

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

«Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский
университет)»

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Кафедра вычислительной физики

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)

Направленность(профиль) подготовки: Вычислительные технологии
математического моделирования

**Исследование компактных схем
повышенного порядка точности для
численного решения линейного
уравнения переноса на нерегулярных
сетках**
(бакалаврская работа)

Студент:

Цицварич Йован

Научный руководитель:

Беклемышева Катерина Алексеевна

Москва

2020

Аннотация

Цели и задачи

Полученные результаты

Содержание

Введение	5
1 Теоретические сведения.	6
1.1 Уравнение переноса.	6
1.2 Граничные условия.	6
1.3 Сеточно-характеристический метод.	6
1.4 Расчетная сетка.	7
1.5 Определение точки пересечения характеристики с предыдущим временным слоем.	8
1.6 Поиск треугольника.	9
1.6.1 Оптимизация поиска.	10
1.7 Интерполяция.	10
1.7.1 Повышение порядка.	11
1.8 Расчет порядка.	14
2 Результаты численного эксперимента.	14
2.1 Схема первого порядка.	14

Используемые обозначения

Введение

Актуальность темы

Объект исследования

В данной задаче мы занимаемся исследованием компактных схем повышенного порядка точности для численного решения линейного уравнения переноса на нерегулярных сетках. Уравнение переноса в однородной постановке имеет вид:

$$u_t + \lambda u_x = 0, \tag{1}$$

где константа λ представляет собой скорость переноса.

Значимость исследования.

1 Теоретические сведения.

1.1 Уравнение переноса.

Уравнение переноса является уравнением в частных производных первого порядка, описывающего изменение величины в пространстве с течением времени. Мы будем заниматься однородным уравнением переноса. Для простоты будем рассматривать случай $\lambda > 0$.

1.2 Граничные условия.

В данной постановке мы рассматриваем двумерную задачу Коши с периодическими граничными условиями,

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0, & x \in [0,1], y \in [0,1], t > 0, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & x \in [0,1], y \in [0,1]. \end{cases} \quad (2)$$

Периодичность граничных условий предполагает замкнутость пространства по x , то есть при достижении правой границы $x = 1$ нашей области $[0, 1]$ происходит перемещение на левую границу $x = 0$ с сохранением значения функции и дальнейшим продолжением ее развития согласно решаемому уравнению. Аналитическим решением системы в такой постановке является функция:

$$u(x,y,t) = u(x - \lambda t, y), x \in [0,1], y \in [0,1], t > 0. \quad (3)$$

1.3 Сеточно-характеристический метод.

Классический подход к решению данной задачи предполагает использование разностных схем для аппроксимации частных производных и численного решения уравнения. В данной работе мы используем сеточно-характеристический подход к решению однородного уравнения переноса. Он заключается в сведении дифференциального уравнения первого порядка в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль кривой, называемой

характеристикой данного уравнения, такой что:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda. \quad (4)$$

Вдоль нее уравнение переноса принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Что равносильно:

$$\frac{du}{dt} = 0. \quad (6)$$

То есть вдоль характеристики решение исходного уравнения переноса сохраняется. Используемый нами подход основывается на этом методе – для нахождения значения на $n + 1$ – ом временном слое следует провести характеристику на n – ый слой по времени и перенести с этого временного слоя значение функции на $n + 1$ – ый.

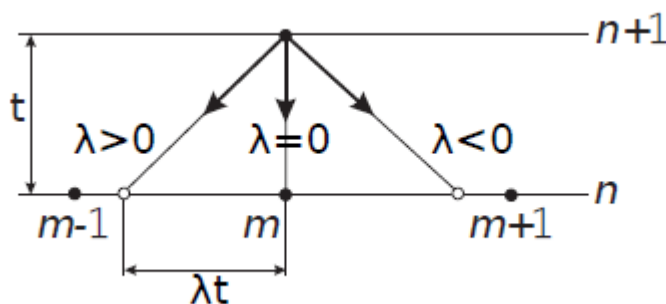


Рис. 1: Схема сеточно-характеристического метода в одномерном случае на регулярной прямоугольной сетке.

1.4 Расчетная сетка.

В данной работе рассматривается двумерная задача на нерегулярных треугольных сетках. Нерегулярная треугольная сетка - это разбиение плоскости на неравномерные треугольники. Такие сетки получили широкое применение

вместе методе конечных элементов. Их преимущество по сравнению с регулярными сетками заключается в их возможности покрывать комплексные формы, так как единственные накладываемые ограничения при их построении - это максимальная площадь треугольника и его минимальные угол.

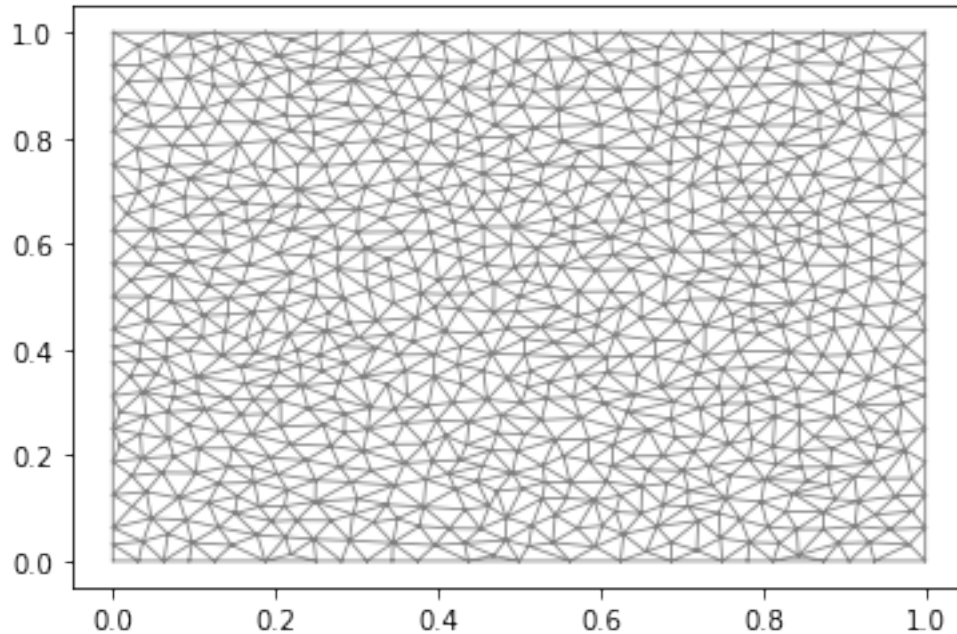


Рис. 2: Пример используемой расчетной сетки

1.5 Определение точки пересечения характеристики с предыдущим временным слоем.

В ходе расчета для каждой характеристики, выпущенной из точки на $n + 1$ — ом временном слое, по углу наклона, равному λ и заданному шагу τ по времени определяем координату пересечения характеристики с предыдущим временным слоем. Здесь и далее рассматриваем уравнение переноса по переменной x , так как для второй переменной все получается аналогичной последовательностью действий. Алгоритм поиска значения исходной функции u в некоторой точке $(x_{current}, y_{current})$, на новом $n + 1$ слое по времени состоит в следующем. Сначала необходимо определить координаты точки пересечения

характеристики с n — ым слоем

$$\begin{aligned}x_{intersection} &= x_{current} - \lambda\tau, \\y_{intersection} &= y_{current}.\end{aligned}\tag{7}$$

Отдельно стоит выделить случай выпадения точки за область исследования, то есть случай $x_{intersection} < x_{min}$, где $x_{min} = 0$ в нашей постановке. В следствие использования периодических граничных условия, мы сделаем замену

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{intersection} &= x_{max} - (x_{min} - x_{intersection}), \\ \tilde{y}_{intersection} &= y_{intersection},\end{aligned}\tag{8}$$

где $x_{max} = 1$ в нашей задаче.

1.6 Поиск треугольника.

После определения координаты пересечения характеристики и временного слоя предстоит определить треугольник, в который характеристика попала. Для этих целей воспользуемся методом известным как метод относительности. Данный метод заключается в том, что при заданной ориентации движения по вершинам треугольника, для каждой стороны вычисляем уравнение прямой и находим по какую сторону от него находится точка, в случае ориентации по часовой – для всех сторон точка будет справа, в случае ориентации против часовой стрелки - слева. Факт нахождения слева или справа определяется по знаку после подстановки координат точки в уравнение прямой.

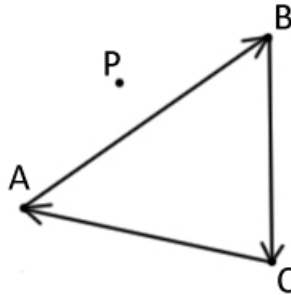


Рис. 3: Ориентация треугольника по часовой.

1.6.1 Оптимизация поиска.

При измельчении сетки количество треугольников быстро увеличивается и затраты на поиск возрастают. Для оптимизации, так как у нас постоянный шаг по времени τ и угол наклона характеристик λ , нам достаточно определить для каждой точки соответствующий ей на предыдущем слое треугольник всего один раз на первом шаге по времени и записать в кэш, далее просто обращаясь к нему по ключу. Так же используется грубый критерий принадлежности треугольнику - треугольник заключается в прямоугольник и по координатам вершин квадрата проводится проверка, попадает точка в данную область или нет. Такой подход помогает избежать многочисленных излишних расчетов и рассчитывать уравнение прямой только для малого количества ближайших треугольников.

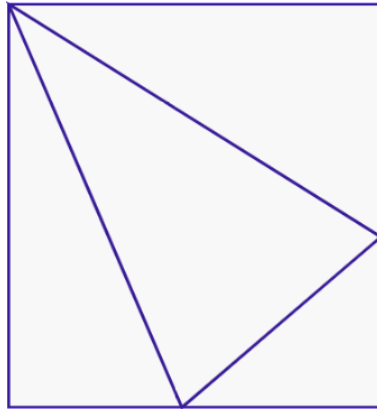


Рис. 4: Пример грубой прямоугольной области для треугольника.

1.7 Интерполяция.

После определения конкретного треугольника на предыдущем слое по времени, в который попала наша характеристика, нам предстоит определить значение функции в точке пересечения. Для этих целей воспользуемся интерполяционным полиномом первого порядка вида:

$$F(x,y) = ax + by + c, \text{ где } a, b, c \in R \quad (9)$$

Коэффициенты будем искать по значениям функции в вершинах данного треугольника. Имеем систему линейных уравнений:

$$Ax = f, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ - координаты вершин исследуемого треугольника, а f_1, f_2, f_3 - значения функции u^n в соответствующих вершинах. Данная система совместна для любого треугольника, а следовательно, имеет единственное решение. Это свойство следует из того, что

$$\det A = x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2, \quad (11)$$

данное выражение не может принимать нулевое значение, так как оно представляет собой подстановку координат вершины (x_1, y_1) в уравнение прямой, связывающей вершины (x_2, y_2) и (x_3, y_3) . Равенство нулю означало бы, что точка (x_1, y_1) принадлежит прямой, что противоречит тому, что все три точки являются вершинами одного треугольника. Таким образом, интерполированное значение функции в точке пересечения

$$u_{interpolated}^n = F(x_{intersection}, y_{intersection}). \quad (12)$$

Данное значение будет вдоль характеристики перенесено на $n + 1$ слой по времени в точку $(x_{current}, y_{current})$, то есть $u_i^{n+1} = u_{interpolated}^n$. По такому алгоритму, проходя по всем точкам сетки, получим значение исходной функции на $n + 1$ слое по времени. Данный метод имеет первый порядок сходимости.

1.7.1 Повышение порядка.

Для сеточно-характеристического метода возможно улучшение, если принять в рассмотрение производные исходной функции u и воспользоваться компактной схемой для повышения порядка. Введем функцию производной по

$x : \nu(x, y, t) = u_x(x, y, t)$. Здесь и далее рассматривается производная по x , случай производной по y полностью аналогичен данному. Продифференцируем уравнение переноса для исходной функции (1) по x и получим для функции производной $\nu(x, y, t)$ аналогичное уравнение:

$$\nu_t + \lambda \nu_x = 0 \quad (13)$$

Таким образом, весь описанный ранее алгоритм с интерполяционным полиномом первой степени можно использовать для решения уравнения переноса производных нашей исходной функции. В данном случае меняется подход к интерполяции значения исходной функции на предыдущем слое по времени в точке $(x_{intersection}, y_{intersection})$. Так как теперь в каждой вершине треугольника помимо значения исходной функции хранятся значения ее градиента. В таком случае для интерполяционного полинома второго порядка ,

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g, \\ a, b, c, d, e, g &\in R. \end{aligned} \quad (14)$$

Для коэффициентов a, b, c, d, e, g имеем систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + g = f_1 \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + g = f_2 \\ ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + g = f_3 \\ 2ax_1 + by_1 + d = f'_{1x} \\ 2ax_2 + by_2 + d = f'_{2x} \\ 2ax_3 + by_3 + d = f'_{3x} \\ bx_1 + 2cy_1 + e = f'_{1y} \\ bx_2 + 2cy_2 + e = f'_{2y} \\ bx_3 + 2cy_3 + e = f'_{3y} \end{array} \right. , \quad (15)$$

где f'_{ix}, f'_{iy} , $i = 1, 2, 3$ – значения производных исходной функции в соответствующих вершинах рассматриваемого треугольника. Первые три уравнения соответствуют значениям функции в вершинах, следующие три значениям

производной по переменной x и последние три производной по переменной y . Ранг матрицы данной системы линейных уравнений меньше количества уравнений, следовательно система переопределена и не существует точного решения. В данной работе были исследованы два подхода к решению данной проблемы. Первый – из 9 выбрать 6 необходимых уравнений и в случае если система совместна решить ее, в обратном случае взять другие уравнения, второй – чтобы не терять данные о производных функции, можно попытаться решить ее методом наименьших квадратов. Идея данного метода заключается в минимизации нормы разности $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$, где A – матрица системы линейных уравнений, \vec{x} – вектор искомых коэффициентов интерполяционного полинома и \vec{b} – вектор правых частей нашей системы линейных уравнений. Основным преимуществом такого подхода является гарантированное решение системы линейных уравнений, недостатком же является ограничение на точность накладываемое таким методом, которое может отразиться на точности решения и порядке сходимости. Первый же метод в свою очередь не гарантирует нахождения решения и является намного более ресурсоемким, в худшем случае, при условии, что уравнения на значения исходной функции будут постоянно использоваться в системе, а комбинироваться только уравнения на производные, имеем 20 возможных комбинаций, при рассмотрении производных более высокого порядка это число заметно вырастет¹. В тех случаях, когда ни одна из комбинаций уравнений не давала совместной системы, происходит переключение на полином первого порядка, который считается как для исходной функции, так и для ее производных.

¹В случае использования вторых производных для нахождения интерполяционного полинома третьей степени будет существовать 3432 возможных комбинации.

1.8 Расчет порядка.

В работе проводилось численное исследование порядка сходимости по трем нормам L_1 , L_2 и L_∞ , которые задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_i \frac{|u_i^n - U_i^n|}{N}, \\ L_2 &= \sqrt{\sum_i \frac{(u_i^n - U_i^n)^2}{N^2}}, \\ L_\infty &= \max |u_i^n - U_i^n|, \end{aligned} \tag{16}$$

где N – число точек расчетной сетки, U – проекция аналитического решения на нашу сетку, а u_i^n – значения функции в узлах сетки, полученные в ходе численного расчета с использованием исследуемой схемы. Для расчета порядка сходимости использовались следующие формулы:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\ln \frac{L_1(N_2)}{L_1(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \\ p_2 &= \frac{\ln \frac{L_2(N_2)}{L_2(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \\ p_\infty &= \frac{\ln \frac{L_\infty(N_2)}{L_\infty(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \end{aligned} \tag{17}$$

где N_1 и N_2 – число узлов на двух расчетных сетках, при чем $N_1 < N_2$, а $L_1(N_i)$, $L_2(N_i)$ и $L_\infty(N_i)$, $i = 1, 2$ – значения норм на соответствующих сетках.

2 Результаты численного эксперимента.

2.1 Схема первого порядка.

Расчеты проводились для разных типов начального импульса со значением $\lambda=1$. Исследуем порядок сходимости нашей схемы при использовании интерполяционных полиномов первого порядка, для которых как было показано ранее всегда существует единственное решение. Используем следующий

вид начального импульса:

$$u(x,y,0) = \sin^4(\pi x)\sin^4(\pi y). \quad (18)$$

В таблицах 1, 2 и 3 приведены результаты расчетов для разных сеток в момент времени $T=1$ и $T=3$ при шаге $\tau = 0.01$ и $T=3$ при шаге $\tau = 0.001$ соответственно.

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,087239	-	0,008104	-	0,561830	-
336	0,084176	0,196008	0,007179	0,664507	0,552675	0,090111
420	0,078477	0,314160	0,006050	0,766924	0,507142	0,385307
546	0,071616	0,348732	0,004816	0,869755	0,467492	0,310291
833	0,060154	0,412874	0,003341	0,865827	0,406355	0,331795
1620	0,042736	0,513982	0,001743	0,978381	0,299077	0,460837
2012	0,037003	0,664728	0,001356	1,156000	0,269926	0,473252
2691	0,031019	0,606635	0,000990	1,082734	0,227090	0,594256
3164	0,026893	0,881299	0,000791	1,385126	0,198694	0,824954
3959	0,022135	0,868753	0,000594	1,277442	0,174134	0,588620
4553	0,019305	0,978573	0,000483	1,478913	0,149670	1,082966
5266	0,016754	0,974120	0,000388	1,505377	0,129006	1,021248
6347	0,013513	1,151347	0,000287	1,613783	0,104003	1,153835
7905	0,010493554	1,152088	0,000200	1,640325	0,083046	1,025142
10478	0,007398639	1,240195	0,000124	1,713776	0,059363	1,191396
15686	0,005022792	0,959898	6,87E-05	1,455265	0,040293	0,960370
19665	0,004150729	0,843547	5,09E-05	1,327608	0,033393	0,830886
31318	0,002681	0,939637	2,60E-05	1,442039	0,021689	0,927303

Таблица 1: Результаты расчетов в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,124177	-	0,011289	-	0,758192	-
336	0,123780	0,017545	0,010378	0,461467	0,762095	-0,028158
420	0,122815	0,035079	0,009206	0,537115	0,740077	0,131382
546	0,119653	0,099439	0,007757	0,653016	0,710606	0,154882
833	0,110048	0,198085	0,005850	0,667990	0,664275	0,159611
1620	0,089724	0,306971	0,003462	0,788643	0,566198	0,240176
2012	0,081123	0,465016	0,002813	0,957313	0,525163	0,347180
2691	0,071354	0,441255	0,002160	0,908072	0,469398	0,386054
3164	0,063759	0,695066	0,001785	1,179794	0,428041	0,569599
3959	0,054593	0,692393	0,001398	1,089100	0,388150	0,436428
4553	0,048725	0,813379	0,001169	1,279554	0,349284	0,754732
5266	0,043212	0,825343	0,000966	1,310050	0,311220	0,793103
6347	0,035855	0,999631	0,000740	1,431530	0,262714	0,907470
7905	0,028516316	1,043247	0,000532	1,500048	0,215465	0,903214
10478	0,020667769	1,142375	0,000339	1,595503	0,159360	1,070431
15686	0,014362435	0,902026	1,94E-04	1,387801	0,112091	0,872032
19665	0,011975028	0,804137	1,45E-04	1,281201	0,094143	0,771854

Таблица 2: Результаты расчетов в момент времени $T=3$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280	0,125539	-	0,011425	-	0,765283	-
336	0,125780	-0,010523	0,010528	0,448274	0,768981	-0,026442
420	0,125973	-0,006868	0,009415	0,500758	0,751386	0,103731
546	0,124458	0,046105	0,008043	0,600412	0,728038	0,120314
833	0,118458	0,116971	0,006262	0,592555	0,696066	0,106315
1620	0,105671	0,171739	0,004021	0,666080	0,629699	0,150647
2012	0,099776	0,264908	0,003414	0,754396	0,602648	0,202624
2691	0,094210	0,197388	0,002806	0,674784	0,571032	0,185319
3164	0,089194	0,337904	0,002447	0,844367	0,542738	0,313839
3959	0,083494	0,294604	0,002071	0,745108	0,523187	0,163669
4553	0,080038	0,302422	0,001854	0,791496	0,501968	0,296169
5266	0,076739	0,289277	0,001655	0,778807	0,482320	0,274454
6347	0,072495	0,304746	0,001433	0,772534	0,456291	0,297131
7905	0,066935	0,363517	0,001192	0,837687	0,432985	0,238836
10478	0,06037	0,366336	0,000940	0,843923	0,395840	0,318304
15686	0,051561	0,390900	6,64E-04	0,861993	0,345194	0,339301
19665	0,046894	0,419662	5,42E-04	0,900892	0,317237	0,373586

Таблица 3: Результаты расчетов в момент времени $T=3$ при $\tau=0.001$

В полученных результатах можно заметить, что порядок сходимости сильно колеблется, одна из предполагаемых причин данного результата может быть особенность треугольной сетки. В следцующих таблицах приведены результаты расчетов в момент времени $T=1$ при шаге $\tau = 0.01$, но проводилось усреднение результатов - в первом случае по трем близким сеткам, во втором - по пяти.

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
280,67	0,087004	-	0,008119	-	0,564257	-
337,67	0,084931	0,130451	0,007203	0,647213	0,542017	0,217494
417,00	0,078696	0,361327	0,006117	0,774337	0,509018	0,297659
552,00	0,070055	0,414698	0,004726	0,919789	0,462416	0,342354
831,00	0,060084	0,375316	0,003321	0,862426	0,405557	0,320727
1620,00	0,042505	0,518484	0,001742	0,967007	0,301624	0,443532
2017,67	0,036841	0,651520	0,001358	1,133143	0,268957	0,522194
2673,67	0,030867	0,628502	0,000991	1,120859	0,228014	0,586636
3189,33	0,026857	0,789079	0,000792	1,269254	0,200701	0,723468
4542,33	0,019470	0,909602	0,000486	1,379604	0,149425	0,834277
5282,33	0,016702	1,015741	0,000386	1,524194	0,128056	1,022515
6351,00	0,013538	1,140012	0,000288	1,598672	0,105007	1,077059
7905,00	0,010416	1,197904	0,000199	1,677637	0,082589	1,097166
10517,33	0,007376	1,208484	0,000123	1,679136	0,059359	1,156673
15710,33	0,005030	0,954019	0,000069	1,461708	0,039952	0,986644
19637,67	0,004160	0,851554	0,000051	1,346226	0,033361	0,807956
19635,4	0,004156	0,840542	0,000051	1,341001	0,033315	0,804780

Таблица 4: Результаты расчетов с усреднением по трем сеткам в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

N	L_1	p_1	L_2	p_2	L_∞	p_∞
279,6	0,087344	-	0,008184	-	0,564051	-
337,8	0,084591	0,169375	0,007184	0,689360	0,535931	0,270446
416,4	0,079015	0,325980	0,006154	0,739578	0,510326	0,234019
551,6	0,070695	0,395698	0,004773	0,903919	0,464915	0,331451
830,0	0,059773	0,410718	0,003318	0,890034	0,406939	0,325963
1621,2	0,042415	0,512414	0,001732	0,970793	0,300838	0,451226
2022,8	0,036736	0,649400	0,001353	1,117538	0,268596	0,512214
2666,0	0,030803	0,638020	0,000991	1,125838	0,227518	0,601167
3191,0	0,026830	0,768294	0,000793	1,243695	0,200704	0,697596
3966,2	0,022054	0,901355	0,000587	1,379341	0,169203	0,785066
4542,8	0,019476	0,915915	0,000486	1,399589	0,149133	0,930224
5287,2	0,016665	1,026987	0,000386	1,508776	0,128601	0,976122
6351,2	0,013555	1,126755	0,000288	1,592881	0,105564	1,076610
7895,4	0,010377	1,227542	0,000199	1,714125	0,081532	1,186937
10521,4	0,007362	1,195622	0,000123	1,668186	0,059174	1,116228
15699,6	0,005015	0,958838	0,000068	1,464709	0,039887	0,985561
19635,4	0,004156	0,840542	0,000051	1,341001	0,033315	0,804780

Таблица 5: Результаты расчетов с усреднением по пяти сеткам в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

Заметного результата усреднение не дало - порядок сходимости и дальше колеблется.