \sum_{p\in\Omega'\cap S}8\pi.$$

Proof. 我们知道，因为$S\neq\emptyset$，此时只能发生§§3.3.1中的情形。设$p\in S$，取δ_0足够小使得$B_{\delta_0}(p)\cap S = \{p\}$。由§§3.3.1中的讨论，我们可以取$x_k\to p$，$r_k\to 0$，使得

$$u_k(x_k + r_k x) - u_k(x_k) \to w = -2\log\left(1 + \frac{V_0(p)}{8}|x-p|^2\right), \quad k\to\infty$$

其中函数$u_k(x_k + r_k x)$的定义域Ω_k单调上升地趋于$\mathbb{R}^2$。同时，我们还知道存在$c_k \to -\infty$，使得对任意的$\delta < \delta_0$，$\{u_k - c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$在$B_{\delta_0}(p)\backslash B_\delta(p)$上光滑收敛到Green函数$G$，$G$在分布意义下满足方程

$$-\Delta G = 8\pi\delta_p, \quad x \in B_{\delta_0}(p)$$

在定理4.1的证明中，我们已经看到，可以设

$$G = -4\log|x-p| + \Theta(p) + a_i\left(x^i - p^i\right) + O(|x-p|^2)$$

因为有

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\int_{B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k}\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{B_R} V_0(p)e^w \mathrm{d}x = 8\pi$$

和

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{k\to+\infty}\int_{B_{\delta_0}(x_k)\backslash B_\delta(x_k)} V_k e^{u_k}\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to0}\lim_{k\to+\infty} e^{c_k}\int_{B_{\delta_0}(x_k)\backslash B_\delta(x_k)} V_k e^{u_k-c_k}\mathrm{d}x = 0$$

并且当$k\to\infty$时有$B_{\delta_0}(x_k)\to B_{\delta_0}(p)$，我们只需要证明

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{R\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\int_{B_\delta(x_k)\backslash B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k}\mathrm{d}x = 0 \tag{4-56}$$

事实上，由于

$$\int_{B_\delta(x_0)\backslash B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k}\mathrm{d}x = -\int_{B_\delta(x_k)\backslash B_{Rr_k}(x_k)}\Delta u_k \mathrm{d}x = -\int_{\partial B_\delta(x_k)}\frac{\partial u_k}{\partial r}\mathrm{d}S + \int_{\partial B_{Rr_k}(x_k)}\frac{\partial u_k}{\partial r}\mathrm{d}S$$

因而当$k\to+\infty$时，我们有

$$-\int_{\partial B_\delta(x_k)}\frac{\partial u_k}{\partial r}\mathrm{d}S \longrightarrow -\int_{\partial B_\delta(p)}\frac{\partial G}{\partial r}\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_{r=\delta}\frac{4}{r}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 8\pi + O(\delta), \quad \delta\to0$$

同时

$$\int_{\partial B_{Rr_k}(x_k)}\frac{\partial u_k}{\partial r}\mathrm{d}S \longrightarrow \int_{\partial B_R}\frac{\partial w}{\partial r}\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\frac{-4\frac{V_0(p)}{8}R^2}{1+\frac{V_0(p)}{8}R^2}\mathrm{d}\theta = -8\pi\frac{\frac{V_0(p)}{8}R^2}{1+\frac{V_0(p)}{8}R^2}$$

故

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{R\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\int_{B_\delta(x_k)\backslash B_{Rr_k}(x_k)} V_k e^{u_k}\mathrm{d}x = 8\pi - 8\pi = 0$$

这就完成了证明。 $\square$

参考文献

[1] H. Brezis and F. Merle. Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\delta u = v(x)e^u$ in two dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(8):1223–1253.

[2] Y. Li and I. Shafrir. Blow-up analysis for solutions of $-\delta u = ve^u$ in dimension two. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(4):1255–1270, 1994.

[3] C.C. Chen and C.S. Lin. Topological degree for a mean field equation on riemann surfaces. *(English summary) Comm. Pure Appl. Math*, 56(12):1667–1727, 2003.

[4] W. Chen and C. Li. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. *Duke Math. J.*, 63(3):615–622, 1991.

[5] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.

[6] M. Struwe. Positive solutions of critical semilinear elliptic equations on non-contractible planar domains. *J. Eur. Math. Soc.*, 2(4):329–388, 2000.

[7] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.