מערכות מכטרוניות

בקרה לא ליניארית של רחפנים

מאת: שי ארוגטי

רוב התמונות במצגת זו נלקחו מהספר:

"Autonomous Flying Robots, Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aerial Vehicles", Kenzo Nonami, Farid Kendoul, Satoshi Suzuki, Wei Wang, Daisuke Nakazawa

מודל דינמי

משוואות גוף קשיח במרחב, עם מסה $m \in \mathbb{R}$ ומטריצת אינרציה $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ נתונות באופן הבא,

Newton–Euler equations

$$\begin{aligned} m\dot{V} + \Omega \times mV &= F \\ J\dot{\Omega} + \Omega \times J\Omega &= \Gamma^b \end{aligned} \qquad (8.1)$$

כאשר על הגוף פועלים הכוח $F \in \mathbb{R}^3$ והמומנט $\Gamma^b \in \mathbb{R}^3$ ומצב הגוף מתואר ע"י $V = (u, v, w)$
וקטור מהירויות קוויות ו- $\Omega = (p, q, r)$ ווקטור מהירות זוויתית

כל הווקטורים במשוואה מיוצגים במערכת הגוף

הווקטור F כולל בתוכו את הכוחות החיצוניים הפועלים על הגוף ואת כוח הגרביטציה

מערכות הצירים נתונות באופן הבא,

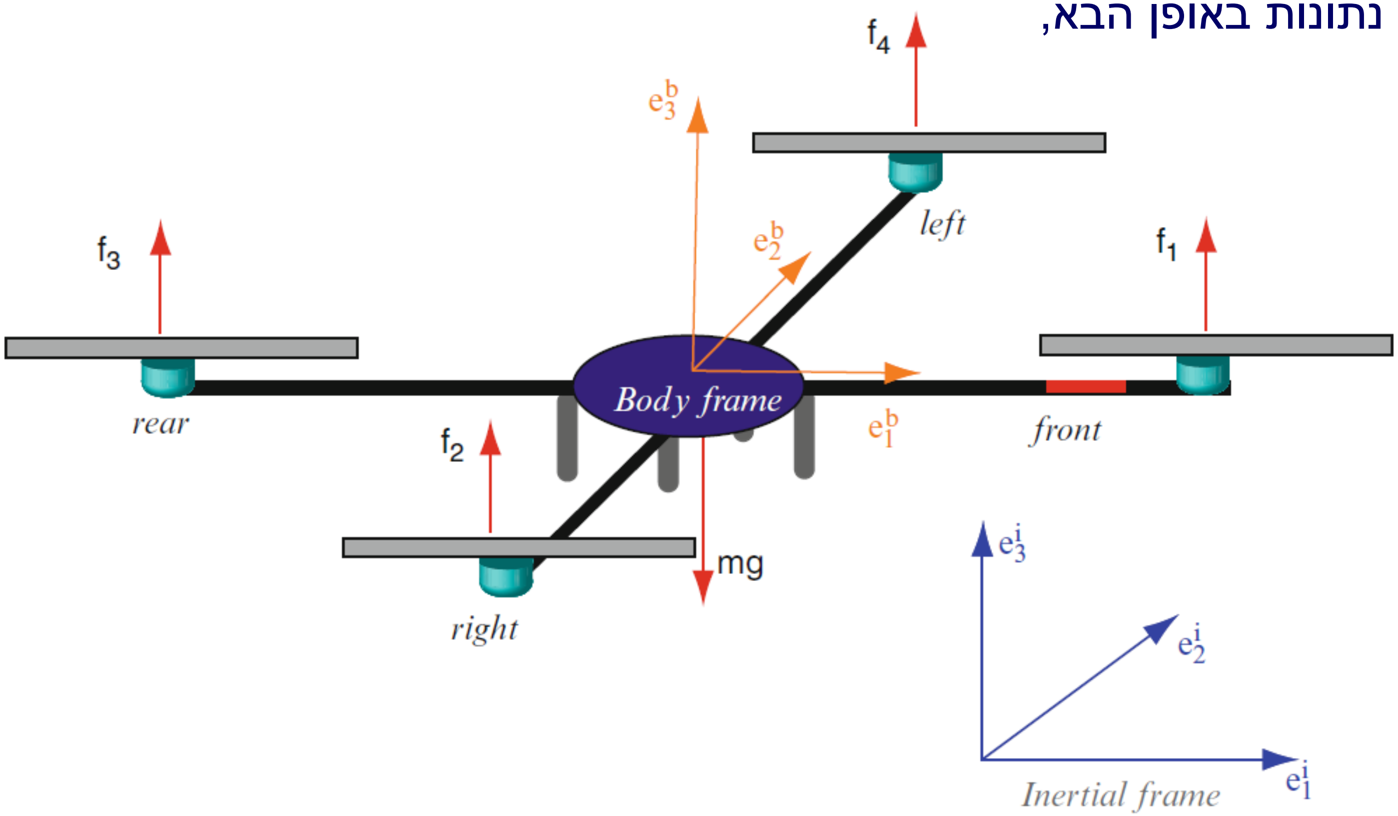

Fig. 8.2 Rigid body dynamics and the associated frames

$$R = R_\psi R_\theta R_\phi = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot c\psi \\ c\theta \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + c\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi \\ -s\theta & s\phi \cdot c\theta & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

כאשר $R \in SO3$ מטריצת הסיבוב ממערכת הגוף אל המערכת האינירציאלית.

$$R = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot c\psi \\ c\theta \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + c\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi \\ -s\theta & s\phi \cdot c\theta & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix}$$

הקיצורים s ו- c מייצגים את הפעולות הטריגונומטריות $\sin(\cdot)$ ו- $\cos(\cdot)$

הווקטור $\eta = (\phi, \theta, \psi)$ כולל את שלושת זוויות אוילר.

ע"י שימוש במטריצת הסיבוב R (והפרדה של גרביטציה משאר הכוחות) ניתן לרשום עבור התנועה הקווית,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v \\ m\dot{v} &= RF^b - mge_3^i \end{aligned} \qquad (8.3)$$

כאשר $\xi = (x, y, z)$ מיצג מיקום, $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ מהירות (במערכת האינירציאלית) ו- F^b הכוח השקול הפועל על הגוף (במערכת הגוף) מלבד גרביטציה.

את הקשר בין ווקטור המהירות הזוויתית Ω (ביחס למערכת הגוף) ובין ווקטור הנגזרות של זוויות אוילר, $\dot{\eta}$, ניתן לכתוב כך,

$$\dot{\eta} = \Phi\left(\eta\right)\Omega \qquad (8.4)$$

כאשר המטריצה $\Phi\left(\eta\right)$ (Euler matrix), נתונה ע"י,

$$\Phi\left(\eta\right) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \cdot \tan\theta & \cos\phi \cdot \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\theta \\ 0 & \sin\phi \cdot \sec\theta & \cos\phi \cdot \sec\theta \end{bmatrix} \qquad (8.5)$$

מטריצה זו הינה סינגולרית כאשר, $\theta = \pm\pi/2$ והמטריצה ההופכית שלה $\Psi = \Phi^{-1}\left(\eta\right)$ (כאשר לא נמצאים במצב סינגולרי) היא,

$$\Psi\left(\eta\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \cdot \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cdot \cos\phi \end{bmatrix} \qquad (8.6)$$

ע"י ידי נגזרת של הביטוי $\dot{\eta} = \Phi(\eta)\Omega$ ניתן לקבל,

$$\ddot{\eta} = \dot{\Phi}\Omega + \Phi\dot{\Omega} = \dot{\Phi}\Psi\dot{\eta} - \Phi J^{-1} sk(\Omega) J\Omega + \Phi J^{-1}\Gamma^{b}$$

כאשר הסימן sk מיצג אופרטור מ- R^3 ל- $R^{3\times 3}$ כך ש $sk(x)$ היא מטריצה skew-symmetric המקיימת $sk(x)y := x \times y$ עבור $y \in R^3$ (כלומר, שקולה לפעולת קרוס).

(בפיתוח הביטוי האחרון השתמשנו גם בקשר $\dot{\Psi} = \Psi\dot{\Phi}\Psi$).

ע"י הכפלת שני הצדדים של המשוואה האחרונה בביטוי $M(\eta) = \Psi(\eta)^{T} J\Psi(\eta)$, מקבלים,

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} = \Psi(\eta)\Gamma^{b} \qquad (8.7)$$

כאשר $M(\eta)$ היא מטריצת אינרציה והיא כאמור מוגדרת היטב כל עוד $\theta \neq k\pi/2$.

הביטוי $C(\eta,\dot{\eta})$ כולל כוחות קוריאוליס ומוגדר ע"י,

$$C(\eta,\dot{\eta}) = -\Psi(\eta) J \Psi(\dot{\eta}) + \Psi(\eta) sk\left(\Psi(\eta)\dot{\eta}\right) J \Psi(\eta)$$

ומכאן, המודל הלא ליניארי המתקבל הוא,

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= RF^b - mge_3^i \\ M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} &= \Psi(\eta)\Gamma^b \end{aligned} \qquad (8.8)$$

כאשר הכניסות למודל הם Γ^b (ווקטור מומנטים במערכת הגוף) ו- F^b (ווקטור כוחות גוף)

עבור רחפן ניתן לקבל (ע"י הפעלת ארבעה מנועים באופן בלתי תלוי) כוח ניצב לגוף ושלושה מומנטים, המיוצגים ע"י הווקטורים,

$$\tau = \left(\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi\right)^T \qquad\qquad F^b = (0,0,u)^T$$

למעשה מדובר בארבע כניסות בלתי תלויות, $\left(u,\tau_\theta,\tau_\phi,\tau_\psi\right)^T$ הנובעות מכוחות הדחף והמומנטים המפעילים המדחפים. כוח הדחף השקול u הוא

$$u=\sum_{i=1}^{4} f_i \qquad (8.9)$$

ושלושת המומנטים הפועלים על הגוף הם,

$$\tau_\phi = l\left(f_2 - f_4\right) \qquad (8.10)$$

$$\tau_\theta = l\left(f_3 - f_1\right) \qquad (8.11)$$

$$\tau_\psi = Q_1 + Q_3 - Q_2 - Q_4 \qquad (8.12)$$

(כאשר l מייצג מרחק ביחס לצירים הראשיים)

כאשר נהוג להניח כי כוחות הדחף f_i והמומנטים Q_i יחסיים לריבוע מהירות הסיבוב של המדחפים לכן מתקיים,

$$\begin{bmatrix} u \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \rho & \rho & \rho \\ 0 & -l\rho & 0 & l\rho \\ -l\rho & 0 & l\rho & 0 \\ k & -k & k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \\ w_3^2 \\ w_4^2 \end{bmatrix} \qquad (8.13)$$

הגדלים בתוך המטריצה הינם קבועים חיוביים וניתן להראות שהמטריצה תמיד הפיכה.

כאשר לוקחים בחשבון את הכוחות והמומנטים אותם ניתן להפעיל, המודל לצורך תכנון בקרה הוא,

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\xi} &= uR\,e_3^i - mg\,e_3^i \\
M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} &= \Psi(\eta)^T\,\tau
\end{aligned}
\qquad (8.14)
$$

הכולל שלוש משוואות עבור התנועה הקווית ושלוש משואות עבור התנועה הזוויתית

החלק המתאר את התנועה הזוויתית הוא מבוקר באופן מלא (fully actuated) כאשר $\theta \neq k\pi/2$ ולכן ניתן לבצע עבורו ליניאריזצית משוב ע"י הגדרת או הבקרה,

$$
\tau = J\Psi(\eta)\tilde{\tau} + \Psi^{-1}C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} \qquad (8.15)
$$

וע"י שימוש במטריצת הסיבוב R יתקבל המודל,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m}u\left(\cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi\right)\\ \ddot{y} &= \frac{1}{m}u\left(\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi\right)\\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}u\cos\theta\cos\phi-g\end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned}\ddot{\phi} &= \tilde{\tau}_\phi\\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta\\ \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi\end{aligned} \qquad (8.16)$$

החלק של המצב הזוויתי ניתן לבקרה יחסית בקלות (לדוגמא ע"י בקר PID), אבל זה ישאיר אות בקרה יחיד עבור (u) עבור שלוש המשוואות של התנועה הקווית.

אחת הדרכים המקובלות להתמודד עם בעיה זו היא שימוש בעקרות של בקרת Backstepping.

כלומר, מגדירים אות בקרה ווירטואלי $\mu\in\mathbb{R}^3$ עבור שלוש המשוואות של המיקום (אשר אינן מבוקרות באופן ישיר אלא דרך המצב הזוויתי).

$$\mu = f\left(u,\phi_d,\theta_d,\psi_d\right)=\frac{1}{m}uR\left(\phi_d,\theta_d,\psi_d\right)e_3^i-ge_3^i \qquad (8.17)$$

כאשר $f(\cdot):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ היא פונקציה רציפה והפיכה.

באופן פיזי, אות הבקרה כאן $\mu = f(u, \phi_d, \theta_d, \psi_d)$ הוא הכוח המרחבי הדרוש עבור התנועה הקווית (נוצר ע"י כוח הדחף השקול u וזוויות ההטיה של הגוף (ϕ, θ, ψ)).

לכן הזוויות בתוך הביטוי של הכוח μ הן זוויות ההטיה הרצויות, ומסומנות ע"י ϕ_d, θ_d ו- ψ_d .

את אות הבקרה הווירטואלי μ ניתן לכתוב גם כך (כאשר פרקנו את הכוח המרחבי לשלושה רכיבים לאורך הכיוונים הראשיים $x-y-z$ של המערכת האינירציאלית),

$$
\begin{aligned}
\mu_x &= \frac{1}{m} u \left(\cos\phi_d \sin\theta_d \cos\psi_d + \sin\phi_d \sin\psi_d \right) \\
\mu_y &= \frac{1}{m} u \left(\cos\phi_d \sin\theta_d \sin\psi_d - \sin\phi_d \cos\psi_d \right) \qquad (8.18) \\
\mu_z &= \frac{1}{m} u \cos\theta_d \cos\phi_d - g
\end{aligned}
$$

מתוך שלושת המשוואות האחרונות, ניתן לחלץ את כוח הדחף השקול הרצוי ואת זוויות העלרוד והגלגול, $\left(u,\phi_d,\theta_d\right)=f^{-1}\left(\mu_x,\mu_y,\mu_z\right)$,

כאשר מתקבל,

$$
\begin{aligned}
u &= m\sqrt{\mu_x^2+\mu_y^2+\left(\mu_z+g\right)^2} \\
\phi_d &= \sin^{-1}\left(m\frac{\mu_x\sin\psi_d-\mu_y\cos\psi_d}{u}\right) \\
\theta_d &= \tan^{-1}\left(\frac{\mu_x\cos\psi_d-\mu_y\sin\psi_d}{\mu_z+g}\right)
\end{aligned}
\qquad (8.19)
$$

הזוויות $\left(\phi_d,\theta_d,\psi_d\right)$ אינן אותות בקרה אלה תוצאה של המומנטים הפועלים על הגוף, לכן נתייחס אליהן כאל אותות ייחוס של המצב הזוויתי ונגדיר את השגיאות $e=\left(e_\eta,e_{\dot\eta}\right)^T\in R^6$ כאשר,

$$e_\eta=\eta-\eta_d \qquad\qquad e_{\dot\eta}=\dot\eta-\dot\eta_d$$

אם במודל הדינאמי נציב במקום הזוויות (ϕ,θ,ψ) את ביטוי $(\phi_d+e_\phi,\theta_d+e_\theta,\psi_d+e_\psi)$

ונשתמש בזהויות טריגונומטריות כגון,

$$\begin{aligned}\sin(a+b)&=\sin(a)+\sin(b/2)\cos(a+b/2)\\ \sin(a+b)&=\cos(a)-\sin(b/2)\sin(a+b/2)\end{aligned}\tag{8.20}$$

נקבל עבור משוואות התנועה הקווית,

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=\frac{1}{m}u\left[\left(\cos\phi_d\sin\theta_d\cos\psi_d+\sin\phi_d\sin\psi_d\right)+h_x\left(\phi,\theta,\psi,\mathrm{e}_\phi,\mathrm{e}_\theta,\mathrm{e}_\psi\right)\right]\\ \ddot{y}&=\frac{1}{m}u\left[\left(\cos\phi_d\sin\theta_d\sin\psi_d-\sin\phi_d\cos\psi_d\right)+h_y\left(\phi,\theta,\psi,\mathrm{e}_\phi,\mathrm{e}_\theta,\mathrm{e}_\psi\right)\right]\\ \ddot{z}&=\frac{1}{m}u\left[\cos\theta_d\cos\phi_d+h_z\left(\phi_d,\theta_d,e_\phi,e_\theta\right)\right]-g\end{aligned}\tag{8.21}$$

כאשר את המשוואות האחרונות ניתן לכתוב גם בקיצור ע"י,

$$\ddot{x} = \mu_x + \frac{1}{m} u h_x(\cdot)$$

$$\ddot{y} = \mu_y + \frac{1}{m} u h_y(\cdot)$$

$$\ddot{z} = \mu_z + \frac{1}{m} u h_z(\cdot)$$

כאשר,

$$h_x = -\left[\sin\left(e_\theta/2\right)\cos\left(\theta_d + e_\theta/2\right)\right]$$

$$h_y = \left[h_1(\cdot)h_2(\cdot) + \sin\phi_d h_2(\cdot) + \cos\theta_d h_1(\cdot)\right]$$

$$h_z = \left[h_2(\cdot)h_3(\cdot) + \cos\phi_d h_2(\cdot) + \cos\theta_d h_3(\cdot)\right]$$

$$h_1 = \sin\left(e_\phi/2\right)\cos\left(\phi_d + e_\phi/2\right)$$

$$h_2 = -\sin\left(e_\theta/2\right)\sin\left(\theta_d + e_\theta/2\right)$$

$$h_3 = -\sin\left(e_\phi/2\right)\sin\left(\phi_d + e_\phi/2\right)$$

נזכיר כי את $\left(\mu_x, \mu_y, \mu_z\right)$ אנו מתכננים (לדוגמא ע"י בקר PID) כדי לבקר את דרגות החופש הקוויות).

הביטוי $h\left(\phi_d,\theta_d,\psi_d,e_\phi,e_\theta,e_\psi\right)\in R^3$ מהווה את הצימוד בין שתי תתי המערכות.

הוא כולל חיבור ומכפלות של פונקציות טריגונומטריות כגון $\sin(\cdot)$ ו- $\cos(\cdot)$ (וכן חישוב שלו בזמן אמת יכול להיות טובעני במשאבי חישוב).

ע"י הגדרת ווקטור שגיאות מקום ומהירות $\chi=\left(\xi-\xi_d,v-v_d\right)^T\in R^6$ (עבור הקואורדינאטות הקוויות, ניתן לכתוב את המודל הבא,

$$\begin{aligned}\dot{\chi}&=\underbrace{A_1\chi+B_1\left(\mu-\ddot{\xi}_d\right)}_{f\left(\chi,\mu,\ddot{\xi}_d\right)}+\underbrace{\frac{1}{m}uH\left(\eta_d,e_\eta\right)}_{\Delta\left(u,\eta_d,e_n\right)}\\ \dot{e}&=A_2e+B_2\left(\tilde{\tau}-\ddot{\eta}_d\right)\end{aligned}\qquad(8.22)$$

כאשר,

$$H\left(\eta_d,e_\eta\right)=\left(0,0,0,h_x,h_y,h_z\right)^T$$

והמטריצות, $A_1 \in R^{6\times 6}$, $B_1 \in R^{6\times 3}$, $A_2 \in R^{6\times 6}$ ו- $B_2 \in R^{6\times 3}$ נתונות ע"י

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (8.23)$$

למעשה בעיית הבקרה מנוסחת עכשיו כבעיית בקרה של שתי מערכות ליניאריות המצומדות בניהן ע"י הביטוי (הלא ליניארי) , $\Delta\left(u, \eta_d, e_\eta\right)$

עבור שלושת המשוואות הראשונות, ניתן להשתמש בגישה של ליניאריזצית משוב כדי לקזז את השפעת הביטוי הלא ליניארי (מה שכמובן יהיה טובעני בחישובים), או להשתמש בתיאוריה הבאה המראה כי החוג הסגור יהיה יציב גם ללא קיזוז מלא.

בגישה שאינה כוללת קיזוז מלא, שתי תתי המערכות (תנועה קווית ותנועה זוויתית) מבוקרות באופן בלתי תלוי ע"י אותות הבקרה, $\mu = \alpha\left(\chi, \ddot{\xi}_d\right)$ ו- $\tilde{\tau} = \beta\left(e, \ddot{\eta}_d\right)$.

בגישה זו מתייחסים אל ביטוי הצימוד $\Delta\left(u, \eta_d, e_\eta\right)$ כאל הפרעה הפועלת על χ-subsystem .

כדי לאפשר יציבות אסימפטוטית, נרצה שהפרעה זו תדעך לאפס במצב המתמיד.

בקר כזה יהיה יותר פשוט למימוש בהשוואה לבקר המבצע קיזוז מלא של איבר הצימוד, אך הוכחת היציבות שלו יותר מורכבת.

נתייחס כאן לגישה היותר קלה למימוש (אך כאמור, יותר מורכבת לניתוח)

יש לתכנן את אותות הבקרה $\mu = \alpha\left(\chi, \ddot{\xi}_d\right)$ ו- $\tilde{\tau} = \beta\left(e, \ddot{\eta}_d\right)$ כך שהשגיאות χ ו- e יתכנסו לאפס באופן אסימפטוטי.

ניתוח היציבות יתבסס על התיאוריה הבאה,

Theorem 1 (Sontag (1988))

אם קיים אות משוב $\mu = \alpha\left(\chi, \ddot{\xi}_d\right)$ כך ש- $\chi = 0$ היא נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית של המערכת

$$\dot{\chi} = f\left(\chi, \alpha\left(\chi, \ddot{\xi}_d\right), \ddot{\xi}_d\right)$$

אז כל משוב $\tilde{\tau} = \beta\left(e, \ddot{\eta}_d\right)$ (במערכת עם קיזוז חלקי) המביא לכך שבתת המערכת של e נקודת שיווי המשקל $e = 0$ יציבה אסימפטוטית, משיג גם יציבות אסימפטוטית של,

$$\left(\chi, e\right) = \left(0, 0\right)$$

מעבר לכך, אם שתי תתי המערכות יציבות אסימפטוטית באופן גלובלי

Globally Asymptotically Stable (GAS)

אז, כאשר $t \to \infty$ כל פתרון $\left(\chi(t), e(t)\right)$ (של המערכת המלאה) או מתכנס אסימפטוטית ל- $\left(\chi, e\right) = \left(0, 0\right)$ או שהוא בלתי חסום (unbounded).

מתוך המשפט ניתן ללמוד כי היציבות של המערכת המלאה (עם הצימוד) תובטח אם נבחר אותות בקרה $\mu = \alpha\left(\chi, \ddot{\xi}_d\right), \tilde{\tau} = \beta\left(e, \ddot{\eta}_d\right)$ עבורם נוכל להראות שהמסלולים $\left(\chi(t), e(t)\right)$ חסומים.

מכיוון שתתי המערכות של χ ו- e הן ליניאריות (ללא איבר הצימוד) ניתן להשתמש בבקרים מסוג PD ו- PID. נגדיר את אותות הבקרה (למעשה בקר PD)

$$
\begin{aligned}
\mu &= -K_\chi \chi + \ddot{\xi}_d, \quad K_\chi \in R^{3\times 6} \\
\tilde{\tau} &= -K_e e + \ddot{\eta}_d, \quad K_e \in R^{3\times 6}
\end{aligned}
\qquad (8.24)
$$

כך שהמטריצות $A_e = A_2 - B_2 K_e$ ו- $A_\chi = A_1 - B_1 K_\chi$ הן מטריצות יציבות.

מתוך הצבה של אותות בקרה אלה יתקבל החוג הסגור,

$$
\begin{aligned}
\dot{\chi} &= A_\chi \chi + \Delta\left(\chi, e_\eta\right) \\
\dot{e} &= A_e e
\end{aligned}
\qquad (8.25)
$$

למרות העובדה שהמטריצות A_χ ו- A_e יציבות עדיין לא ניתן לקבוע יציבות של החוג הסגור בגלל איבר הצימוד $\Delta\left(\chi, e_\eta\right)$, ולכן יש להיעזר במשפט הבא,

<u>Theorem 2</u>

נניח אות המשוב $\tilde{\tau} = \beta\left(e, \ddot{\eta}_d\right)$ במערכת ללא קיזוז מלא, היא פונקציה מסוג C^1 כך שנקודת שיווי המשקל $e = 0$ יציבה אסימפטוטית גלובלית.

נניח כי קיים קבוע חיובי c_1 ופונקציה $\gamma(\cdot)$ מסוג $class-k$, גזירה ב- $e = 0$ כך שמתקיים

$$\|\chi\| \geq c_1 \Rightarrow \left\|\Delta\left(\chi, e_\eta\right)\right\| \leq \gamma\left(\left\|e_\eta\right\|\right)\|\chi\| \qquad (8.26)$$

אם קיימת פונקציה $V(\chi)$ מוגדרת חיובית למחצה וגם לא חסומה באופן היקפי
positive semi-definite radially unbounded function

וקבועים חיוביים c_2 ו- c_3 כך שעבור $\|\chi\| \geq c_2$ מתקיים

המשך המשפט בשקף הבא . . .

$$\frac{\partial V}{\partial \chi} f\left(\chi, \alpha\left(\chi, \ddot{\xi}_d\right) \ddot{\xi}_d\right) \le 0$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \chi} \right\| \left\| \chi \right\| \le c_3 V\left(\chi\right) \qquad (8.27)$$

אז אות המשוב $\tilde{\tau} = \beta\left(e, \ddot{\eta}_d\right)$ מבטיח שכל המסלולים $\left(\chi(t), e(t)\right)$ חסומים.

בנוסף, אם $\dot{\chi} = f\left(\chi, \alpha\left(\chi, \ddot{\xi}_d\right), \ddot{\xi}_d\right)$ יציבה אסימפטוטית גלובלית אז גם נקודת שיווי המשקל $\left(\chi, e\right) = \left(0, 0\right)$ (של המערכת ללא קיזוז) יציבה אסימפטוטית גלובלית.

החוג הסגור נראה כך,

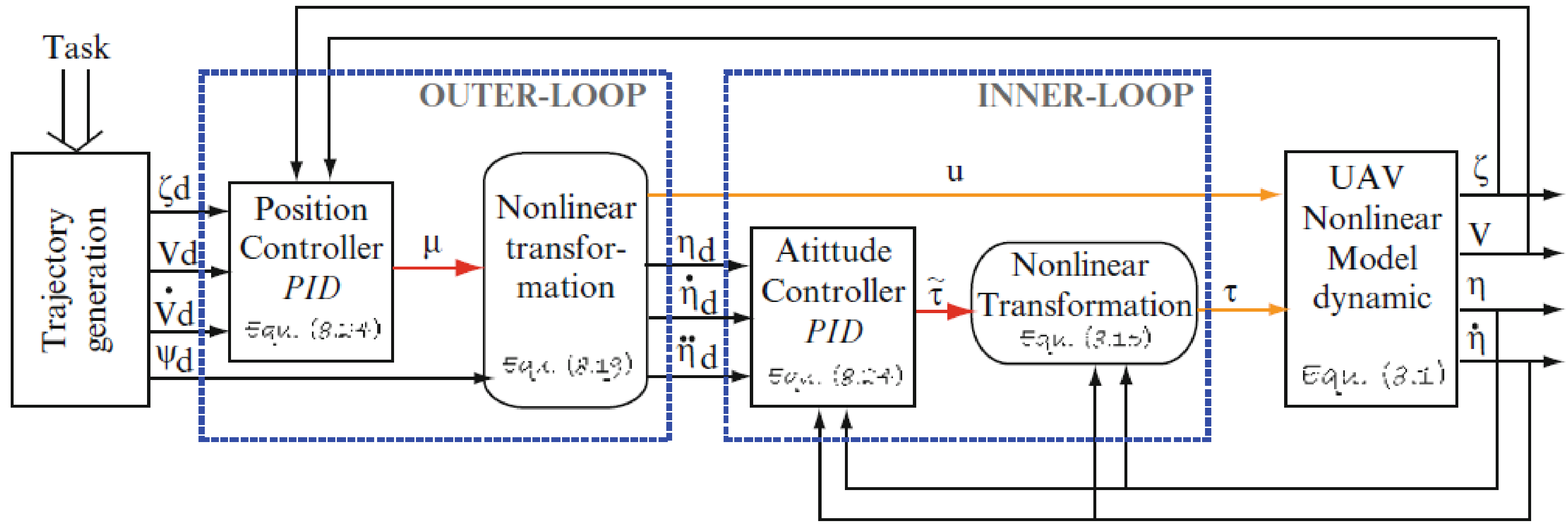

Fig. 8.3 Structure of the inner–outer loop-based controller

היציבות שלו מתבססת על המשפט האחרון (Theorem 2).

מכיוון שהמטריצות A_χ ו- A_e הן יציבות, אז גם תת המערכת של χ (ללא איבר הצימוד) וגם תת המערכת של e יציבות באופן אקספוננציאלי (תכונות יותר חזקות מאשר יציבות אסימפטוטית).

מתוך היציבות האקספוננציאלית של תת המערכת χ ניתן להסיק כי קיימת פונקציה מוגדרת חיובית ולא חסומה באופן היקפי $V(\chi)$ וכן קבועים חיוביים c_2 ו- c_3 כך ש,

$$\|\chi\| \geq c_2 : \frac{\partial V}{\partial \chi} A_\chi \chi \leq 0 \qquad \left\|\frac{\partial V}{\partial \chi}\right\| \|\chi\| \leq c_3 V(\chi)$$

מה שעונה על התנאי (8.27) במשפט.

נשאר להראות שאיבר הצימוד $\Delta\left(\chi, e_\eta\right)$ מקיים את (8.26) .

הנורמה של איבר הצימוד נתונה ע"י,

$$\left\|\Delta\left(\chi, e_\eta\right)\right\| = \frac{1}{m}|u(\chi)|\left\|H\left(\chi, e_\eta\right)\right\| = \frac{1}{m}|u(\chi)|\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \qquad (8.28)$$

כאשר,

$$|u(\chi)| = m\left\|\mu(\chi) + g e_3^i\right\| = m\sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2 + \left(\mu_z + g\right)^2}$$

וההוכחה המלאה מתבססת על שני משפטי העזר הבאים,

Lemma 8.1. *Assume that the desired trajectories* $\xi_d(t)$ *and their time-derivatives are bounded and denote* $L_d = \|\ddot{\xi}_d\|_\infty$. *Then, there exist positive constants* r *and* k_1 *such that the collective thrust feedback* $u(\chi)$ *satisfies the following properties:*

$$|u(\chi)| \leq \begin{cases} k_1\|\chi\|, & \text{for } \|\chi\| \geq r \\ k_1 r, & \text{for } \|\chi\| < r \end{cases} \tag{8.29}$$

Lemma 8.2. *There exists a positive constant* k_2 *such that the coupling term* $H(\chi, e_\eta)$ *satisfies the following inequality:*

$$\|H(\chi, e_\eta)\| \leq k_2\|e_\eta\| \tag{8.30}$$

מתוך משפטי העזר ניתן ללמוד כי עבור $\|\chi\| \geq r$ מתקיים,

$$\|uH(\cdot)\| \leq k_1\|\chi\|k_2\|e_\eta\| = k\|e_\eta\|\|\chi\|$$

כאשר $k = k_1 k_2$ הינו קבוע חיובי.

לבסוף, ניתן לקבל

$$\|\Delta\| = \frac{1}{m}\|uH\| \leq \gamma\left(\|e_\eta\|\right)\|\chi\|, \quad \text{for} \;\; \|\chi\| \geq r$$

כאשר $\gamma(\cdot) = \frac{k}{m}\|e_\eta\|$ היא פונקציה מסוג $class - k$ גזירה ב- $e_\eta = 0$.

כל התנאים של Theorem 2 מתקיימים לכן היציבות האסימפטוטית של נקודת שיווי המשקל ($(\chi, e) = (0,0)$) במערכת עם הצימוד מובטחת.

לסיכום, אותות הבקרה $\left(u, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi\right)$ שיש להפעיל ברחפן הם,

$$u = m\left\|\mu\left(\chi, \ddot{\xi}_d\right) + g e_3^i\right\| = m\left\|-K_\chi \chi + \ddot{\xi}_d + g e_3^i\right\|$$

$$\tau = J\Psi(\eta)\tilde{\tau} + \Psi^{-1}C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} = J\Psi(\eta)\left(-K_e e + \ddot{\eta}_d\right) + \Psi^{-1}C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta}$$

לגבי פונקציות מסוג $class-k$

(H. K. Khalil, Nonlinear systems, Prentice-Hall מתוך הספר)

Comparison Functions

- A scalar continuous function $\alpha(r)$, defined for $r \in [0, a)$ is said to belong to class $\mathcal{K}$ if it is strictly increasing and $\alpha(0) = 0$. It is said to belong to class $\mathcal{K}_\infty$ if it defined for all $r \geq 0$ and $\alpha(r) \to \infty$ as $r \to \infty$

- A scalar continuous function $\beta(r, s)$, defined for $r \in [0, a)$ and $s \in [0, \infty)$ is said to belong to class $\mathcal{KL}$ if, for each fixed s, the mapping $\beta(r, s)$ belongs to class $\mathcal{K}$ with respect to r and, for each fixed r, the mapping $\beta(r, s)$ is decreasing with respect to s and $\beta(r, s) \to 0$ as $s \to \infty$