קורס – תכנון ובניה של
מערכות בקרה שימושיות

מבוא לבקרה דיגיטלית

סמסטר ב' 2018

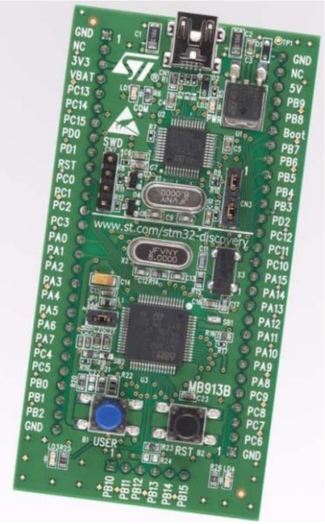
שי ארוגטי

תכנון מערכות בקרה דיסקרטיות

בקרה ספרתית

בקרה דיגיטלית

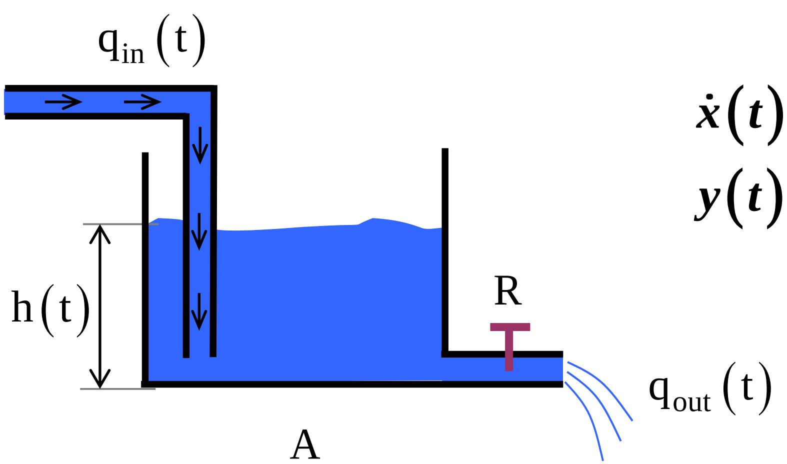
מימוש מערכת בקרה ע"י מיקרומחשב



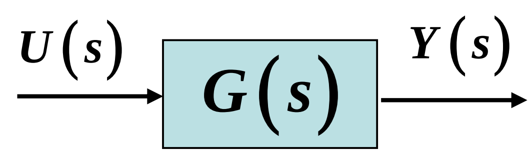
מערכות רציפות לעומת מערכת בדידות (דיסקרטיות)

מערכת רציפה: אות המבוא ואות המוצא הם אותות רציפים בזמן (כלומר אותות שקיימים עבור כל נקודת זמן).

לדוגמא:



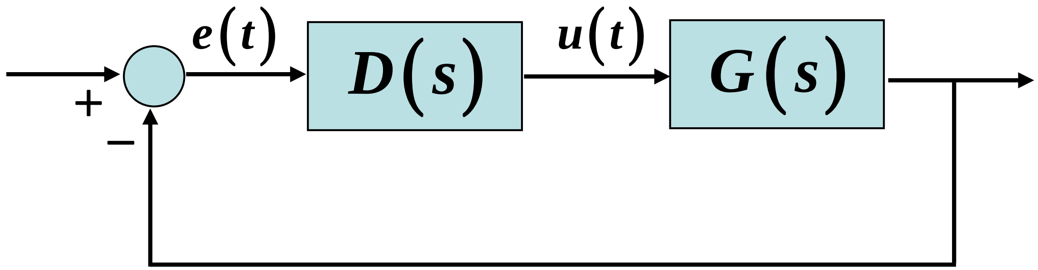
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



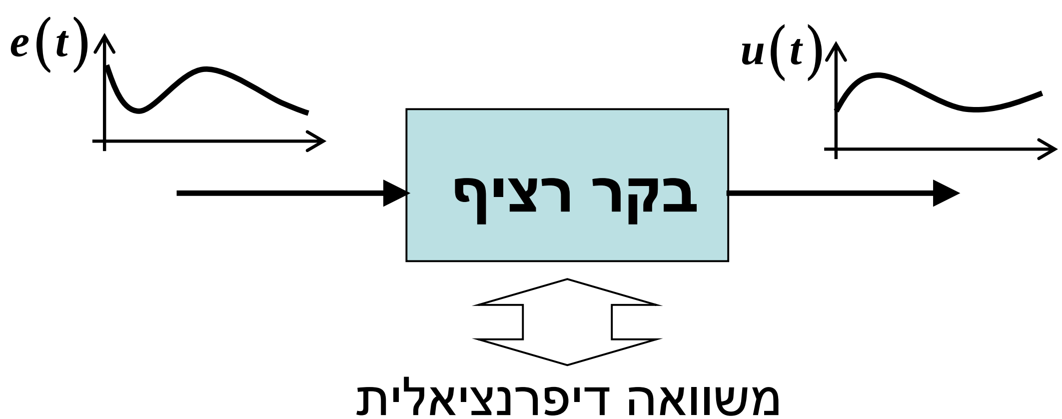
מערכת בדידה (ספרתית, דיסקרטית): אות המבוא ואות המוצא הם אותות בדידים בזמן (כלומר אותות שקיימים עבור נקודות זמן מסוימות בלבד).

מוטיבציה לעיסוק במערכות בדידות

מערכת בקרה רציפה



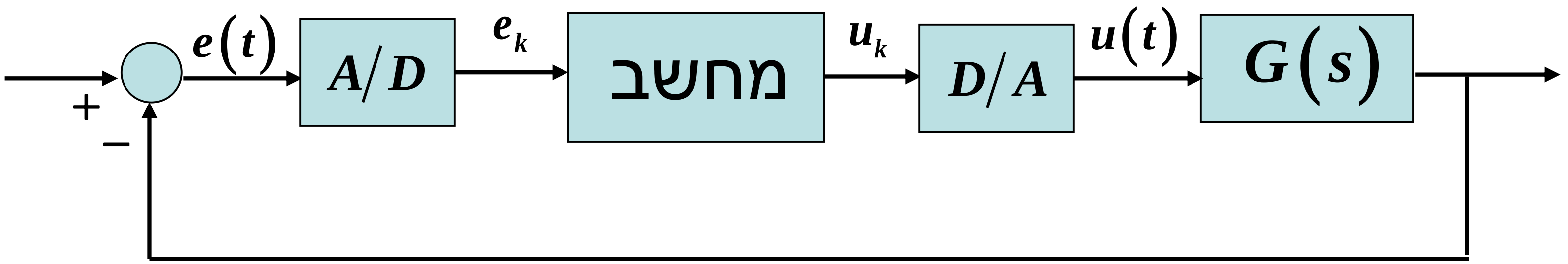
במערכת זו $D(s)$ מייצג חוק בקרה רציף כלומר הוא מייצר את בקרה רציף $u(t)$ מתוך פונקצית התמסורת ואות המבוא $e(t)$



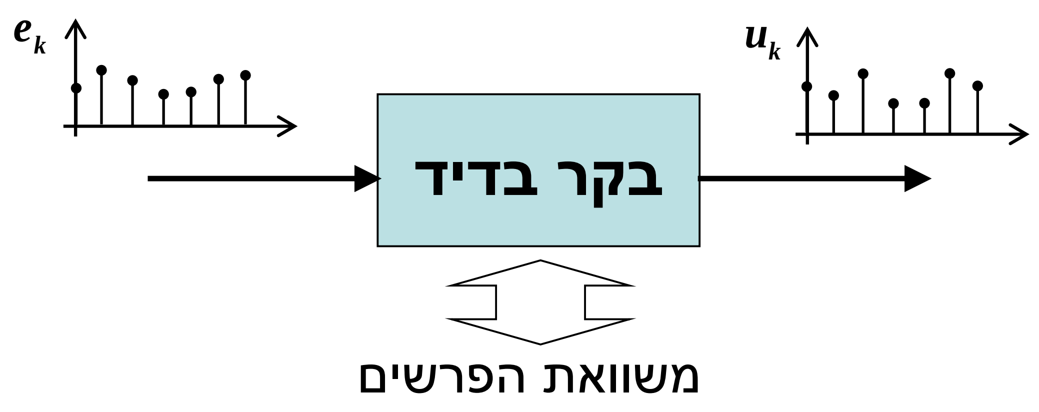
לא ניתן לממש בקר רציף באמצעות מחשב (דיגיטלי)

מחשבים אינם פועלים בזמן רציף אלא הם פועלים בזמן בדיד

מערכת בקרה המתבססת על מחשב תראה כך:



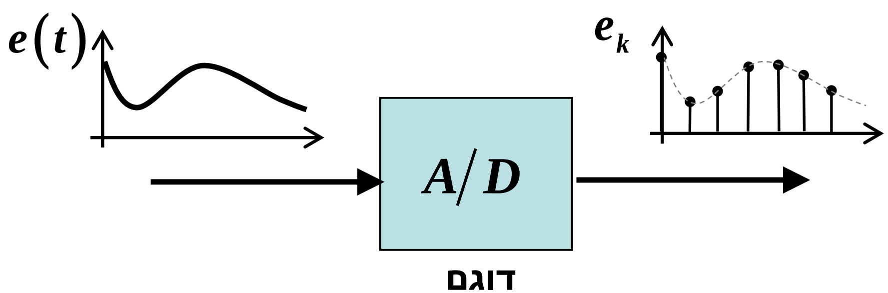
הבקר הבדיד (מחשב) מייצר אות בקרה בדיד u_k מתוך פונקציית התמסורת (הבדידה) ואות המבוא (הבדיד) e_k

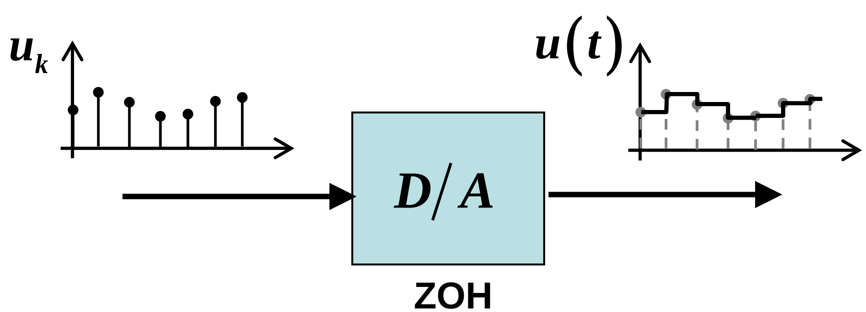


ממירים (רציף ←בדיד, בדיד ←רציף)

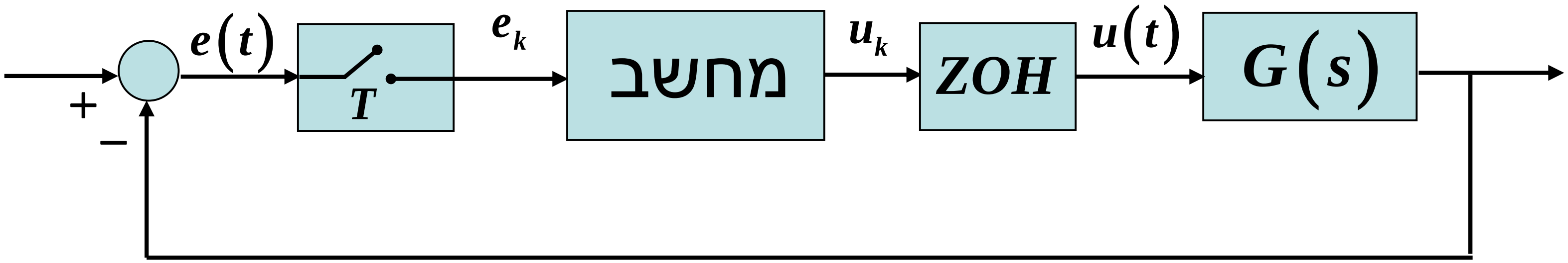
A/D מייצר אות בדיד (בזמן) ע"י דגימה של אות רציף.

D/A מייצר אות רציף מאות בדיד, בדרך כלל משהה נתונים מסדר אפס (ZOH- Zero Order Hold)





לצורך תכנון, מודל החוג הסגור נראה כך:



החוג הסגור משלב מרכיבים רציפים (לדוגמא התהליך שאותו יש לבקר) יחד עם מרכיבים בדידים (מערכת בקרה).

שתי גישות תכנון עיקריות:

1. תכנון ישיר (תכנון בזמן בדיד) – מחשבים תהליך בדיד השקול לתהליך הרציף שיש לבקר, ועבורו מתכננים בקר בדיד באופן ישיר.

2. תכנון עקיף (תכנון בזמן רציף) – מתכננים בקר רציף לתהליך הרציף (התהליך שיש לבקר), ומחשבים קירוב בדיד של הבקר הרציף.

דוגמא לתכנון עקיף:

נתונה פונקצית תמסורת של בקר רציף: $D(s)=5\frac{s+2}{s+20}$.

מעוניינים לממש בקר זה באופן דיגיטלי בקצב דגימה $80Hz$.

מצא משוואת הפרשים שקולה ל- $D(s)$ ע"י שימוש ב:

1. קירוב נגזרת קדמי: $\dot{y}(t)\simeq\frac{y((k+1)T)-y(kT)}{T}\triangleq\frac{y(k+1)-y(k)}{T}$

2. קירוב נגזרת אחורי: $\dot{y}(t)\simeq\frac{y(kT)-y((k-1)T)}{T}\triangleq\frac{y(k)-y(k-1)}{T}$

(כלומר $y(k)=y(t)\big|_{t=kT}$ ו- T הינו ערך קבוע הנקרא מרווח דגימה)

פתרון:

$$D(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=5\frac{s+2}{s+20}\quad\Rightarrow\quad(s+20)U(s)=5(s+2)E(s)$$

$$\dot{u}(t)+20u(t)=5\dot{e}(t)+10e(t)$$

1. פתרון ע"י שימוש בקירוב נגזרת קדמי:

$$\frac{u(k+1)-u(k)}{T}+20u(k)=5\frac{e(k+1)-e(k)}{T}+10e(k)$$

$$u(k+1)=(1-20T)u(k)+(10T-5)e(k)+5e(k+1)$$

נציב את מרווח הדגימה:

$$T=\frac{1}{80Hz}=0.0125\,sec$$

$$\boxed{u(k+1)=0.75u(k)-4.875e(k)+5e(k+1)}$$

2. פתרון ע"י שימוש בקירוב נגזרת אחורי:

$$\frac{u(k)-u(k-1)}{T}+20u(k)=5\frac{e(k)-e(k-1)}{T}+10e(k)$$

$$(1+20T)u(k)=u(k-1)-5e(k-1)+(5+10T)e(k)$$

מכאן:

$$u(k)=\frac{1}{1+20T}u(k-1)-\frac{5}{1+20T}e(k-1)+\frac{5+10T}{1+20T}e(k)$$

$$\boxed{u(k)=0.8u(k-1)-4e(k-1)+4.1e(k)}$$

מסקנות:

בשיטת התכנון העקיפה, הבקר הדיגיטלי תלוי בסוג הקירוב ובמרווח הדגימה.

הבקר הינו **משוואת הפרשים** (בניגוד למשוואה דיפרנציאלית במקרה הרציף).

$$\boxed{u(k)=0.8u(k-1)-4e(k-1)+4.1e(k)}$$

איך פותרים משוואה כזאת?

יש צורך בתנאי התחלה, במקרה זה $u(k)\big|_{k=0}=0$

עכשיו ניתן לפתור באופן איטרטיבי (לדוגמא ע"י לולאה בתוכנית מחשב)

$$u(1)=0.8u(0)-4e(0)+4.1e(1)$$

$$u(2)=0.8u(1)-4e(1)+4.1e(2)$$

$$u(3)=0.8u(2)-4e(2)+4.1e(3)$$

וכן הלאה . . . .

יש לזכור כי $e(k)$ הינו אות ידוע – נמדד, במקרה זה.

מודל כללי של תהליך בדיד

באופן כללי ניתן לתאר תהליך בדיד, ליניארי ובלתי תלוי בזמן (עם כניסה אחת ומוצא אחד - SISO) ע"י משוואת הפרשים מהצורה:

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \cdots a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots b_m u_{k-m}$$

או בקיצור:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i y_{k-i} = \sum_{i=0}^{m} b_i u_{k-i}}$$

(כאשר $y_k \triangleq y(k) = y(kT)$)

נזכיר כי השתמשנו בצורה הכללית הבאה כדי לתאר מערכות רציפות:

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + \cdots a_n y^{(n)} = b_0 u + b_1 \dot{u} + \cdots b_m u^{(m)}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}}$$

מודל כללי של תהליך בדיד במרחב המצב

במקרה זה מדובר בסט של משוואות הפרשים מסדר ראשון, כלומר:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

$$u(\boldsymbol{k}) \longrightarrow \boxed{\textbf{מערכת}} \longrightarrow y(\boldsymbol{k})$$

כאשר $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ הן מטריצות, לדוגמא אם למערכת $\boldsymbol{m}$ כניסות ו- $\boldsymbol{r}$ מוצאים:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_r(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$x(k)$ הינו ווקטור המצב

התמרות Z

כדי לייצג תהליך בדיד (ליניארי ובלתי תלוי בזמן) ע"י פונקצית תמסורת (בדידה), דרוש כלי המאפשר התמרה של משוואת הפרשים כך שתתקבל משוואה אלגברית (כדי לחשב את היחס בין אות הכניסה ואות המוצא).

זה דומה למקרה הרציף בו השתמשנו בהתמרת לפלס כדי להפוך את המשוואה הדיפרנציאלית למשוואה אלגברית (במישור s).

הכלי הדרוש נקרא התמרת Z.

התמרת לפלס מעתיקה אות (signal) רציף מציר הזמן למישור המרוכב s.

התמרת Z מעתיקה אות (signal) בדיד מציר הזמן (הבדיד) למישור המרוכב z.

על ידי שימוש בהתמרת Z (והתמרות Z הפוכות) ניתן גם לפתור משוואות הפרשים.

תזכורת – התמרת לפלס חד צדדית

$$F(s)=(Lf)(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

s הינו מספר מרוכב.

התמרת Z פועלת על סדרה של מספרים (אות בדיד).

נתונה סדרה:

$$\{e_k\}=\{\dots\ ,e_{-2},e_{-1},e_0,e_1,e_2,\ \dots\ \ e_k,\ \dots\}$$

התמרת Z מוגדרת ע"י:

$$Z\{e_k\}=E(z)\triangleq\sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k z^{-k}$$

כאשר Z הינו מספר מרוכב.

התמרה כזאת הינה התמרה דו-צדדית. כמו במקרה של התמרת לפלס,
אנו נשתמש בהתמרה חד צדדית. כלומר עבור הסדרה החצי אינסופית

$$\{e_k\}=\{e_0,e_1,e_2,\ \dots\ \ e_k,\ \dots\}$$

$$Z\{e_k\}=E(z)\triangleq\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k}$$

טבלת התמרות Z

Number	$\mathcal{F}(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1	—	$1,\ k=0;\ 0,\ k\neq 0$	1
2	—	$1,\ k=m;\ 0,\ k\neq m$	z^{-m}
3	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kT)^3$	$\frac{T^3}{6}\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2}e^{-aT}\frac{z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}(e^{-akT})$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}}$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$

טבלת התמרות Z (המשך)

13	$\dfrac{a}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{1}{a}(akT-1+e^{-akT})$	$\dfrac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
14	$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$(e^{-akT}-e^{-bkT})$	$\dfrac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
15	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\dfrac{z[z-e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$
16	$\dfrac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-akT}(1+akT)$	$\dfrac{z[z(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})+e^{-2aT}-e^{-aT}+aTe^{-aT}]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$
17	$\dfrac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bkT}-ae^{-akT}$	$\dfrac{z[z(b-a)-(be^{-aT}-ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
18	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sin akT$	$\dfrac{z\sin aT}{z^2-(2\cos aT)z+1}$
19	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akT$	$\dfrac{z(z-\cos aT)}{z^2-(2\cos aT)z+1}$
20	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\cos bkT$	$\dfrac{z(z-e^{-aT}\cos bT)}{z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}}$
21	$\dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\sin bkT$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT}}$
22	$\dfrac{a^2+b^2}{s((s+a)^2+b^2)}$	$1-e^{-akT}\left(\cos bkT+\dfrac{a}{b}\sin bkT\right)$	$\dfrac{z(Az+B)}{(z-1)(z^2-2e^{-aT}(\cos bT)z+e^{-2aT})}$ $A=1-e^{-aT}\cos bT-\dfrac{a}{b}e^{-aT}\sin bT$ $B=e^{-2aT}+\dfrac{a}{b}e^{-aT}\sin bT-e^{-aT}\cos bT$

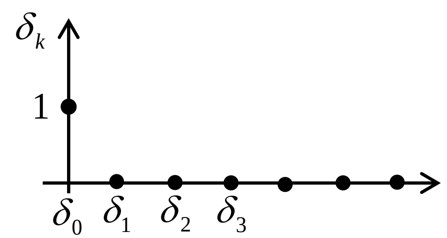
התמרת Z של פונקצית הלם בדידה

למה דרושה פונקצית הלם בדידה?

כדי להגדיר יציבות של מערכת בדידה (באופן מקביל למקרה הרציף).

פונקצית הלם בדידה מוגדרת באופן הבא:

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$



$$Z(\delta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k z^{-k} = 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \ldots = 1$$

נזכיר שגם התמרת לפלס של פונקצית הלם רציפה שווה 1 .

פונקצית הלם רציפה מוגדרת כך שהשטח מתחת (אינטגרל) שווה אחד.

פונקצית הלם בדידה מוגדרת כך שסכום כל האברים בסדרה שווה אחד.

התמרת Z של פונקציה מוזזת ביחידה.

(זה שקול, במקרה הרציף, להתמרת לפלס של נגזרת מסדר 1)

פונקציה מוזזת יחידה אחת שמאלה, כלומר $f\left(k+1\right)$.

ע"פ הגדרה:

$$Z\left\{f\left(k+1\right)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(k+1\right)z^{-k}=z\sum_{k=0}^{\infty}f\left(k+1\right)z^{-\left(k+1\right)}$$

החלפת משתנים:

$$v=k+1$$

$$k=0\quad\Rightarrow\quad v=1$$

$$k=\infty\quad\Rightarrow\quad v=\infty$$

$$Z\left\{f\left(k+1\right)\right\}=z\sum_{v=1}^{\infty}f\left(v\right)z^{-v}$$

$$=z\left(\sum_{v=0}^{\infty}f\left(v\right)z^{-v}-f\left(0\right)\right)=\boxed{z\left(F\left(z\right)-f\left(0\right)\right)}$$

נזכיר כי גם במקרה של התמרת לפלס של נגזרת קבלנו תלות בתנאי התחלה:

פונקצית תמסורת של תהליך בדיד

(מערכת בדידה, בקר בדיד, . . .)

נזכיר את משוואת ההפרשים של הבקר הבדיד מהדוגמא בתחילת השיעור (במקרה זה מדובר בקירוב בדיד של בקר רציף)

$$u(k+1) = 0.75u(k) - 4.875e(k) + 5e(k+1)$$

פונקצית התמסורת מוגדרת עבור תנאי התחלה אפס.

התמרת Z של משוואת ההפרשים (עבור תנאי התחלה אפס):

$$zU(z) = 0.75U(z) - 4.875E(z) + 5zE(z)$$

(התקבלה משוואה אלגברית)

היחס בין המוצא והכניסה (במישור z) נתון ע"י:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{5z - 4.875}{z - 0.75} = 5\frac{z - 0.975}{z - 0.75}$$

התמרת Z של פונקציה מוזזת, המקרה הכללי.

ניתן להראות (כאן, ללא הוכחה):

התמרת Z של n הזזות שמאלה:

$$\boxed{Z\left\{f\left(k+n\right)\right\}=z^{n}\left[Y\left(z\right)-\sum_{k=0}^{n-1}y\left(k\right)z^{-k}\right]}$$

התמרת Z של n הזזות ימינה:

$$\boxed{Z\left\{f\left(k-n\right)\right\}=z^{-n}Y\left(z\right)+\sum_{k=0}^{n-1}y\left(k-n\right)z^{-k}}$$

לדוגמא, אם נציב $n=1$:

$$Z\left\{f\left(k+1\right)\right\}=z\left[Y\left(z\right)-y\left(0\right)\right]$$

$$Z\left\{f\left(k-n\right)\right\}=z^{-n}Y\left(z\right)+y\left(-1\right)$$

(כפי שהוכחנו קודם)

התמרות Z הפוכות

1) מפרקים את $\frac{F(z)}{z}$ לשברים חלקיים.

2) כופלים חזרה את שני הצדדים ב- z .

3) מבצעים התמרה הפוכה לפי טבלאות.

דוגמא: $F(z)=\frac{3z^3-19z^2+31z}{(z-3)(z-4)^2}$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{3z^2-19z+31}{(z-3)(z-4)^2}=\frac{A}{(z-3)}+\frac{B}{(z-4)}+\frac{C}{(z-4)^2}$$

$$A=\left(\frac{F(z)}{z}(z-3)\right)\Bigg|_{z=3}=\left(\frac{3z^2-19z+31}{(z-4)^2}\right)\Bigg|_{z=3}=1$$

$$B=\frac{d}{dz}\left(\frac{F(z)}{z}(z-4)^2\right)\Bigg|_{z=4}=\frac{d}{dz}\left(\frac{3z^2-19z+31}{(z-3)}\right)\Bigg|_{z=4}=2$$

$$C=\left(\frac{F(z)}{z}(z-4)^2\right)\Bigg|_{z=4}=\left(\frac{3z^2-19z+31}{(z-3)}\right)\Bigg|_{z=4}=3$$

מכאן:

$$F(z)=\frac{z}{(z-3)}+2\frac{z}{(z-4)}+3\frac{z}{(z-4)^2}$$

$$=\frac{z}{(z-3)}+2\frac{z}{(z-4)}+\frac{3}{4}\frac{4z}{(z-4)^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$f(k)=3^k+2\cdot 4^k+\frac{3}{4}k\cdot 4^k$$

פתרון משוואות הפרשים ע"י שימוש בהתמרות Z

נתונה משוואת הפרשים: $y(k)+2y(k-1)=u(k)$

1. מצא פונקצית תמסורת בין $u(k)$ ו- $y(k)$.

2. חשב את $y(k)$ כאשר $u(k)$ היא פונקציית מדרגה (תנאי התחלה אפס).

פתרון:

$$y(k)+2y(k-1)=u(k)$$

$$Y(z)+2z^{-1}Y(z)=U(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{1+2z^{-1}}=\frac{z}{z+2}$$

תגובה לכניסת מדרגה: $Y(z)=\frac{z}{z+2}U(z)=\frac{z}{z+2}\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{(z+2)(z-1)}$

לא ניתן לפרק לשברים חלקיים כאשר סדר המונה שווה לסדר המכנה.
לכן תחילה נחלק ב- z.

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{(z+2)(z-1)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-1}=\frac{2}{3}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{z-1}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)=\frac{2}{3}\frac{z}{z+2}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-1} \quad \Rightarrow \quad y(k)=\frac{2}{3}(-2)^k+\frac{1}{3}$$

כאן קבלנו פתרון אנליטי.

$$y(0)=\frac{2}{3}(-2)^0+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

משמעות הפתרון:

$$y(1)=\frac{2}{3}(-2)^1+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=-1$$

$$y(2)=\frac{2}{3}(-2)^2+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$$

$$\vdots$$

ניתן גם לפתור את משוואת ההפרשים באופן איטרטיבי (פתרון נומרי):

$$y(k)=-2y(k-1)+u(k)=-2y(k-1)+1$$

$$y(0)=-2y(-1)+1=0+1=1$$

$$y(1)=-2y(0)+1=-2+1=-1$$

$$y(2)=-2y(1)+1=2+1=3$$

$$\vdots$$

מרחב מצב בדיד

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

פתרון ע"י שימוש בהתמרת Z:

$$Z\{x(k+1)\} = Z\{Ax(k) + Bu(k)\}$$

$$z\left[X(z) - x(0)\right] = AX(z) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = zx(0) + BU(z)$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1} zx(0) + (zI - A)^{-1} BU(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{C(zI - A)^{-1} zx(0)}_{\text{פתרון הומוגני (לתנאי התחלה } x(0)\text{)}} + \underbrace{\left[C(zI - A)^{-1} B + D\right]U(z)}_{\text{פתרון פרטי (לכניסה } u(k)\text{)}}$$

פתרון הומוגני (לתנאי התחלה $x(0)$)

פתרון פרטי (לכניסה $u(k)$)

$$y(k) = Z^{-1}\left[Y(z)\right]$$

פונקצית תמסורת של מרחב מצב בדיד

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} zx(0) + \left[C(zI - A)^{-1} B + D\right] U(z)$$

פונקצית התמסורת מוגדרת ע"י (ת"ה אפס): $Y(z) = G(z)U(z)$

מתוך הפתרון במישור Z ברור כי:

$$\boxed{G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D}$$

פונקצית התמסורת של הייצוג הבדיד.

מרחב מצב בדיד – מימושים קנוניים

ניתן לקבל מימוש של מערכת במרחב המצב ישירות מתוך משוואת ההפרשים או מתוך פונקצית תמסורת.

נתונה משוואת הפרשים:

$$\underline{\underline{a_0 = 1}}, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-j)$$

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m) \end{aligned}$$

משוואת ההפרשים שקולה לפונקצית התמסורת:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n}$$

מימוש קנוני צורת הבקר:

$$x(k+1) = A_c x(k) + B_c u(k)$$
$$y(k) = C_c x(x) + D_c u(k)$$

כאשר המטריצות נתונות באופן הבא:

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & \cdots & b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} \qquad D_c = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$$

מימוש קנוני צורת המשערך:

$$x\left(k+1\right)=A_o x\left(k\right)+B_o u\left(k\right)$$
$$y\left(k\right)=C_o x\left(x\right)+D_o u\left(k\right)$$

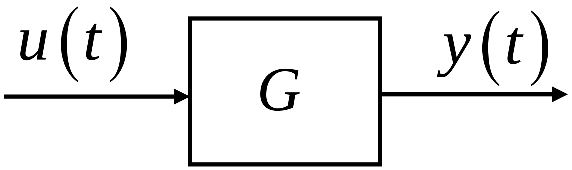
כאשר המטריצות נתונות באופן הבא:

$$A_o=\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_o=\begin{bmatrix} b_1-b_0a_1 \\ b_2-b_0a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n-b_0a_n \end{bmatrix}$$

$$C_o=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad D_o=\left[b_0\right]$$

יציבות (אסימפטוטית חיצונית)

תזכורת, עבור מערכת רציפה:

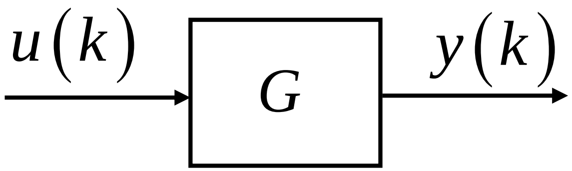


המערכת הזאת יציבה אם עבור כניסת הלם (רציפה) ותנאי התחלה אפס מתקיים:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

המערכת הרציפה יציבה אם כל הקטבים של $G(s)$ הם בעלי ערך ממשי שלילי.

עבור מערכת בדידה:



המערכת הבדידה יציבה אם עבור כניסת הלם (בדידה) ותנאי התחלה אפס מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = 0$$

גם במקרה של מערכת בדידה ניתן למצוא קשר בין המקום של הקטבים והיציבות של המערכת.

קטבים ואפסים של מערכת בדידה:

$$U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z)$$

מנה של פולינומים

$$G(z)=\frac{z^{n-m}\left(b_0 z^m+\cdots+b_m\right)}{z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{b(z)}{a(z)}$$

הפתרונות $b(z)=0$ הם האפסים של המערכת.

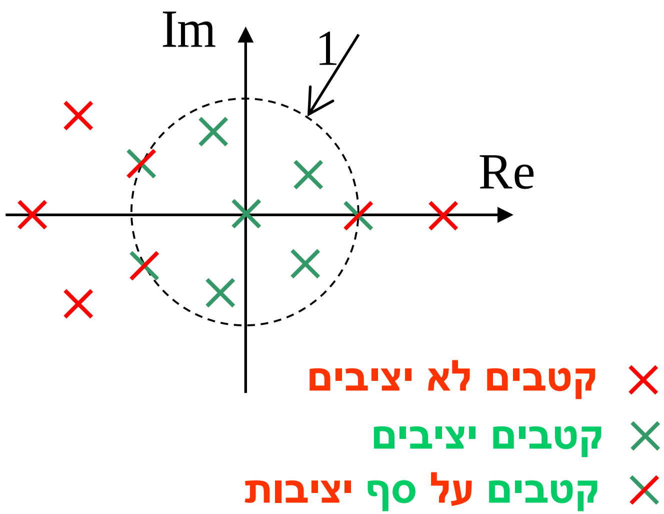
הפתרונות $a(z)=0$ הם הקטבים של המערכת (זאת המשוואה האופיינית).

מתוך המשוואה האופיינית מתקבלים n קטבים ($p_1, p_2, \cdots, p_n$)

את $a(z)$ ניתן לרשום גם באופן הבא:

$$a(z)=\prod_{i=1}^{n}\left(z-p_i\right)$$

המערכת $G(z)$ יציבה אסימפטוטית חיצונית אם ורק אם כל הקטבים p_i נמצאים בתוך מעגל היחידה.



כלומר, אם מתקיים: $\boxed{\left|p_i\right|<1 \quad , \quad \forall i}$

זה נובע מ:

תגובה לכניסת הלם

$$Y(z)=G(z)=\frac{b(z)}{a(z)}=\frac{b(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}$$

פרוק לשברים חלקיים:

$$\frac{Y(z)}{z}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(z-p_i)} \quad \Rightarrow \quad Y(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i z}{(z-p_i)}$$

$$\Rightarrow \quad y(k)=\sum_{i=1}^{n}A_i\left(p_i\right)^k$$

כדי שהמערכת תהיה יציבה צריך להתקיים: $\lim_{k\to\infty} y(k) = 0$

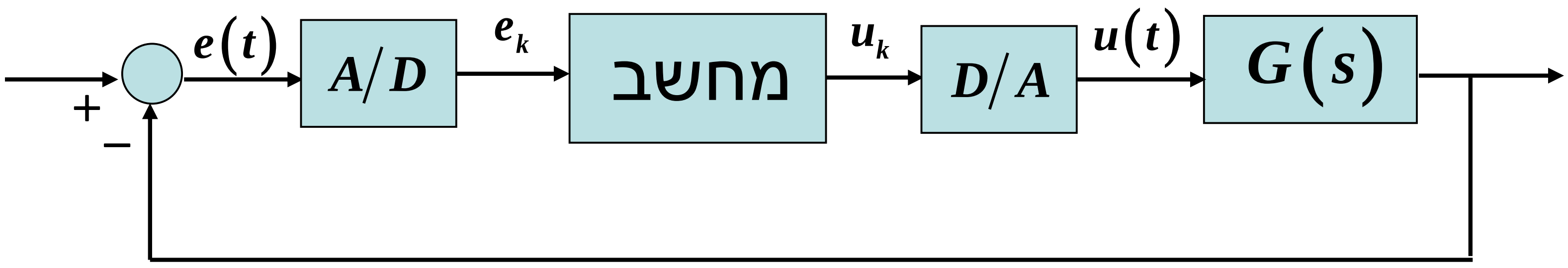
זה יתקיים אך ורק אם: $\lim_{k\to\infty} A_i (p_i)^k = 0 \quad , \quad \forall i$

כלומר אך ורק אם: $|p_i| < 1 \quad , \quad \forall i$

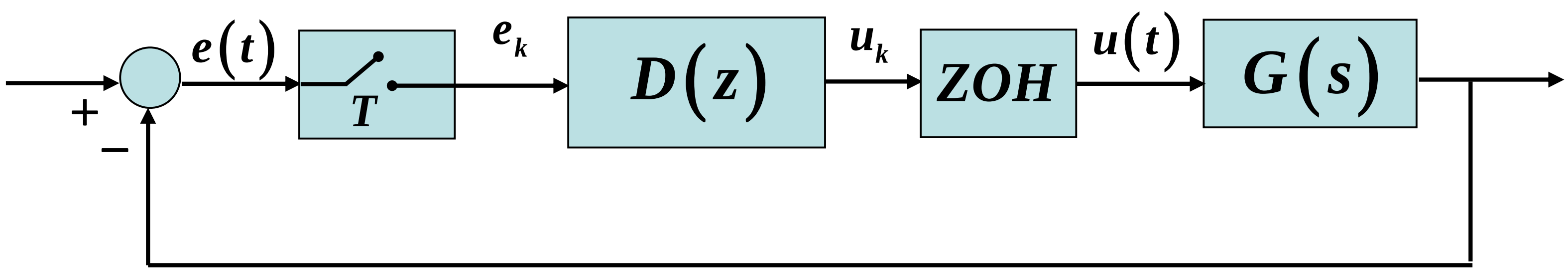
סף יציבות: אם $|p_i| = 1$ אז ערכו המוחלט שווה 1 עבור כל חזקה k .

מערכת בקרה ספרתית

ייצוג סכמטי:



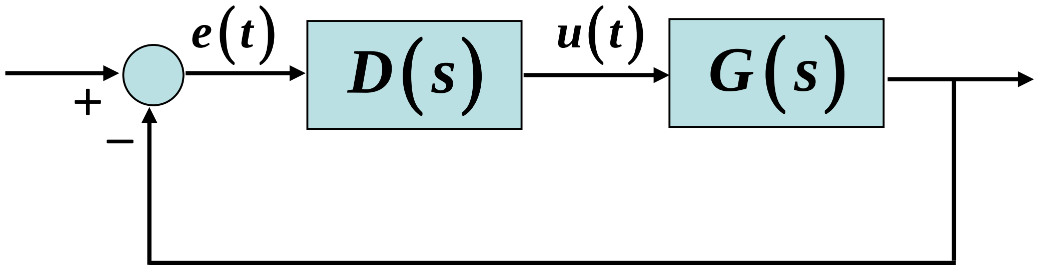
ייצוג מתמטי (משמש לתכנון):



החוג הסגור משלב מרכיבים רציפים ובדידים, יש לתכנן $D(z)$

תכנון $D(z)$:

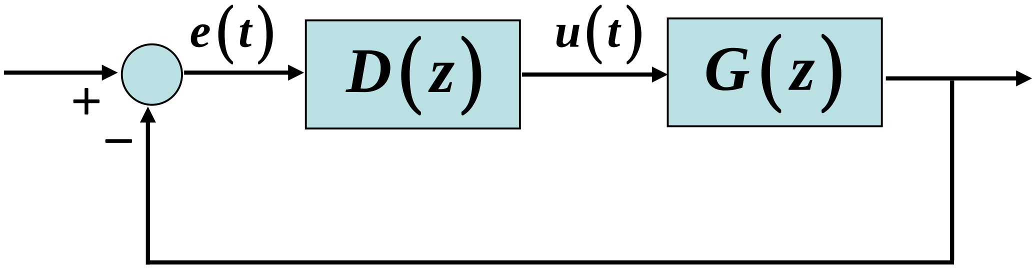
<u>תכנון עקיף</u>



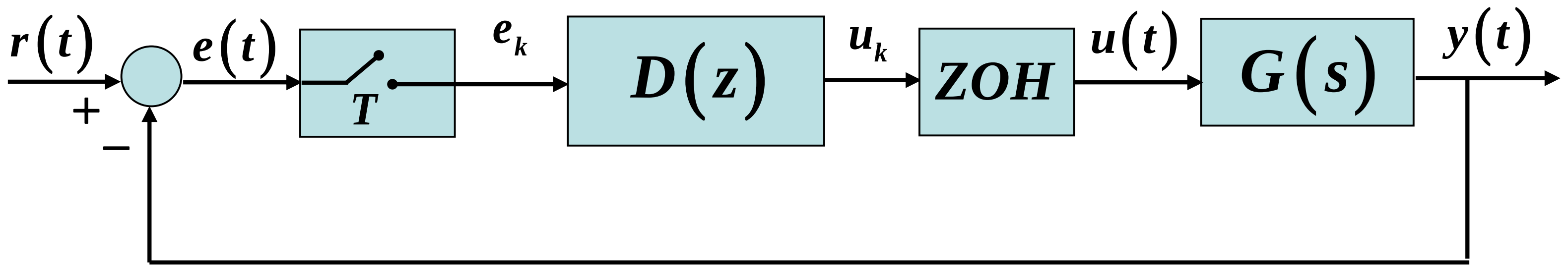
מתכננים $D(s)$ מחשבים $D(z)$ ע"י שיטות קירוב

<u>תכנון ישיר</u>

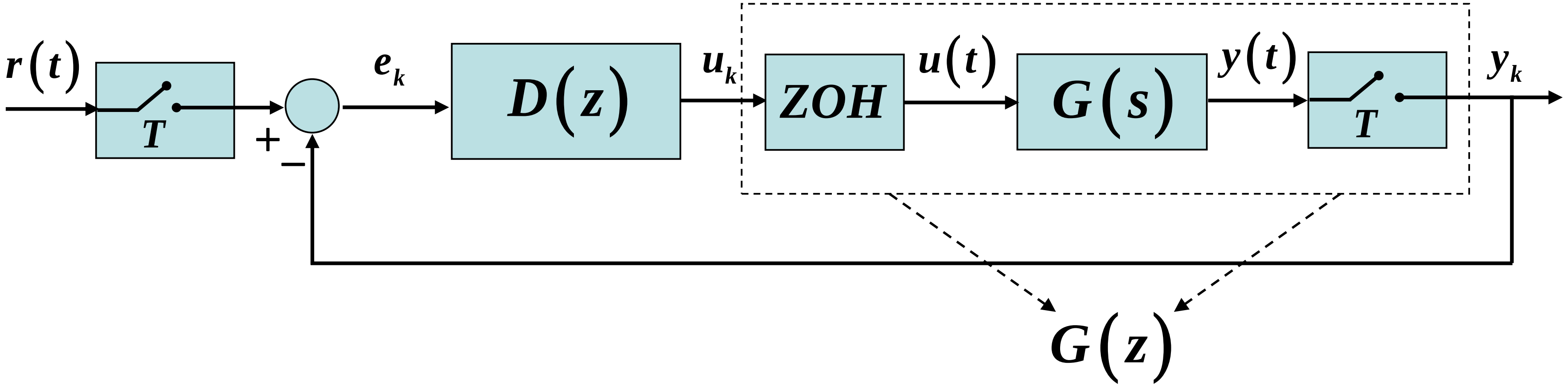
מוצאים $G(z)$ שקול ל- $G(s)$ ומתכננים $D(z)$ באופן ישיר



<u>תכנון ישיר</u> - חישוב $G(z)$

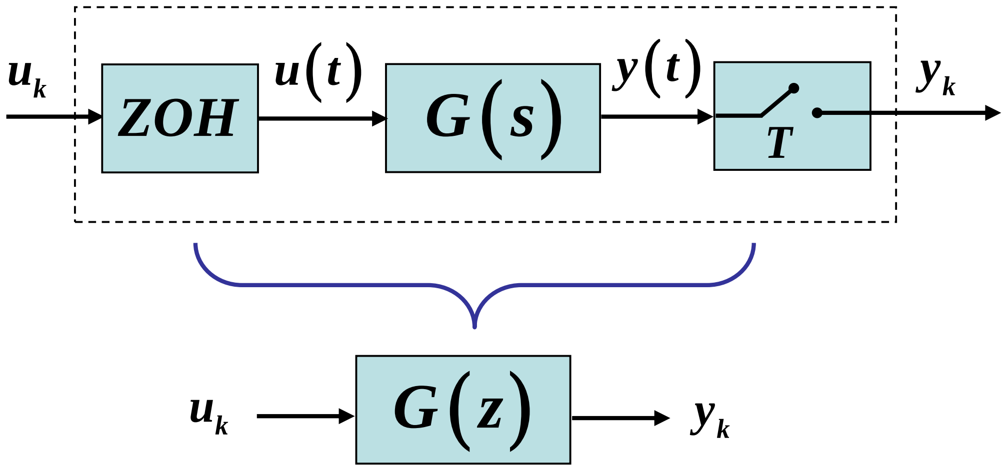


בנקודות הדגימה זה שקול ל:



ברור כי $y(t)$ ו- y_k שווים בנקודות הדגימה.

חישוב $G(z)$ מתוך $G(s)$ נתון:

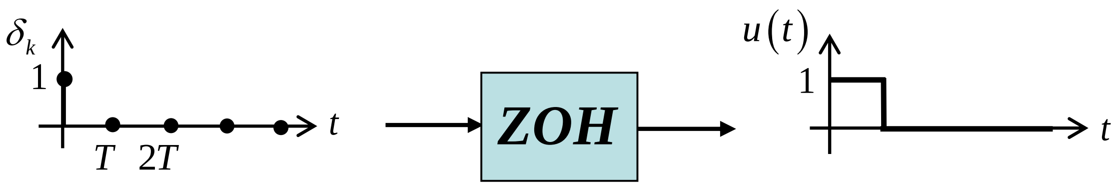


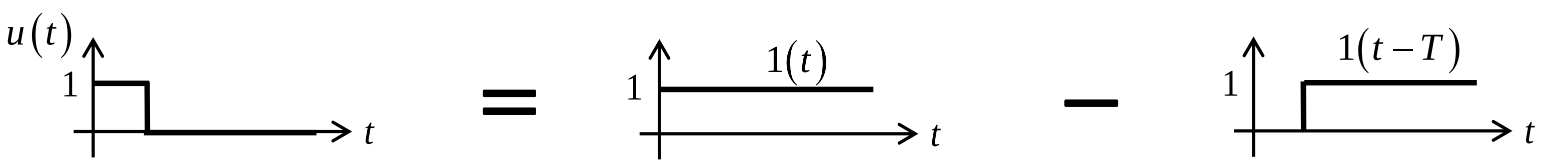
במערכת בדידה $Y(z)=G(z)U(z)$

תגובת המערכת לכניסת הלם $Y(z)=G(z)$

כדי לחשב את $G(z)$ ניתן להפעיל כניסת הלם בדידה, לקבל את y_k וע"י התמרת Z למצוא את $G(z)$

כניסת הלם למחזיק נתונים מסדר אפס:





$$u(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

$$U(s) = L\{1(t) - 1(t-T)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

$$\Rightarrow$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1-e^{-sT}}{s} = \left(1-e^{-sT}\right)\frac{G(s)}{s}$$

$$Y(z) = Z\{Y(s)\} = Z\left\{\left(1-e^{-sT}\right)\frac{G(s)}{s}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = G(z)$$

מה המשמעות של $Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$

$$Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\Big|_{t=kT}\right\}$$

יש לבצע התמרת לפלס הפוכה. בתוצאה (במישור הזמן) יש להציב $t=kT$ (לדגום). לתוצאה (הבדידה) מבצעים התמרת Z.

דוגמא: $G(s)=\frac{a}{s+a}$

$$G(z)=\left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}=\left(1-z^{-1}\right)Z\left\{\frac{a}{s(s+a)}\right\}$$

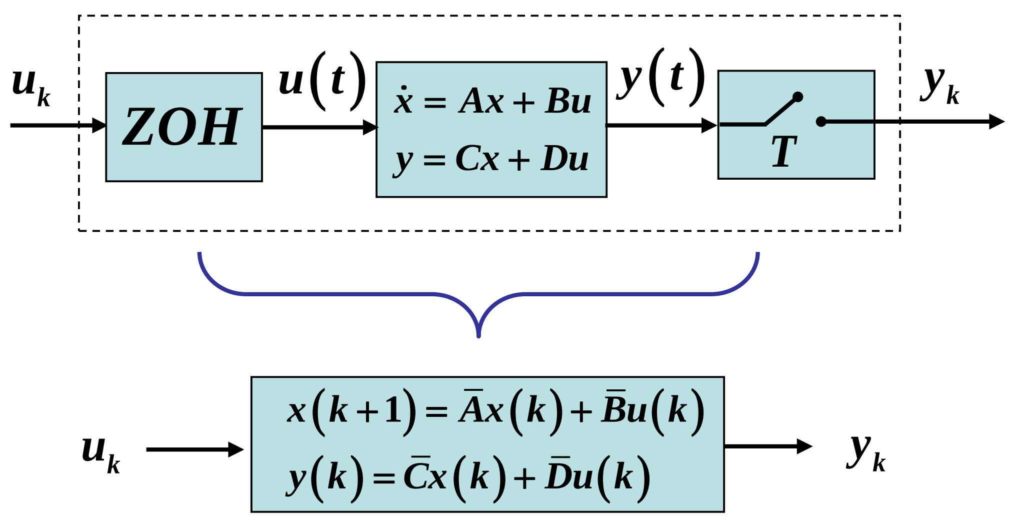
$$L^{-1}\left\{\frac{a}{s(s+a)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right\}=1-e^{-at}$$

המשך דוגמא:

$$Z\left\{1-e^{akT}\right\}=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$G(z)=\left(1-z^{-1}\right)\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)=\frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)=\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

ניתן לחשב מערכת בדידה שקולה גם כאשר מודל התהליך נתון במרחב המצב



$$u_k \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) &= \bar{C}x(k) + \bar{D}u(k) \end{aligned}} \longrightarrow y_k$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$x((k+1)T) = e^{A((k+1)T-kT)}x(kT) + \left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau\right)u(kT)$$

$$= \underbrace{e^{AT}}_{\bar{A}}x(kT) + \underbrace{\left(\int_{0}^{T} e^{Av}Bdv\right)}_{\bar{B}}u(kT)$$

כאשר ביצענו החלפת משתנים $v = (k+1)T - \tau$

בנוסף: $\bar{C} = C, \quad \bar{D} = D$

הקשר בין הקטבים של מערכת רציפה לבין הקטבים של מערכת בדידה:

נניח נתונה פונקציית תמסורת של מערכת רציפה

$$G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{b(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(s-p_i)}$$

תתקבל תגובת ההלם

$$g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{p_i t}$$

נמצא פונקציית תמסורת בדידה שקולה (במובן זה שתגובת ההלם שלה תיתן ערכים זהים בנקודות הדגימה).

מתוך דגימה של $g(t)$ והתמרת Z:

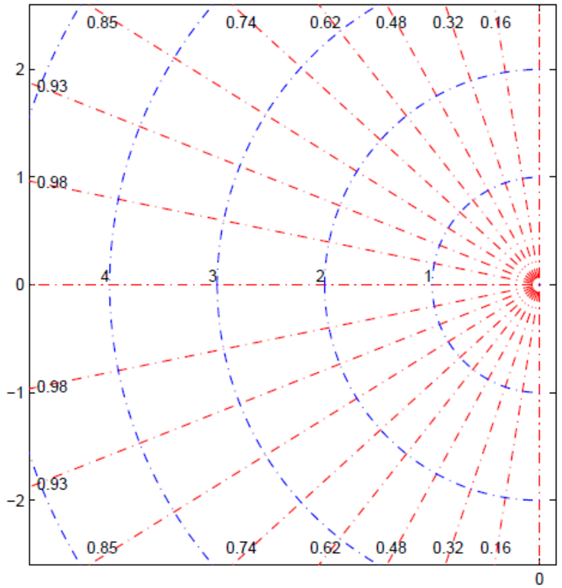
$$g(kT)=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{p_i kT}$$

$$Z\{g(kT)\}=\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{z}{z-e^{p_iT}}=\frac{(---)}{\prod_{i=1}^{n}\left(z-e^{p_iT}\right)}=\frac{(---)}{\prod_{i=1}^{n}(z-\overline{p}_i)}$$

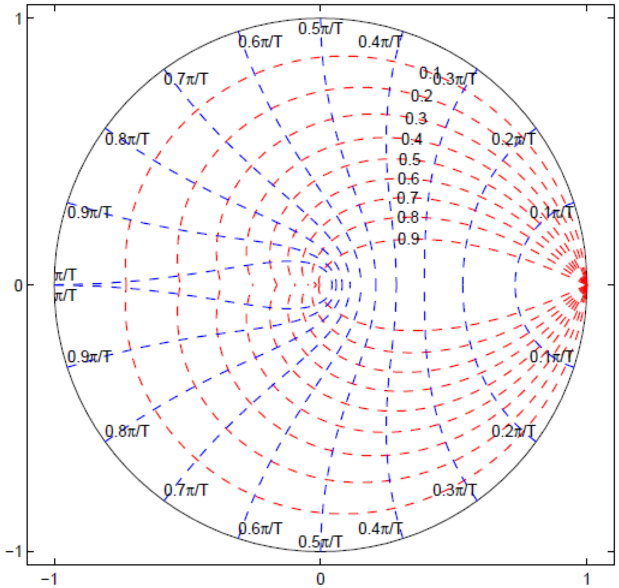
מכאן, הקשר בין הקטבים של מערכת רציפה לבין הקטבים של מערכת בדידה נתון ע"י:

$$\boxed{\overline{p}_i = e^{p_i T}}$$

לפי קשר זה, כל האיזור היציב (במקרה הרציף), מועתק למעגל היחידה באופן הבא:



Constant ζ and ω_n curves in s-plane



Constant ζ and ω_n curves in z-plane

שיטות קירוב – הפיכת מודלים רציפים למודלים בדידים מקורבים.

מטרה: תוכנן בקר רציף. דרוש בקר בדיד למימוש באמצעות מיקרו-מחשב (זאת גישה של תכנון עקיף).

ניתן להשתמש בשיטות הבאות:

- אינטגרציה נומרית.
  - Forward rectangular rule (Euler)
  - Backward rectangular rule
  - Trapezoid rule (Tustin)
- מיפוי קטבים ואפסים.

אינטגרציה נומרית (דיסקרטיזציה ע"י קירוב של אינטגרל):

נבחן את פונקציית התמסורת הבאה:

$$H(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{a}{s+a}$$

זה שקול למשוואה הבאה:

$$\dot{u}(t)+au(t)=ae(t)$$

את המשוואה ניתן לרשום גם כך (צורה אינטגראלית):

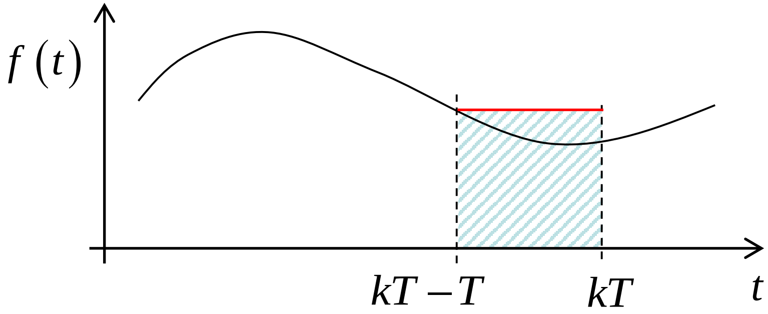
$$u(kT)=\int_0^{kT}\left(-au(\tau)+ae(\tau)\right)d\tau$$

$$=\int_0^{kT-T}\left(-au(\tau)+ae(\tau)\right)d\tau+\int_{kT-T}^{kT}\left(-au(\tau)+ae(\tau)\right)d\tau$$

$$=u(kT-T)+\boxed{\int_{kT-T}^{kT}\left(-au(\tau)+ae(\tau)\right)d\tau}$$

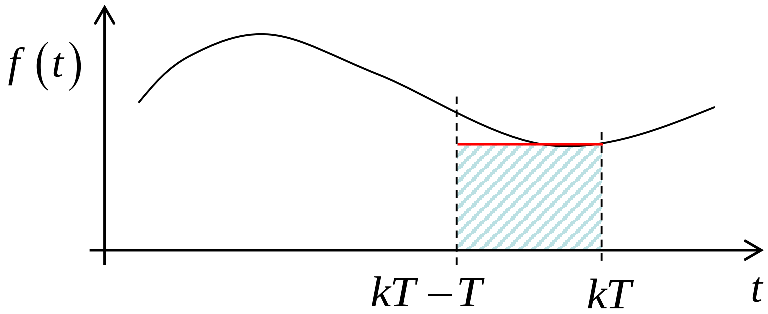
השטח מתחת ל- $f(t)=\left(-au(t)+ae(t)\right)$ בין $t=kT-T$ ל- $t=kT$

את השטח הזה $\boxed{\int_{kT-T}^{kT}\left(-au(\tau)+ae(\tau)\right)d\tau}$ ניתן לקרב בכמה אופנים:



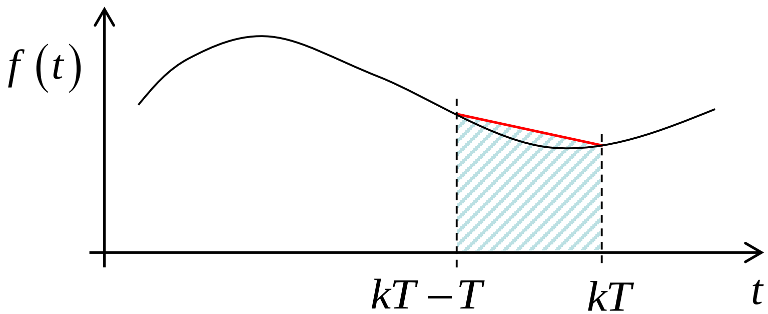
Forward rectangular rule (Euler)

$$\int_{kT-T}^{kT} f(\tau)\,d\tau = T\cdot f(kT-T)$$



Backward rectangular rule

$$\int_{kT-T}^{kT} f(\tau)\,d\tau = T\cdot f(kT)$$



Trapezoid rule (Tustin)

$$\int_{kT-T}^{kT} f(\tau)\,d\tau = \frac{T}{2}\cdot\left(f(kT-T)+f(kT)\right)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{a}{s+a} \quad \Rightarrow \quad u(kT)=u(kT-T)+\int_{kT-T}^{kT}\left(-au(\tau)+ae(\tau)\right)d\tau$$

1. קירוב קדמי

$$u(kT)=u(kT-T)+T\left[-au(kT-T)+ae(kT-T)\right]$$

$$u(kT)=(1-aT)u(kT-T)+aTe(kT-T)$$

התמרת Z

$$U(z)=(1-aT)z^{-1}U(z)+aTz^{-1}E(z)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{aTz^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}}=\frac{aT}{z-1+aT}=\frac{a}{\frac{z-1}{T}+a}$$

מכאן, בקרוב קדמי:

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\left.\frac{a}{s+a}\right|_{s=\frac{z-1}{T}}=\frac{a}{\frac{z-1}{T}+a}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{a}{s+a}\quad\Rightarrow\quad u(kT)=u(kT-T)+\int_{kT-T}^{kT}\left(-au(\tau)+ae(\tau)\right)d\tau$$

2. קירוב אחורי

$$u(kT)=u(kT-T)+T\left[-au(kT)+ae(kT)\right]$$

$$(1+Ta)u(kT)-u(kT-T)=aTe(kT)$$

התמרת Z

$$\left(1-z^{-1}+Ta\right)U(z)=aTE(z)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{aT}{1-z^{-1}+Ta}=\frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T}+a}=\frac{a}{\frac{z-1}{Tz}+a}$$

מכאן, בקרוב אחורי:

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\left.\frac{a}{s+a}\right|_{s=\frac{z-1}{Tz}}=\frac{a}{\frac{z-1}{Tz}+a}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{a}{s+a} \quad \Rightarrow \quad u(kT)=u(kT-T)+\int_{kT-T}^{kT}\left(-au(\tau)+ae(\tau)\right)d\tau$$

3. קירוב טרפזי

$$u(kT)=u(kT-T)+\frac{T}{2}\left[-au(kT)+ae(kT)-au(kT-T)+ae(kT-T)\right]$$

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)u(kT)+\left(\frac{aT}{2}-1\right)u(kT-T)=\frac{aT}{2}e(kT)+\frac{aT}{2}e(kT-T)$$

התמרת Z

$$\left(\left(1+\frac{aT}{2}\right)+\left(\frac{aT}{2}-1\right)z^{-1}\right)U(z)=\frac{aT}{2}\left(1+z^{-1}\right)E(z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{U(z)}{E(z)}=\frac{\frac{aT}{2}\left(1+z^{-1}\right)}{1-z^{-1}+\frac{aT}{2}\left(1+z^{-1}\right)}=\frac{\frac{aT}{2}(z+1)}{z-1+\frac{aT}{2}(z+1)}=\frac{a}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+a}$$

מכאן, בקרוב הטרפזי:

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\left.\frac{a}{s+a}\right|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}=\frac{a}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+a}$$

לסיכום, ניתן לקבל קירוב של פונקציית תמסורת רציפה ע"י שימוש בקשרים הבאים:

Euler	$\frac{z-1}{T} \rightarrow s$
קירוב אחורי	$\frac{z-1}{Tz} \rightarrow s$
קירוב טרפזי	$\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \rightarrow s$

<u>הקירוב הטרפזי נקרא גם:</u>

טרנספורמציה בי-ליניארית או **Tustin's method.**

נראה כיצד כל אחת מהטרנספורמציות מעתיקה את חצי המישור $\sigma > 0 \quad s = -\sigma + j\omega,$ (המישור היציב) למישור z .

Euler	$\frac{z-1}{T} \rightarrow s$	$\Rightarrow \quad z = 1 + Ts$
קירוב אחורי	$\frac{z-1}{Tz} \rightarrow s$	$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{1 - Ts}$
קירוב טרפזי	$\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \rightarrow s$	$\Rightarrow \quad z = \frac{1 + Ts/2}{1 - Ts/2}$

עבור כל קירוב נציב: $s = -\sigma + j\omega, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \omega < \infty$

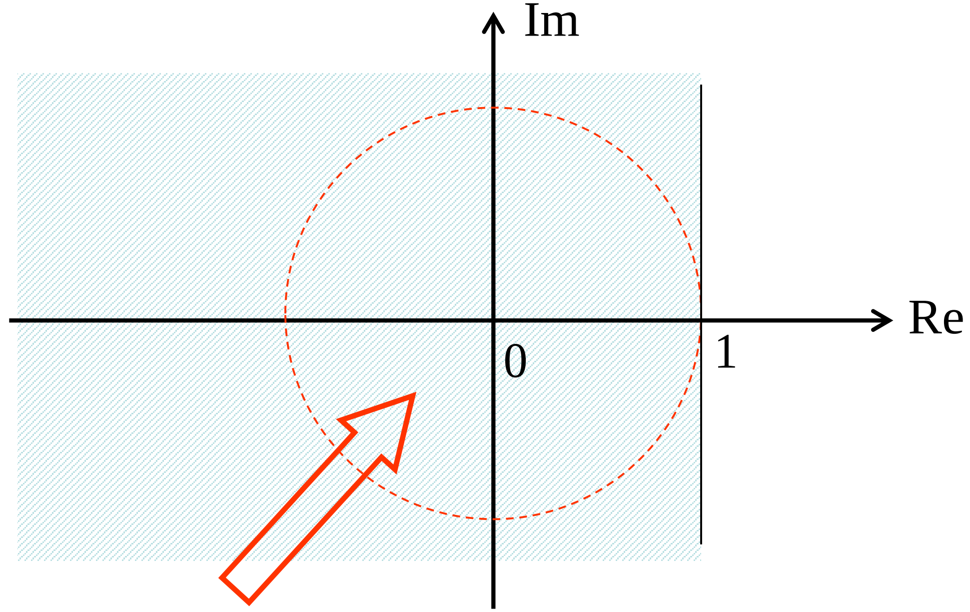
ונבחן את z

עבור קירוב Euler:

$$z = 1 + Ts$$

$$\Rightarrow$$

$$z = 1 - T\sigma + T\omega j, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \omega < \infty$$



תחום היציבות במישור z:

כלומר, כתוצאה מהקירוב יכולה להתקבל מערכת לא יציבה במישור z
למרות שהמערכת יציבה במישור s

עבור הקירוב האחורי:

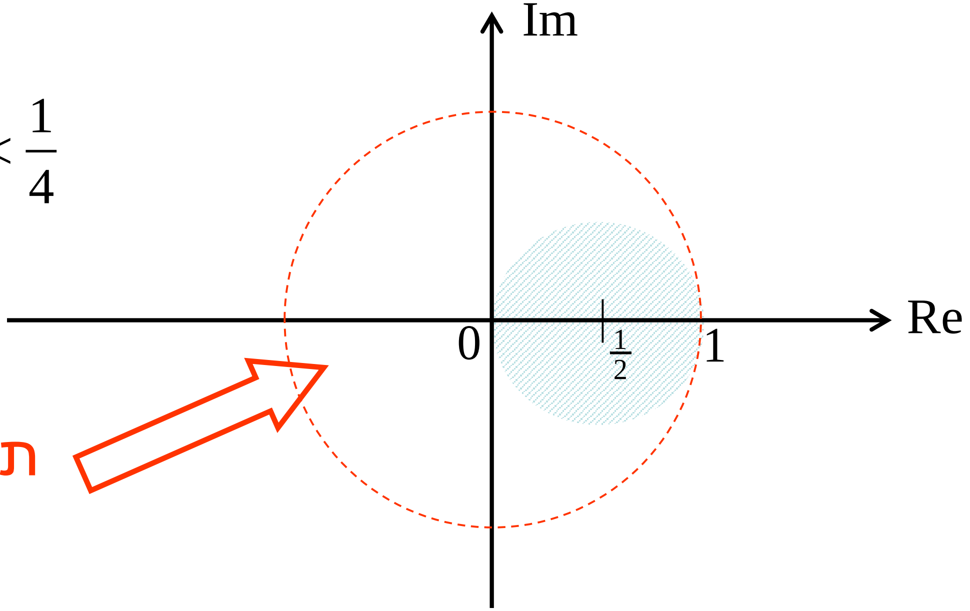
$$z=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{1-Ts}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1+Ts}{1-Ts}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$z-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+Ts}{1-Ts}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-T\sigma+T\omega j}{1+T\sigma+T\omega j}\right),\quad \sigma>0,\quad -\infty<\omega<\infty$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\frac{(1-T\sigma)^2+(T\omega)^2}{(1+T\sigma)^2+(T\omega)^2}\right)<\frac{1}{4}$$



תחום היציבות במישור z:

הטרנספורמציה הזאת מעתיקה את האזור היציב ב- s לאזור יציב ב- z .

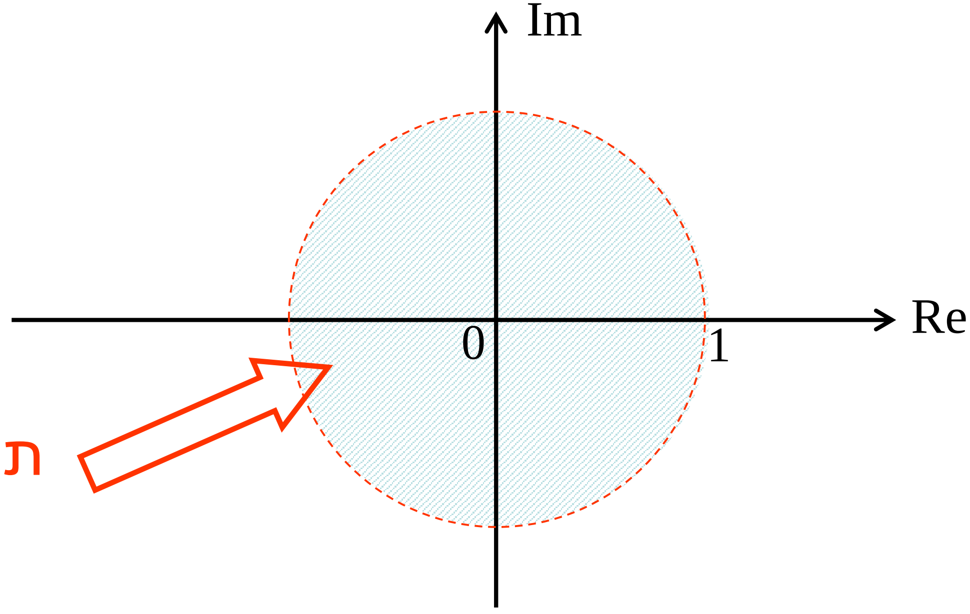
אבל מעתיקה גם חלקים של האזור הלא יציב ב- s לאזור יציב ב- z .

עבור הקירוב הטרפזי:

$$z=\frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}=\frac{1+\frac{T}{2}\left(-\sigma+\omega j\right)}{1-\frac{T}{2}\left(-\sigma+\omega j\right)}=\frac{\left(1-\frac{T}{2}\sigma\right)+\frac{T}{2}\omega j}{\left(1+\frac{T}{2}\sigma\right)-\frac{T}{2}\omega j},\quad \sigma>0,\quad -\infty<\omega<\infty$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|z\right|=\frac{\left(1-\frac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\frac{T}{2}\omega\right)^2}{\left(1+\frac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\frac{T}{2}\omega\right)^2}<1$$



תחום היציבות במישור z:

כלומר, האזור היציב של מישור s מועתק וממלא את כל האזור היציב במישור z .

עבור $\sigma=0$ (ספ יציבות ברציף) מתקבל $\left|z\right|=1$ (ספ יציבות בבדיד).

מרחב המצב

ניתן להשתמש בקשרים שפחנו גם עבור ייצוגים במרחב המצב.

לדוגמא, כאשר מתכננים בקר רציף במרחב המצב אשר כולל בקר משוב מצב ומשערך. את הבקר רוצים לממש ע"י מיקרו-מעבד לכן יש למצוא קירוב בדידי לבקר הרציף (זהו כאמור תכנון עקיף).

מרחב מצב רציף:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

מתוך התמרת לפלס:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

במקרה של קרוב אוילר:

$$\frac{z-1}{T} \rightarrow s$$

לכן:

$$\frac{z-1}{T}X(z) = AX(z) + BU(z)$$
$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

קירוב אוילר המשך:

$$\frac{z-1}{T}X = AX + BU$$

$$\Rightarrow$$

$$(z-1)X = TAX + TBU$$

מכאן חזרה למישור הזמן הבדיד:

$$x(k+1) - x(k) = TAx(k) + TBu(k)$$

$$\Rightarrow$$

Euler $x(k+1) = (I+TA)x(k) + TBu(k)$

את המטריצות A ו- B של הבקר הרציף מציבים בנוסחה האחרונה ומקבלים מיד את הקירוב הבדיד של הבקר.

נפתח נוסחאות דומות גם עבור הקירוב האחורי וגם עבור הקירוב הטרפזי.

נציב את הקירוב האחורי:

$$\frac{z-1}{Tz} \quad \rightarrow \quad s$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{z-1}{Tz} X = AX + BU$$

חזרה למישור הזמן הבדיד:

$$x(k+1) - x(k) = TAx(k+1) + TBu(k+1)$$

ניתן לכתוב:

$$x(k) - x(k-1) = TAx(k) + TBu(k)$$

ולהגדיר ווקטור מצב חדש:

$$w(k) = x(k-1) \quad \Rightarrow \quad w(k+1) = x(k)$$

אז:

$$w(k+1) - w(k) = TAw(k+1) + TBu(k)$$

$$\Rightarrow$$

$$(I - TA) w(k+1) = w(k) + TBu(k)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{w(k+1) = (I - TA)^{-1} w(k) + (I - TA)^{-1} TBu(k)}$$

כמו כן (משוואות המוצא):

$$y(k)=Cx(k)+Du(k)$$

$$\Rightarrow$$

$$y(k)=C\Big((I-TA)^{-1}w(k)+(I-TA)^{-1}TBu(k)\Big)+Du(k)$$

$$=C(I-TA)^{-1}w(k)+\Big(C(I-TA)^{-1}TB+D\Big)u(k)$$

לסיכום, עבור הקירוב האחורי:

קירוב אחורי

$$w(k+1)=(I-TA)^{-1}w(k)+(I-TA)^{-1}TBu(k)$$

$$y(k)=C(I-TA)^{-1}w(k)+\Big(C(I-TA)^{-1}TB+D\Big)u(k)$$

עבור הקירוב הטרפזי מתקבל

$$\frac{2(z-1)}{T(z+1)}X=AX+BU$$

קירוב טרפזי

$$w(k+1)=\left(I+\tfrac{AT}{2}\right)\left(I-\tfrac{AT}{2}\right)^{-1}w(k)+\left(I-\tfrac{AT}{2}\right)^{-1}B\sqrt{T}u(k)$$

$$y(k)=\sqrt{T}C\left(I-\tfrac{AT}{2}\right)^{-1}w(k)+\Big(C\left(I-\tfrac{AT}{2}\right)^{-1}\tfrac{BT}{2}+D\Big)u(k)$$

שיטת התאמת קטבים ואפסים

תהיה $H(s)$ פונקציית תמסורת רציפה, וכן $H_{zp}(z)$ השקול הבדיד של $H(s)$ המתקבל בשיטת התאמת קטבים ואפסים (כמפורט מטה):

1) אם $s=-a$ הוא קוטב של $H(s)$ אז $z=e^{-aT}$ הוא קוטב של $H_{zp}(z)$

2) אם $s=-b$ הוא אפס של $H(s)$ אז $z=e^{-bT}$ הוא אפס של $H_{zp}(z)$

3) האפסים של $H(s)$ ב- $s=\infty$ מועתקים ל- $z=-1$ (מספר האפסים באינסוף של $H(s)$ שווה להפרש בין מספר הקטבים והאפסים)

4) הקבוע k של $H_{zp}(z)$ מחושב מתוך: $H_{zp}(z)\big|_{z=1}=H(s)\big|_{s=0}$
קשר זה מאלץ את שתי פונקציות התמסורת לשוויון במצב המתמיד.

דוגמא לשימוש בשיטת התאמת קטבים ואפסים

נתון הבקר הרציף: $H(s)=\frac{1}{s+1}$

יש למצוא בקר בדיד שקול בשיטת התאמת קטבים ואפסים.

ל- $H(s)$ יש אפס אחד באינסוף, לכן: $H_{zp}(z)=k\frac{z+1}{z-e^{-T}}$

חישוב הקבוע k מתוך שיקולים של מצב מתמיד:

$$k\frac{z+1}{z-e^{-T}}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{s+1}\bigg|_{s=0}\quad\Rightarrow\quad k=\frac{1-e^{-T}}{2}$$

התקבל הקירוב:

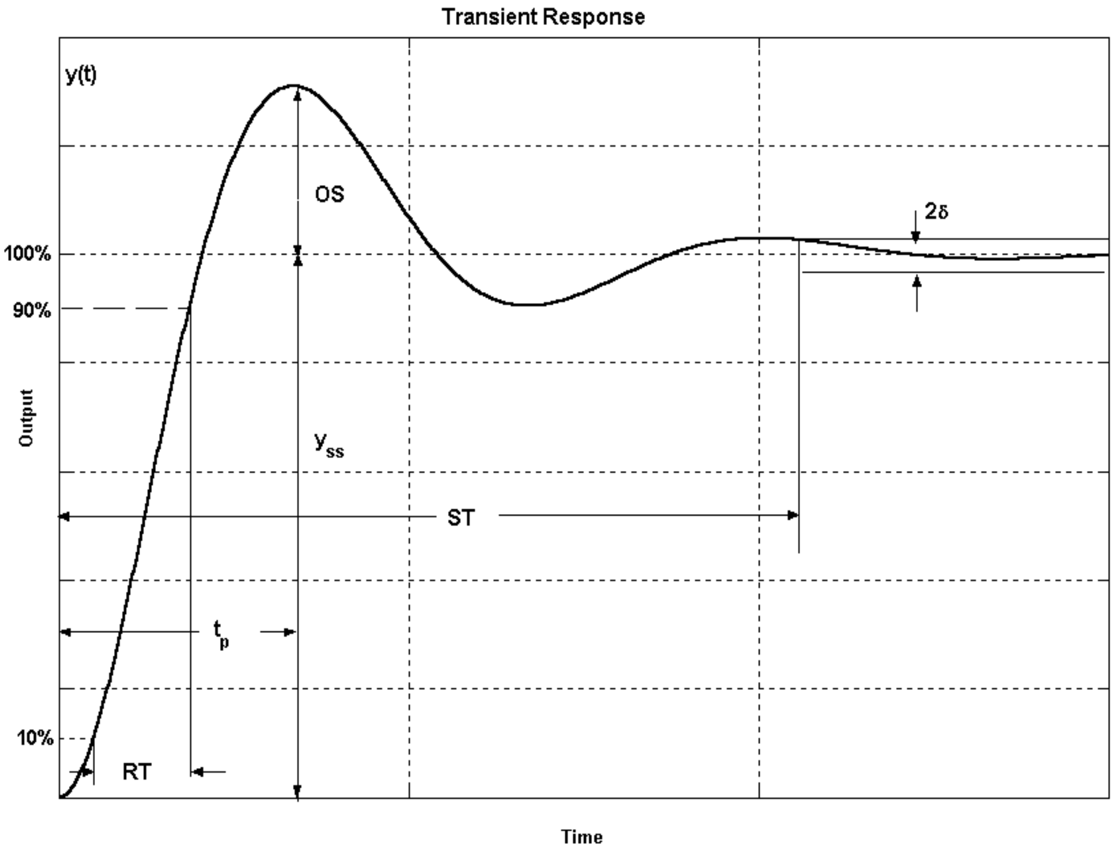
$$\boxed{H_{zp}(z)=\frac{\left(1-e^{-T}\right)(z+1)}{2\left(z-e^{-T}\right)}}$$

השיטה אינה מתאימה למקרה בו ל- $H(s)$ יש קטבים בראשית ($s=0$).

תזכורת:

הקשר בין המקום של הקטבים ובין הביצועים של המערכת:

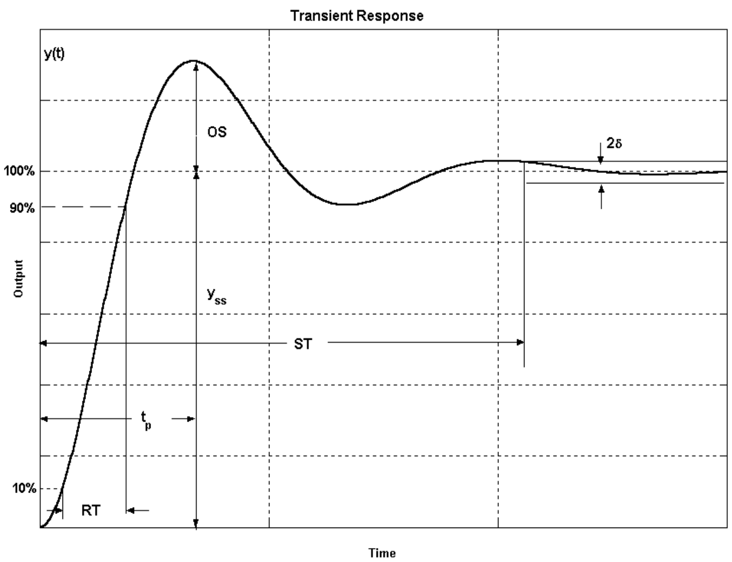
(הקשרים מתאימים למערכות מסדר שני ללא אפסים, במערכות עם מספר גדול יותר של קטבים ואפסים ניתן עדיין להשתמש בנוסחות אך יש לקחת בחשבון את ההשפעה של הקטבים והאפסים הנוספים).



$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^{\,2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}$$

הביצועים במישור הזמן מוגדרים עבור תגובה של המערכת לכניסת מדרגה.

$$R(s)=\frac{1}{s}$$



תגובת יתר (Overshoot): סטייה מקסימאלית (באחוזים) מהמצב הרצוי.

$$PO = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot 100\%$$

זמן עלייה (Rise Time): הזמן שדרוש לתגובה לעלות מ- 10% עד ל- 90% מערכה הסופי.

$$RT \approx \frac{2}{\omega_n}$$

זמן רגיעה (Settling Time):
הזמן שלוקח לתגובה למדרגה להגיע ל $\pm\delta\%$ מערכה הסופי ולהישאר שם.

$$ST \le -\frac{\ln\delta}{\zeta\omega_n}$$

$\lvert\delta\rvert$	ST
5%	$3/\zeta\omega_n$
2%	$4/\zeta\omega_n$
1%	$4.6/\zeta\omega_n$

דוגמא לתכנון ע"י תכנון עקיף (אמולציה)

תכנון עקיף = תכנון בקר רציף לתהליך רציף + קירוב בדיד לבקר הרציף

מטרה: בדיקת ההשפעה של המימוש הבדיד (של הבקר הרציף) על הביצועים של החוג הסגור

דוגמא: נתונה פונקציית תמסורת של תהליך רציף

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s(10s+1)}$$

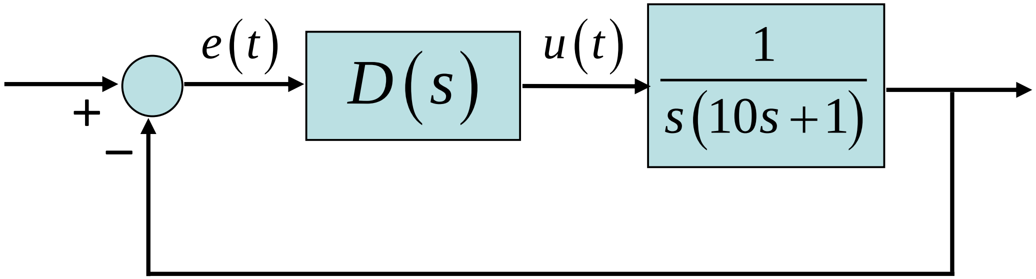
דרישות:

תגובת ייתר: $PO \le 16\%$

זמן התכנסות (זמן רגיעה) ביחס ל- $\pm 1\%$: $ST \le 10s$

מימוש על ידי מחשב

תכנון בקר רציף לתהליך רציף



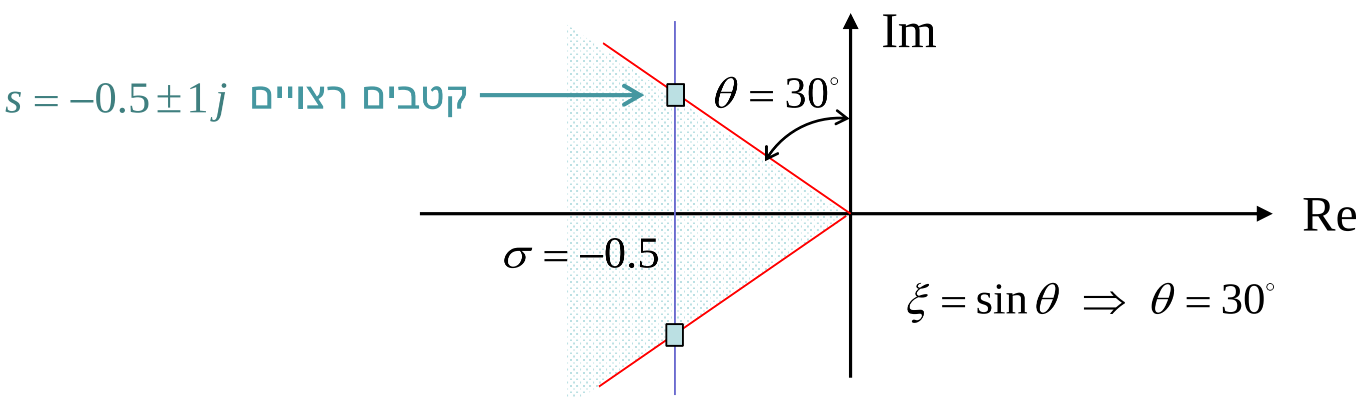
מתוך הדרישות (ביצועים רצויים) מתקבל:

תגובת ייתר:

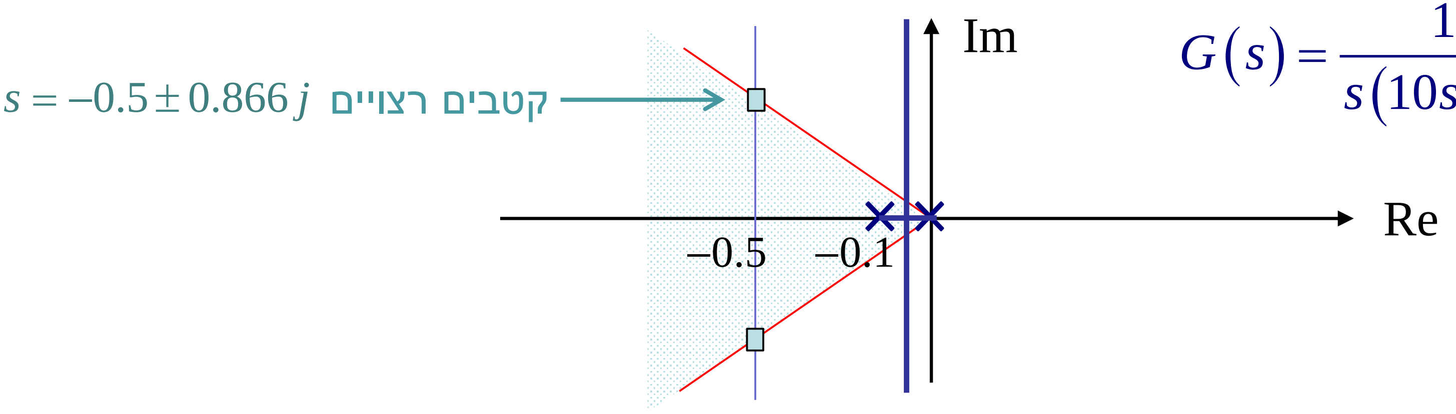
$$PO = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot 100\% \quad \le \quad 16\% \quad \Rightarrow \quad \xi \ge 0.5$$

זמן התכנסות ($|\delta| = 1\%$):

$$ST = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = \frac{4.6}{\sigma} \le 10 \quad \Rightarrow \quad \sigma \ge 0.46$$



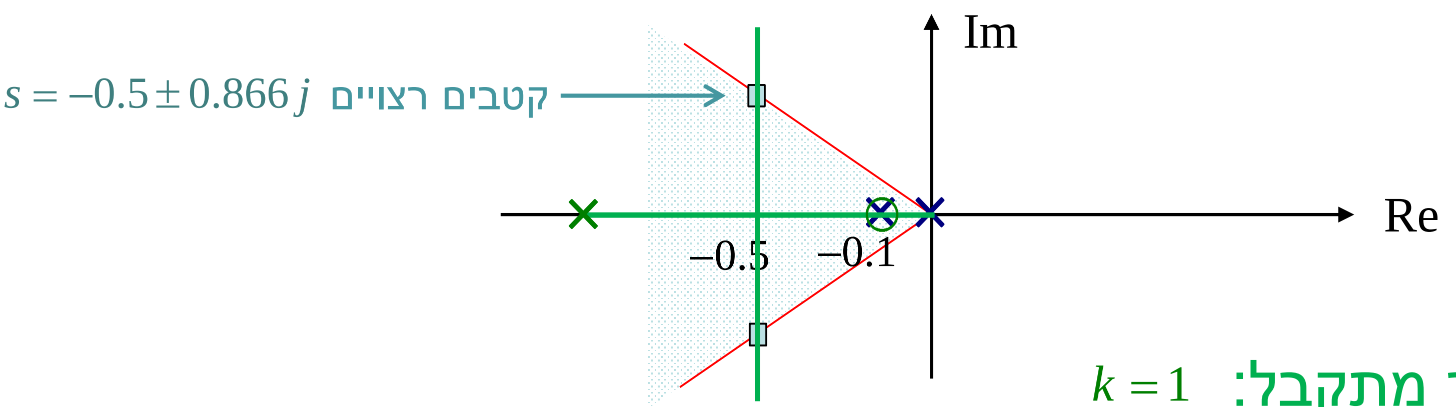
RL עם בקר קבוע (פרופורציונאלי)



$$G(s)=\frac{1}{s(10s+1)}$$

נתכנן בקר מהצורה הבאה (רשת קידום):

$$D(s)=k\frac{10s+1}{s+1}$$



מכלל ההגבר מתקבל: $k=1$

החוג הסגור עם הבקר שתוכנן:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{1}{s(10s+1)}\frac{10s+1}{s+1}}{1+\frac{1}{s(10s+1)}\frac{10s+1}{s+1}}=\frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1+\frac{1}{s(s+1)}}=\frac{1}{s^2+s+1}$$

מכיוון שדרוש מימוש של הבקר ע"י מחשב, יש צורך בבחירת מרווח דגימה.

מכיוון שבתכנון עקיף (נקרא גם Emulation) משתמשים בקירוב, אז יש לבחור מרווח דגימה "**מספיק קטן**" (הקירוב יהיה יותר טוב כאשר מרווח הדגימה יותר קטן).

אחד מכללי האצבע לבחירת מרווח דגימה בתכנון עקיף הוא:

$$\boxed{T\le\frac{RT}{10}\qquad\Rightarrow\qquad T\le\frac{1}{5\omega_n}}$$

(כדי לדגום את המערכת מספיק פעמים בזמן השינויים המהירים ביותר)

מתוך התמסורת של החוג הסגור: $T(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1} \quad \Rightarrow \quad \omega_n=1$

לכן נבחר את מרווח הדגימה: $T=0.2\sec$

נהפוך את $D(s)$ ל- $D(z)$ ע"י שימוש במיפוי קטבים ואפסים.

$$D(s)=\frac{10s+1}{s+1} \qquad \Rightarrow \qquad D(z)=k_1\frac{z-z_1}{z-p_1}$$

כאשר:

$$z_1=e^{-0.1T}=e^{-0.1\cdot 0.2}=0.9802$$

$$p_1=e^{-1T}=e^{-1\cdot 0.2}=0.8187$$

חישוב ההגבר k_1 :

$$D(z)\big|_{z=1}=D(s)\big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow$$

$$k_1\frac{1-0.9802}{1-0.8187}=1 \quad \Rightarrow \quad k_1=9.15$$

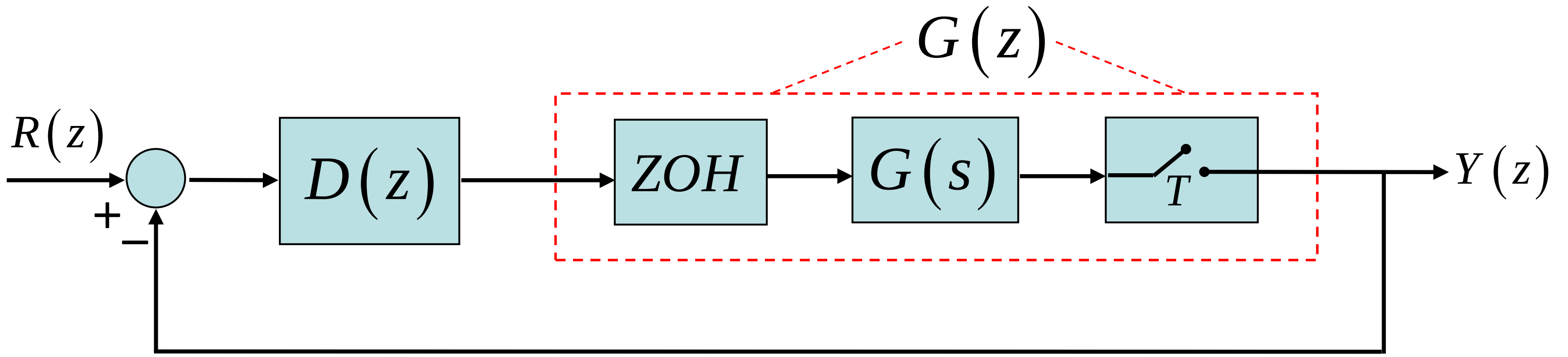
מתקבל הבקר הבא (שניתן למימוש ע"י מחשב):

$$D(z) = 9.15\frac{z-0.9802}{z-0.8187}$$

(כדי לממש את הבקר ע"י מחשב יש להפוך אותו למשוואת הפרשים)

<u>הערכה של התכנון:</u>

ניתן (לצורך סימולציה) לבנות חוג סגור השקול לחוג הסגור האמיתי בנקודות הדגימה.



$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}$$

הערכה של התכנון (המשך):

$$G(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{a}{s^2(s+a)}\right\}=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{as}+\frac{1}{a}\frac{1}{s+a}\right\}$$

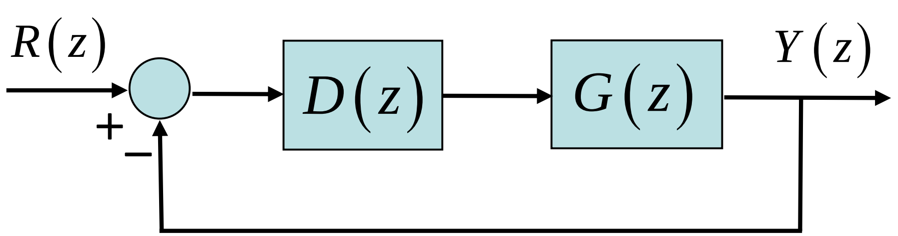
שימוש בטבלאות נותן:

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{a(z-1)}+\frac{1}{a}\frac{1}{z-e^{-at}}\right]$$

נציב $T=0.2,\ a=0.1$, מכאן:

$$G(z)=0.00199\frac{z+0.9934}{(z-1)(z-0.9802)}$$

המערכת הבדידה השקולה:



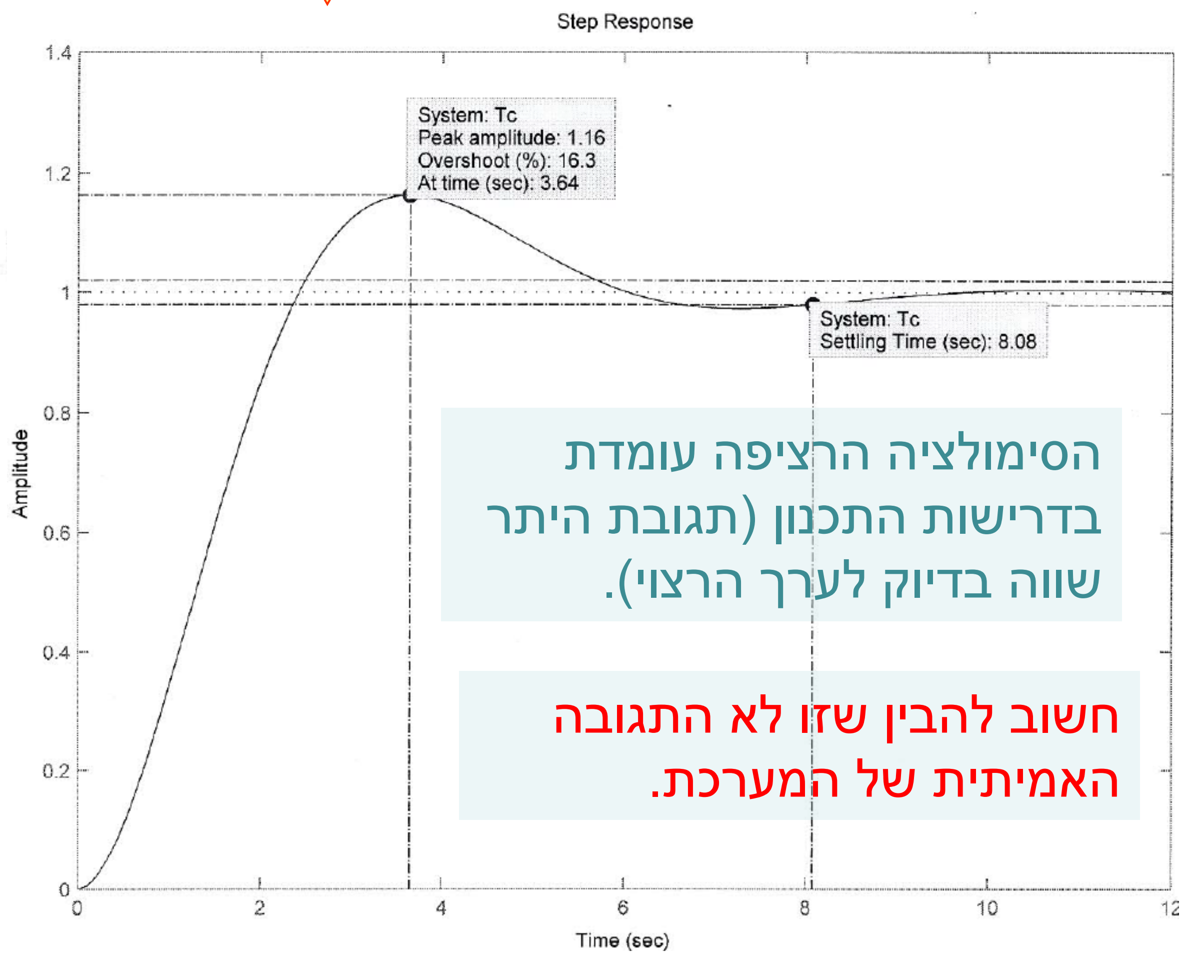
$$T(z)=\frac{GD(z)}{1+GD(z)}$$

ניתן לחשב את $y(k)$ ע"י התמרה הפוכה של: $Y(z)=T(z)R(z)$

(התוצאה שווה $y(t)$ בנקודות הדגימה)

הערכה של התכנון ע"י תוכנית MATLAB

```
Gc=tf(1,[10 1 0])
Dc=tf([10 1],[1 1])
Tc=feedback(Dc*Gc,1)
step(Tc)
hold on

T=0.2;
Gd1=c2d(Gc,T,'zoh')
Dd1=c2d(Dc,T,'match')
Td1=feedback(Dd1*Gd1,1
step(Td1)
```



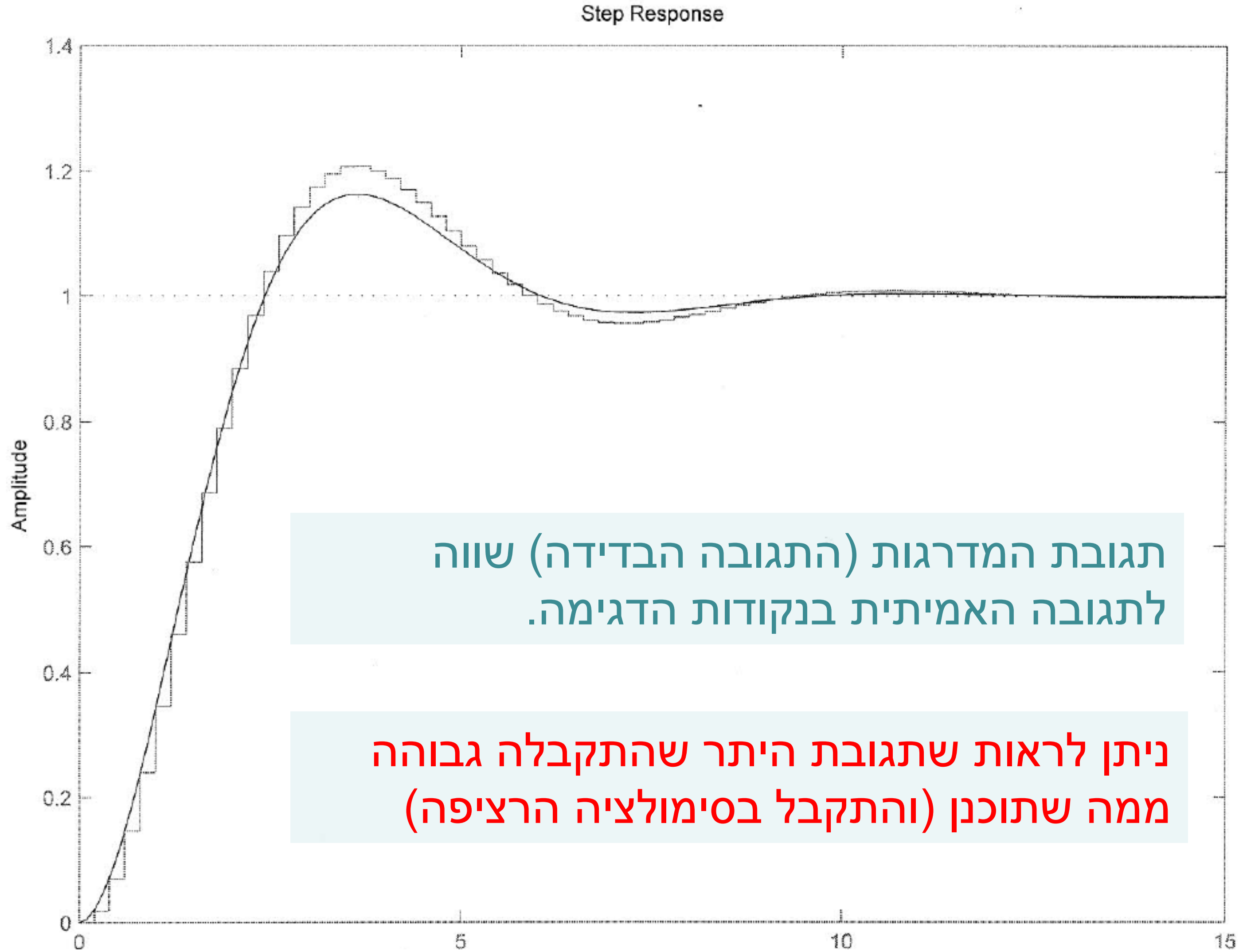
הסימולציה הרציפה עומדת בדרישות התכנון (תגובת היתר שווה בדיוק לערך הרצוי).

חשוב להבין שזו לא התגובה האמיתית של המערכת.

הגרף בשקף הבא

הערכה של התכנון ע"י תוכנית MATLAB

```
T=0.2;
Gd1=c2d(Gc,T,'zoh')
Dd1=c2d(Dc,T,'match')
Td1=feedback(Dd1*Gd1,1)
step(Td1)
```

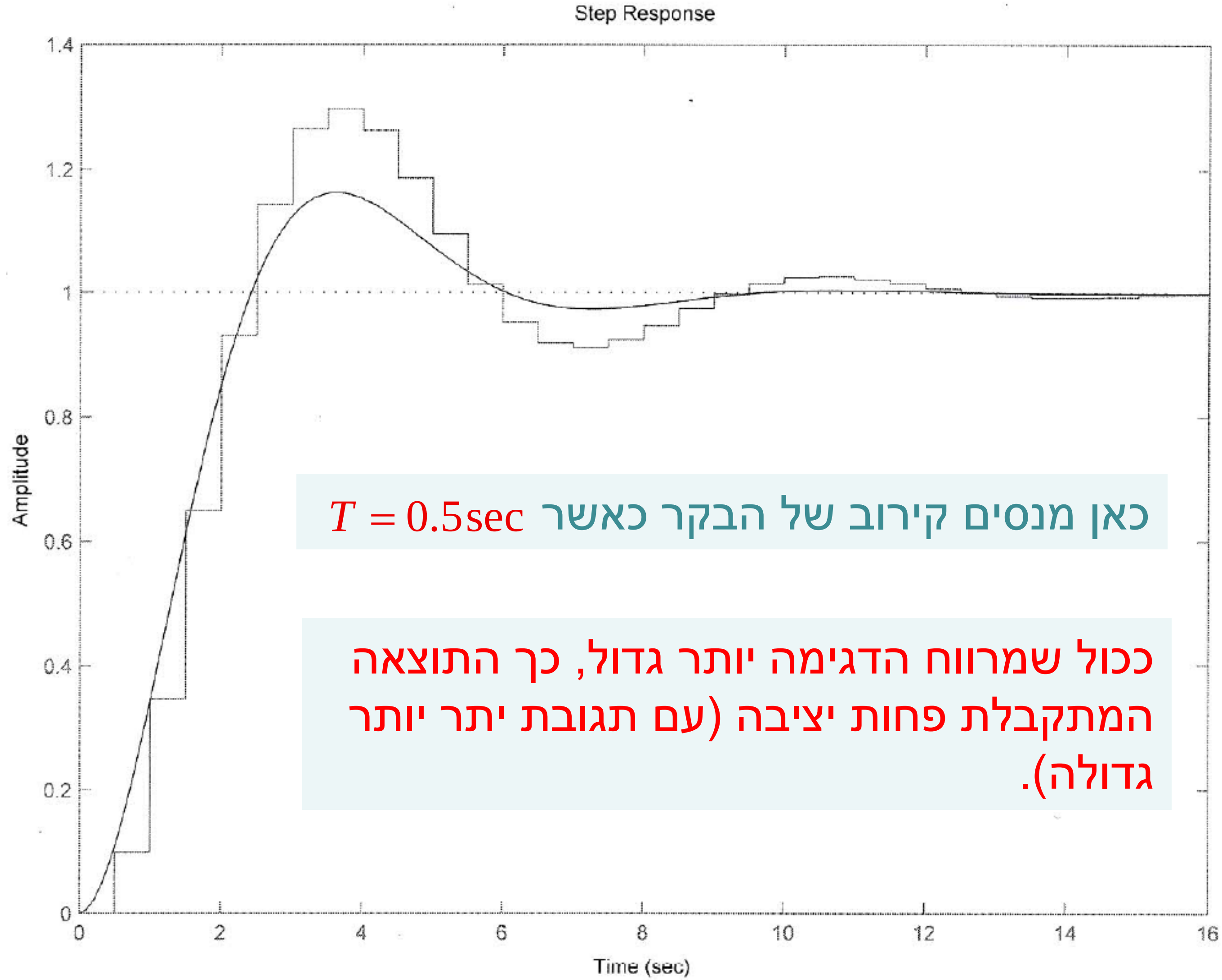


תגובת המדרגות (התגובה הבדידה) שווה
לתגובה האמיתית בנקודות הדגימה.

ניתן לראות שתגובת היתר שהתקבלה גבוהה
ממה שתוכנן (והתקבל בסימולציה הרציפה)

הערכה של התכנון ע"י תוכנית MATLAB

```
T=0.5;
Gd2=c2d(Gc,T,'zoh')
Dd2=c2d(Dc,T,'match')
Td2=feedback(Dd2*Gd2,1)
step(Td2)
```



כאן מנסים קירוב של הבקר כאשר $T = 0.5\sec$

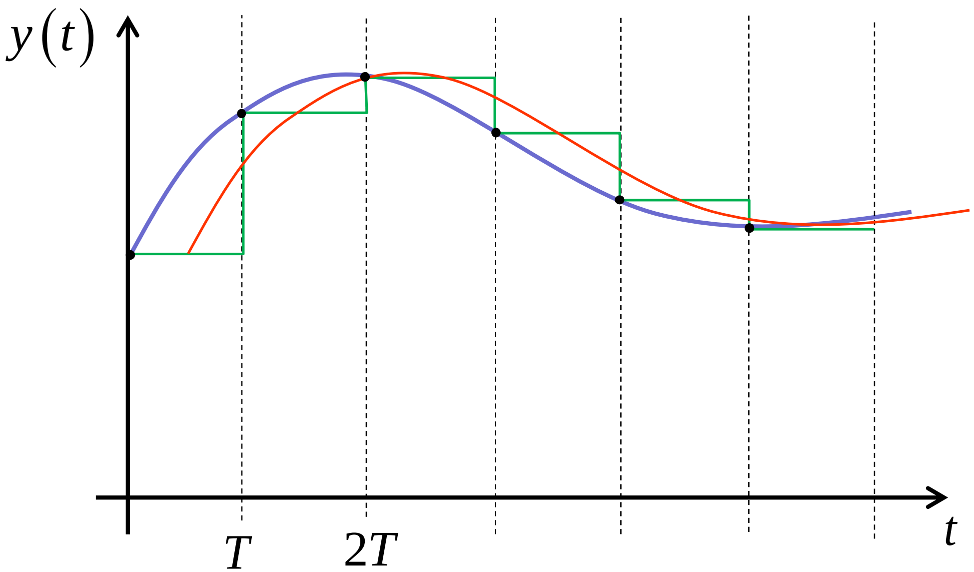
ככול שמרווח הדגימה יותר גדול, כך התוצאה המתקבלת פחות יציבה (עם תגובת יתר יותר גדולה).

הפגיעה ביציבות היא בעיקר בגלל ה- ZOH שקיים בתוצאה הסופית אך לא נלקח בחשבון בתכנון.

ה- ZOH כולל השהייה בזמן ולכן גורם לפיגור פאזה (הקטנת עודף הפאזה ופגיעה ביציבות).

ניתן לקרב את השפעת ה- ZOH ולהתחשב בהשפעה זו בתכנון.

אם דוגמים ומשהים אות רציף מתקבל:



באופן ממוצע (מקורב) יש כאן פיגור של $T/2\,\sec$ (העקום האדום מפגר אחרי הכחול)

במונחים של פונקציית תמסורת:

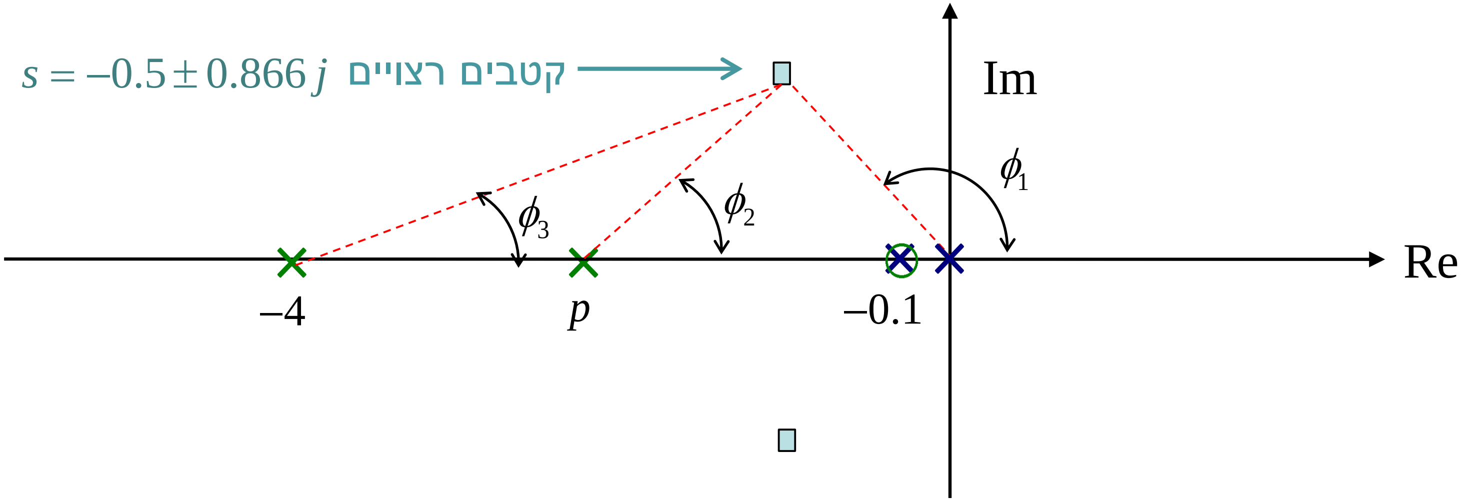
$$G_h(s) = e^{-2/T s} \approx \frac{2/T}{s+2/T}$$

שיפור התכנון (תכנון המתחשב בקירוב של ה- ZOH):

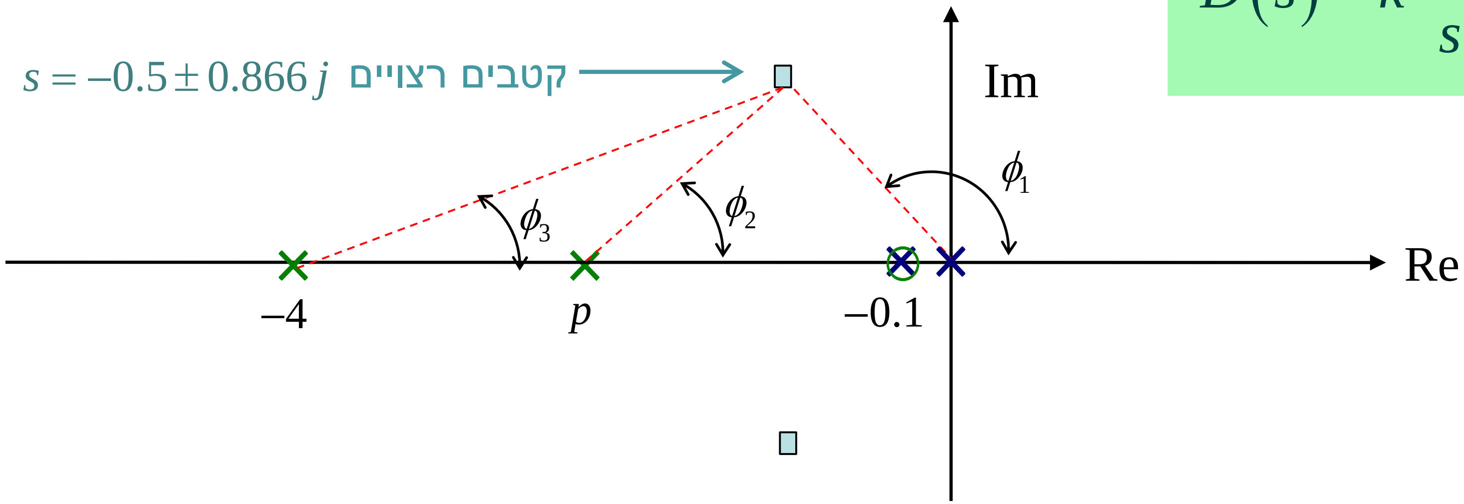
נתכנן מחדש עבור המקרה בו $T = 0.5\sec$

קירוב ה- ZOH: $$G_h(s) \approx \frac{2/T}{s+2/T} = \frac{4}{s+4}$$

פונקציית התמסורת של הבקר החדש (הרציף): $$D(s) = k\frac{10s+1}{s+p}$$



$$D(s) = k\frac{10s+1}{s+p}$$



כלל הזווית

$$\sum\psi_i - \sum\phi_i = (2q-1)180^\circ$$

$$\Rightarrow$$

$$-150^\circ - \arctan\frac{\sqrt{3}}{2\cdot3.5} - \phi_2 = -180^\circ$$

$$\phi_2 = 180^\circ - 120^\circ - 13.9^\circ = 46.1^\circ$$

$$\Rightarrow p = 0.5 + \frac{\sqrt{3}/2}{\tan 46.1} = 1.33$$

כלל הגודל

$$4k = \sqrt{0.5^2+3/4}\sqrt{0.83^2+3/4}\sqrt{3.5^2+3/4}$$

$$\Rightarrow$$

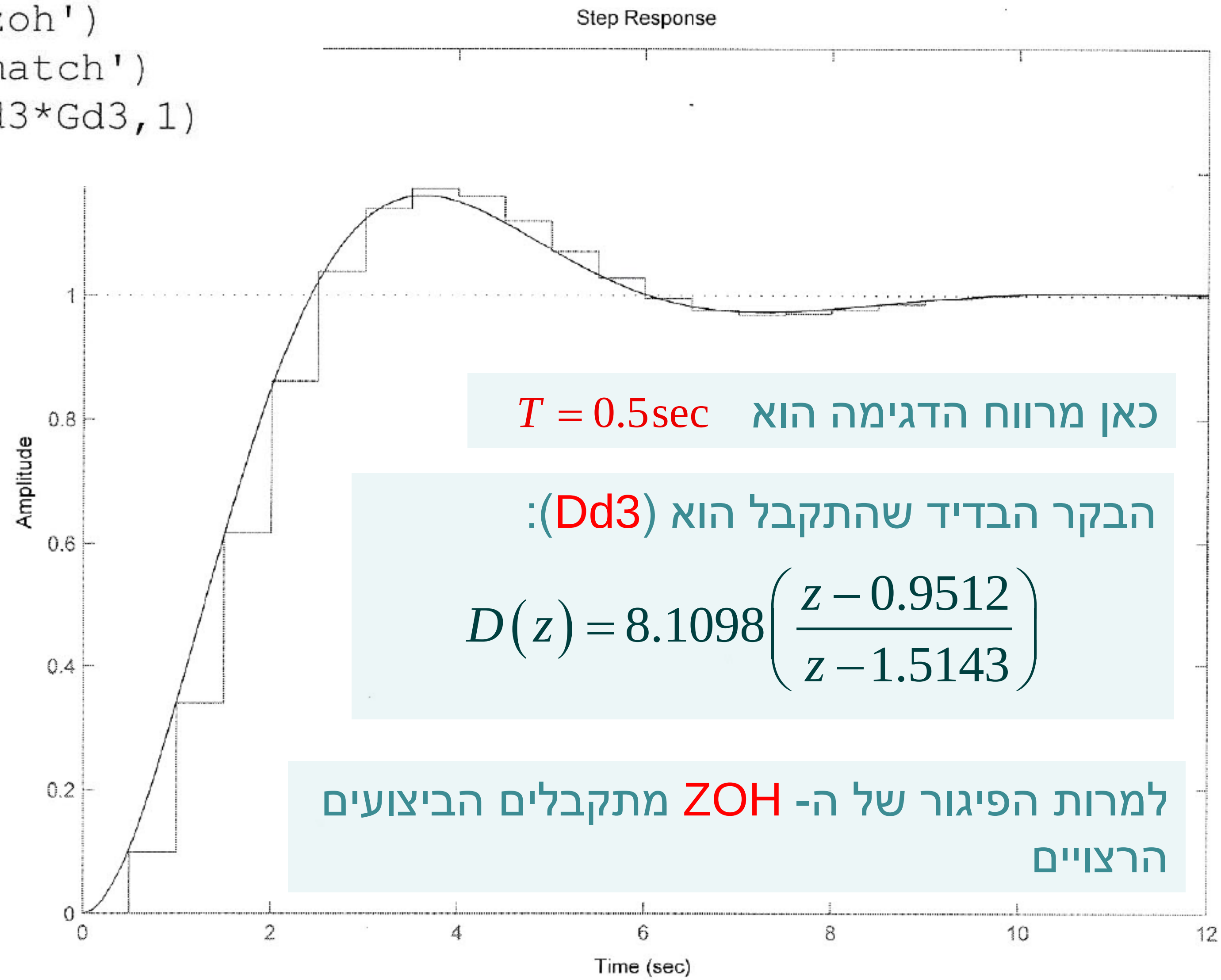
$$k = 1.083$$

$$\Rightarrow$$

$$D(s) = 1.083\left(\frac{10s+1}{s+1.33}\right) = 10.83\left(\frac{s+0.1}{s+1.33}\right)$$

הערכה של התכנון ע"י תוכנית MATLAB

```
Dc=zpk([-0.1],[-1.33],10.83)
Gh=tf(2/T,[1 2/T])
Gd3=c2d(Gc,T,'zoh')
Dd3=c2d(Dc,T,'match')
Td3=feedback(Dd3*Gd3,1)
step(Td3)
```



כאן מרווח הדגימה הוא $T = 0.5\text{sec}$

הבקר הבדיד שהתקבל הוא (Dd3):

$$D(z) = 8.1098\left(\frac{z-0.9512}{z-1.5143}\right)$$

למרות הפיגור של ה- ZOH מתקבלים הביצועים הרצויים

דוגמא לתכנון ע"י תכנון ישיר

תכנון ישיר = תכנון בקר בדיד לתהליך בדיד.

התהליך הבדיד שווה לתהליך הרציף בנקודות הדגימה.

מטרה: בדיקת היעילות של התכנון הישיר במקרה של מרווח דגימה גדול (באופן יחסי).

דוגמא: נתונה פונקציית תמסורת של תהליך רציף $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s(10s+1)}$

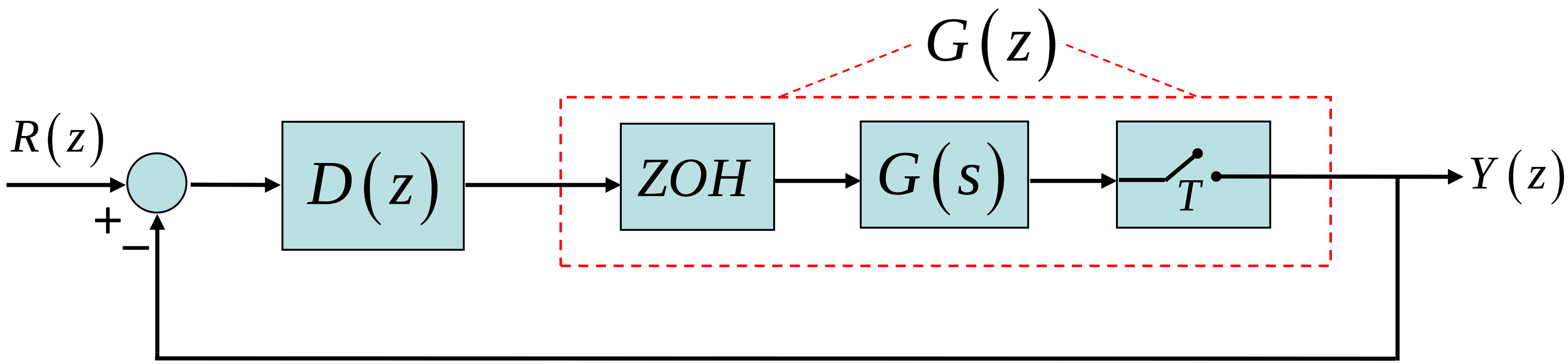
דרישות: (הדרישות זהות לאלו שהוצגו בדוגמא לתכנון ישיר)

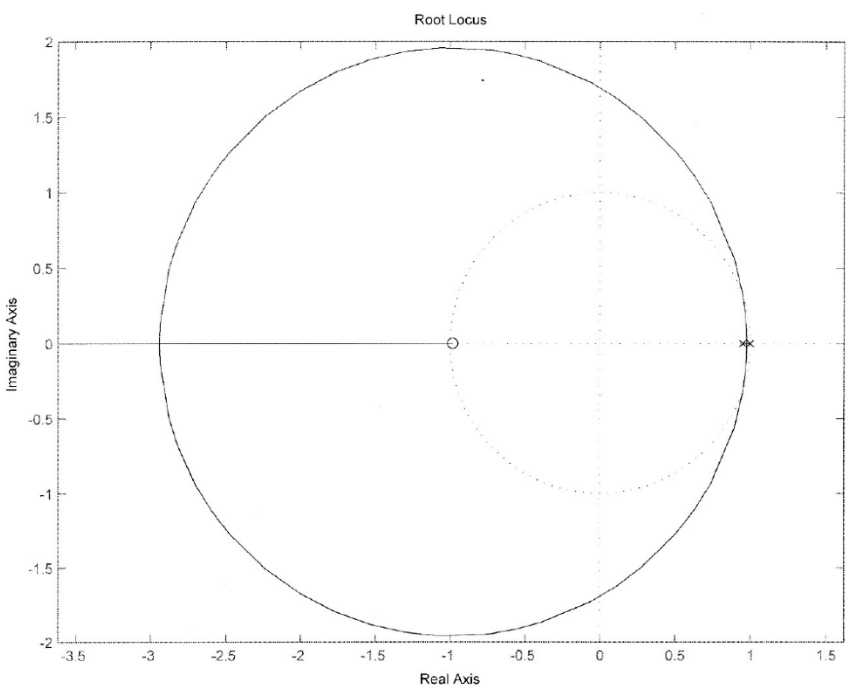
תגובת ייתר: $PO \le 16\%$

זמן התכנסות (זמן רגיעה) ביחס ל- $\pm 1\%$: $ST \le 10s$

מימוש על ידי מחשב $T=0.5\sec$ (מרווח דגימה)

חישוב התהליך הבדיד השקול:





$$G(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}$$

עבור מרווח דגימה $T=0.5\sec$:

$$G(z)=0.012294\frac{z+0.9835}{(z-1)(z-0.9512)}$$

ניסוח הביצועים הרצויים בזמן בדיד:

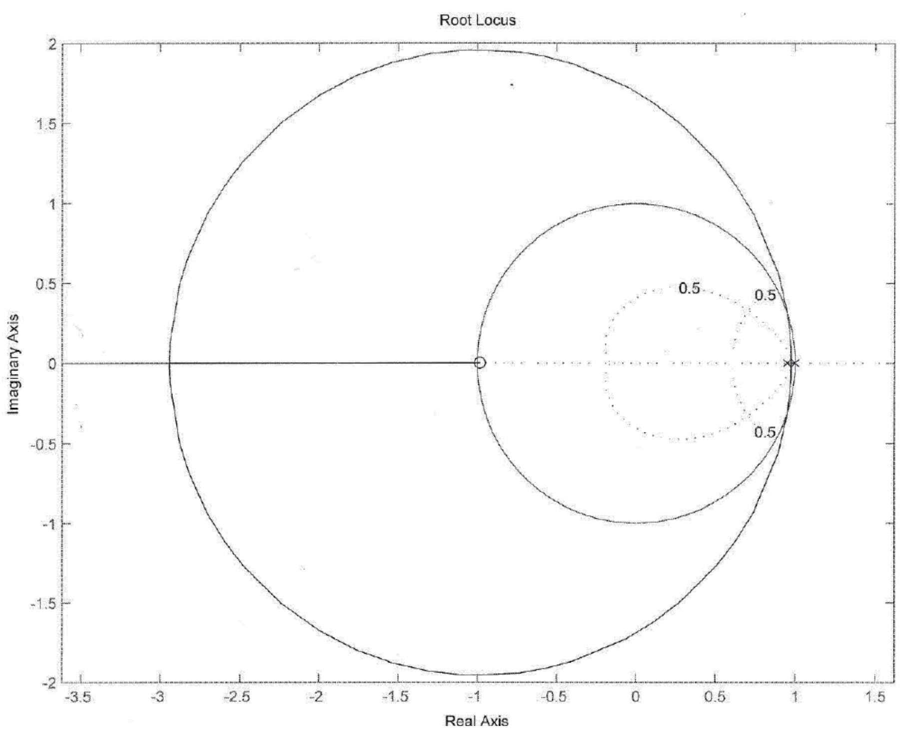
דרישות תכנון:

$$P.O. \le 16\% \quad \Rightarrow \quad \xi \ge 0.5$$

$$t_s \le 10\sec \quad \Rightarrow \quad \xi\omega_n \ge 0.46$$

בדוגמא הקודמת בחרנו עבור דרישות אלה את הקטבים הרציפים הבאים:

$$s = -\xi\omega_n \pm \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n j = -0.5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j \qquad \left(\Rightarrow \xi = 0.5, \omega_n = 1\right)$$



בתכנון זה יש צורך בקטבים בדידים
(קטבים של מערכת בדידה)

<u>שיטה 1 (חישוב)</u>

$$z = e^{sT} = e^{\left(-0.5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j\right) 0.5} = 0.707 \pm 0.327 j$$

<u>שיטה 2 (MATLAB)</u>

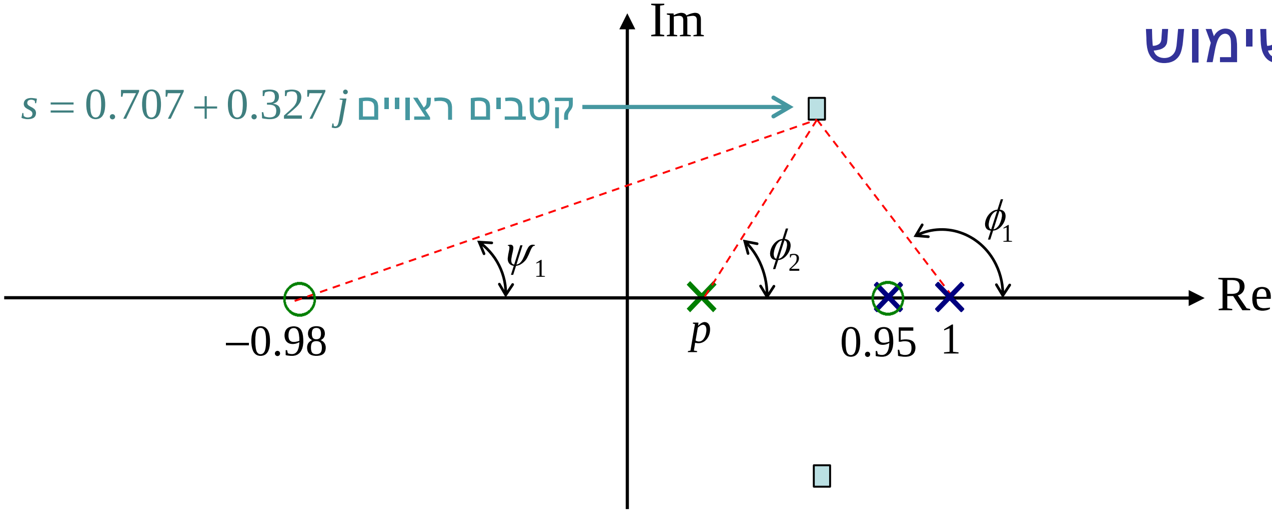
ξ $\omega_n T$

» zgrid(0.5,0.5)

תכנון ע"י RL:

נתכנן רשת מהצורה: $D(z)=k\dfrac{(z-0.9512)}{(z-p)}$

חישוב p ע"י שימוש **בכלל הזווית:**



$$\psi_1-\phi_1-\phi_2=\arctan\frac{0.327}{(0.9835+0.707)}-\left(180-\arctan\frac{0.327}{(1-0.707)}\right)-\phi_2=-180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \phi_2=59.09^\circ$$

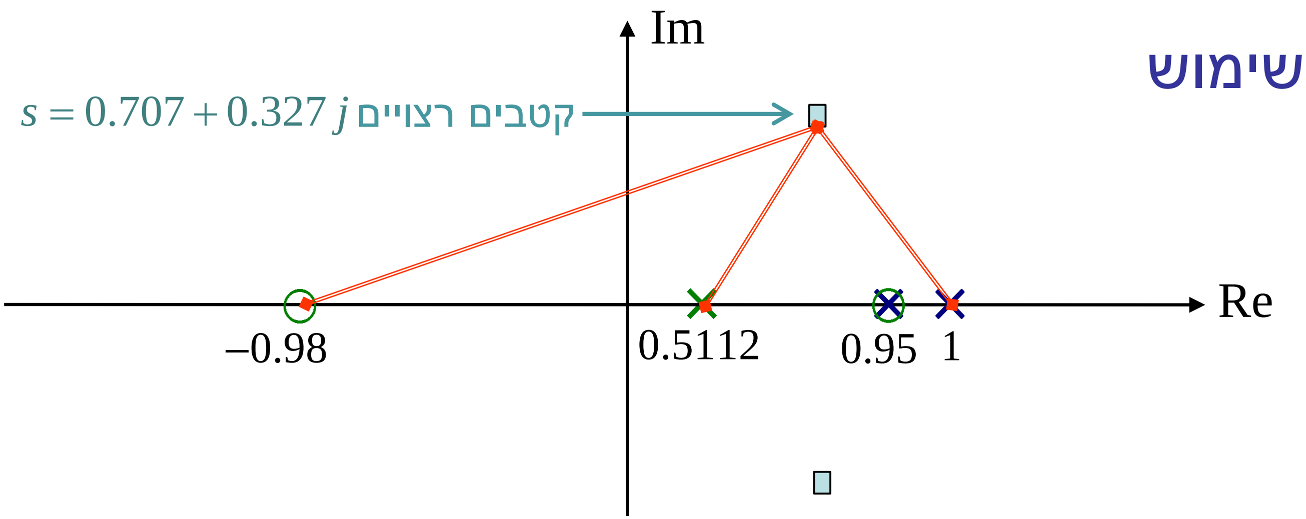
$$\tan 59.09=\frac{0.327}{(0.707-p)} \quad \Rightarrow \quad p=0.707-\frac{0.327}{\tan 59.09}=0.5112$$

תכנון ע"י RL:

הרשת שאנו מתכננים:

$$D(z) = k\frac{(z-0.9512)}{(z-0.5112)}$$

חישוב k ע"י שימוש
בכלל הגודל:



$$0.012294 \cdot k = \frac{\sqrt{0.293^2 + 0.327^2} \cdot \sqrt{0.1958^2 + 0.327^2}}{\sqrt{1.69^2 + 0.327^2}}$$

$$\Rightarrow \quad k = 7.9$$

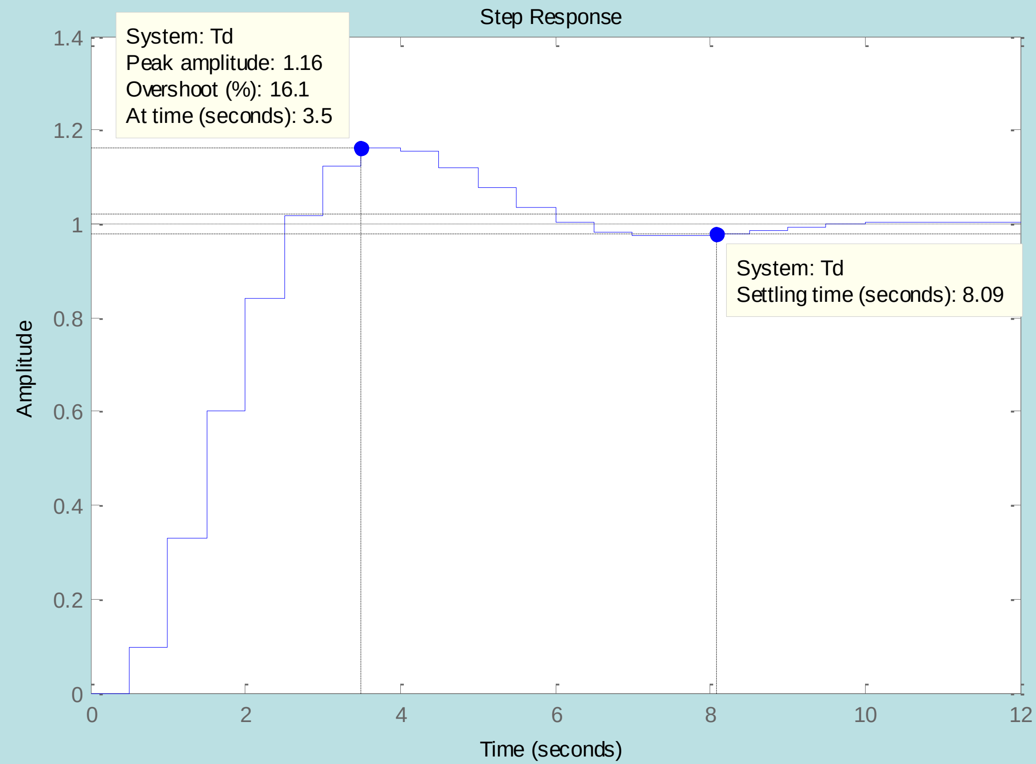
הערכה של התכנון ע"י תוכנית MATLAB

התקבלה הרשת הבאה:

$$D(z)=7.9\frac{(z-0.9512)}{(z-0.5112)}$$

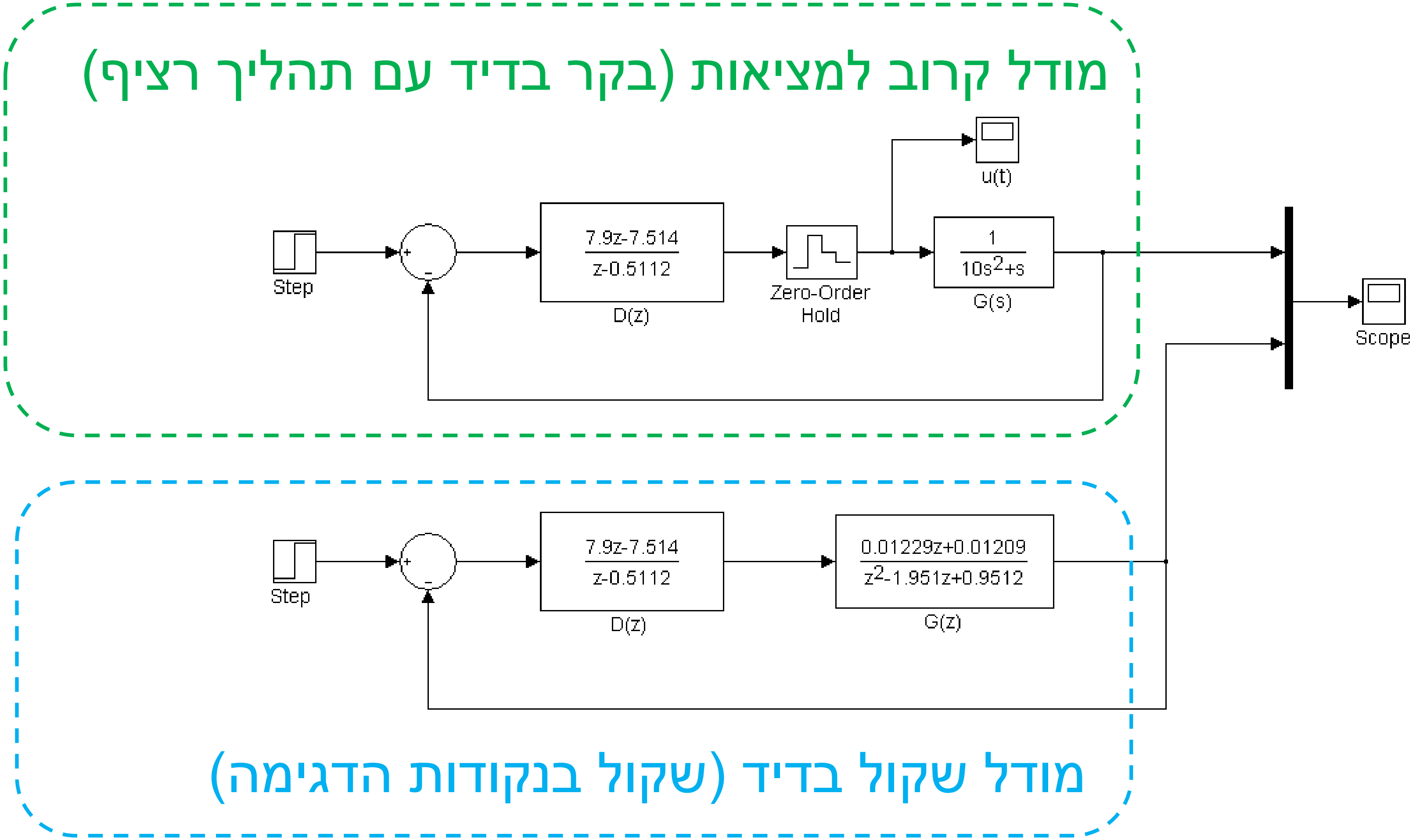
Command Window

```
>> G=tf(1,[10 1 0]);
>> T=0.5;
>> Gd=c2d(G,T,'zoh');
>> zpk(Gd)

ans =

  0.012294 (z+0.9835)
  -------------------
   (z-1) (z-0.9512)

Sample time: 0.5 seconds
Discrete-time zero/pole/gain model.

>> Dd=tf(7.9*[1 -0.9512],[1 -0.5112],T)

Dd =

  7.9 z - 7.514
  -------------
   z - 0.5112

Sample time: 0.5 seconds
Discrete-time transfer function.

>> Td=feedback(Gd*Dd,1);
>> step(Td)
>> 
```



הערכה של התכנון ב- SIMULINK

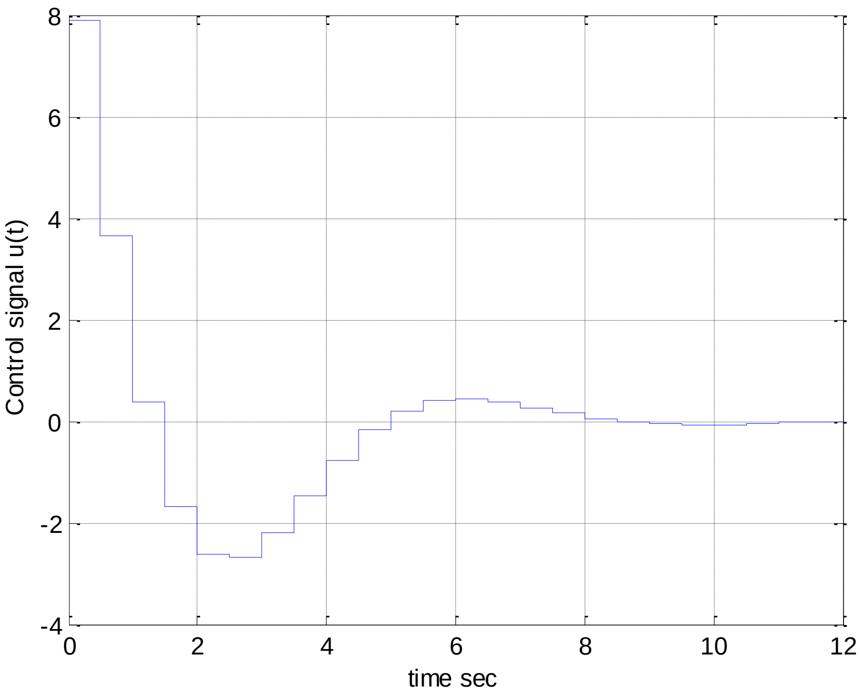
ה- SIMULINK מאפשר לשלב מודלים רציפים יחד עם מודלים בדידים



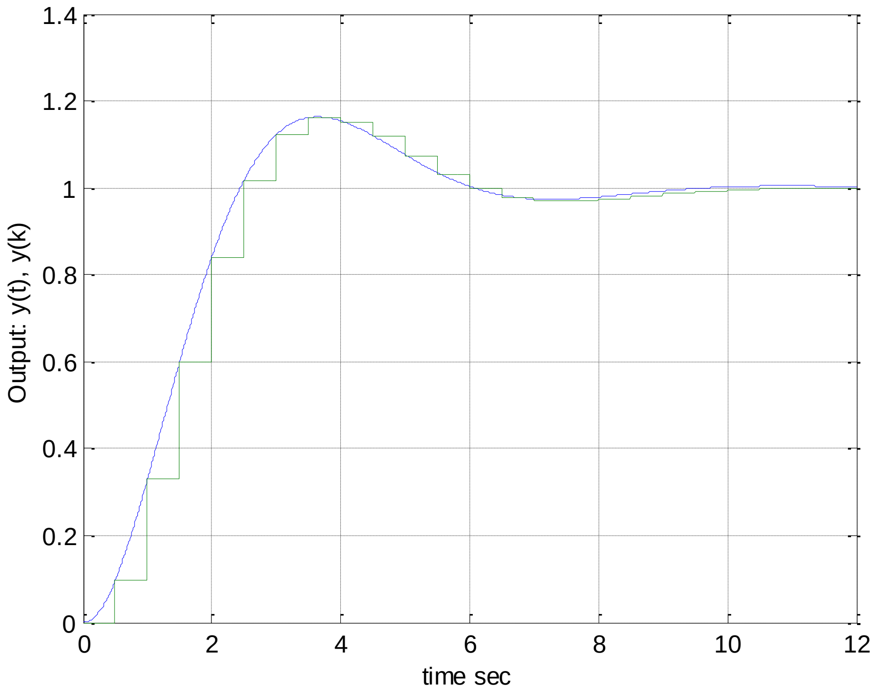
הערכה של התכנון ב- SIMULINK

מתקבלים הגרפים הבאים:

אות הבקרה (רציף)



תגובת המערכת (השוואה)



העקום הכחול מציג את תגובת המערכת "האמיתית" (תהליך רציף עם בקר בדיד)