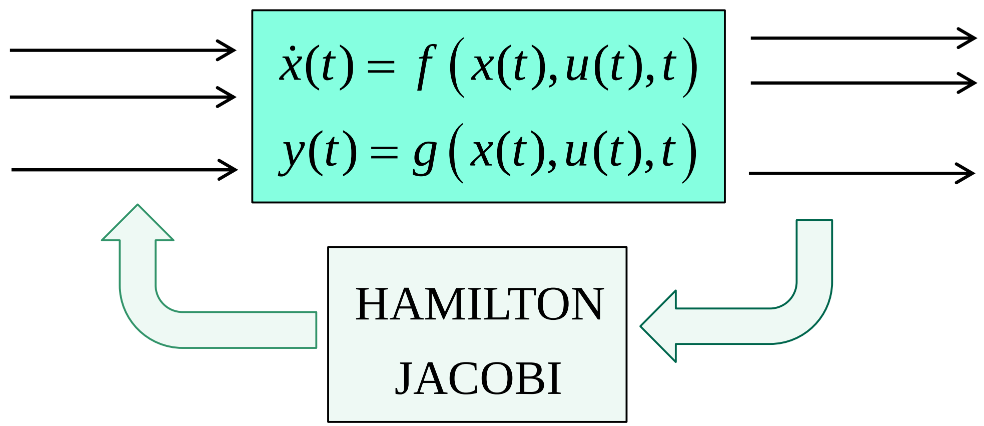
מערכות מכטרוניות

מבוא לבקרה אופטימלית - חלק 1

Introduction to Optimal Control



מרצה: שי ארוגטי

מבוא לבקרה אופטימלית

מצגת זו מתבססת על פרק 10 בספר

Optimal Control, 3rd Edition
By Frank L. Lewis, Draguna Vrabie, Vassilis L. Syrmos, Wiley, 2012.
CHAPTER 10 – DIFFERENTIAL GAMES

רוב התמונות במצגת לקוחות מספר זה

בקרה אופטימלית

בקרה אופטימלית הינה הבסיס של הבקרה המודרנית.

מדובר בשיטות תכנון המתבססות על ייצוג התהליך המבוקר במרחב המצב ותכנון בקר המביא לערך אופטימלי של קריטריון טיב.

שתי שיטות תכנון מוכרות בתחום זה הן LQR ו- H_∞ (H infinity)

נציג את הבסיס לתכנון בקרים בשיטות אלה, כאשר כנקודת מוצא נניח תהליך לא ליניארי.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

נדון במערכות מהצורה הבאה,

$$\dot{x} = F(x,u) = f(x) + g(x)u$$

כאשר ווקטור המצב $x(t) \in R^n$ ואות הבקרה $u(t) \in R^n$,

הפונקציה הלא ליניארית $f(x)$ נקראת **drift-dynamics** (היא שקולה לביטוי $Ax(t)$ במקרה הליניארי). היא **locally Lipschitz** ובעת נקודת שיווי משקל בראשית, כלומר, $f(0)=0$.

זהו תנאי רציפות (כל פונקציה עם נגזרת ראשונה חסומה מקיימת את התנאי).

מכיוון שהמערכת "ליניארית" ביחס לכניסת הבקרה היא נקראת – **Affine System**

אנו מעוניינים באות הבקרה $u(t)$ הממזער פונקציית מחיר מהצורה.

$$J(u) = \int_0^\infty r(x,u)dt = \int_0^\infty \left(h^T(x)h(x) + u^T R u\right)dt \qquad \text{עם} \qquad h(0)=0,\ \ R>0$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

$$J(u)=\int_0^\infty \left(h^T(x)h(x)+u^TRu\right)dt \qquad \text{עם} \qquad h(0)=0,\;\; R>0$$

דרישה בפונקציית המחיר $h(0)=0$ אומרת שהערך הנמוך ביותר של $h(x)$ הוא אפס, וערך זה מתקבל כאשר $x=0$. אז למזעור פונקציית המחיר משמעות של בעיית רגולציה (כלומר המצב הרצוי הינו $x=0$). זו דרישה שקולה ל- $h^T(x)h(x)\le 0$ (דרישה לפונקציה מוגדרת חצי חיובית)

מזעור $J(u)$ אינו מספק.

הבקר האופטימלי הדרוש, ממזער את $J(u)$ וגם **מייצב את החוג הסגור.**

המקרה הפרטי הליניארי נקרא בקרת LQR, שם $J(u)=\int_0^\infty \left(x^TQx+u^TRu\right)dt$.

עם $Q\ge 0$ ו- $R>0$ מטריצות משקלים (ביחס למקרה הכללי, כאן $h(x)=Q^{\frac{1}{2}}x$).

אפשרית גם בחירה יותר רחבה של פונקציות מחיר.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

ביחס לפונקציית המחיר הנתונה, נגדיר את "פונקציית הערך" (**Value function**),

$$V(t)=\int_t^{\infty}\left(h^T(x)h(x)+u^T R u\right)d\tau$$

פונקציית זו מראה את הערך (value) שפונקציית המחיר תצבור מנקודת הזמן t עד אינסוף.

נגדיר אות בקרה $u(t)$ קביל (**admissible**), כאות בקרה רציף ומייצב (את התהליך), לכן הוא מוביל ל- $V(t)$ עם ערך סופי (ערך סופי, מחייב $x\to 0$ כאשר $t\to\infty$).

בהמשך, נגזור את $V(t)$ לפי הזמן, כחלק ממציאת הפתרון האופטימלי. מכיוון שב- V הגבול של האינטגרל תלוי בזמן, יש להשתמש בנוסחה של **Leibniz**.

נזכיר,
$$\frac{d}{dt}\int_{l_1(t)}^{l_2(t)} f(\tau)\,d\tau = f(l_2)\frac{dl_2}{dt}-f(l_1)\frac{dl_1}{dt}$$

זהו מקרה פרטי של הנוסחה הכללית כאשר כאן רק הגבול תלוי בזמן.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

מתוך נגזרת בזמן של $V(t)$ תתקבל המשוואה הבאה,

$$\dot{V}(t) = -h^T(x)h(x) - u^T(t)Ru(t)$$

מכיוון שבחוג הסגור $u(t)=u(x(t))$ אז גם $V(t)=V(x(t))$ ואת המשוואה למעלה ניתן לכתוב גם כך,

$$\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \dot{x} + h^T(x)h(x) + u^T(x)Ru(x) = 0$$

נציב ב- $\dot{x}(t)$ את מודל התהליך, ונקבל משוואה עם ביטוי לו נקראה המילטוניאן (**Hamiltonian**)

$$H\left(x, \nabla V, u\right) \triangleq \nabla V^T(x)\left(f(x) + g(x)u(x)\right) + h^T(x)h(x) + u^T(x)Ru(x) = 0$$

כאשר $\nabla V = \dfrac{\partial V}{\partial x} \in R^n$ (**gradient** - נגזרת של סקלר לפי ווקטור, נגזרת כיוונית)

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

המשוואה בשקף הקודם $H\left(x,\nabla V,u\right)=0$ נקראת גם, **Bellman equation**.

היא משוואה דיפרנציאלית המאפשרת את חישוב פונקציית הערך (מחיר) $V(x)$ כפונקציית של כניסה קבילה $u(x)$ כלשהי (ללא חישוב האינטגרל). תנאי ההתחלה של הפתרון הינו $V(x)\big|_{x=0}=0$

נחשב את אות הבקרה $u(x)=u^*(x)$ המביא לפעולה של התהליך עם ערך V (מחיר) מינימלי.

נשתמש בעיקרון המינימום של **Pontryagin** (**PMP, 1962**) הקובע כי,

$$H\left(x,\nabla V^*,u^*\right)\le H\left(x,\nabla V^*,u\right)\quad,\quad \forall u(x)$$

כלומר הבקר עם **הערך המינימלי** (optimal policy) הוא כזה הממזער את $H\left(x,\nabla V^*,u\right)$.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

לכן את ה- optimal policy ניתן לקבל מ- $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$

(זה נקרא **stationarity condition**)

מתוך נגזרת חלקית של ההמילטוניאן (עם $\nabla V^*(x)$) לפי u והשוואה לאפס, נקבל,

$$g^T(x)\nabla V^*(x) + 2Ru^*(x) = 0$$

אז,

$$u^*(x) = -\frac{1}{2}R^{-1}g^T(x)\nabla V^*(x)$$

זהו ה- **optimal policy**, אבל אנו עדיין לא יודעים מהו $\nabla V^*(x)$.

לכן נציב את זה חזרה במשוואה של Bellman ונקבל, . . . (ראה בשקף הבא,

כאשר נשמיט את ציון ה- *)

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

$$\nabla V^T(x)\big(f(x)+g(x)u\big)+h^T(x)h(x)+u^T R u=0$$

$$-\frac{1}{2}R^{-1}g^T(x)\nabla V^*(x)$$

נקבל,

$$\nabla V^T f(x)+h^T(x)h(x)-\frac{1}{4}\nabla V^T(x)g(x)R^{-1}g^T(x)\nabla V(x)=0$$

משוואה זו נקראת (HJB) **Hamilton-Jacobi-Bellman**, אותה יש לפתור כדי להשיג את,

$\nabla V^*(x)$ הדרוש בביטוי של הבקר.

את המשוואה פותרים עם תנאי הגבול $V(x)\big|_{x=0}=0$.

<u>מבוא לבקרה אופטימלית</u>

<u>הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)</u>

נציג הוכחה פורמלית לכך שהבקר $u^*(x)$ המתבסס על פתרון משוואת HJB הוא (<u>בתנאים מסוימים</u>) הבקר האופטימלי (כלומר, זה המביא לפונקציית מחיר $J(u)$ **מינימלית** וכן **ליציבות** של החוג הסגור).

טענה 1 (Lemma - משפט עזר)

עבור כל $u(x)$ (control policy) קביל (admissible), מתקבל $V(x) \geq 0$ המקיים את משוואת Bellman. ונניח כי $u^*(x)$ הוא הבקרה האופטימלי (optimal policy) אז,

$$H\left(x, \nabla V, u\right) = H\left(x, \nabla V, u^*\right) + (u - u^*)^T R(u - u^*)$$

כלומר,

פונקציית ההמילטוניאן הינה ריבועית ביחס לשינוי סביב ה- optimal policy .

(נדגיש כי ההמילטוניאן $H\left(\cdot\right)$ הינו פונקציה של פונקציות-של-x ו- $u^*(\cdot)$ היא פונקציה של ∇V)

<u>מבוא לבקרה אופטימלית</u>

<u>הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)</u>

הוכחה

פונקציית ההמילטוניאן נתונה ע"י,

$$H\left(x,\nabla V,u\right)=\nabla V^{T}\left(f+gu\right)+h^{T}h+u^{T}Ru$$

$$=\nabla V^{T}f+h^{T}h+\underbrace{\nabla V^{T}gu+u^{T}Ru}$$

נבצע כאן
השלמה לריבוע,

נקבל (אחרי השלמה לריבוע),

$$H\left(x,\nabla V,u\right)=$$

$$\underbrace{\nabla V^{T}f+h^{T}h-\frac{1}{4}\nabla V^{T}gR^{-1}g^{T}\nabla V}_{H\left(x,\nabla V,u^{*}\right)}+(u+\frac{1}{2}R^{-1}g^{T}\nabla V)^{T}R(u+\underbrace{\frac{1}{2}R^{-1}g^{T}\nabla V}_{u^{*}})$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

לפני הצגת הטענה הבאה, נגדיר,

המערכת

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$y = h(x)$$

היא **zero-state observable** אם,

$$\left.\begin{aligned} u(t) &\equiv 0 \\ y(t) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x(t) = 0$$

כלומר, מתוך העובדה שהכניסה והמוצא שווים אפס באופן זהותי (אפס לאורך זמן), ניתן להסיק כי המערכת נמצאת בראשית ($x(t) = 0$).

אם תכונה זו מתקיימת, אז נומר שהצמד $\left(f(x), h(x) \right)$ הוא zero-state observable.

תכונה זו תאפשר לקשור בין העובדה של- J ערך סופי ובין התכנסות של המערכת לראשית.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

טענה 2 (הבקר האופטימלי)

נניח כי הצמד $\left(f(t), h(t)\right)$ הוא zero-state observable.

אז הבקר $$u^*(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} g^T(x) \nabla V^*(x)$$

כאשר $V^*(x) \in C^1 : R^n \to R$ הוא פתרון של משוואת HJB מתאימה,

ממזערת את $J(u)$ (במובן ש- $J(u^*) \leq J(u)$)

וגם החוג הסגור,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u^* = f(x) - \frac{1}{2} g(x) R^{-1} g^T(x) \nabla V^*(x)$$ **יציב** מקומית באופן **אסימפטוטי**.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

הוכחה

חלק 1 - יציבות

עבור כל פונקציה $V(x) \in C^1 : R^n \to R$ ניתן לחשב את הנגזרת בזמן, לאורך המסלולים של התהליך המבוקר, כלומר,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}(f + gu)}$$

נזכיר כי

$$H(x, \nabla V, u) = \overbrace{\nabla V^T (f + gu)} + h^T h + u^T R u$$

אז ניתן לכתוב,

$$H(x, \nabla V, u) = \frac{dV}{dt} + h^T h + u^T R u$$

<u>מבוא לבקרה אופטימלית</u>

<u>הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)</u>

הוכחה

חלק 1 – יציבות (המשך)

נניח כי $V^*(x)$ מקיימת את משוואת HJB, כלומר $H\left(x, \nabla V^*, u^*\right) = 0$

אז מתוך טענה 1,

$$H\left(x, \nabla V^*, u\right) = H\left(x, \nabla V^*, u^*\right) + (u-u^*)^T R(u-u^*)$$
$$= (u-u^*)^T R(u-u^*)$$

לכן,
$$\frac{dV}{dt} + h^T h + u^T R u = (u-u^*)^T R(u-u^*)$$

ואם נבחר להפעיל את הבקר האופטימלי ($u = u^*$), אז

$$\frac{dV}{dt} = -(h^T h + u^T R u)\Big|_{u=u^*}$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

הוכחה

חלק 1 – יציבות (המשך)

נשתמש ב- $V(t)=V(u(t))\big|_{u=u^*}$ (ה- value function) כפונקציית ליאפונוב, אז (על בסיס התוצאה

בשקף הקודם,

$$\frac{dV}{dt}=-(h^T h+u^T Ru)\big|_{u=u^*}=-(h^T h+\frac{1}{2}\nabla V^{*T} gR^{-1}g^T\nabla V^*)\le 0$$

תוצאה זו כבר מעידה על יציבות, אבל עדיין לא על יציבות אסימפטוטית.

התאוריה של **LaSalle** קובעת שהמערכת מתכנסת אל הקבוצה האינווריאנטית הגדולה ביותר ב-

$\frac{dV}{dt}\equiv 0$ מה שאומר שהמערכת מתכנסת אל $\begin{bmatrix} u(t)\equiv 0 \\ y(t)\equiv 0 \end{bmatrix}$ ובגלל שהצמד $\big(f(t),h(t)\big)$ הוא

zero-state observable אז $x(t)\to 0$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

הוכחה

חלק 2 - אופטימליות

עבור כל פונקציה $V(x)\in C^1 : R^n \to R$ ו- $T>0$, ניתן לכתוב,

$$J_T(u) = \underbrace{\int_0^T \left(h^T h + u^T R u\right) dt}_{\text{פונקציית המחיר מנוסחת על זמן סופי}} + \underbrace{\int_0^T \dot{V} dt - V(x(T)) + V(x(0))}_{=0}$$

$$= \int_0^T \left(h^T h + u^T R u\right) dt + \int_0^T \nabla V^T \left(f + gu\right) dt - V(x(T)) + V(x(0))$$

$$= \int_0^T H\left(x, \nabla V, u\right) dt - V(x(T)) + V(x(0))$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

הוכחה

חלק 2 – אופטימליות (המשך)

נניח כי $V^*(x)$ מקיימת את משוואת HJB, כלומר $H\left(x, \nabla V^*, u^*\right) = 0$

אז מתוך התוצאה בסוף השקף הקודם מקבלים,

$$J_T(u) = \int_0^T \left((u-u^*)^T R(u-u^*)\right) dt - V(x(T)) + V(x(0))$$

אם $u(t)$ הוא אות בקרה קביל (admissible), אז $V(x(T))\big|_{T\to\infty} = 0$ (זה שקול ל- $V(t))\big|_{t\to\infty} = 0$)

וניתן לכתוב $J(u) = \int_0^\infty \left((u-u^*)^T R(u-u^*)\right) dt + V(x(0))$

מכאן ברור שהבקר האופטימלי הוא $u = u^*$ והערך המינימלי של פונקציית המחיר הוא $V(x(0))$.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

המקרה הליניארי – פתרון לבעיית ה- LQR

בבעיית התכנון הליניארית, מודל התהליך נתון ע"י,

$\dot{x} = Ax + Bu$ כאשר $x \in R^n$ ו- $u \in R^m$.

פונקציית המחיר היא ריבועית (quadratic), $J(u) = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt$ עם, $Q \geq 0$ $R > 0$

פתרון דורש שהצמד (A, B) הוא סטביליזבילי (ניתן לייצוב) - זה שקול לדרישה ל- u admissible.

וכן שהצמד $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ הוא דטקטבילי (ניתן לצפייה) – זה שקול לדרישה ל- zero-state observable.

במקרה הליניארי, פונקציית הערך (value function) היא ריבועית וניתן לכתוב,

$V(x) = x^T P x$ עבור איזושהי מטריצה $P > 0$, לכן, $\nabla V = 2Px$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

המקרה הליניארי – פתרון לבעיית ה- LQR

אות הבקרה האופטימלי הוא,

$$u^*(x) = -\frac{1}{2}R^{-1}g^T(x)\nabla V^*(x) = -R^{-1}B^T Px$$

אבל, כדי להפעיל את הבקר יש לדעת את המטריצה P .

נזכיר כי $V^*(x)$ מתקבל מתוך פתרון משוואת HJB.

$$\nabla V^T(x)f(x) + h^T(x)h(x) - \frac{1}{4}\nabla V^T(x)g(x)R^{-1}g^T(x)\nabla V(x) = 0$$

במקרה הליניארי,

$$2x^T PAx + x^T Qx - x^T PBR^{-1}B^T Px = 0$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

המקרה הליניארי – פתרון לבעיית ה- LQR

מכיוון ש- $$2x^T PAx = x^T A^T Px + x^T PAx$$

את משוואת HJB של המקרה הליניארי, ניתן לכתוב כך,

$$x^T \left(A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P \right) x = 0$$

אם נשמיט את x ואת x^T משני הצדדים של המשוואה, נקבל את **משוואת ריקטי**,

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

(באמצעותה יש לחשב $P > 0$)

הבקר האופטימלי (LQR) הוא בקר משוב מצב, כלומר, $u(x) = -R^{-1}B^T Px = -Kx$

(עם מטריצת הגברי $K = R^{-1}B^T P$)

בקר משוב מצב אופטימלי

דוגמא 3

חישוב הבקר האופטימלי ב- MATLAB.

ב- Control Toolbox קיימות מספר פקודות לחישוב הבקר האופטימלי בקונפיגורציות שונות.

הפקודה הבסיסית (לחישוב בקר אופטימלי מסוג LQR) הינה – **lqr**.

ניתן לכתוב, K = lqr (A, B, Q, R)

או, K = lqr (sys, Q, R)

משתנה הכיל את התהליך המבוקר

אפשרות אחרת, [K, P, E] = lqr (A, B, Q, R)

כאן בנוסף לקבועי הבקר מקבלים גם את הפתרון של משוואות ריקטי וגם את הערכים העצמיים של החוג הסגור

קיימות גם פקודות המתאימות לתכנונים בקונפיגורציות מיוחדות שנציג בהמשך, כגון

K = lqry (sys, Q, R) למקרה בו פונקציית המחיר מנוסחת ביחס למוצא y ולא למצב x.

K = lqi (sys, Q, R) כאשר מוסיפים אינטגרל לחוג הפתוח לשיפור ביצועי מצב מתמיד.

בקר משוב מצב אופטימלי

דוגמא 3 (המשך)

נניח שמעוניינים לחשב בקר עבור התהליך הבא,

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

עם פונקציית המחיר,

$$J=\int_0^\infty\left(x^TQx+u^TRu\right)dt=\int_0^\infty\left(x^Tx+u^Tu\right)dt$$

כאן,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad R=1$$

פתרון ב- MATLAB,

```
A=[0 1; 0 -1]; B=[0; 1];
Q=eye(2); R=1
[K, P, E] = lqr (A, B, Q, R)
```

מתקבל,

$$K=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\qquad E=-1\pm 0j$$

בקר משוב מצב אופטימלי

דוגמא 3 (המשך)

נגסה גם פתרון עבור התהליך,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

עם פונקציית המחיר,

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt = \int_0^\infty \left(x^T x + u^T u \right) dt$$

פתרון ב- MATLAB,

```
A=[-1 1; 0 2]; B=[1; 0];
Q=eye(2); R=1
K = lqr (A, B, Q, R)
```

מתקבל,

$$K = \begin{bmatrix} NaN & NaN \end{bmatrix}$$

מדוע לא קיבלנו פתרון ?

מודל החוג הסגור עם בקר,

$$A - BK = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-k_1 & 1-k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

יש בחוג הסגור קוטב לא יציב ב- 2 , ללא תלות בערכו של הבקר, מדובר בתהליך **לא ניתן לייצוב**.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

נניח מערכת לא ליניארית מהצורה הבאה,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + k(x)d$$

כאשר ווקטור המצב $x(t) \in R^n$ (וכן, $f(x)$ Lipschitz באופן מקומי ומתקיים $f(0)=0$).

למערכת זו שתי כניסות (או "שחקנים"), כניסת הבקרה - $u(t) \in R^m$,

וכניסת ההפרעה - $d(t) \in R^q$.

תכנון חוק הבקרה מתבסס על פונקציית המחיר הבאה,

$$J(u,d) = \int_0^\infty r(x,u,d)dt = \int_0^\infty \left(h^T(x)h(x) + u^T Ru - \gamma^2 \|d\|^2 \right) dt$$

כאשר, $h(0)=0, \quad R>0, \quad \gamma>0,$

<u>מבוא לבקרה אופטימלית</u>

<u>הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)</u>

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

ביחס לפונקציית המחיר, אנו מנסחים את "המשחק" הדיפרנציאלי הבא,

$$J(u^*,d^*)=\min_u \max_d \int_0^\infty \left(h^T(x)h(x)+u^T Ru-\gamma^2 \left\|d\right\|^2\right)dt$$

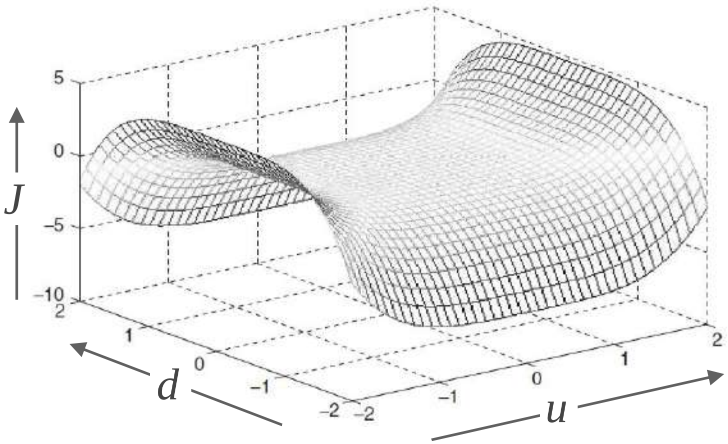
כלומר, אנו מעוניינים באות הבקרה הממזער את פונקציית המחיר ($\min_u$), במקרה של ההפרעה המזיקה ביותר ($\max_d$).

"המשחק" הוא בין ההפרעה (d) שרוצה להגדיל את פונקציית המחיר, ובין אות הבקרה (u) שרוצה להקטין את פונקציית המחיר (זה נקרא ZS game, מכיוון שרווח של שחקן אחד הוא בהכרח הפסד של האחר).

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

משחק דיפרנציאלי – Player Zero-Sum (ZS) Game



Optimal Control, 3rd Edition, Wiley, 2012

למשחק הדיפרנציאלי פתרון יחיד,

אם קיימת נקודת אוכף (u^*, d^*) ,

כלומר, אם,

$$J(u^*, d^*) = \min_u \max_d J(u,d) = \max_d \min_u J(u,d)$$

לחילופין, ניתן לומר כי נקודת אוכף מקיימת (עבור כל u ו- d),

$$J(u^*, d) \le J(u^*, d^*) \le J(u, d^*)$$

אי שיוון כזה נקרה **Nash equilibrium** – זהו מצב שיווי משקל בין השחקנים, מכיוון שסטייה

של כל אחד מהם ממצב זה בהכרח תפגע במצבו, בהנחה שהשחקן השני נשאר ללא שינוי.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

כדי למצוא את אות הבקרה וההפרעה "האופטימליים", נגדיר את פונקציית הערך באופן הבא,

$$V(t)=\int_t^{\infty}\left(h^T(x)h(x)+u^TRu-\gamma^2\|d\|^2\right)dt$$

נשתמש בכלל של **Leibniz** כדי לגזור את $V(t)$ בזמן (זה יאפשר ביטוי דיפרנציאלי לחישוב V)

נקבל,

$$\dot{V}=\nabla V^T(t)\dot{x}=-\left(h^T(x)h(x)+u^TRu-\gamma^2\|d\|^2\right)$$

או (אחרי הצבת מודל התהליך),

$$H\left(x,\nabla V^T,u,d\right)\triangleq h^Th+u^TRu-\gamma^2\|d\|^2+\nabla V^T\left(f+gu+kd\right)=0$$

כאשר גם הגדרנו את ההמילטוניאן של בעיית האופטימיזציה.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

ביחס להמילטוניאן, הפתרון האופטימלי (Nash equilibrium),

$$H\left(x,\nabla V^T,u^*,d\right)\le H\left(x,\nabla V^T,u^*,d^*\right)\le H\left(x,\nabla V^T,u,d^*\right)$$

זהו **Isaac’s condition**, הוא מרחיב את עקרון ה- PMP לבעיית ה- ZS game, לכן,

במצב שיווי משקל מתקיים, $\frac{\partial H}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial H}{\partial d}=0$ (זו נקודת האוכף, היא מתקיימת לכל t)

מתוך ביטויים אלה ניתן לקבל את ה- optimal policies,

התוצאה הינה,

$$u^*=-\frac{1}{2}R^{-1}g^T\nabla V$$

$$d^*=\frac{1}{2\gamma^2}k^T\nabla V$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

מנגזרת שניה של ההמילטוניאן נקבל,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 2R > 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial d^2} = -2\gamma^2 < 0$$

מכאן, u^* נקודת מינימום ו- d^* נקודת מקסימום של ההמילטוניאן.

אם נציב את ה- optimal policies (ללא ציון ה- $*$), חזרה בהמילטוניאן ונשווה לאפס, נקבל,

$$h^T h + \nabla V^T f - \frac{1}{4}\nabla V^T g R^{-1} g^T \nabla V + \frac{1}{4\gamma^2}\nabla V^T k k^T \nabla V = 0$$

זוהי משוואת **Hamilton-Jacobi-Isaac**, אתה מחשבים את ∇V הדרוש באות הבקרה u^* .

(ניתן גם לחשב את ההפרעה המזיקה ביותר d^*). לחישוב V , משתמשים בתנאי הגבול $V(0) = 0$.

<u>מבוא לבקרה אופטימלית</u>

<u>הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)</u>

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

כדי לפתור את משוואת (**HJI**) Hamilton-Jacobi-Isaac, דרוש ש- $\gamma > \gamma^*$ כאשר γ^* הוא ה- γ המינימלי המאפשר פתרון. הערך γ^* נקרא גם ה- **H-infinity gain** של המערכת.

כדי להראות ש- u^* ו- d^* הם אכן הפתרונות של המשחק הדיפרנציאלי דרושה הטענה הבאה.

טענה 3 (Lemma - משפט עזר)

עבור $u(x), d(x)$ המובילים לערכך סופי של V (אינטגרל)

נניח כי מתקבל $V(x) \geq 0$ הפותר את $H\left(x, \nabla V, u, d\right) = 0$ (Bellman eq.), אז

$$H\left(x, \nabla V, u, d\right) = H\left(x, \nabla V, u^*, d^*\right) + (u - u^*)^T R(u - u^*) - \gamma^2 \left\| d - d^* \right\|^2$$

(כאשר u^*, d^* מתקבלים מפתרון HJI)

הוכחה מתבססת על השלמה לריבוע ב- H.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

טענה 4 (פתרון המשחק הדיפרנציאלי)

נניח כי למשחק הדיפרנציאלי ערך ($V(t)$) סופי.

ונניח כי $V^*(x) \in C^1$ הוא פתרון חיובי של משוואת HJI, כך שהחוג הסגור,

$$\dot{x} = f + gu^* + kd^* = f - \frac{1}{2} gR^{-1}g^T \nabla V^* + \frac{1}{2\gamma^2} kk^T \nabla V^*$$

יציב מקומית באופן אסימפטוטי.

וכן ש- $\dot{x} = f + gu, \quad y = h$ היא **zero-state observable** (זה אומר שאם $u \equiv 0, y \equiv 0$ אז $x = 0$)

אז, ל- $J(u,d)$ נקודת אוכף שם

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} g^T \nabla V, \quad d^* = \frac{1}{2\gamma^2} k^T \nabla V$$

והערך של פונקציית המחיר, $J(u^*, d^*) = V^*\left(x(0)\right)$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

הוכחה (כאן מוכיחים רק אופטימליות, מכיוון שכבר הנחנו שהפתרונות האופטימליים מייצבים)

עבור כל פונקציה $V(x) \in C^1 : R^n \to R$ ו- $T > 0$, ניתן לכתוב,

$$J_T(u) = \overbrace{\int_0^T \left(h^T h + u^T R u - \gamma^2 \|d\|^2 \right) dt}^{\text{פונקציית המחיר מנוסחת על זמן סופי}} + \overbrace{\int_0^T \dot{V} dt - V(x(T)) + V(x(0))}^{=0}$$

$$= \int_0^T \left(h^T h + u^T R u - \gamma^2 \|d\|^2 \right) dt + \int_0^T \nabla V^T \left(f + gu + kd \right) dt - V(x(T)) + V(x(0))$$

$$= \int_0^T H\left(x, \nabla V, u, d \right) dt - V(x(T)) + V(x(0))$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

הוכחה (המשך)

אם $V^*(x)$ מקיים את משוואת **HJI**, אז $H\left(x,\nabla V^*,u^*,d^*\right)=0$

ויחד עם טענה 3, את $J_T(u)$ (מהשקף הקודם) ניתן לכתוב כך,

$$J_T(u)=\int_0^T\left((u-u^*)^T R(u-u^*)-\gamma^2\left\|d-d^*\right\|^2\right)dt-V^*(x(T))+V^*(x(0))$$

ביחס לכל $u(x),d(x)$ המובילים לערך סופי של פונקציית המחיר, ברור כי $V^*(x(T))\to 0$

כאשר $T\to\infty$ וניתן לכתוב,

$$J(u,d)=\int_0^\infty\left((u-u^*)^T R(u-u^*)-\gamma^2\left\|d-d^*\right\|^2\right)dt+V^*(x(0))$$

<u>מבוא לבקרה אופטימלית</u>

<u>הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)</u>

משחק דיפרנציאלי – Two Player Zero-Sum (ZS) Game

הוכחה (המשך)

מכאן ברור כי,

$$J(u^*, d^*) = \min_u \max_d \left[\int_0^\infty \left((u-u^*)^T R(u-u^*) - \gamma^2 \left\| d - d^* \right\|^2 \right) dt + V^*(x(0)) \right]$$

$$= V^*(x(0))$$

ו- **Nash equilibrium** (או **saddle point**) מתקבל כאשר

$$u(t) = u^*(t)$$

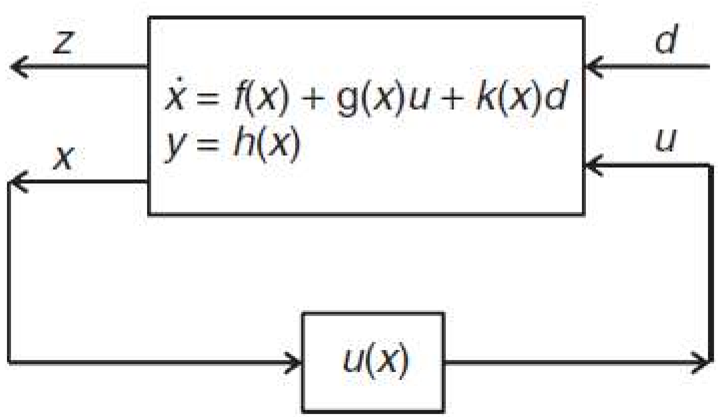
$$d(t) = d^*(t)$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞

נדון במערכת הבאה,



Optimal Control, 3rd Edition, Wiley, 2012

d - הפרעה

z - פלט מבוקר

y - פלט

אנו מעוניינים באות הבקרה $u(t)$ כך שעבור $x(0)=0$ ועבור הפרעה המקיימת $d(t) \in L_2[0,\infty)$

מתקבל,

$$\frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt} = \frac{\int_0^\infty \left(h^T h + u^T R u\right) dt}{\int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt} \le \gamma^2$$

כאשר, $\gamma > 0$, $R > 0$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞

הבהרות,

הביטוי, $\sqrt{\int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt}$ נקרא נורמת L_2 (L_2 norm) של $d(t)$.

מרחב האותות $L_2[0,\infty)$ כולל את כל האותות בעלי נורמת L_2 סופית.

אותות כאלה חייבים לדעוך לאפס כאשר $t \to \infty$.

מטרת התכנון הינה בקר מייצב המגביל את ה- L_2 gain של המערכת מ- $d(t)$ ל- $z(t)$ כך שיהיה קטן או שווה γ .

באופן מעשי, תכנון כזה מגביל את השפעת ההפרעה על הפלט המבוקר.

בתכנון בקר H_∞ אופטימלי, מחפשים את הבקר שביחס אליו ה- γ היא מינימלית כלומר $\gamma = \gamma^*$.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞

הבהרות (המשך),

ה- L_2 gain הנמוך ביותר (כלומר γ^*) נקרא ה- H_∞ gain של המערכת.

נראה כי הפתרון שהצגנו לבעיית ה- ZS game, מהווה (בתנאים מסוימים) פתרון לבעיית ה- L_2 gain **Bounded** (כלומר תכנון עבור $\gamma > \gamma^*$ נתון (לא בהכרח ה- γ האופטימלי)

כדי להשיג את ה- γ המינימלי, מבצעים אטרציות. בכל איטרציה מקטינים מעט את γ ופותרים מחדש. התהליך נפסק כאשר לא ניתן יותר לקבל פתרון במשוואת HJI.

מבוא לבקרה אופטימלית

Pontryagin's Minimum Principle (PMP) – הפתרון האופטימלי מתוך

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞

טענה 5 (פתרון התכנון לבעייתה- **(Bounded** L_2 gain

בחר $\gamma > \gamma^* > 0$.

נניח $V^*(x) > 0 \in C^1 : R^n \to R$ הינו פתרון של משוואת HJI.

וכן ש- $\dot{x} = f + gu, \quad y = h$ היא zero-state observable (זה אומר שאם $u \equiv 0, y \equiv 0$ אז $x = 0$)

אז החוג הסגור, $\dot{x} = f + gu^* = f - \frac{1}{2} gR^{-1}g^T \nabla V^*$ יציב מקומית באופן אסימפטוטי.

-ו $\frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt} \le \gamma^2$ מתקיים לכל הפרעה $d(t) \in L_2[0, \infty)$.

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin’s Minimum Principle (PMP)

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞

הוכחה,

עבור כל פונקציה $V(x) > 0 \in C^1 : R^n \to R$, ניתן לכתוב,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}\left(f + gu + kd\right)$$

$$H\left(x, \nabla V, u, d\right) = \nabla V^T\left(f + gu + kd\right) + h^T h + u^T R u - \gamma^2 d^T d$$

אז,

$$H\left(x, \nabla V, u, d\right) = \frac{dV}{dt} + h^T h + u^T R u - \gamma^2 d^T d$$

מבוא לבקרה אופטימלית

Pontryagin's Minimum Principle (PMP) – הפתרון האופטימלי מתוך

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞

הוכחה (המשך),

אם $V(x)$ מקיימת את משוואת HJI, אז מתוך **טענה 3**,

$$H\left(x, \nabla V, u, d\right) = (u - u^*)^T R(u - u^*) - \gamma^2 \left\| d - d^* \right\|^2$$

ויחד עם התוצאה בשקף הקודם,

$$\frac{dV}{dt} + h^T h + u^T R u - \gamma^2 d^T d = (u - u^*)^T R(u - u^*) - \gamma^2 \left\| d - d^* \right\|^2$$

אם נבחר $u(t) = u^*(t)$, אז לכל $d(t)$ נקבל,

$$(*) \qquad \frac{dV}{dt} + h^T h + u^T R u - \gamma^2 d^T d \le 0$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞

הוכחה (המשך),

כדי להראות יציבות אסימפטוטית של החוג הסגור, נציב בקשר האחרון $d=0$,

נקבל,

$$\frac{dV}{dt} \le -\left(h^T h + u^T R u\right) = \|z\|^2$$

אז אם $V(t)$ בתפקיד פונקציית ליאפונוב, קיבלנו שהנגזרת שלה בזמן (לאורך המסלולים של המערכת), היא שלילית למחצה, מה שמבטיח יציבות.

לכן $z(t)\to 0$ (כאשר $t\to\infty$) ומכאן גם $h\to 0$.

יחד עם תכונת ה- zero-state observable והתיאוריה של **LaSalle** מתקבל $x\to\infty$,

(כלומר, יציבות אסימפטוטית מקומית)

מבוא לבקרה אופטימלית

Pontryagin's Minimum Principle (PMP) – הפתרון האופטימלי מתוך

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞

הוכחה (המשך),

עכשיו, נחשב אינטגרל של $(*)$ בין אפס לאינסוף, נקבל,

$$\int_0^\infty \left(\frac{dV}{dt} + h^T h + u^T R u - \gamma^2 d^T d \right) dt \le 0$$

או,

$$V\left(x(\infty)\right) - V\left(x(0)\right) + \int_0^\infty \left(h^T h + u^T R u - \gamma^2 d^T d \right) dt \le 0$$

אם נבחר, $x(0)=0$ אז $V\left(x(0)\right)=0$ ו- $V\left(x(\infty)\right)>0$. נקבל,

Bounded L_2 gain ,כלומר

$$\int_0^\infty \left(h^T h + u^T R u \right) dt \le \gamma^2 \int_0^\infty \left(d^T d \right) dt$$

וההפרעה המזיקה ביותר היא $d(t) = d^*(t)$.

<u>מבוא לבקרה אופטימלית</u>

<u>הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)</u>

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞ <u>ליניארית</u>

כאן התהליך הינו,

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dd$$ כאשר $x(t) \in R^n$

פונקציית המחיר היא ריבועית (quadratic) ונתונה ע"י,

$$J(u) = \int_0^\infty \left(x^T H^T H x + u^T R u - \gamma^2 \|d\|^2 \right) dt$$ עם $R > 0$, $Q \geq 0$ ו- $\gamma > 0$.

לכן גם פונקציית הערך (value function) היא ריבועית וניתן לכתוב,

$$V(x) = x^T P x$$ עבור איזושהי מטריצה $P > 0$,

ו- $$\nabla V = 2Px$$

מבוא לבקרה אופטימלית

הפתרון האופטימלי מתוך – Pontryagin's Minimum Principle (PMP)

יישום משחק דיפרנציאלי ZS Game לפתרון בעיית בקרה מסוג H_∞ ליניארית

אות הבקרה האופטימלי הוא,

$$u^*(x) = -\frac{1}{2}R^{-1}g^T(x)\nabla V^*(x) = -R^{-1}B^TPx$$

וההפרעה המזיקה ביותר,

$$d^*(x) = \frac{1}{2\gamma^2}k^T\nabla V^*(x) = \frac{1}{\gamma^2}D^TPx$$

כאן $V^*(x) = x^TPx$ מתקבל מפתרון משוואת HJI. נציב במשוואה $\nabla V = 2Px$,

יחד עם מטריצות המודל הליניארי.

נקבל (אחרי שנשמיט את x ואת x^T משני הצדדים של המשוואה), משוואת ריקטי מהצורה,

$$A^TP + PA + H^TH - PBR^{-1}B^TP + \frac{1}{\gamma^2}PDD^TP = 0$$

(את הבקר מחשבים עם $P > 0$)

מבוא לבקרה אופטימלית

סיכום נוסחאות לתכנון בקר אופטימלי לא ליניארי

תהליך מבוקר *Affine* system	$\dot{x} = f(x) + g(x)u$ עם $f(0) = 0$
קריטריון תכנון $u^* = \arg\min J$	$J(u^*) = \min_u \int_0^\infty \left(h^T(x)h(x) + u^T R u\right) dt$ עם $h(0) = 0, \;\; R > 0$
נוסחאות תכנון (הפתרון מתבסס על משוואת **HJB**)	$u^*(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} g^T(x) \nabla V(x)$ $\nabla V^T f(x) + h^T(x)h(x) - \frac{1}{4} \nabla V^T(x) g(x) R^{-1} g^T(x) \nabla V(x) = 0$

מבוא לבקרה אופטימלית

סיכום נוסחאות לתכנון בקר אופטימלי ליניארי (LQR)

תהליך מבוקר *Linear* system	$\dot{x} = Ax + Bu$
קריטריון תכנון $u^* = \arg\min J$	$J(u^*) = \min\limits_{u} \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt$ עם $Q \geq 0, \;\; R > 0$
נוסחאות תכנון (הפתרון מתבסס על משוואת **Riccati**)	$u^*(x) = -R^{-1} B^T P x$ $A^T P + PA + H^T H - PBR^{-1} B^T P = 0 \quad , \qquad P > 0$

מבוא לבקרה אופטימלית

סיכום נוסחאות לפתרון משחק דיפרנציאלי (סכום אפס) לא ליניארי

תהליך מבוקר *Affine* system	$\dot{x} = f(x) + g(x)u + k(x)d$ עם $f(0) = 0$
קריטריון תכנון	$J(u^*, d^*) = \min\limits_u \max\limits_d \int_0^\infty \left(h^T(x)h(x) + u^T R u - \gamma^2 \left\| d \right\|^2 \right) dt$ מתקבל פתרון עם (Bounded L_2 gain) $\dfrac{\int_0^\infty \left\| z(t) \right\|^2 dt}{\int_0^\infty \left\| d(t) \right\|^2 dt} \le \gamma^2$ כאשר $z = \begin{bmatrix} h \\ R^{1/2} x \end{bmatrix}$
נוסחאות תכנון (הפתרון מתבסס על משוואת **HJI**)	$u^* = -\dfrac{1}{2} R^{-1} g^T \nabla V$ $\quad$ $d^* = \dfrac{1}{2\gamma^2} k^T \nabla V$ $h^T h + \nabla V^T f - \dfrac{1}{4} \nabla V^T g R^{-1} g^T \nabla V + \dfrac{1}{4\gamma^2} \nabla V^T k k^T \nabla V = 0$

מבוא לבקרה אופטימלית

סיכום נוסחאות לפתרון משחק דיפרנציאלי (סכום אפס) ליניארי (H_∞)

תהליך מבוקר *Linear* system	$\dot{x} = Ax + Bu + Dd$
קריטריון תכנון	$J(u^*, d^*) = \min_u \max_d = \int_0^\infty \left(x^T H^T H x + u^T R u - \gamma^2 \|d\|^2 \right) dt$ $z = \begin{bmatrix} h \\ R^{1/2} x \end{bmatrix}$ כאשר $\dfrac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 \, dt}{\int_0^\infty \|d(t)\|^2 \, dt} \le \gamma^2$ מתקבל פתרון עם) (Bounded L_2 gain
נוסחאות תכנון הפתרון מתבסס) על משוואת (**Riccati**	$d^* = \dfrac{1}{\gamma^2} D^T P x$ $\quad u^* = -R^{-1} B^T P x$ $A^T P + PA + H^T H - PBR^{-1} B^T P + \gamma^{-2} PDD^T P = 0 \quad , \quad P > 0$