

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

«Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский
университет)»

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Кафедра вычислительной физики

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)

Направленность(профиль) подготовки: Вычислительные технологии
математического моделирования

**Исследование компактных схем
повышенного порядка точности для
численного решения линейного
уравнения переноса на нерегулярных
сетках**
(бакалаврская работа)

Студент:

Цицварич Йован

Научный руководитель:

Беклемышева Катерина Алексеевна

Москва

2020

Аннотация.

Цели и задачи.

В данной работе ставится цель реализовать и исследовать сходимость компактных сеточно-характеристических схем для численного линейного уравнения переноса на нерегулярных треугольных сетках. Ожидается путем увеличения порядка интерполяционных полиномов для каждого треугольника сетки получить повышения порядка сходимости данной схемы. Для повышения порядка будут использоваться производные исходной функции, также соответствующие уравнению переноса. Основную проблему в реализации данной схемы составляет решение переопределенной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов интерполяционного полинома.

Полученные результаты.

Было использовано два подхода к решению системы линейных уравнений, но ни один из них не дал сходящегося порядка схемы, во всех численных экспериментах порядок колебался. Порядок был исследован на нескольких начальных импульсах разного вида, в том числе гладких и с разрывной производной. Были сделаны предположения причин колебания порядка.

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Введение | 4 |
| 1 Теоретические сведения. | 6 |
| 1.1 Уравнение переноса. | 6 |
| 1.2 Граничные условия. | 6 |
| 1.3 Сеточно-характеристический метод. | 6 |
| 1.4 Расчетная сетка. | 7 |
| 1.5 Определение точки пересечения характеристики с предыдущим временным слоем. | 8 |
| 1.6 Поиск треугольника. | 9 |
| 1.6.1 Оптимизация поиска. | 10 |
| 1.7 Интерполяция. | 10 |
| 1.7.1 Повышение порядка. | 11 |
| 1.8 Расчет порядка. | 14 |
| 2 Результаты численного эксперимента. | 14 |
| 2.1 Интерполяция полиномом первого порядка. | 14 |
| 2.2 Интерполяция полиномом второго порядка. | 21 |
| 3 Анализ результатов и вывод. | 31 |

Введение.

Актуальность темы.

Объект исследования.

В данной задаче мы занимаемся исследованием компактных схем повышенного порядка точности для численного решения линейного уравнения переноса на нерегулярных сетках. Уравнение переноса в однородной постановке имеет вид:

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad (1)$$

где константа λ представляет собой скорость переноса.

Значимость исследования.

Обзор литературы.

К уравнению переноса путем использования инвариантов Римана сводятся гиперболические системы уравнений [1]. Гиперболической системой уравнений описываются многие динамические процессы в механике твердого тела, акустике и др. [2]. Большое распространение получил сеточно-характеристический метод численного решения уравнения переноса, в [3] разобрано множество задач, для которых данный метод применим. Так как при измельчении сетки численное решение сходится к точному, то основной задачей является повышения порядка схем. Схемы повышенного порядка, которые были построены без расширения сеточного шаблона называют компактными [4]. Задача компактных сеточно-характеристических схем уже рассматривалась в [5], где изучалось трехмерное уравнение переноса с расщеплением по координатам и [6], где рассматривалось одномерное уравнение переноса. В данных работах для повышения порядка использовались производные исходной функции в узлах расчетной сетки. В данной работе рассматривается нерегулярная треугольная расчетная сетка, трехмерный случай требует больших вычислительных

затрат и был рассмотрен в [7]. На такой сетке наибольшее распространение получил метод конечных элементов [8]. Методы повышения порядка для такой сетки рассматривались в [9], [10]. Смысл метода рассматриваемого в данных работах заключается в обобщении интерполяционной конструкции Лагранжа на двумерный случай.

1 Теоретические сведения.

1.1 Уравнение переноса.

Уравнение переноса является уравнением в частных производных первого порядка, описывающего изменение величины в пространстве с течением времени. Мы будем заниматься однородным уравнением переноса. Для простоты будем рассматривать случай $\lambda > 0$.

1.2 Граничные условия.

В данной постановке мы рассматриваем двумерную задачу Коши с периодическими граничными условиями,

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0, & x \in [0,1], y \in [0,1], t > 0, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & x \in [0,1], y \in [0,1]. \end{cases} \quad (2)$$

Периодичность граничных условий предполагает замкнутость пространства по x , то есть при достижении правой границы $x = 1$ нашей области $[0, 1]$ происходит перемещение на левую границу $x = 0$ с сохранением значения функции и дальнейшим продолжением ее развития согласно решаемому уравнению. Аналитическим решением системы в такой постановке является функция:

$$u(x,y,t) = u(x - \lambda t, y), x \in [0,1], y \in [0,1], t > 0. \quad (3)$$

1.3 Сеточно-характеристический метод.

Классический подход к решению данной задачи предполагает использование разностных схем для аппроксимации частных производных и численного решения уравнения. В данной работе мы используем сеточно-характеристический подход к решению однородного уравнения переноса. Он заключается в сведении дифференциального уравнения первого порядка в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль кривой, называемой

характеристикой данного уравнения, такой что:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda. \quad (4)$$

Вдоль нее уравнение переноса принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Что равносильно:

$$\frac{du}{dt} = 0. \quad (6)$$

То есть вдоль характеристики решение исходного уравнения переноса сохраняется. Используемый нами подход основывается на этом методе – для нахождения значения на $n + 1$ – ом временном слое следует провести характеристику на n – ый слой по времени и перенести с этого временного слоя значение функции на $n + 1$ – ый.

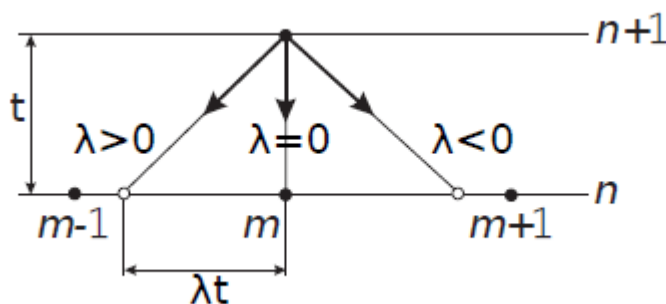


Рис. 1: Схема сеточно-характеристического метода в одномерном случае на регулярной прямоугольной сетке.

1.4 Расчетная сетка.

В данной работе рассматривается двумерная задача на нерегулярных треугольных сетках. Нерегулярная треугольная сетка - это разбиение плоскости на неравномерные треугольники. Такие сетки получили широкое применение

вместе методе конечных элементов. Их преимущество по сравнению с регулярными сетками заключается в их возможности покрывать комплексные формы, так как единственные накладываемые ограничения при их построении - это максимальная площадь треугольника и его минимальные угол.

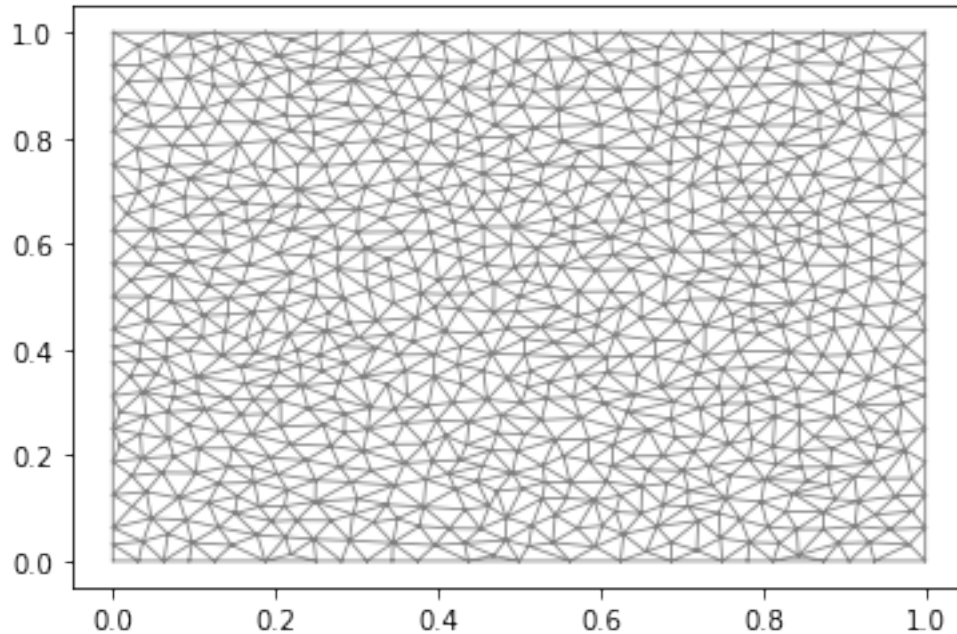


Рис. 2: Пример используемой расчетной сетки

1.5 Определение точки пересечения характеристики с предыдущим временным слоем.

В ходе расчета для каждой характеристики, выпущенной из точки на $n + 1$ — ом временном слое, по углу наклона, равному λ и заданному шагу τ по времени определяем координату пересечения характеристики с предыдущим временным слоем. Здесь и далее рассматриваем уравнение переноса по переменной x , так как для второй переменной все получается аналогичной последовательностью действий. Алгоритм поиска значения исходной функции u в некоторой точке $(x_{current}, y_{current})$, на новом $n + 1$ слое по времени состоит в следующем. Сначала необходимо определить координаты точки пересечения

характеристики с n — ым слоем

$$\begin{aligned} x_{intersection} &= x_{current} - \lambda\tau, \\ y_{intersection} &= y_{current}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отдельно стоит выделить случай выпадения точки за область исследования, то есть случай $x_{intersection} < x_{min}$, где $x_{min} = 0$ в нашей постановке. В следствие использования периодических граничных условия, мы сделаем замену

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{intersection} &= x_{max} - (x_{min} - x_{intersection}), \\ \tilde{y}_{intersection} &= y_{intersection}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $x_{max} = 1$ в нашей задаче.

1.6 Поиск треугольника.

После определения координаты пересечения характеристики и временного слоя предстоит определить треугольник, в который характеристика попала. Для этих целей воспользуемся методом известным как метод относительности. Данный метод заключается в том, что при заданной ориентации движения по вершинам треугольника, для каждой стороны вычисляем уравнение прямой и находим по какую сторону от него находится точка, в случае ориентации по часовой – для всех сторон точка будет справа, в случае ориентации против часовой стрелки - слева. Факт нахождения слева или справа определяется по знаку после подстановки координат точки в уравнение прямой.

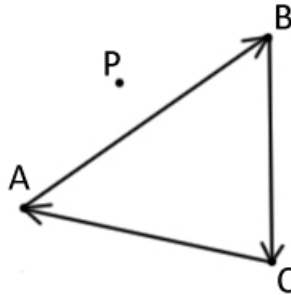


Рис. 3: Ориентация треугольника по часовой.

1.6.1 Оптимизация поиска.

При измельчении сетки количество треугольников быстро увеличивается и затраты на поиск возрастают. Для оптимизации, так как у нас постоянный шаг по времени τ и угол наклона характеристик λ , нам достаточно определить для каждой точки соответствующий ей на предыдущем слое треугольник всего один раз на первом шаге по времени и записать в кэш, далее просто обращаясь к нему по ключу. Так же используется грубый критерий принадлежности треугольнику - треугольник заключается в прямоугольник и по координатам вершин квадрата проводится проверка, попадает точек в данную область или нет. Такой подход помогает избежать многочисленных излишних расчетов и рассчитывать уравнение прямой только для малого количества ближайших треугольников.

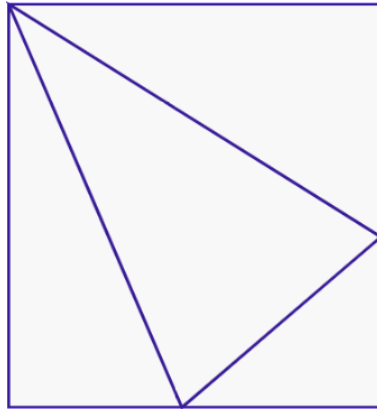


Рис. 4: Пример грубой прямоугольной области для треугольника.

1.7 Интерполяция.

После определения конкретного треугольника на предыдущем слое по времени, в который попала наша характеристика, нам предстоит определить значение функции в точке пересечения. Для этих целей воспользуемся интерполяционным полиномом первого порядка вида:

$$F(x,y) = ax + by + c, \text{ где } a, b, c \in R \quad (9)$$

Коэффициенты будем искать по значениям функции в вершинах данного треугольника. Имеем систему линейных уравнений:

$$Ax = f, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ - координаты вершин исследуемого треугольника, а f_1, f_2, f_3 - значения функции u^n в соответствующих вершинах. Данная система совместна для любого треугольника, а следовательно, имеет единственное решение. Это свойство следует из того, что

$$\det A = x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2, \quad (11)$$

данное выражение не может принимать нулевое значение, так как оно представляет собой подстановку координат вершины (x_1, y_1) в уравнение прямой, связывающей вершины (x_2, y_2) и (x_3, y_3) . Равенство нулю означало бы, что точка (x_1, y_1) принадлежит прямой, что противоречит тому, что все три точки являются вершинами одного треугольника. Таким образом, интерполированное значение функции в точке пересечения

$$u_{interpolated}^n = F(x_{intersection}, y_{intersection}). \quad (12)$$

Данное значение будет вдоль характеристики перенесено на $n + 1$ слой по времени в точку $(x_{current}, y_{current})$, то есть $u_i^{n+1} = u_{interpolated}^n$. По такому алгоритму, проходя по всем точкам сетки, получим значение исходной функции на $n + 1$ слое по времени. Данный метод имеет первый порядок сходимости.

1.7.1 Повышение порядка.

Для сеточно-характеристического метода возможно улучшение, если принять в рассмотрение производные исходной функции u и воспользоваться компактной схемой для повышения порядка. Введем функцию производной по

$x : \nu(x, y, t) = u_x(x, y, t)$. Здесь и далее рассматривается производная по x , случай производной по y полностью аналогичен данному. Продифференцируем уравнение переноса для исходной функции (1) по x и получим для функции производной $\nu(x, y, t)$ аналогичное уравнение:

$$\nu_t + \lambda \nu_x = 0 \quad (13)$$

Таким образом, весь описанный ранее алгоритм с интерполяционным полиномом первой степени можно использовать для решения уравнения переноса производных нашей исходной функции. В данном случае меняется подход к интерполяции значения исходной функции на предыдущем слое по времени в точке $(x_{intersection}, y_{intersection})$. Так как теперь в каждой вершине треугольника помимо значения исходной функции хранятся значения ее градиента. В таком случае для интерполяционного полинома второго порядка ,

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g, \\ a, b, c, d, e, g &\in R. \end{aligned} \quad (14)$$

Для коэффициентов a, b, c, d, e, g имеем систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + g = f_1 \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + g = f_2 \\ ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + g = f_3 \\ 2ax_1 + by_1 + d = f'_{1x} \\ 2ax_2 + by_2 + d = f'_{2x} \\ 2ax_3 + by_3 + d = f'_{3x} \\ bx_1 + 2cy_1 + e = f'_{1y} \\ bx_2 + 2cy_2 + e = f'_{2y} \\ bx_3 + 2cy_3 + e = f'_{3y} \end{array} \right. , \quad (15)$$

где f'_{ix}, f'_{iy} , $i = 1, 2, 3$ – значения производных исходной функции в соответствующих вершинах рассматриваемого треугольника. Первые три уравнения соответствуют значениям функции в вершинах, следующие три значениям

производной по переменной x и последние три производной по переменной y . Ранг матрицы данной системы линейных уравнений меньше количества уравнений, следовательно система переопределена и не существует точного решения. Существуют два подхода к решению данной проблемы. Первый – из 9 выбрать 6 необходимых уравнений и, в случае если система совместна, решить ее, в обратном случае взять другие уравнения, второй – чтобы не терять данные о производных функции, можно попытаться решить ее методом наименьших квадратов. Идея данного метода заключается в минимизации нормы разности $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$, где A – матрица системы линейных уравнений, \vec{x} – вектор искомых коэффициентов интерполяционного полинома и \vec{b} – вектор правых частей нашей системы линейных уравнений. Основным преимуществом такого подхода является гарантированное решение системы линейных уравнений, недостатком же является ограничение на точность накладываемое таким методом, которое может отразиться на точности решения и порядке сходимости. Первый же метод в свою очередь не гарантирует нахождения решения и является намного более ресурсоемким, в худшем случае, при условии, что уравнения на значения исходной функции будут постоянно использоваться в системе, а комбинироваться только уравнения на производные, имеем 20 возможных комбинации, при рассмотрении производных более высокого порядка это число заметно вырастет¹. В тех случаях, когда ни одна из комбинации уравнений не давала совместной системы, происходит переключение на полином первого порядка, который считается как для исходной функции, так и для ее производных. В данной работе будет рассматриваться второй подход.

¹В случае использования вторых производных для нахождения интерполяционного полинома третьей степени будет существовать 3432 возможных комбинации.

1.8 Расчет порядка.

В работе проводилось численное исследование порядка сходимости по трем нормам L_1 , L_2 и L_∞ , которые задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_i \frac{|u_i^n - U_i^n|}{N}, \\ L_2 &= \sqrt{\sum_i \frac{(u_i^n - U_i^n)^2}{N^2}}, \\ L_\infty &= \max |u_i^n - U_i^n|, \end{aligned} \tag{16}$$

где N – число точек расчетной сетки, U – проекция аналитического решения на нашу сетку, а u_i^n – значения функции в узлах сетки, полученные в ходе численного расчета с использованием исследуемой схемы. Для расчета порядка сходимости использовались следующие формулы:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\ln \frac{L_1(N_2)}{L_1(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \\ p_2 &= \frac{\ln \frac{L_2(N_2)}{L_2(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \\ p_\infty &= \frac{\ln \frac{L_\infty(N_2)}{L_\infty(N_1)}}{\ln \frac{N_1}{N_2}}, \end{aligned} \tag{17}$$

где N_1 и N_2 – число узлов на двух расчетных сетках, при чем $N_1 < N_2$, а $L_1(N_i)$, $L_2(N_i)$ и $L_\infty(N_i)$, $i = 1, 2$ – значения норм на соответствующих сетках.

2 Результаты численного эксперимента.

2.1 Интерполяция полиномом первого порядка.

Расчеты проводились для разных типов начального импульса со значением $\lambda=1$. Исследуем порядок сходимости нашей схемы при использовании интерполяционных полиномов первого порядка, для которых как было показано ранее всегда существует единственное решение. Используем следующий

вид начального импульса:

$$u(x,y,0) = \sin^4(\pi x)\sin^4(\pi y). \quad (18)$$

В таблицах 1, 2 и 3 приведены результаты расчетов для разных сеток в

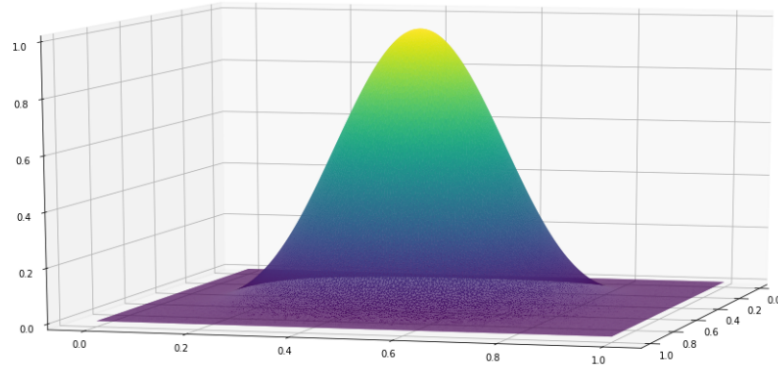


Рис. 5: Вид функции (18) в начальный момент времени.

момент времени $T=1$ и $T=3$ при шаге $\tau = 0.01$ и $T=3$ при шаге $\tau = 0.001$ соответственно.

Таблица 1: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|-------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| 280 | 0,087239 | - | 0,008104 | - | 0,561830 | - |
| 336 | 0,084176 | 0,196008 | 0,007179 | 0,664507 | 0,552675 | 0,090111 |
| 420 | 0,078477 | 0,314160 | 0,006050 | 0,766924 | 0,507142 | 0,385307 |
| 546 | 0,071616 | 0,348732 | 0,004816 | 0,869755 | 0,467492 | 0,310291 |
| 833 | 0,060154 | 0,412874 | 0,003341 | 0,865827 | 0,406355 | 0,331795 |
| 1620 | 0,042736 | 0,513982 | 0,001743 | 0,978381 | 0,299077 | 0,460837 |
| 2012 | 0,037003 | 0,664728 | 0,001356 | 1,156000 | 0,269926 | 0,473252 |
| 2691 | 0,031019 | 0,606635 | 0,000990 | 1,082734 | 0,227090 | 0,594256 |
| 3164 | 0,026893 | 0,881299 | 0,000791 | 1,385126 | 0,198694 | 0,824954 |
| 3959 | 0,022135 | 0,868753 | 0,000594 | 1,277442 | 0,174134 | 0,588620 |
| 4553 | 0,019305 | 0,978573 | 0,000483 | 1,478913 | 0,149670 | 1,082966 |
| 5266 | 0,016754 | 0,974120 | 0,000388 | 1,505377 | 0,129006 | 1,021248 |
| 6347 | 0,013513 | 1,151347 | 0,000287 | 1,613783 | 0,104003 | 1,153835 |
| 7905 | 0,010494 | 1,152088 | 0,000200 | 1,640325 | 0,083046 | 1,025142 |
| 10478 | 0,007399 | 1,240195 | 0,000124 | 1,713776 | 0,059363 | 1,191396 |
| 15686 | 0,005023 | 0,959898 | 6,87E-05 | 1,455265 | 0,040293 | 0,960370 |
| 19665 | 0,004151 | 0,843547 | 5,09E-05 | 1,327608 | 0,033393 | 0,830886 |
| 31318 | 0,002681 | 0,939637 | 2,60E-05 | 1,442039 | 0,021689 | 0,927303 |

Таблица 2: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) в момент времени $T=3$ при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|-------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| 280 | 0,124177 | - | 0,011289 | - | 0,758192 | - |
| 336 | 0,123780 | 0,017545 | 0,010378 | 0,461467 | 0,762095 | -0,028158 |
| 420 | 0,122815 | 0,035079 | 0,009206 | 0,537115 | 0,740077 | 0,131382 |
| 546 | 0,119653 | 0,099439 | 0,007757 | 0,653016 | 0,710606 | 0,154882 |
| 833 | 0,110048 | 0,198085 | 0,005850 | 0,667990 | 0,664275 | 0,159611 |
| 1620 | 0,089724 | 0,306971 | 0,003462 | 0,788643 | 0,566198 | 0,240176 |
| 2012 | 0,081123 | 0,465016 | 0,002813 | 0,957313 | 0,525163 | 0,347180 |
| 2691 | 0,071354 | 0,441255 | 0,002160 | 0,908072 | 0,469398 | 0,386054 |
| 3164 | 0,063759 | 0,695066 | 0,001785 | 1,179794 | 0,428041 | 0,569599 |
| 3959 | 0,054593 | 0,692393 | 0,001398 | 1,089100 | 0,388150 | 0,436428 |
| 4553 | 0,048725 | 0,813379 | 0,001169 | 1,279554 | 0,349284 | 0,754732 |
| 5266 | 0,043212 | 0,825343 | 0,000966 | 1,310050 | 0,311220 | 0,793103 |
| 6347 | 0,035855 | 0,999631 | 0,000740 | 1,431530 | 0,262714 | 0,907470 |
| 7905 | 0,028516 | 1,043247 | 0,000532 | 1,500048 | 0,215465 | 0,903214 |
| 10478 | 0,020668 | 1,142375 | 0,000339 | 1,595503 | 0,159360 | 1,070431 |
| 15686 | 0,014362 | 0,902026 | 1,94E-04 | 1,387801 | 0,112091 | 0,872032 |
| 19665 | 0,011975 | 0,804137 | 1,45E-04 | 1,281201 | 0,094143 | 0,771854 |

Таблица 3: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) в момент времени $T=3$ при $\tau=0.001$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|-------|----------|-----------|----------|----------|------------|------------|
| 280 | 0,125539 | - | 0,011425 | - | 0,765283 | - |
| 336 | 0,125780 | -0,010523 | 0,010528 | 0,448274 | 0,768981 | -0,026442 |
| 420 | 0,125973 | -0,006868 | 0,009415 | 0,500758 | 0,751386 | 0,103731 |
| 546 | 0,124458 | 0,046105 | 0,008043 | 0,600412 | 0,728038 | 0,120314 |
| 833 | 0,118458 | 0,116971 | 0,006262 | 0,592555 | 0,696066 | 0,106315 |
| 1620 | 0,105671 | 0,171739 | 0,004021 | 0,666080 | 0,629699 | 0,150647 |
| 2012 | 0,099776 | 0,264908 | 0,003414 | 0,754396 | 0,602648 | 0,202624 |
| 2691 | 0,094210 | 0,197388 | 0,002806 | 0,674784 | 0,571032 | 0,185319 |
| 3164 | 0,089194 | 0,337904 | 0,002447 | 0,844367 | 0,542738 | 0,313839 |
| 3959 | 0,083494 | 0,294604 | 0,002071 | 0,745108 | 0,523187 | 0,163669 |
| 4553 | 0,080038 | 0,302422 | 0,001854 | 0,791496 | 0,501968 | 0,296169 |
| 5266 | 0,076739 | 0,289277 | 0,001655 | 0,778807 | 0,482320 | 0,274454 |
| 6347 | 0,072495 | 0,304746 | 0,001433 | 0,772534 | 0,456291 | 0,297131 |
| 7905 | 0,066935 | 0,363517 | 0,001192 | 0,837687 | 0,432985 | 0,238836 |
| 10478 | 0,06037 | 0,366336 | 0,000940 | 0,843923 | 0,395840 | 0,318304 |
| 15686 | 0,051561 | 0,390900 | 6,64E-04 | 0,861993 | 0,345194 | 0,339301 |
| 19665 | 0,046894 | 0,419662 | 5,42E-04 | 0,900892 | 0,317237 | 0,373586 |

В полученных результатах можно заметить, что порядок сходимости сильно колеблется, одна из предполагаемых причин данного результата может быть особенность треугольной сетки. В следующих таблицах приведены результаты расчетов в момент времени $T=1$ при шаге $\tau = 0.01$, но проводилось усреднение результатов - в первом случае по трем близким сеткам, во втором - по пяти.

Таблица 4: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) с усреднением по трем сеткам в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| 280,67 | 0,087004 | - | 0,008119 | - | 0,564257 | - |
| 337,67 | 0,084931 | 0,130451 | 0,007203 | 0,647213 | 0,542017 | 0,217494 |
| 417,00 | 0,078696 | 0,361327 | 0,006117 | 0,774337 | 0,509018 | 0,297659 |
| 552,00 | 0,070055 | 0,414698 | 0,004726 | 0,919789 | 0,462416 | 0,342354 |
| 831,00 | 0,060084 | 0,375316 | 0,003321 | 0,862426 | 0,405557 | 0,320727 |
| 1620,00 | 0,042505 | 0,518484 | 0,001742 | 0,967007 | 0,301624 | 0,443532 |
| 2017,67 | 0,036841 | 0,651520 | 0,001358 | 1,133143 | 0,268957 | 0,522194 |
| 2673,67 | 0,030867 | 0,628502 | 0,000991 | 1,120859 | 0,228014 | 0,586636 |
| 3189,33 | 0,026857 | 0,789079 | 0,000792 | 1,269254 | 0,200701 | 0,723468 |
| 4542,33 | 0,019470 | 0,909602 | 0,000486 | 1,379604 | 0,149425 | 0,834277 |
| 5282,33 | 0,016702 | 1,015741 | 0,000386 | 1,524194 | 0,128056 | 1,022515 |
| 6351,00 | 0,013538 | 1,140012 | 0,000288 | 1,598672 | 0,105007 | 1,077059 |
| 7905,00 | 0,010416 | 1,197904 | 0,000199 | 1,677637 | 0,082589 | 1,097166 |
| 10517,33 | 0,007376 | 1,208484 | 0,000123 | 1,679136 | 0,059359 | 1,156673 |
| 15710,33 | 0,005030 | 0,954019 | 0,000069 | 1,461708 | 0,039952 | 0,986644 |
| 19637,67 | 0,004160 | 0,851554 | 0,000051 | 1,346226 | 0,033361 | 0,807956 |
| 19635,4 | 0,004156 | 0,840542 | 0,000051 | 1,341001 | 0,033315 | 0,804780 |

Таблица 5: Результаты расчетов с начальным импульсом вида (18) с усреднением по пяти сеткам в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|---------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| 279,6 | 0,087344 | - | 0,008184 | - | 0,564051 | - |
| 337,8 | 0,084591 | 0,169375 | 0,007184 | 0,689360 | 0,535931 | 0,270446 |
| 416,4 | 0,079015 | 0,325980 | 0,006154 | 0,739578 | 0,510326 | 0,234019 |
| 551,6 | 0,070695 | 0,395698 | 0,004773 | 0,903919 | 0,464915 | 0,331451 |
| 830,0 | 0,059773 | 0,410718 | 0,003318 | 0,890034 | 0,406939 | 0,325963 |
| 1621,2 | 0,042415 | 0,512414 | 0,001732 | 0,970793 | 0,300838 | 0,451226 |
| 2022,8 | 0,036736 | 0,649400 | 0,001353 | 1,117538 | 0,268596 | 0,512214 |
| 2666,0 | 0,030803 | 0,638020 | 0,000991 | 1,125838 | 0,227518 | 0,601167 |
| 3191,0 | 0,026830 | 0,768294 | 0,000793 | 1,243695 | 0,200704 | 0,697596 |
| 3966,2 | 0,022054 | 0,901355 | 0,000587 | 1,379341 | 0,169203 | 0,785066 |
| 4542,8 | 0,019476 | 0,915915 | 0,000486 | 1,399589 | 0,149133 | 0,930224 |
| 5287,2 | 0,016665 | 1,026987 | 0,000386 | 1,508776 | 0,128601 | 0,976122 |
| 6351,2 | 0,013555 | 1,126755 | 0,000288 | 1,592881 | 0,105564 | 1,076610 |
| 7895,4 | 0,010377 | 1,227542 | 0,000199 | 1,714125 | 0,081532 | 1,186937 |
| 10521,4 | 0,007362 | 1,195622 | 0,000123 | 1,668186 | 0,059174 | 1,116228 |
| 15699,6 | 0,005015 | 0,958838 | 0,000068 | 1,464709 | 0,039887 | 0,985561 |
| 19635,4 | 0,004156 | 0,840542 | 0,000051 | 1,341001 | 0,033315 | 0,804780 |

Заметного результата усреднение не дало - порядок сходимости и дальше колеблется. На рисунке 6 можно увидеть вид численного решения на разных сетках.

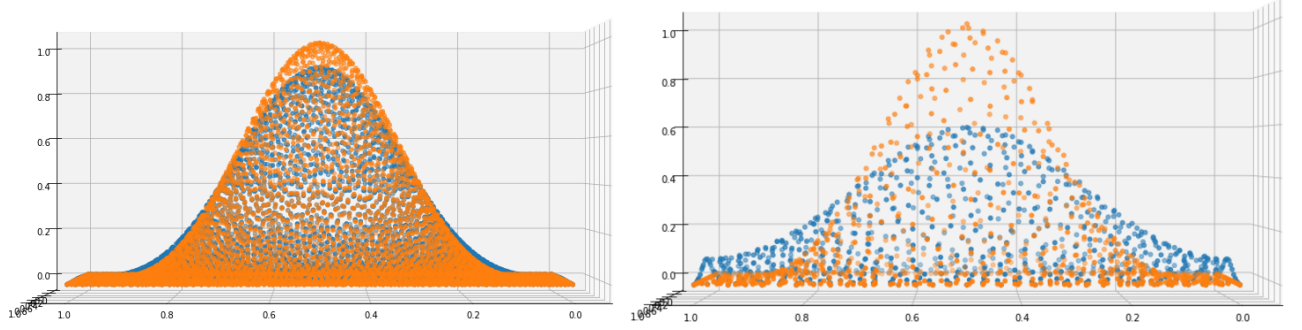


Рис. 6: Результаты расчета на сетках с разным числом расчетных узлов. Слева - 6347 узлов, справа - 833. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

2.2 Интерполяция полиномом второго порядка.

Далее проведем расчеты с использованием производных для повышения порядка полинома с начальным импульсом вида:

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \sin^4(\pi x)\sin^4(\pi y), \\ u_x(x,y,0) = 4\pi\sin^3(\pi x)\sin^4(\pi y)\cos(\pi x), \\ u_y(x,y,0) = 4\pi\sin^4(\pi x)\sin^3(\pi y)\cos(\pi y). \end{cases} \quad (19)$$

На рисунке 7 представлены результаты численных расчетов в сравнении с проекцией аналитического решения на расчетную сетку. В таблице 7 представлены усредненные расчеты по трем сеткам с близким количеством узлов.

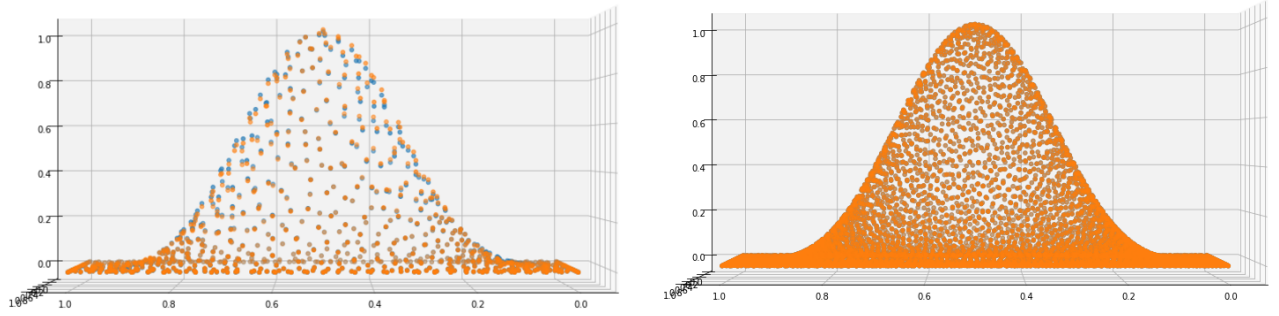


Рис. 7: Результаты расчета с полиномом второго порядка на сетках с разным числом расчетных узлов. Слева - 833 узлов, справа - 6347. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Таблица 6: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (19) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|-------|----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| 280 | 0,014964 | - | 1,512E-03 | - | 0,097890 | - |
| 336 | 0,012229 | 1,106800 | 1,138E-03 | 1,562403 | 0,083861 | 0,848404 |
| 420 | 0,009685 | 1,045366 | 7,805E-04 | 1,688373 | 0,059121 | 1,566609 |
| 546 | 0,006429 | 1,561802 | 4,697E-04 | 1,935249 | 0,041508 | 1,348090 |
| 833 | 0,003259 | 1,608495 | 1,936E-04 | 2,098861 | 0,022847 | 1,413438 |
| 1620 | 0,001042 | 1,713681 | 4,271E-05 | 2,271903 | 0,006554 | 1,877473 |
| 2012 | 0,000630 | 2,321321 | 2,381E-05 | 2,696059 | 0,004532 | 1,702130 |
| 2691 | 0,000320 | 2,335319 | 9,757E-06 | 3,068269 | 0,002330 | 2,288513 |
| 3164 | 0,000182 | 3,465536 | 5,015E-06 | 4,110660 | 0,001360 | 3,322698 |
| 3959 | 0,000111 | 2,202140 | 2,625E-06 | 2,887269 | 0,000675 | 3,127833 |
| 4553 | 0,000108 | 0,196558 | 2,383E-06 | 0,693333 | 0,000633 | 0,457131 |
| 5266 | 0,000112 | -0,229490 | 2,428E-06 | -0,130072 | 0,000750 | -1,168079 |
| 6347 | 0,000092 | 1,062375 | 1,839E-06 | 1,489868 | 0,000574 | 1,436844 |
| 7905 | 0,000062 | 1,788875 | 1,131E-06 | 2,214683 | 0,000414 | 1,488286 |
| 10478 | 0,000021 | 3,900467 | 3,119E-07 | 4,570369 | 0,000148 | 3,655011 |
| 15686 | 0,000009 | 2,053784 | 1,147E-07 | 2,479577 | 0,000071 | 1,821542 |
| 19665 | 0,000006 | 1,621655 | 6,890E-08 | 2,254299 | 0,000053 | 1,315016 |

Таблица 7: Результаты усреднения расчетов по трем сеткам с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (19) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|----------|----------|-----------|-----------|----------|------------|------------|
| 280,6667 | 0,014778 | - | 1,519E-03 | - | 0,099051 | - |
| 337,6667 | 0,012131 | 1,067443 | 1,114E-03 | 1,676752 | 0,078014 | 1,291294 |
| 417 | 0,009278 | 1,270688 | 7,566E-04 | 1,833995 | 0,056906 | 1,494970 |
| 552 | 0,006295 | 1,383038 | 4,524E-04 | 1,834084 | 0,039655 | 1,287842 |
| 831 | 0,003358 | 1,536348 | 1,966E-04 | 2,037467 | 0,022470 | 1,388535 |
| 1620 | 0,001052 | 1,738829 | 4,362E-05 | 2,255085 | 0,007042 | 1,738115 |
| 2017,667 | 0,000626 | 2,363366 | 2,309E-05 | 2,897314 | 0,004329 | 2,216993 |
| 2673,667 | 0,000315 | 2,441933 | 1,002E-05 | 2,965788 | 0,002418 | 2,069100 |
| 3189,333 | 0,000175 | 3,325044 | 4,829E-06 | 4,140053 | 0,001234 | 3,813001 |
| 3959,333 | 0,000110 | 2,145818 | 2,565E-06 | 2,925749 | 0,000655 | 2,927741 |
| 4542,333 | 0,000107 | 0,182882 | 2,390E-06 | 0,513785 | 0,000663 | -0,091470 |
| 5282,333 | 0,000110 | -0,181310 | 2,381E-06 | 0,023717 | 0,000711 | -0,461124 |
| 6351 | 0,000093 | 0,923076 | 1,867E-06 | 1,321988 | 0,000600 | 0,918882 |
| 7905 | 0,000061 | 1,897085 | 1,113E-06 | 2,363004 | 0,000408 | 1,765003 |
| 10517,33 | 0,000019 | 4,154734 | 2,863E-07 | 4,754753 | 0,000138 | 3,804645 |
| 15710,33 | 0,000009 | 1,787046 | 1,158E-07 | 2,254658 | 0,000070 | 1,668703 |
| 19637,67 | 0,000006 | 1,576792 | 7,230E-08 | 2,112624 | 0,000055 | 1,136076 |

Далее рассмотрим начальный импульс следующего вида:

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \begin{cases} e^{(-\frac{\log(2)}{0.0009}((x-0.5)^2+(y-0.5)^2))}, & x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\ u_x(x,y,0) = \begin{cases} -\frac{(2\log(2))(x-0.5)}{0.0009}e^{(-\frac{\log(2)}{0.0009}((x-0.5)^2+(y-0.5)^2))}, & x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\ u_y(x,y,0) = \begin{cases} -\frac{(2\log(2))(y-0.5)}{0.0009}e^{(-\frac{\log(2)}{0.0009}((x-0.5)^2+(y-0.5)^2))}, & x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, & \text{else} \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

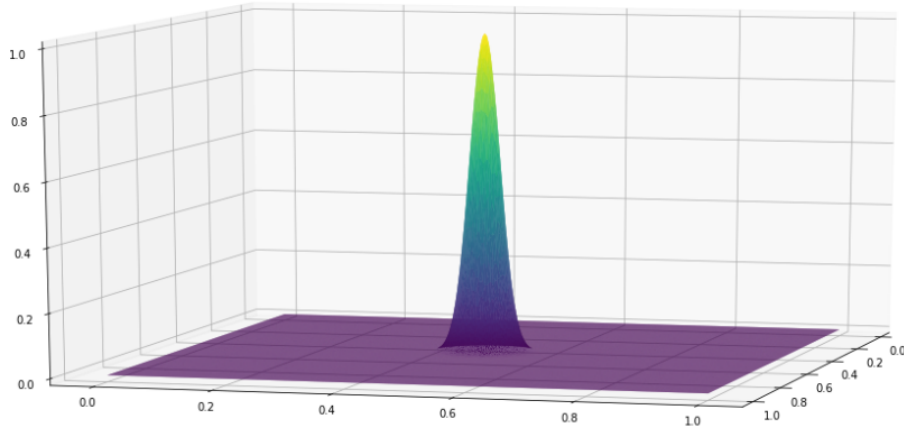


Рис. 8: Вид функции (20) в начальный момент времени.

Таблица 8: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (20) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|-------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| 2012 | 0,002626 | - | 0,000443 | - | 0,529562 | - |
| 2691 | 0,002088 | 0,788716 | 0,000318 | 1,144763 | 0,453193 | 0,535561 |
| 3164 | 0,001693 | 1,294011 | 0,000255 | 1,346539 | 0,388164 | 0,956554 |
| 3959 | 0,001297 | 1,187648 | 0,000169 | 1,834000 | 0,32036 | 0,856473 |
| 4553 | 0,001026 | 1,676500 | 0,000134 | 1,665734 | 0,279417 | 0,978153 |
| 5266 | 0,000880 | 1,054792 | 0,000109 | 1,451264 | 0,236768 | 1,138429 |
| 6347 | 0,000752 | 0,840618 | 8,51E-05 | 1,308174 | 0,178367 | 1,516991 |
| 7905 | 0,000516 | 1,721805 | 5,48E-05 | 2,000839 | 0,141398 | 1,058074 |
| 10478 | 0,000239 | 2,722528 | 2,34E-05 | 3,018906 | 0,079533 | 2,042043 |
| 15686 | 0,000128 | 1,543224 | 1,10E-05 | 1,867677 | 0,044897 | 1,417150 |
| 19665 | 8,79E-05 | 1,676751 | 6,57E-06 | 2,290663 | 0,029539 | 1,851787 |
| 22380 | 6,65E-05 | 2,157502 | 4,80E-06 | 2,425879 | 0,024512 | 1,442702 |
| 26174 | 4,95E-05 | 1,880933 | 3,21E-06 | 2,575748 | 0,019008 | 1,623802 |

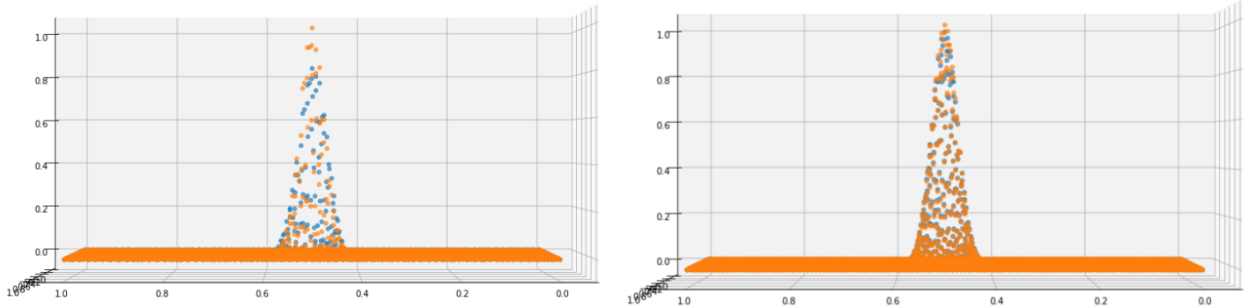


Рис. 9: Результаты расчета на сетках с разным числом расчетных узлов с начальным импульсом вида (20). Слева - 6347 узлов, справа - 19665. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Далее проведем расчеты с начальным импульсом имеющим разрывную

производную. Первый импульс задается следующей формулой:

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \begin{cases} (1 - |10x - 5|)(1 - |10y - 5|), x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \\ u_x(x,y,0) = \begin{cases} -10 \operatorname{sign}(10x - 5)(1 - |10y - 5|), x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \\ u_y(x,y,0) = \begin{cases} -10 \operatorname{sign}(10y - 5)(1 - |10x - 5|), x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \end{cases} \quad (21)$$

В таблице 9 представлены результаты расчетов.

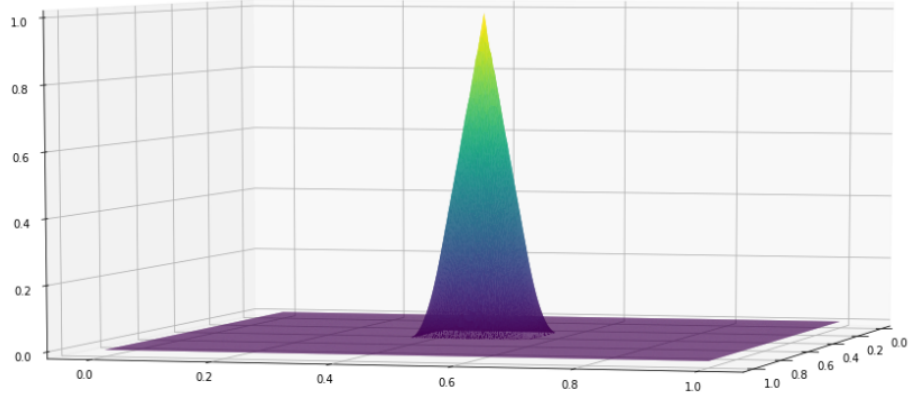


Рис. 10: Вид функции (21) в начальный момент времени.

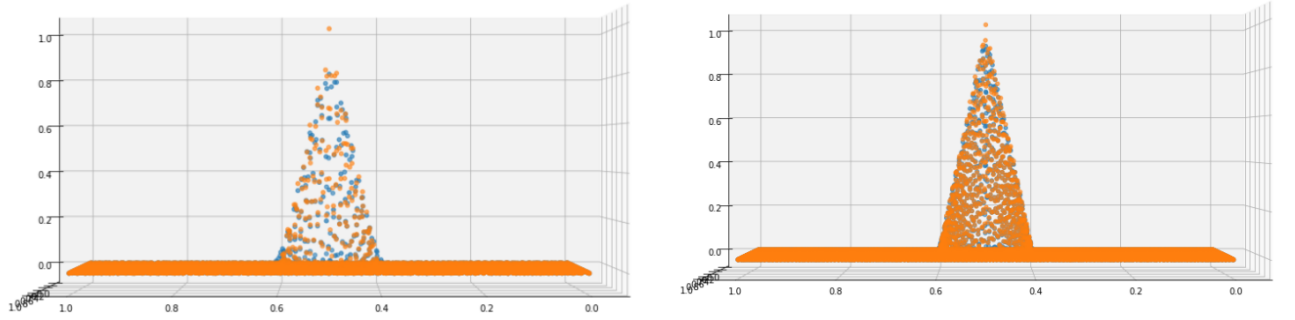


Рис. 11: Результаты расчета на сетках с разным числом расчетных узлов с начальным импульсом вида (21). Слева - 5266 узлов, справа - 22380. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Таблица 9: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (21) в момент времени T=1 при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|-------|----------|----------|------------|----------|------------|------------|
| 1620 | 0,003061 | - | 0,00038899 | - | 0,337755 | - |
| 2012 | 0,002208 | 1,507353 | 0,000260 | 1,863533 | 0,316565 | 0,298981 |
| 2691 | 0,001478 | 1,380171 | 0,000168 | 1,500692 | 0,276830 | 0,461259 |
| 3164 | 0,001188 | 1,352051 | 0,000134 | 1,409867 | 0,254661 | 0,515495 |
| 3959 | 0,000981 | 0,852915 | 0,000093 | 1,603377 | 0,221722 | 0,617904 |
| 4553 | 0,000881 | 0,766639 | 0,000080 | 1,117249 | 0,208590 | 0,436744 |
| 5266 | 0,000825 | 0,455388 | 0,000067 | 1,174162 | 0,189846 | 0,647197 |
| 6347 | 0,000747 | 0,531459 | 5,74E-05 | 0,849228 | 0,173855 | 0,471265 |
| 7905 | 0,000578 | 1,168760 | 4,10E-05 | 1,533108 | 0,158116 | 0,432303 |
| 10478 | 0,000393 | 1,367132 | 2,55E-05 | 1,688809 | 0,124131 | 0,858773 |
| 15686 | 0,000277 | 0,865455 | 1,57E-05 | 1,194628 | 0,110635 | 0,285264 |
| 19665 | 2,33E-04 | 0,770631 | 1,18E-05 | 1,283464 | 0,093044 | 0,765994 |
| 22380 | 2,05E-04 | 0,971917 | 1,01E-05 | 1,202706 | 0,092711 | 0,027715 |
| 26174 | 1,81E-04 | 0,824269 | 8,18E-06 | 1,332931 | 0,084930 | 0,559765 |

Далее рассмотрим начальный импульс следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,y,0) = \begin{cases} \sqrt{(1-100(x-0.5)^2)(1-100(y-0.5)^2)}, x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \\ u_x(x,y,0) = \begin{cases} \frac{-100(-0.5+x)}{\sqrt{-24+100x-100x^2}} \sqrt{1-100(y-0.5)^2}, x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \\ u_y(x,y,0) = \begin{cases} \frac{-100(-0.5+y)}{\sqrt{-24+100y-100y^2}} \sqrt{1-100(x-0.5)^2}, x, y \in [0.4, 0.6], \\ 0, else \end{cases} \end{array} \right. \quad (22)$$

Его график имеет следующий вид.

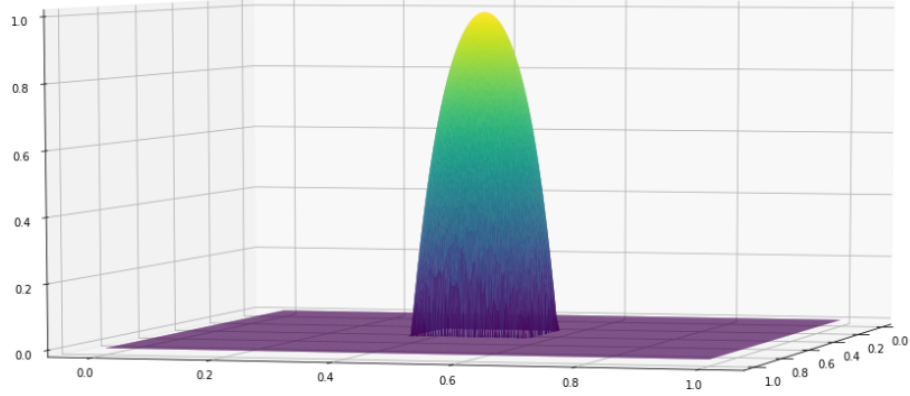


Рис. 12: Вид функции (22) в начальный момент времени.

Таблица 10: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (22) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|-------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| 2012 | 0,006143 | - | 0,000550 | - | 0,278733 | - |
| 2691 | 0,005035 | 0,683681 | 0,000423 | 0,900226 | 0,247621 | 0,407030 |
| 3164 | 0,004513 | 0,676276 | 0,000353 | 1,130162 | 0,213365 | 0,919529 |
| 3959 | 0,003701 | 0,885441 | 0,000272 | 1,154586 | 0,219003 | -0,116358 |
| 4553 | 0,003481 | 0,437916 | 0,000247 | 0,690894 | 0,226536 | -0,241927 |
| 5266 | 0,003039 | 0,931985 | 0,000201 | 1,436787 | 0,202478 | 0,771713 |
| 6347 | 0,002739 | 0,556962 | 1,73E-04 | 0,787130 | 0,211663 | -0,237605 |
| 7905 | 0,002205 | 0,988705 | 1,33E-04 | 1,189495 | 0,212489 | -0,017744 |
| 10478 | 0,001703 | 0,915976 | 9,71E-05 | 1,125756 | 0,164233 | 0,914197 |
| 15686 | 0,001379 | 0,523247 | 6,95E-05 | 0,828312 | 0,158915 | 0,081578 |
| 19665 | 1,13E-03 | 0,880674 | 5,41E-05 | 1,113100 | 0,146964 | 0,345841 |
| 22380 | 1,00E-03 | 0,920344 | 4,52E-05 | 1,389057 | 0,131236 | 0,875240 |
| 26174 | 9,18E-04 | 0,564304 | 3,98E-05 | 0,806586 | 0,132839 | -0,077528 |

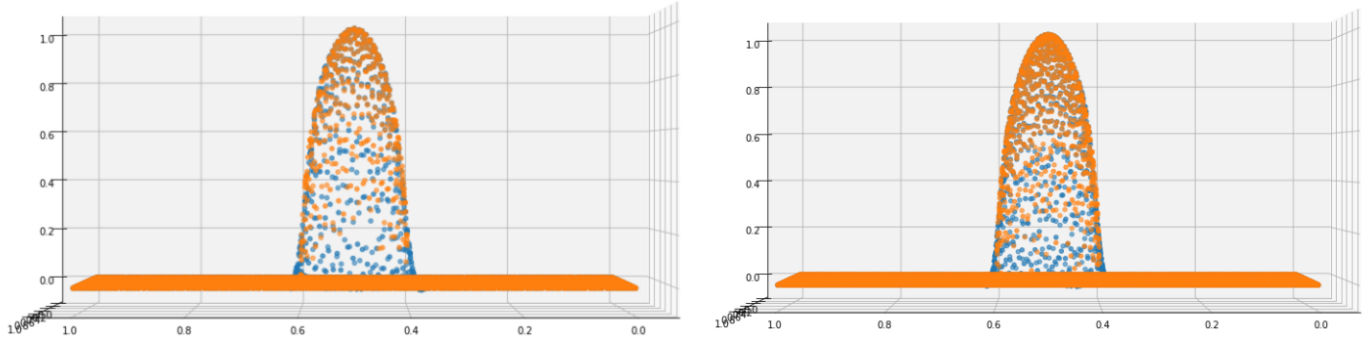


Рис. 13: Результаты расчета на сетках с разным числом расчетных узлов с начальным импульсом вида (21). Слева - 10478 узлов, справа - 9665. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Для сравнения приведем пример расчетов с начальным импульсом вида (19), но переопределенная система линейных уравнений для нахождения коэффициентов интерполяционного полинома будет решаться не методом наименьших квадратов, а отбрасыванием лишних уравнений и перебором возможных комбинаций. Накладывалось ограничение на норму градиента и на значение функции - оно должно быть меньше либо равно максимуму в вершинах треугольника и больше либо равно минимуму, в противном случае происходит переключение на полином первого порядка.

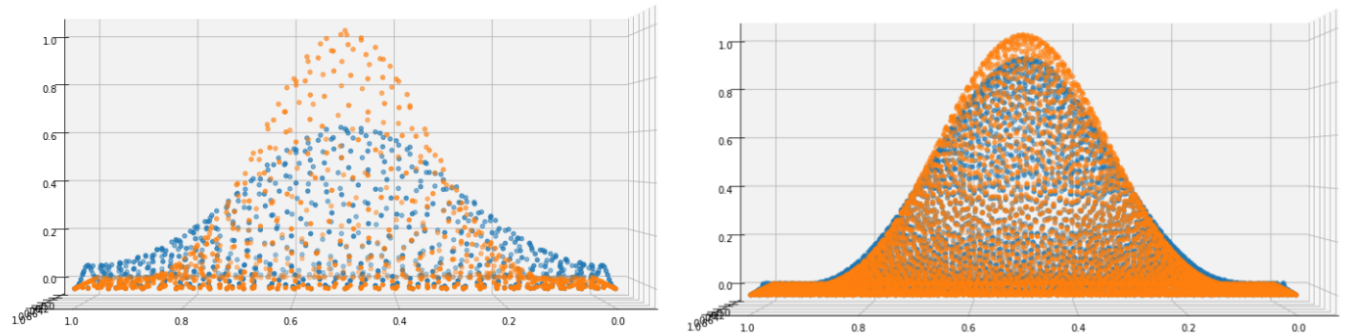


Рис. 14: Результаты расчета с полиномом второго порядка на сетках с разным числом расчетных узлов. Слева - 833 узлов, справа - 6347. Синим изображено численное решение, оранжевым аналитическое в момент времени $T=1$ при шаге $\tau=0.01$.

Таблица 11: Результаты расчетов с полиномом второго порядка с начальным импульсом вида (19) в момент времени $T=1$ при $\tau=0.01$. Решение при помощи комбинации.

| N | L_1 | p_1 | L_2 | p_2 | L_∞ | p_∞ |
|-------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|
| 280 | 0,081669 | - | 0,007856 | - | 0,559194 | - |
| 336 | 0,080034 | 0,110917 | 0,006982 | 0,646476 | 0,529461 | 0,299676 |
| 420 | 0,074413 | 0,326353 | 0,005915 | 0,743002 | 0,496209 | 0,290671 |
| 546 | 0,067014 | 0,399157 | 0,004631 | 0,932944 | 0,451632 | 0,358775 |
| 833 | 0,055150 | 0,461265 | 0,003191 | 0,881733 | 0,389717 | 0,349055 |
| 1620 | 0,038316 | 0,547540 | 0,001643 | 0,998102 | 0,280003 | 0,497066 |
| 2012 | 0,033445 | 0,627419 | 0,001291 | 1,111965 | 0,252258 | 0,481512 |
| 2691 | 0,028158 | 0,591730 | 0,000942 | 1,082422 | 0,210113 | 0,628673 |
| 3164 | 0,024344 | 0,898752 | 0,000752 | 1,396350 | 0,181566 | 0,901841 |
| 3959 | 0,019924 | 0,893920 | 0,000565 | 1,272834 | 0,159523 | 0,577394 |
| 4553 | 0,017162 | 1,067596 | 0,000461 | 1,462101 | 0,144060 | 0,729378 |
| 5266 | 0,014580 | 1,120449 | 0,000362 | 1,664418 | 0,117455 | 1,403387 |
| 6347 | 0,012408 | 0,864257 | 0,000273 | 1,509584 | 0,093779 | 1,205671 |
| 7905 | 0,010180 | 0,901682 | 0,000197 | 1,492398 | 0,082294 | 0,595150 |
| 10478 | 0,007341 | 1,160222 | 0,000120 | 1,765770 | 0,052418 | 1,600732 |
| 15686 | 0,004510 | 1,207303 | 6,44E-05 | 1,533823 | 0,038434 | 0,769068 |
| 19665 | 0,003617 | 0,976680 | 4,72E-05 | 1,375442 | 0,028604 | 1,306549 |

3 Анализ результатов и вывод.

В работе была предпринята попытка реализации компактного сеточно-характеристического метода на нерегулярных треугольных сетках для решения однородного уравнения переноса с периодическими граничными условиями и проведено исследование его сходимости на начальных импульсах разного вида. По полученным результатам можно увидеть, что метод решения переопределенной системы для нахождения коэффициентов интерполяционного полинома более точен, чем метод перебора производных. Для метода перебора были испробованы многие ограничения на норму градиента, на значение интерполяционного полинома в точке пересечения, а также использование полинома третьей степени с отбрасыванием лишних членов, но удовлетворительного результата добиться не удалось. Ни один из двух подходов не дает сходящегося порядка. Таким образом, в данной работе не удалось реализовать сходящийся компактный сеточно-характеристический метод на нерегулярных сетках. Колебания порядка можно связать с тем, что при обоих способах решения системы теряется часть данных о функции - в первом случае мы подходим к ней максимально близко, но все равно существует некая погрешность, связанная с переопределённостью системы, во втором же мы не используем все данные о производных функции, что может приводить к неправильному виду интерполяционной функции и тем самым ошибкам в численном решении.

Список литературы.

1. Golubev, V.I., Khokhlov, N.I., Nikitin, I.S. and Churyakov, M.A.: Application of compact grid-characteristic schemes for acoustic problems. J. Phys.: Conf. Ser. 1479, 012058 (2020).
2. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – С. 519.
3. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. — 2-е изд., испр.

и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 313 с.;

4. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23. — №. 6. — С. 98-110.
5. Голубев В. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трёхмерного линейного уравнения переноса // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28. — №. 2. — С. 123-132.
6. Khokhlov N. I., Petrov I. B. On one class of high-order compact grid-characteristic schemes for linear advection // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2016. — Т. 31. — №. 6. — С. 355-368.
7. Vasyukov A. V., Petrov I. B. Grid-characteristic method on tetrahedral unstructured meshes with large topological inhomogeneities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2018. — Т. 58. — №. 8. — С. 1259-1269.
8. Сычугова Е. П. Решение уравнения переноса методом конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках // Препринты ИПМ им. МВ Келдыша. — 2013. — №. 85. — С. 24.
9. Челноков Ф. Б. Численное моделирование деформационных динамических процессов в средах со сложной структурой // Сборник рефератов научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ. Серия 16: 29. Физика. 30. Механика. 41. Астрономия. 89. Космические исследования. — 2006. — №. 5. — С. 40-40.
10. Петров И. Б., Фаворская А. В. Библиотека методов интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках // Информационные технологии. — 2011. — №. 9. — С. 30-32.