מערכות מכטרוניות

ייצוג סיבוב ע"י קווטרניון

מאת: שי ארוגטי

רוב התמונות במצגת זו נלקחו מהספר:

“Quaternions and Rotations”, (Com S 477/577 Notes) by Yan-Bin Jia

ייצוג סיבוב ע"י קווטרניון - Quaternions and Rotations

אלגברה של קווטרניון

פיתוח הקווטרניון מיוחס ל- W. R. Hamilton ב- 1843.

בניגוד לייצוג סיבוב ע"י מטריצה הכוללת תשעה אברים (רובם תלויים), הקווטרניון מתבסס על ארבעה מספרים בלבד. מעבר לכך קל מאוד לשחזר את ציר הסיבוב וזווית הסיבוב מתוך הקווטרניון.

חישוב הייצוג של שתי פעולות סיבוב עוקבות, במקרה של ייצוג ע"י מטריצה דורש כפל מטריצות (27 פעולות כפל ו- 18 פעולות חיבור). נראה כי במקרה של ייצוג ע"י קווטרניון ידרשו פחות פעולות חשבון (למעשה ידרשו, 16 פעולות כפל ו- 12 פעולות חיבור)

הקווטרניון כולל 4 אברים וניתן להגדיר אותו כחיבור של סקלר q_0 עם ווקטור $\bar{q} \in \mathbb{R}^3$

$$\bar{q} = \left(q_1, q_2, q_3\right) = q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

$$\boxed{q = q_0 + \bar{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k}$$ (מספר מרוכב עם 3 חלקים מדומים)

<u>פעולת חיבור בין שני קווטרניונים</u>

נניח,

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

$$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

פעולת חיבור,

$$p + q = \left(p_0 + q_0\right) + \left(p_1 + q_1\right) i + \left(p_2 + q_2\right) j + \left(p_3 + q_3\right) k$$

פעולת החיבור היא קומוטטיבית.

לכל קווטרניון q מוגדר גם הקווטרניון השלילי, המוגדר ע"י $-q$ עם האיברים $-q_i,\ i = 0, 1, 2, 3$

כדי להכפיל שני קווטרניונים יש לרשום
תחילה את הכללים הבאים,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k = -ji$$

$$jk = i = -kj$$

$$ki = j = -ik$$

פעולת כפל בין הקווטרניון p לבין הקווטרניון q , מוגדרת ע"י

$$\begin{aligned} pq &= \left(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k\right)\left(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) \\ &= p_0 q_0 - \left(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3\right) + p_0\left(q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) + q_0\left(p_1 i + p_2 j + p_3 k\right) \\ &\quad + \left(p_2 q_3 - p_3 q_2\right) i + \left(p_3 q_1 - p_1 q_3\right) j + \left(p_1 q_2 - p_2 q_1\right) k \end{aligned}$$

פעולה זו נקראת מכפלה קווטרניונית ונהוג לסמן אותה גם ע"י, $p \otimes q = pq$

באופן יותר תמציתי ניתן לכתוב,

$$pq = p_0 q_0 - \overline{p} \cdot \overline{q} + p_0 \overline{q} + q_0 \overline{p} + \overline{p} \times \overline{q} \qquad (1)$$

כאשר, $\overline{q} = \left(q_1, q_2, q_3\right)$ ו- $\overline{p} = \left(p_1, p_2, p_3\right)$ מייצגים את הרכיבים הווקטוריים בתוך הקווטרניונים.

מכפלה קווטרניונית אינה קומוטטיבית.

דוגמא,

$$p = 3 + i - 2j + k$$
$$q = 2 - i + 2j + 3k$$

כאן, $\overline{p} = (-1, 2, 3)$ ו- $\overline{p} = (1, -2, 1)$

המכפלה הסקלרית נותנת,

$$\overline{p} \cdot \overline{q} = -2$$

המכפלה הווקטורית נותנת,

$$\overline{p} \times \overline{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8i - 4j$$

ותוצאת המכפלה הקווטרניונית נתונה ע"י,

$$pq = 6 - (-2) + 3(-i + 2j + 3k) + 2(i - 2j + k) + (-8i - 4j)$$
$$= 8 - 9i - 2j + 11k$$

התוצאה היא קווטרניון.

תוצאת המכפלה של שני קווטרניונים היא קווטרניון עם המרכיב הסקלרי $p_0 q_0 - \bar{p} \cdot \bar{q}$

והמרכיב הווקטורי $p_0 \bar{q} + q_0 \bar{p} - \bar{p} \times \bar{q}$

קבוצת הקווטרניונים היא קבוצה סגורה תחת פעולות חיבור וכפל (התוצאה תמיד גם כן שייכת לקבוצה).

לקווטרניון היחידה (identity quaternion) יש רכיב ממשי השווה ל- 1 יחד עם ווקטור השווה 0

נגדיר עבור הקווטרניון $q = q_0 + \bar{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ גם את הצמוד המרוכב q^* באופן הבא

$$q^* = q_0 - \bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

מתוך ההגדרה ניתן מיד לכתוב,

$$\left(q^*\right)^* = q_0 - \left(-\bar{q}\right) = q$$

$$q + q^* = 2q_0$$

בנוסף,

$$\begin{aligned} q^*q &= (q_0 - q)(q_0 + q) \\ &= q_0q_0 - (-q)\cdot q + q_0q + (-q)q_0 + (-q)\times q \\ &= q_0^{\,2} + q\cdot q \\ &= q_0^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2} \\ &= qq^* \end{aligned}$$

בהינתן שני קווטרניונים p ו- q , ניתן להראות שמתקיים $(pq)^* = q^*p^*$

הנורמה של קווטרניון המסומנת $|q|$, מוגדרת ע"י,

$$|q| = \sqrt{q^*q} \qquad (2)$$

אם הנורמה של הקווטרניון שווה 1 אז הוא נקרא קווטרניון יחידה (unit quaternion)

הנורמה של מכפלת שני קווטרניונים p ו- q מקיימת,

$$\begin{aligned} |pq|^2 &= (pq)(pq)^* \\ &= pqq^*p^* \\ &= p|q|^2\, p^* \\ &= pp^*|q|^2 \\ &= |p|^2\,|q|^2 \end{aligned}$$

וההופכי (inverse) של הקווטרניון q מוגדר ע"י,

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

כאשר ברור כי מתקיים

$$q^{-1}q = qq^{-1} = 1$$

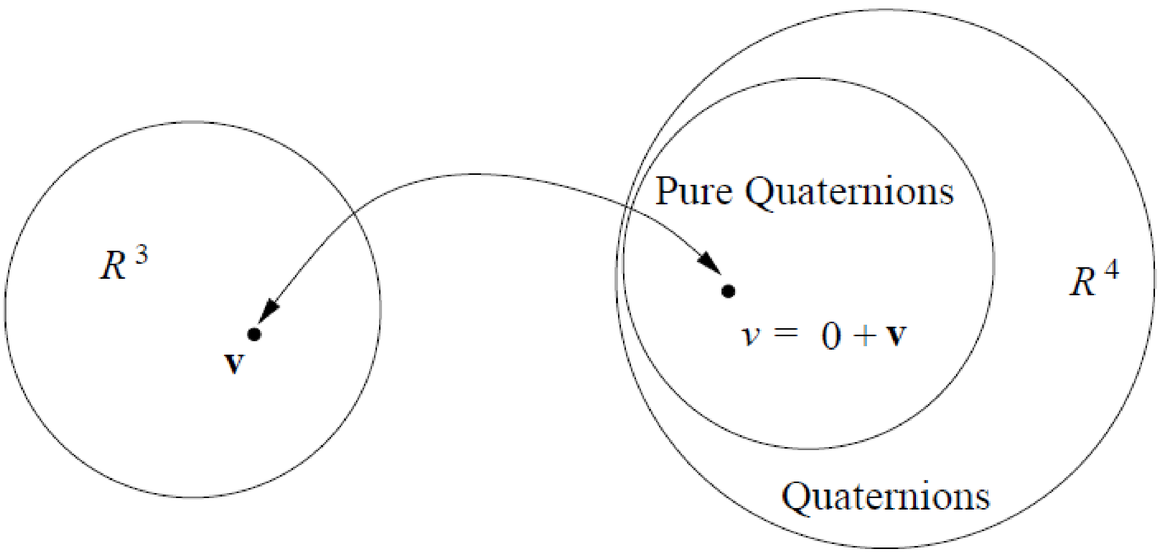
עבור קווטרניון יחידה q ההופכי שלו שווה לצמוד המרוכב שלו q^*.

הקווטרניון בייצוג פעולת סיבוב (Rotation operator)

פעולת סיבוב מתייחס לווקטורים השייכים ל- $\mathbb{R}^3$ (לעומת זאת הקווטרניון חיי ב- $\mathbb{R}^4$).

כיצד קושרים בין עולם הווקטורים (התלת ממדיים) ועולם הקווטרניונים?

תחילה נגדיר את הווקטור $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ כקווטרניון טהור (pure quaternion) ע"י הרחבה שלו עם רכיב סקלר השווה אפס (כך הווקטורים הרגילים מהווים תת קבוצה בתוך קבוצת הקווטרניונים)



עכשיו נבחן קווטרניון יחידה מהצורה $q = q_0 + \bar{q}$

עבורו ניתן לכתוב $q_0{}^2 + \|\bar{q}\|^2 = 1$

לכן ברור כי קיימת איזושהי זווית θ כך שמתקיים (כי $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$),

$$\cos^2\theta = q_0{}^2$$

$$\sin^2\theta = \|q\|^2$$

למעשה ניתן להראות כי קיימת זווית $\theta \in [0,\pi]$ יחידה כך ש, $\sin\theta = \|q\|$ ו- $\cos\theta = q_0$

ולכן את קווטרניון היחידה q ניתן לייצג גם ע"י הזווית שלו θ ווקטור היחידה $\bar{u} = \bar{q}/\|\bar{q}\|$

ייצוג זה יראה כך, $q = \cos\theta + u\sin\theta$

עכשיו ניתן להגדיר אופרטור של קווטרניון q הפועל על ווקטור $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ באופן הבא

$$\begin{aligned} L_q\left(\bar{v}\right) &= qvq^* \\ &= \left(q_0{}^2 - \left\|\bar{q}\right\|^2\right)v + 2\left(\bar{q}\cdot\bar{v}\right)\bar{q} + 2q_0\left(\bar{q}\times\bar{v}\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

ניתן לראות שהאופרטור הזה לא משנה את הגודל של הווקטור $\bar{v}$, כי,

$$\left\|L_q\left(\bar{v}\right)\right\| = \left\|qvq^*\right\| = \left|q\right|\cdot\left\|\bar{v}\right\|\cdot\left|q^*\right| = \left\|\bar{v}\right\|$$

בנוסף, אם הכיוון של v זהה לכיוון של q אז הכיוון נשאר ללא שינוי תחת הפעלת L_q . כדי להראות זאת נגדיר $v = kq$, אז,

$$\begin{aligned} qvq^* &= q\left(kq\right)q^* \\ &= \left(q_0{}^2 - \left\|q\right\|^2\right)\left(kq\right) + 2\left(q\cdot kq\right)q + 2q_0\left(q\times kq\right) \\ &= k\left(q_0{}^2 + \left\|q\right\|^2\right)q \\ &= kq \end{aligned}$$

עד עכשיו ראינו שתי אינדיקציות לכך שהאופרטור L_q יכול לתפקד כאופרטור סיבוב הפועל על q .

בנוסף, ניתן להראות כי אופרטור זה הוא ליניארי ב- $\mathbb{R}^3$, כלומר,

לכל שני ווקטורים $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ ושני סקלרים $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים,

$$L_q\left(a_1 v_1 + a_2 v_2\right) = a_1 L_q\left(v_1\right) + a_2 L_q\left(v_2\right)$$

<u>טענה</u>

עבור כל קווטרניון יחידה,

$$q = q_0 + q = \cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2}$$

וכל ווקטור $v \in \mathbb{R}^3$, הפעולה $L_q\left(v\right) = qvq^*$ שקולה לסיבוב הווקטור בזווית θ סביב u .

הוכחה,

בהינתן הווקטור $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ נפרק אותו ע"י $\bar{v} = \bar{a} + \bar{n}$ כך ש $\bar{a}$ הוא רכיב בכיוון הווקטור $\bar{q}$ ו- $\bar{n}$ הוא רכיב ניצב ל- $\bar{q}$.

נראה כי תחת הפעולה L_q, הרכיב a נשאר ללא שינוי והרכיב n מסתובב סביב $\bar{q}$ בזווית θ.

מכיוון שהפעולה L_q היא ליניארית, ניתן להראות עבור כל רכיב (a ו- n) את התכונה המיוחסת לו בנפרד.

כבר הראנו קודם ש- a (מכיוון שבכיוון $\bar{q}$) יישאר ללא שינוי תחת הפעולה L_q.

נתמקד ברכיב הנורמאלי n,

$$L_q(n) = \left(q_0{}^2 - \|q\|^2\right)n + 2(q \cdot n)q + 2q_0(q \times n)$$

$$= \left(q_0{}^2 - \|q\|^2\right)n + 2q_0(q \times n)$$

$$= \left(q_0{}^2 - \|q\|^2\right)n + 2q_0\|q\|(u \times n)$$

המשך

$$L_q(n) = \left(q_0{}^2 - \|q\|^2\right)n + 2q_0\|q\|(u \times n)$$

אם נשתמש בהגדרות

$$\bar{n}_\perp = \bar{u} \times \bar{n} \qquad \bar{u} = \bar{q}/\|\bar{q}\|$$

אז את המשוואה האחרונה ניתן לכתוב גם כך,

$$L_q(n) = \left(q_0{}^2 - \|q\|^2\right)n + 2q_0\|q\|n_\perp \qquad (5)$$

נדגיש כי ל- n ול- $n_\perp$ יש אורך זהה,

$$\|n_\perp\| = \|n \times u\| = \|n\| \cdot \|u\| \sin\frac{\pi}{2} = \|n\|$$

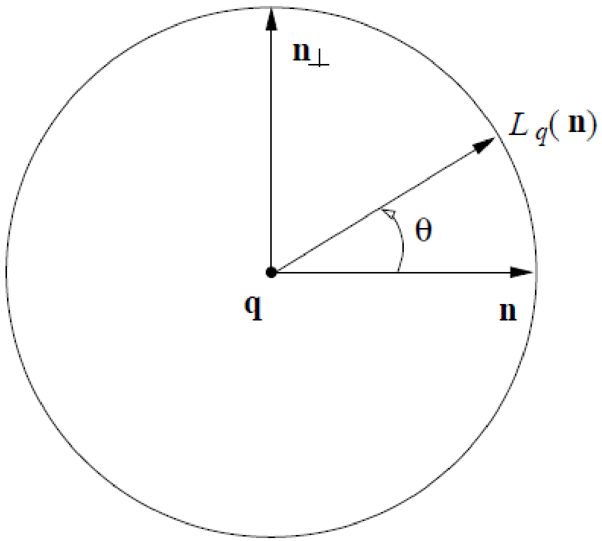
ואת (5) נכתוב כך,

$$L_q(n) = \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\bar{n} + \left(2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)n_\perp$$

$$= \cos\theta\bar{n} + \sin\theta\bar{n}_\perp$$

כלומר, הווקטור המתקבל הוא סיבוב של $\bar{n}$ בזווית θ על המישור המוגדר ע"י $\bar{n}$ ו- $\bar{n}_{\perp}$.

ווקטור זה הוא כמובן ניצב לציר הסיבוב.



ווקטור זה הוא כמובן ניצב לציר הסיבוב.

נציב את קווטרניון היחידה מ- (4) ב- (3) ונקבל ביטוי המתאר סיבוב של $\bar{v}$ סביב $\bar{u}$ בזווית θ .

$$L_p(v) = \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)v + 2\left(u\sin\frac{\theta}{2}\cdot v\right)u\sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\left(u\sin\frac{\theta}{2}\times v\right)$$
$$= \cos\theta\cdot v + (1-\cos\theta)(u\cdot v)u + \sin\theta\cdot(u\times v)$$

דוגמא:

נדגים סיבוב בזווית $2\pi/3$ סביב הציר $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

נגדיר ווקטור יחידה בכיוון ציר הסיבוב, $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

ואת הזווית $\theta = 2\pi/3$. הקווטרניון שמגדיר סיבוב זה הוא,

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \bar{u}\sin\frac{\theta}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$$

נפעיל את אופרטור הסיבוב שקיבלנו על ווקטור יחידה בכיוון של i (כלומר על $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$)

$$v = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

התוצאה היא ווקטור יחידה בכיוון j .

הסיבוב של $\bar{v}$ ע"י האופרטור L_q ניתן לפרוש גם מנקודת המבט של צופה הקשור לווקטור $\bar{v}$

בעיניים שלו, מערכת הצירים מסתובבת בזווית $-\theta$ סביב ציר הסיבוב.

טענה

לכל קווטרניון יחידה,

$$q = q_0 + \bar{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \bar{u}\sin\frac{\theta}{2}$$

ולכל ווקטור $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$, הפעולה,

$$L_{q^*}(\bar{v}) = q^*\bar{v}\left(q^*\right)^* = q^*\bar{v}q$$

שקולה לסיבוב מערכת הצירים סביב הציר $\bar{u}$ בזווית θ כאשר $\bar{v}$ אינו מסתובב.

באופן שקול, הפעולה $L_q(v) = qvq^*$ ניתנת לפירוש כסיבוב ווקטור (vector rotation) ביחס למערכת צירים נייחת (fixed).

והפעולה $L_{q^*}(\bar{v}) = q^*\bar{v}q$ כסיבוב מערכת צירים סביב וקטור נייח (fixed)

רצף פעולות סיבוב ע"י קווטרניון

נניח שני קווטרניוני יחידה p ו- q .

תחילה נפעיל את האופרטור L_p על הווקטור $\bar{u}$ ונקבל את הווקטור $\bar{v}$.

על הווקטור $\bar{v}$ נפעיל את האופרטור L_q ונקבל את ω .

באופן שקול, נגדיר את הפעולה המשולבת $L_q \circ L_p$ באופן הבא,

$$
\begin{aligned}
\omega &= L_q\left(\bar{v}\right) \\
&= q\bar{v}q^* \\
&= q\left(p\bar{u}p^*\right)q^* \\
&= \left(qp\right)\bar{u}\left(qp\right)^* \\
&= L_{qp}\left(\bar{u}\right)
\end{aligned}
$$

מכיוון שגם p וגם q הם קווטקניוני יחידה כך גם המכפלה pq .

הרצף של שתי פעולות הסיבוב מוגדר ע"י המכפלה הקווטרניונית של p ו- q . ציר הסיבוב וזווית הסיבוב של הפעולה המשולבת ניתנים לשחזור מתוך הקווטניון pq .

באופן דומה, אם נתונים שני הקווטרניונים $L_{p^*}\left(\bar{u}\right) = p^*\bar{u}p$ ו- $L_{q^*}\left(\bar{v}\right) q^*\bar{v}q$ המייצגים סיבוב של מערכת הצירים סביב $\bar{p}$ וסביב $\bar{q}$ בהתאמה,

אז המכפלה הקווטרניונית pq מגדירה את האופרטור $L_{(pq)^*}$ המייצג את רצף הפעולות L_{p^*} ו- L_{q^*}

דוגמא

נניח את רצף הסיבובים הבא, סיבוב בזווית α סביב ציר z ואז סיבוב בזווית β סביב ציר y (החדש).

שני הקווטרניונים נתונים ע"י,

$$p = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}k$$
$$q = \cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}j$$

מכיוון שכאן מסובבים את מערכת הצירים, יש לבצע הפעולות L_{p^*} ו- L_{q^*} , אחת אחרי השנייה.

הפעולה המשולבת היא $L_{(pq)^*}$ והיא מתקבלת מתוך המכפלה pq ,

$$pq = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}k\right)\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}j\right)$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}j + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}k + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}(k \times j)$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}i + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}j + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}k$$

ציר הסיבוב של פעולת הסיבוב המשולבת הוא,

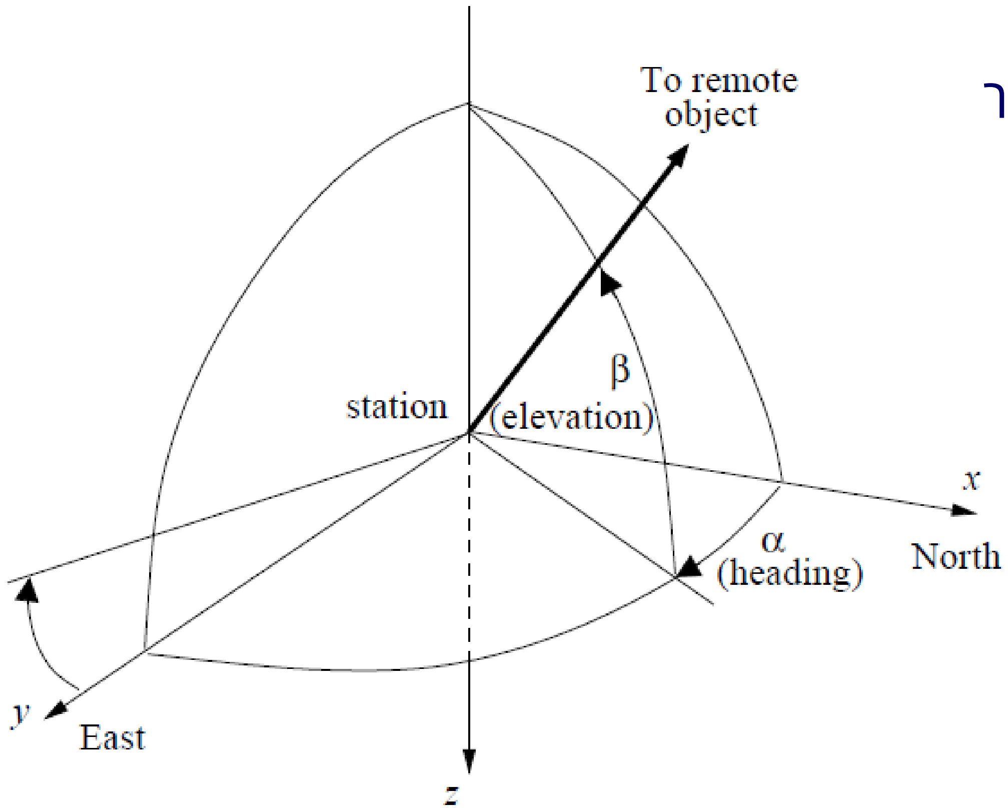
$$\bar{v} = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

וזווית הסיבוב θ מקיימת

$$\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \|\bar{v}\|$$

באופן גיאומטרי, זה נראה כך



וייצוג הפעולה המשולבת ע"י מטריצות סיבוב הוא,

$$R = \mathrm{Rot}_z(\alpha)\,\mathrm{Rot}_y(\beta)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$