מערכות מכטרוניות

מבוא לבקרה של רחפנים

שי ארוגטי

התמונות במצגת זו נלקחו מהספר:

"Quad Rotorcraft Control, Vision-Based Hovering and Navigation" by Luis Rodolfo García Carrillo, Alejandro Enrique Dzul López, Rogelio Lozano, Claude Pégard

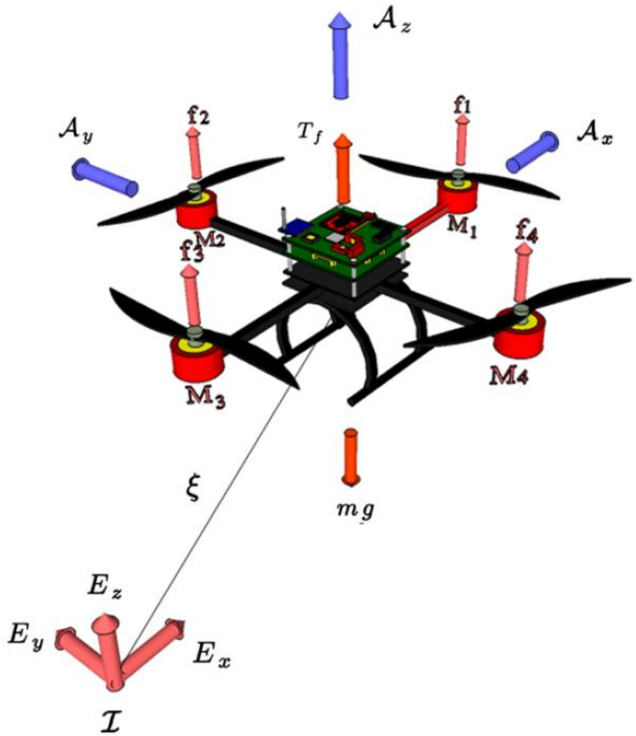
בקרה של כלי טיס מסוג רחפן

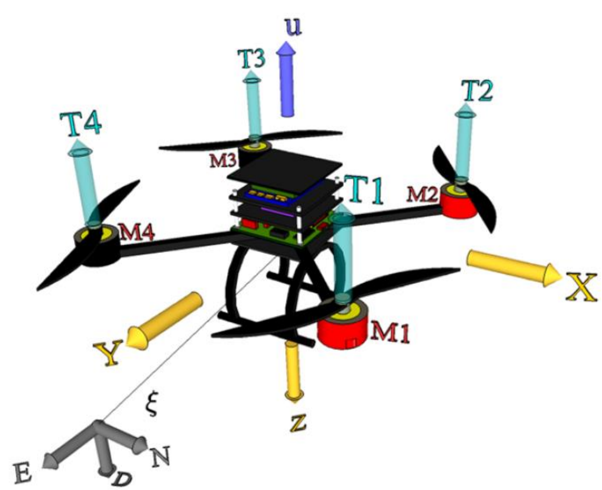
פיתוח מודל דינמי

כאן אנו מפתחים מודל דינמי שיהיה פשוט מספיק לצורך תכנון מערכות בקרה (תופעות כגון, גמישות הלהבים או הדינאמיקה בפנימית של המנועים אינן נלקחות בחשבון).

נציג פיתוח מודל גם ע"י שימש בגישה של Euler–Lagrange וגם ע"י שימוש במשוואות Newton–Euler.

בפיתוח נתייחס גם לרחפן בתצורת + (פלוס) וגם לחפן בתצורת x (אקס).



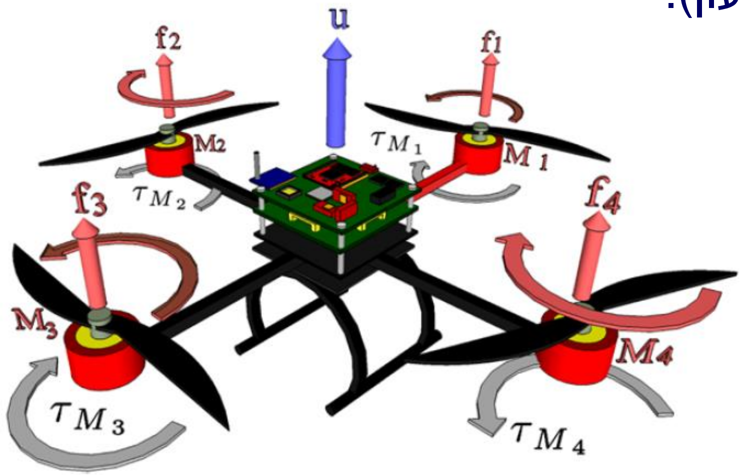


הבקרה של הרחפן מתבצעת ע"י הפעלת מהירות סיבוב מתאימה בכל אחת מארבעת המנועים.

כל מנוע $M_i \ (for \ i=1,\ldots,4)$ מפעיל כוח דחף ומומנט, והקומבינציה של אלה יוצרת כוח דחף שקול ומומנט סביב כל אחד מהצירים.

נהוג להניח שהכוח f_i שכל מנוע מפעיל הוא פרופורציונלי לריבוע מהירות הסיבוב של המדחף, כלומר $f_i = k\omega_i^2$.

כל **מנוע מסתובב בכיוון אחד בלבד לכן הכוח** f_i **הוא תמיד חיובי**. המנוע הקדמי $\left(M_1\right)$ והמנוע האחורי $\left(M_3\right)$ מסתובבים עם כיוון השעון, לעומתם, המנוע השמאלי $\left(M_2\right)$ והימני $\left(M_4\right)$ מסתובבים נגד כיוון השעון).

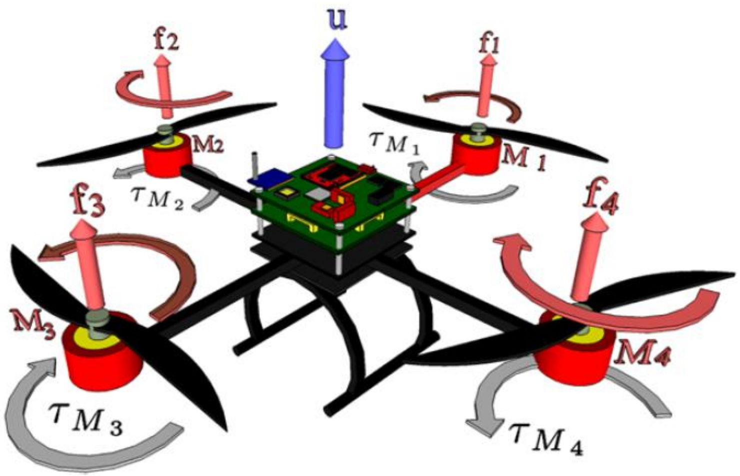


בקונפיגורציה כזאת, אפקטים ג'ירוסקופים ומומנטים הנובעים מכוחות אווירודינמיים מבטלים אחד את השני במצב ריחוף.

מומנט העלרוד (pitch) הוא יחסי להפרש $f_1 - f_3$, ומומנט הגלגול (roll) יחסי להפרש $f_2 - f_4$

מומנט הסבסוב (yaw) הוא סכום המומנטים $\tau_{M1} + \tau_{M2} + \tau_{M3} + \tau_{M4}$, כאשר τ_{Mi} הוא מומנט התגובה כתוצאה מהתגדרות האוויר לסיבוב המדחף (גרר, drag) והכוח הדרוש להאצת המדחף,

משוואת הכוחות במנוע



$$I_{rot}\dot{\omega} = \tau_{Mi} - \tau_{\text{drag}} \quad (2.1)$$

כאשר I_{rot} מומנט אינרציה ו τ_{drag} גרר

$$\tau_{\text{drag}} = \frac{1}{2}\rho A v^2 \quad (2.2)$$

$$\tau_{\text{drag}} = \frac{1}{2}\rho A v^2 \quad (2.2)$$

כאן ρ צפיפות האוויר, A שטח החתך החזיתי (הנתקל באוויר) ו- v היא המהירות יחסית לאוויר

המהירות הזוויתית ω היא יחסית למהירות הקווית v מחולקת ברדיוס שקול r

$$\omega = \frac{v}{r} \quad (2.3)$$

מכל זה נובע שאת מומנט הגרר ניתן לכתוב כך $\tau_{\text{drag}} = k_{\text{drag}}\omega^2 \quad (2.4)$

כאשר הקבוע $k_{\text{drag}} > 0$ תלוי בצפיפות האוויר ובצורה של המדחף.

אם אנו מזניחים את הדינאמיקה של המנועים (לצורך תכנון מערכת הבקרה), אז ניתן להניח,

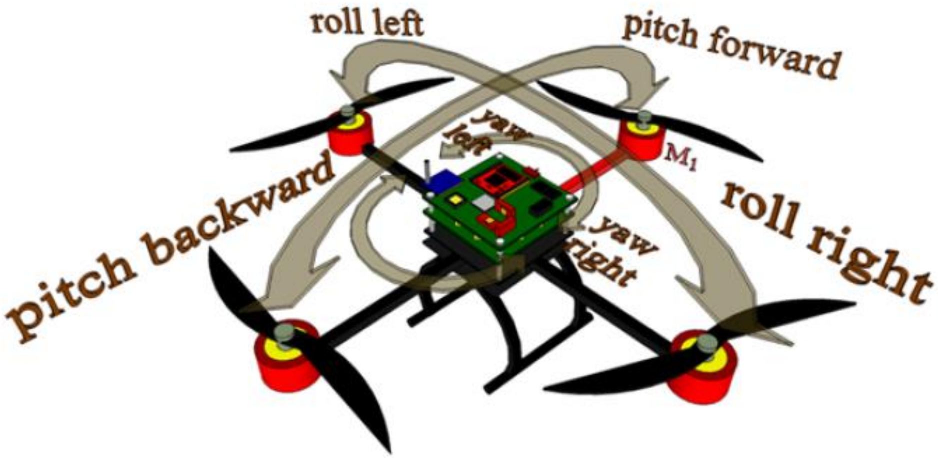
$$\tau_{Mi} = \tau_{\text{drag}} \quad (2.5)$$

תנועה,

תנועה קדימה היא תוצאה של הטיית הכלי קדימה (עלרוד - pitch) ע"י הגדלת המהירות של המנוע האחורי M_3 והקטנת המהירות של המנוע הקדמי M_1 .

באופן דומה, תנועת גלגול (roll) מושגת ע"י שינוי המהירויות במנועים הימני והשמאלי.

תנועת סבסוב מתקבלת ע"י הגדלת המהירות במנועים הקדמי והאחורי (כדי להגדיל את τ_{M1} ואת τ_{M3} , יחד עם הקטנת המהירות במנועים הצדדיים (כדי להקטין את τ_{M2} ו- τ_{M4}).



<u>משוואות תנועה</u>,

המודל של כלי הטיס כאן הוא מודל של גוף קשיח במרחב ומתאר את תנועת הכלי ביחס ל- 6 דרגות חופש.

למרות שלכלי הטיס 6 דרגות חופש, לא ניתן לבקר את כולן ביחד, מכיוון שניתן להגדיר 4 כניסות בלבד (כוח דחף שקול ניצב תמיד לכלי הטיס ו- 3 מומנטים, מומנט עלרוד, מומנט גלגול ומומנט סבסוב).

מערכת כזאת נקראת מערכת תת ממונעת (under actuated) והבקרה שלה יותר מורכבת.

פיתוח משוואות התנועה בגישת Euler-Lagrange.

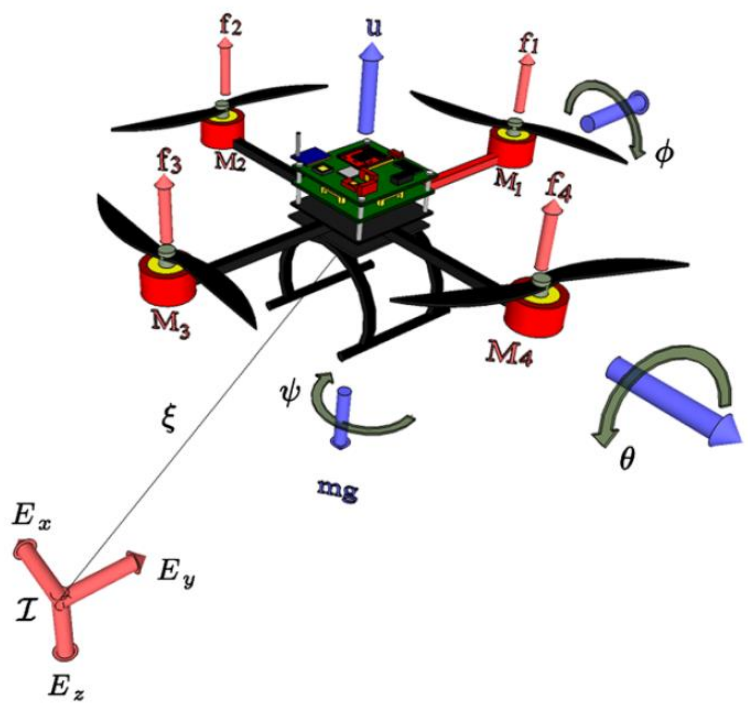
נגדיר ווקטור קואורדינאטות מוכללות,

$$q = \begin{bmatrix} x & y & z & \psi & \theta & \phi \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6 \quad (2.6)$$

$$q=\begin{bmatrix} x & y & z & \psi & \theta & \phi \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6 \quad (2.6)$$

כאשר הווקטור $\xi=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ מייצג את מיקום מרכז הכובד ביחס למערכת צירים אינרציאלית f .

המצב הזוויתי מיוצג ע"י הווקטור $\eta=\begin{bmatrix} \psi & \theta & \phi \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ הכולל את זוויות אוילר. ψ זווית סבסוב (סביב ציר z), θ זווית עלרוד (סביב ציר y) ו- ϕ זווית הגלגול (סביב x).



נרשום את הלגרנג'יאן באופן הבא,

$$L\left(q,\dot{q}\right)=T_{\text{trans}}+T_{\text{rot}}-U \quad (2.7)$$

כאשר, $T_{\text{trans}}=\frac{1}{2}m\dot{\xi}^T\dot{\xi}$ היא האנרגיה הקינטית הקווית (translational), $T_{\text{rot}}=\frac{1}{2}\Omega^T I\Omega$ היא האנרגיה הקינטית הסיבובית (rotational) ו- $U=mgz$ היא האנרגיה הפוטנציאלית.

(m מסת הכלי, g תאוצת הגרביטציה ו- z גובה)

ווקטור המהירות הזוויתית Ω קשור לנגזרת של זוויות אוילר $\dot{\eta}$ באופן הבא,

$$\Omega=W_{\mu}\dot{\eta} \quad (2.8)$$

כאשר,

$$W_{\mu}=\begin{bmatrix}-\sin\theta & 0 & 1\\ \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & 0\\ \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & 0\end{bmatrix} \quad (2.9)$$

לכן נקבל,

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi \\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

נגדיר מטריצת אינרציה מוכללת (מטריצה זו היא תלויה בזמן, למעשה בזוויות אוילר),

$$J = J\left(\eta\right) = W_{\eta}{}^{T} I W_{\eta} \quad (2.11)$$

כאשר מטריצת האינרציה I ביחס למערכת הגוף היא,

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

לכן האנרגיה הקינטית הסיבובית,

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^{T} J \dot{\eta} \quad (2.13)$$

משוואת התנועה מתקבלות מתוך,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=\begin{bmatrix} F_{\xi} \\ \tau \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

כאשר, $F_{\xi}=R\hat{F}\in\mathbb{R}^3$ הוא הכוח המוכלל המוביל לתנועה קווית, ו- $\tau\in\mathbb{R}^3$ הכוח המוכלל המוביל לתנועה סיבובית (ווקטור המומנטים סביב שלושת הצירים).

מטריצת הסיבוב $R\left(\psi,\theta,\phi\right)\in SO(3)$ מייצגת את סיבוב כלי הטיס ביחס למערכת האינרציאלית

$$R=\begin{bmatrix} c_{\theta}c_{\psi} & c_{\psi}s_{\theta}s_{\phi}-c_{\phi}s_{\psi} & s_{\phi}s_{\psi}+c_{\phi}c_{\psi}s_{\theta} \\ c_{\theta}s_{\psi} & c_{\phi}c_{\psi}+s_{\theta}s_{\phi}s_{\psi} & c_{\phi}s_{\theta}s_{\psi}-c_{\psi}s_{\phi} \\ -s_{\theta} & c_{\theta}s_{\phi} & c_{\theta}c_{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

הקיצור c_{θ} מתכוון $\cos\theta$ והקיצור s_{θ} הוא $\sin\theta$.

בנוסף,

$$\hat{F}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$u=\sum_{i=1}^{4} f_i \quad (2.17)$$

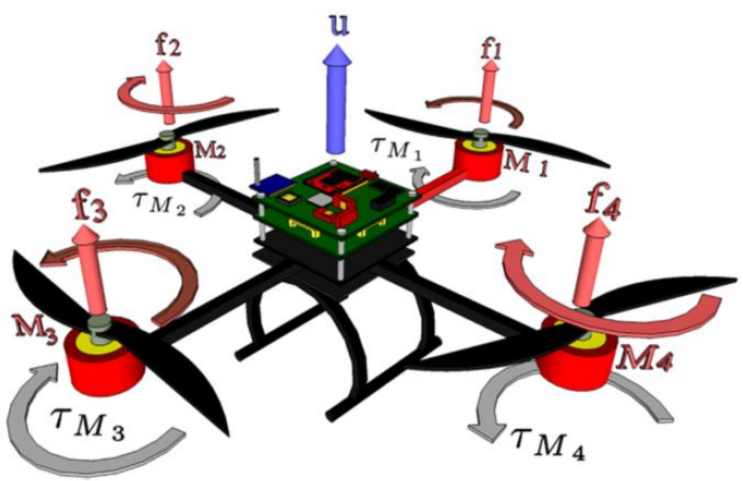
כוח הדחף השקול, כאשר,

$$f_i=k\omega_i^2$$

את ווקטור המומנטים τ ניתן לכתוב באופן הבא,

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \tau_{Mi} \\ \left(f_2 - f_4\right) l \\ \left(f_3 - f_1\right) l \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

כאשר l הוא מרחק המנוע ממרכז המסה ו- τ_{Mi} מומנט המפעיל על הגוף מנוע M_i ,



מכיוון שהלגרנג'יאן לא כולל אברי צימוד המשלבים ביטויים של $\dot{\eta}$ ו- $\dot{\xi}$, ניתן לפרק את משוואות התנועה לשלוש משוואות של תנועה קווית ξ ,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_{\text{trans}}}{\partial \dot{\xi}}\right] - \frac{\partial L_{\text{trans}}}{\partial \xi} = F_{\xi} \quad (2.19)$$

$$m\ddot{\xi} + mgE_z = F_{\xi} \quad (2.20)$$

ושלוש משוואות של תנועה זוויתית η.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \dot{\eta}}\right] - \frac{\partial L_{\text{rot}}}{\partial \eta} = \tau \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt}\left[J\dot{\eta}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\dot{\eta}^T J \dot{\eta}\right) = \tau \quad (2.22)$$

המשך פיתוח משוואות של תנועה זוויתית,

$$J\ddot{\eta}+\dot{\eta}\dot{J}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\dot{\eta}^{T}J\dot{\eta}\right)\quad(2.23)$$

נגדיר ווקטור של כוחות קוריאוליס וכוחות צנטריפטליים,

$$\bar{V}\left(\eta,\dot{\eta}\right)=\dot{\eta}\dot{J}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\dot{\eta}^{T}J\dot{\eta}\right)\quad(2.24)$$

לכן,

$$J\ddot{\eta}+\bar{V}\left(\eta,\dot{\eta}\right)=\tau\quad(2.25)$$

צורת כתיבה יותר מקובלת היא,

$$\bar{V}\left(\eta,\dot{\eta}\right)=\left(\dot{J}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\dot{\eta}^{T}J\right)\right)\dot{\eta}=C\left(\eta,\dot{\eta}\right)\dot{\eta}\quad(2.26)$$

ניתן לסכם את משוואות התנועה (הקווית והסיבובית),

$$m\ddot{\xi} + mgE_z = F_\xi \quad (2.27)$$

$$J\ddot{\eta} = \tau - C\left(\eta,\dot{\eta}\right)\dot{\eta} \quad (2.28)$$

ולצורך פיתוח מערכת הבקרה נגדיר,

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{bmatrix} = J^{-1}\left(\tau - C\left(\eta,\dot{\eta}\right)\dot{\eta}\right) \quad (2.29)$$

מה שיוביל לסט המשוואות הבא,

$$m\ddot{x} = u\left(\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\sin\theta\right) \quad (2.30)$$

$$m\ddot{y} = u\left(\cos\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\right) \quad (2.31)$$

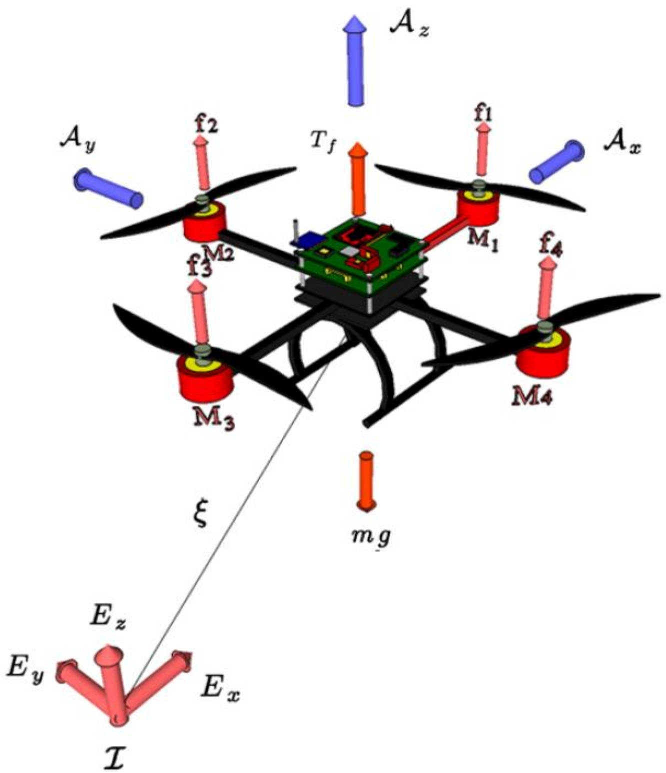
$$m\ddot{z} = u\cos\theta\cos\phi - \mathrm{mg} \quad (2.32)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi \quad (2.33)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \quad (2.34)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \quad (2.35)$$

פיתוח משוואות התנועה בגישת Newton-Euler.



נגדיר מערכת צירים אינרציאלית ומערכת צירים קבועה בגוף (<u>בפיתוח זה ציר z פונה מעלה</u>)

משוואות התנועה,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v \\ m\dot{v} &= f \\ \dot{R} &= R\Omega \\ I\dot{\Omega} &= -\Omega \times I\Omega + \tau \end{aligned} \qquad (2.36)$$

כאשר,

$$T_f = \sum_{i=1}^{4} f_i \qquad (2.37)$$

$$T_f = k\left(\sum_{i=1}^{4} \omega_i^{\,2}\right) \qquad (2.38)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_f \end{bmatrix} \qquad (2.39)$$

$$f_g = -mgE_z \qquad (2.40)$$

$$f = R_{Ez}T_f + f_g \qquad (2.41)$$

גם כאן כמו בפיתוח הקודם ניתן לכתוב עבור כל מנוע,

$$I_M \dot{\omega}_i = -\tau_{\mathrm{drag}} + \tau_{Mi} \qquad (2.42)$$

ובקירוב,

$$\tau_{Mi} = k_\tau \omega_i^{\,2} \qquad (2.43)$$

לכן ווקטור המומנטים במערכת הגוף,

$$\tau_A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \tau_{Mi} \\ \left(f_2 - f_4\right) l \\ \left(f_3 - f_1\right) l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \qquad (2.44)$$

או באופן יותר מפורט,

$$\tau_\psi = k_\tau (\omega_1^{\,2} + \omega_3^{\,2} - \omega_2^{\,2} - \omega_4^{\,2}) \qquad (2.45)$$

$$\tau_\theta = lk(\omega_2^{\,2} - \omega_4^{\,2}) \qquad (2.46)$$

$$\tau_\phi = lk(\omega_3^{\,2} - \omega_1^{\,2}) \qquad (2.47)$$

ניתן גם להוסיף את המומנטים הגירוסקופים הנוצרים כתוצאה מסיבוב המנועים (הזנחנו בפיתוח המודל הקודם כי לא לקחנו בחשבון את האנרגיה הקינטית של המנועים)

$$\tau_{G_A} = -\sum_{i=1}^{4} I_M \left(\omega \times E_z\right)\omega_i = -\left(\omega \times E_z\right)\sum_{i=1}^{4} I_M \omega_i \qquad (2.48)$$

לכן,

$$\tau = \tau_A + \tau_{G_A} \qquad (2.49)$$

והמודל המתקבל הוא,

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= v \\
m\dot{v} &= R_{E_z} T_f - mgE_z \\
\dot{R} &= R\hat{\Omega} \\
I\dot{\Omega} &= -\Omega \times I\Omega + \tau_A + \tau_{G_A}
\end{aligned} \qquad (2.50)$$

ביחס למשוואות התנועה הקווית קל לראות את הדמיון בין המודלים (הצגת הדמיון ביחס למשוואות התנועה הסיבובית דורש פיתוח נוסף).

לדוגמא, אם מטריצת הסיבוב היא

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\psi s_\theta s_\phi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi s_\theta \\ c_\theta s_\psi & c_\phi c_\psi + s_\theta s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

ואת משוואת התנועה הקווית מנסחים ע"י ξ (כמו בניסוח הקודם) אז,

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{m}\left(R_{E_z} T_f - g E_z\right) \quad (2.52)$$

כאשר

$$R_{E_z} = \begin{bmatrix} s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi s_\theta \\ c_\phi s_\theta s_\psi - c_\psi s_\phi \\ c_\theta c_\phi \end{bmatrix}$$

ומכוון ש $u = T_f$ נקבל

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}u\left(\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\sin\theta\right) \qquad (2.53)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}u\left(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi\right) \qquad (2.54)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}u\cos\theta\cos\phi - g \qquad (2.55)$$

כמו בפיתוח הקודם

עבור משוואות התנועה הסיבובית, נגדיר (כמו קודם, כדי לקבל סט משוואות נוח לצורך תכנון בקרה)

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{bmatrix} = I^{-1}W^{-1}\left(-I\dot{W}\dot{\eta} - W\dot{\eta} \times IW\dot{\eta} + \tau\right) \quad (2.58)$$

כאשר

$$W = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

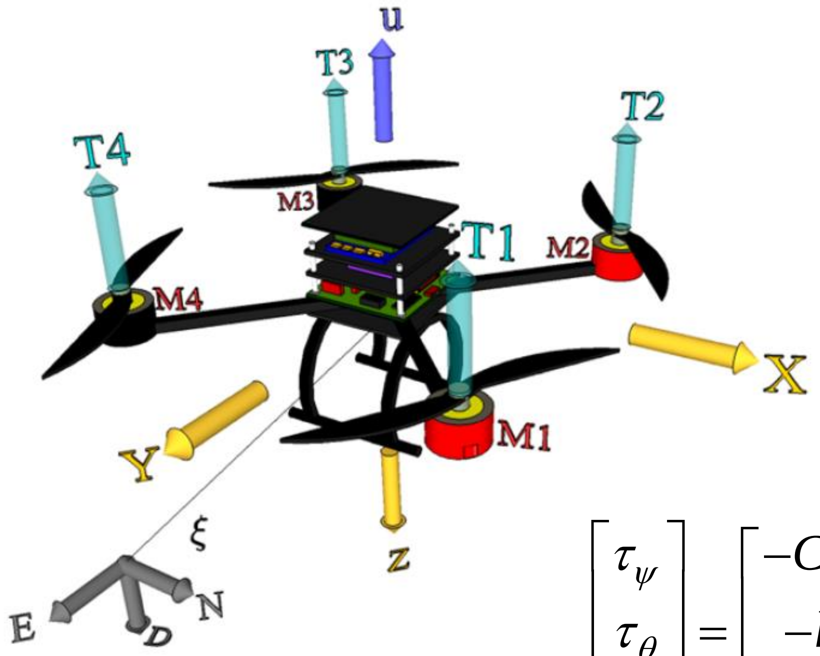
נקבל

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi \qquad (2.64)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \qquad (2.65)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \qquad (2.66)$$

עבור רחפן בתצורת x מה שמשתנה הוא הקשר בין הכוחות המוכללים ומהירויות הסיבוב של המנועים. מה שנתון עכשיו ע"י



$$\begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_M & C_M & -C_M & C_M \\ -l' & -l' & l' & l' \\ -l' & l' & l' & -l' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

T_i - כוח הוא דחף, וגם מתקיים $\tau_i = C_M T_i$

l' - מייצג את מרחק המנוע מהציר שסביבו פועל המומנט.

<u>בקרה</u>,

הגישה הפשוטה ביותר לתכנון מערכת הבקרה היא גישה היררכית.

חוג בקרה פנימי מהיר אחראי על בקרת המצב הזוויתי, וחוג בקרה חיצוני (יותר איטי) אחראי על בקרת המקום.

הצורך בבקרה היררכית נובע מהאופי התת ממונע של המערכת.

מבנה המערכת:

הגובה וזווית הסבסוב (ניתן לומר גם גובה וכיוון) מבוקרים באופן בלתי תלוי (זה עולה לנו בשתיים מתוך ארבעת כניסות הבקרה).

התנועה האורכית והצידית (בקרת מקום) מבוקרות כך שאותות הבקרה הן זוויות העלרוד והגלגול.

אותות בקרה אלה (עלרוד וגלגול) מהווים אותות ייחוס לחוג הפנימי המהיר הפועל על המצב הזוויתי.

נתחיל בבקר הגובה הנתון באופן הבא,

$$u = \left(r_1 + mg\right)\frac{1}{\cos\theta\cos\phi} \qquad (3.1)$$

כאשר,

$$r_1 = -k_{vz}\dot{z} - k_{pz}e_z \qquad (3.2)$$

השגיאה בגובה היא, $e_z = z - z_d$ והקבועים, k_{pz} ו- k_{vz} הם חיוביים.

זהו בקר PD ולמעשה כל החוגים בגישה המוצגת הם מסוג PD.

נזכיר כי משוואת התנועה בכיוון z היא,

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}u\cos\theta\cos\phi - g$$

הצבה של u תיתן,

$$m\ddot{z} = r_1 = -k_{vz}\dot{z} - k_{pz}e_z$$

אם z_d הינו קבוע אז, $m\ddot{e}_z = r_1 = -k_{vz}\dot{e}_z - k_{pz}e_z$ והשגיאה e_z דועכת לאפס, אסימפטוטית.

באופן דומה, בקר הכיוון (סבסוב, yaw או heading) הוא,

$$\tilde{\tau}_{\psi} = -k_{v\psi}\dot{\psi} - k_{p\psi}e_{\psi} \qquad (3.3)$$

כאשר $e_{\psi} = \psi - \psi_d$

הצבה במשוואת התנועה של ψ נותנת, $\ddot{\psi} = -k_{v\psi}\dot{\psi} - k_{p\psi}e_{\psi}$

אם נציב את אלה במשוואות התנועה של x ו- y נקבל,

$$m\ddot{x} = \left(r_1 + mg\right)\left(\frac{\sin\psi\tan\phi}{\cos\theta} + \cos\psi\tan\theta\right) \qquad (3.4)$$

$$m\ddot{y} = \left(r_1 + mg\right)\left(\sin\psi\tan\theta - \frac{\cos\psi\tan\phi}{\cos\theta}\right) \qquad (3.5)$$

ללא פגיעה בכלליות, ניתן לבחור $\psi_d = 0$ (ניתן תמיד לבחור כך את מערכת הצירים)

נניח עכשיו שחוג הגובה כבר התכנס, כלומר $e_z \to 0$ ולכן גם $r_1 \to 0$.

אם חוג הכיוון הוא חוג מהיר, אז בהזנחת הדינאמיקה שלו (כלומר אנו מניחים ש $\psi = \psi_d$ מיד) מתקבל

$$\ddot{x} = g \tan\theta \qquad (3.8)$$

$$\cancel{\ddot{\psi}} = -g \frac{\tan\phi}{\cos\theta} \qquad (3.9)$$

ואם נניח זוויות עלרוד θ וגלגול ϕ קטנות נקבל

$$\ddot{x} = g\theta$$
$$\ddot{y} = -g\phi$$

נתייחס עכשיו לשני צמדים, הצמד הראשון הוא של התנועה קדימה x וזווית העלרוד θ ,
הצמד השני הוא של התנועה הצידית y וזווית הגלגול ϕ .

צמד **קדימה-עלרוד (longitudinal-pitch)**.

$$\ddot{x} = g\theta \qquad (3.10)$$
$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \qquad (3.11)$$

למעשה מדובר כאן בשני אינטגרטורים כפולים.

אות הבקרה האחראי על התנועה קדימה הוא (בקר PD),

$$\theta_{\mathrm{ref}} = -k_d{}^x \dot{x} - k_p{}^x \left(x - x_d \right)$$

נגדיר את מרחב המצב הבא,

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (3.12)$$
$$\dot{x}_2 = g x_3 \qquad (3.13)$$
$$\dot{x}_3 = x_4 \qquad (3.14)$$
$$\dot{x}_4 = \tilde{\tau}_\theta \qquad (3.15)$$

כאשר x_1 מתאר את השגיאה בכיוון x ומשתני המצב הנוספים הם, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$.

נגדיר משתני מצב חדשים,

$$x_3^{\text{ref}} = \theta_{\text{ref}}$$
$$\tilde{x}_3 = \theta - \theta_{\text{ref}}$$
$$\tilde{x}_4 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_{\text{ref}}$$

מה שיוביל למרחב המצב (מנוסח לפי המשתנים החדשים),

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (3.16)$$
$$\dot{x}_2 = g(x_3^{\text{ref}} + \tilde{x}_3) \qquad (3.17)$$
$$\dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_4 \qquad (3.18)$$
$$\dot{\tilde{x}}_4 = \ddot{x}_3^{\text{ref}} + \tilde{\tau}_\theta \qquad (3.19)$$

אם חוג המקום מספיק "איטי" ביחס לחוג הזווית, אז ניתן להניח $\ddot{\theta}_{\text{ref}} = \dot{\theta}_{\text{ref}} = 0$ כאשר מתכננים את בקר הזווית

הנחה כזאת תוציא את $\ddot{x}_3^{\text{ref}}$ מתוך משוואות המצב של $\tilde{x}_4$, לכן נקבל $\tilde{x}_4 = x_4$

ואת מרחב המצב,

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (3.20)$$

$$\dot{x}_2 = g(x_3{}^{\text{ref}} + \tilde{x}_3) \qquad (3.21)$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = x_4 \qquad (3.22)$$

$$\dot{x}_4 = \tilde{\tau}_\theta \qquad (3.23)$$

בקר PD מהצורה

$$\tilde{\tau}_\theta = -k_v{}^\theta x_4 - k_p{}^\theta \tilde{x}_3 \qquad (3.25)$$

$$\tilde{\tau}_\theta = -k_v{}^\theta \dot{\theta} - k_p{}^\theta \left(\theta - \theta_{\text{ref}}\right) \qquad (3.26)$$

יאפשר התכנסות של $\tilde{x}_3 = \theta - \theta_{\text{ref}}$ לאפס ולכן גם התכנסות לאפס של השגיאה $x - x_d$.

עבור הצמד **הצידה-גלגול (lateral-roll)**.

$$\ddot{y} = -g\phi \qquad (3.27)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \qquad (3.28)$$

ניתן לבצע פיתוח דומה.

לסיכום, משוואות מערכת הבקרה הן,

$$u=\left(-k_{vz}\dot{z}-k_{pz}e_e+mg\right)\frac{1}{\cos\theta\cos\phi}$$

$$\tilde{\tau}_{\psi}=-k_v{}^{\psi}\dot{\psi}-k_p{}^{\theta}\left(\psi-\psi_{\text{ref}}\right)$$

$$\tilde{\tau}_{\theta}=-k_v{}^{\theta}\dot{\theta}-k_p{}^{\theta}\left(\theta-\theta_{\text{ref}}\right)$$

$$\tilde{\tau}_{\phi}=-k_v{}^{\phi}\dot{\phi}-k_p{}^{\phi}\left(\phi-\phi_{\text{ref}}\right)$$

כאשר,

$$\theta_{\text{ref}}=-k_d{}^{x}\dot{x}-k_p{}^{x}\left(x-x_d\right)$$

$$\phi_{\text{ref}}=-k_d{}^{y}\dot{y}-k_p{}^{y}\left(y-y_d\right)$$

תכנון כזה דורש כיול מתאים של הגברי מערכת הבקרה המבטיח שחוג הזווית יהיה מהיר באופן משמעותי מחוג המקום.