

מערכות מכטרוניות



יציבות על פי ליאפונוב

מאת: שי ארוגטי

הניסוח המוצג כאן הינו מתוך:

H. K. Khalil, “**Nonlinear Systems**,” Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

A.1 - יציבות על פי ליאפונוב

נתונה מערכת אוטונומית

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A.1.1})$$

כאשר $x \in R^n$ ולכל תנאי התחלה $x(0)$ קיים פתרון יחיד $x(t)$.

נקודת שיווי המשקל של מערכת (A.1.1) היא פתרון המשוואה האלגברית

$$0 = f(x) \Rightarrow x = x_0.$$

אם ברגע כלשהו $T \geq 0$ המערכת נמצאת בנק' שיווי המשקל $x(T) = x_0$, אז מתקיים:

$$x(t) = x_0, \forall t \geq T.$$

הגדרה: נקודת שיווי המשקל x_0 היא

- יציבה אם לכל $\varepsilon > 0$, קיים $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ כך ש

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

- יציבה אסימפטוטית אם היא יציבה וקיים $\delta > 0$ כך ש

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

- יציבה אסימפטוטית גלובלית אם יציבה ועבור כל תנאי התחלה $x(0)$ מתקיים

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

A.2 – מבחן היציבות של ליאפונוב

תהיה $D \subset R^n$ קבוצה פתוחה כך ש: $\{x_0\} \in D$, ותהיה $V : D \rightarrow R$ העתקה רציפה וגזירה כך ש $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$ כאשר $x \neq x_0$.

• אם $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq x_0$ אז x_0 היא נקודת שיווי משקל יציבה.

תהיה $V : R^n \rightarrow R$ העתקה רציפה וגזירה כך ש $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$ כאשר $x \neq x_0$.

• אם $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq x_0$ ו- $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$ אז x_0 היא נקודת שיווי

משקל יציבה אסימפטוטית גלובלית.

LaSalle Invariance Principle – A.3

הגדרה: קבוצה M נקראת קבוצה אינווריאנטית של מערכת דינמית אם כל מסלול של המערכת המתחיל בנקודה השייכת ל- M נשאר כולו ב- M .

משפט: נתונה מערכת אוטונומית (A.1.1).

תהיה $V(x)$ פונקציה רציפה וגזירה המקיימת $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$ ו- $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in R^n$.

תהיה Ω קבוצה המכילה את כל הנקודות המקיימות $\dot{V}(x) = 0$ ו- M הקבוצה האינווריאנטית הגדולה ביותר המוכלת ב- Ω . אזי, כל פתרון של (A.1.1) מתכנס אסימפטוטית ל- M .

מסקנה: אם על פי ליאפונוב נקודת שיווי המשקל x_0 יציבה בלבד ו- x_0 היא הקבוצה האינווריאנטית היחידה ב- Ω אז x_0 היא נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית.