מערכות מכטרוניות

שערוך מצב זוויתי ע"י מסנן משלים

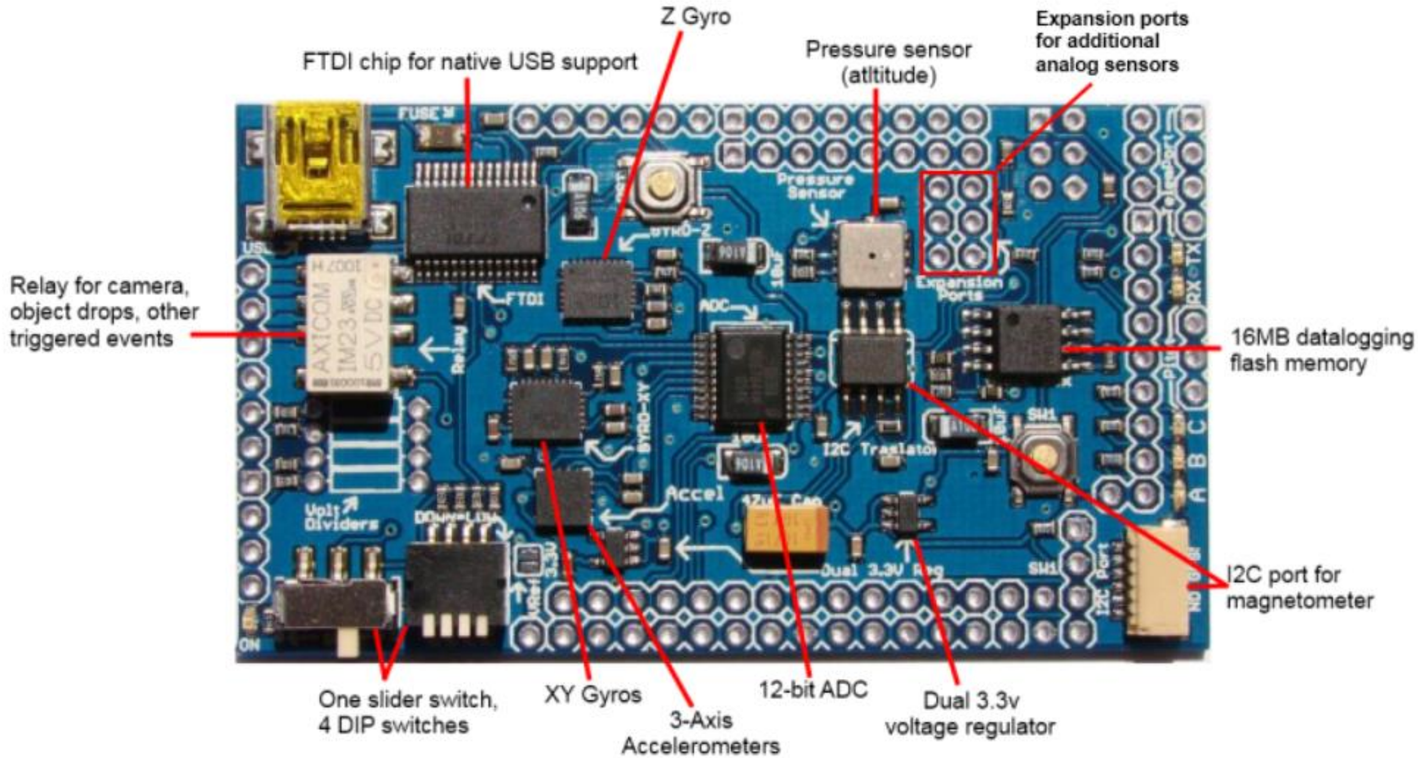
מאת: שי ארוגטי

רוב התמונות במצגת זו נלקחו מהספר:

"Advances in Unmanned Aerial Vehicles, State of the Art and the Road to Autonomy", Edited by Kimon P. Valavanis

מרכיבי חומרה אופייניים של טיס אוטומטי

דוגמא AMP1



מרכיבי חומרה אופייניים של טיס אוטומטי

דוגמא AMP1

Features

- Dual 3.3V Regulator. (One dedicated for analog sensors)
- Relay switch for cameras, lights or payloads
- 12-bit ADC for better Gyro/Accel/AirSpeed resolution.
- Built-in 16Mb Data Logger (The Black Box).
- Piano DIP switch for servo reverse or user customizable.
- Built-in FTDI, making the board native USB.
- Dedicated Modem/OSD port.
- I2C Port with incoming "Daisy Chain board" allowing you to build sensor arrays.
- Two user-programmable buttons (one momentary, the other slide).
- 10-Bit analog expansion ports.
- Reset button.
- Optional "Through Hole" voltage dividers (Easy to solder).
- Tons of Status LEDs.
- New vibration resistance Invensense Gyros (Triple Axis).
- Analog Devices ADX330 Accelerometer.
- Airspeed sensor port (optional, sold separately).
- Absolute Bosch pressure sensor and temp for accurate altitude (Yes, you can use your shield as a Weather Logger, too).

עקרון פעולה של מסנן משלים – Complementary Filter

מסנן משלים מאפשר איחוי מידע המתקבל מחיישנים שונים כאשר החיישנים מודדים מידע מקביל, ולרעש אופי ספקטרלי משלים (הכוונה היא שלחיישנים מסוימים רעש בתדרים גבוהים ולחיישנים אחרים רעש בתדרים נמוכים).

נניח לדוגמא שתי מדידות שונות של x ,

$$y_1 = x + \mu_1$$
$$y_2 = x + \mu_2$$

כאשר μ_1 רעש בתחום תדרים גבוה ו μ_2 רעש בתחום תדרים נמוך.

נבחר צמד משלים של פונקציות תמסורת, כלומר,

$$F_1(s) + F_2(s) = 1$$

כאשר,

$F_1(s)$ היא מסנן מעביר נמוכים (Low pass)

$F_2(s)$ היא מסנן מעביר גבוהים (High pass)

השערוך של x נתון באופן הבא

$$\begin{aligned}\hat{X}(s) &= F_1(s)Y_1(s)+F_2(s)Y_2(s)\\ &= X(s)+F_1(s)\mu_1(s)+F_2(s)\mu_2(s)\end{aligned}$$

מתקבל האות $X(s)$ בכל תחום התדרים, כאשר הרעש בתדר גבוה μ_1 מסונן ע"י המסנן מעביר נמוכים $F_1(s)$ והרעש בתדר נמוך μ_2 מסונן ע"י המסנן מעביר גבוהים $F_2(s)$.

מסנן זה גם ידוע בשם *distotionless filter* מכיוון שהאות $x(t)$ אינו מופרע ע"י סינון.

מסננים כאלה מתאימים מאוד כדי לאחות מידע המתקבל מחיישני מיקום איטיים (low bandwidth) עם חיישני מהירות מהירים (high bandwidth) על בסיס מודל קינמטי מסדר ראשון.

לדוגמא, נניח מודל מהצורה הבאה,

$$\dot{x} = u \quad (11.1)$$

כאשר מבוצעות שתי מדידות, אחת של המקום והשנייה של המהירות,

$$y_x = L(s)x + \mu_x, \quad y_u = u + \mu_u + b(t) \quad (11.2)$$

התמסורת $L(s)$ היא מסנן מעביר נמוכים המאפיינת את חיישן המקום,

האות μ מייצג רעש בשתי המדידות,

ו- $b(t)$ היא הפרעה דטרמיניסטית המאופיינת ע"י תדרים נמוכים (היסט),

נתכנן את המשערך כך שנשתמש בתחום התדרים הנמוך של מדידות המקום y_x ,
כלומר, תחום התדרים בו ניתן להניח, $L(s) \approx 1$

למדידת המהירות יש לבצע אינטגרציה, כלומר $\frac{y_u}{s}$ כדי לקבל שערוך של המקום

התדרים הגבוהים של הרעש הנלווה למדידת המהירות, מסוננים כתוצאה מהשימוש באינטגרציה. לכן נשאר רעש בתדר נמוך והיסט (גם כן מאופיין ע"י תדר נמוך)

נתכנן מסנן משלים באופן הבא,

$$F_1(s) = \frac{C(s)}{C(s)+s}$$

$$F_2(s) = 1 - F_1(s) = \frac{s}{C(s)+s}$$

כאשר את $C(s)$ בוחרים כך ש $L(s)F_1(s) \approx 1$ בתחום רוחב הסרט של $L(s)$.

לכן מקבלים,

$$\hat{X}(s) \approx X(s) + F_1(s)\mu_x(s) + \frac{\mu_u(s)+b(s)}{C(s)+s}$$

כיול המסנן מבוצע ע"י תכנון של התמסורת $C(s)$ (שבאופן עקרוני יכול להיות גם קבוע)

בעיקר צריך לתכנן את ההפרדה לתדרים גבוהים (מטופל ע"י מעביר הגבוהים) ותדרים נמוכים (מטופל ע"י מעביר הנמוכים).

את המסנן ניתן לממש ע"י דיאגרמת מלבנים מהצורה הבאה

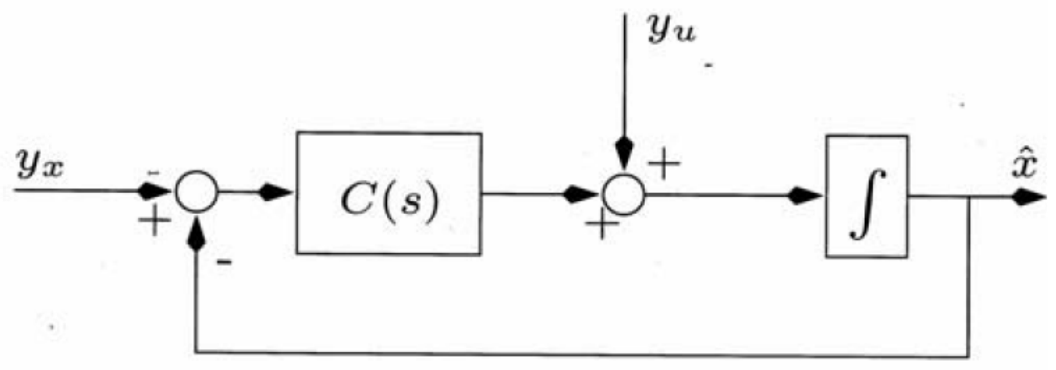


Fig. 11.1. Block diagram of a classical complementary filter.

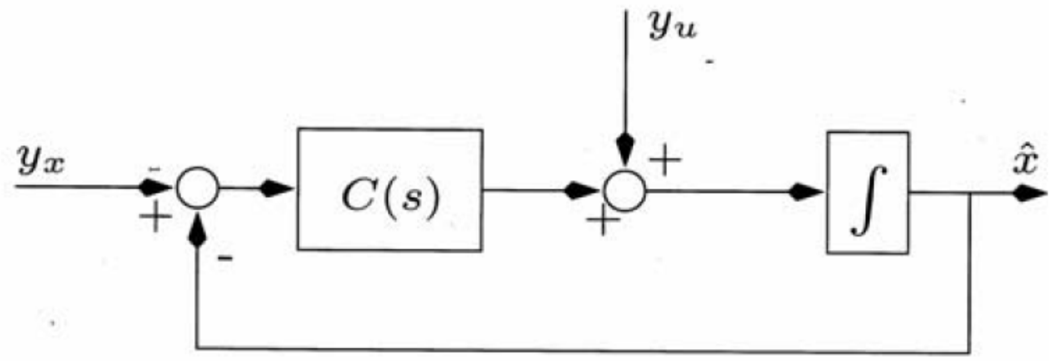


Fig. 11.1. Block diagram of a classical complementary filter.

את המוצא $\hat{x}(t)$ ניתן לכתוב כך

$$\hat{x}(s) = \frac{C(s)}{s + C(s)} y_x(s) + \frac{s}{s + C(s)} \frac{y_x(s)}{s}$$
$$= T(s) y_x(s) + S(s) \frac{y_x(s)}{s}$$

כאשר $S(s)$ היא פונקציית הרגישות (sensitivity function) של מערכת חוג סגור ו- $T(s)$ היא פונקציית הרגישות המשלימה (complementary sensitivity).

בחירה פשוטה עבור $C(s)$ יכולה להיות,

$$C(s) = k_P$$

מה שיוביל לכך ש,

$$F_1(s) = \frac{k_P}{s + k_P} \qquad F_2(s) = \frac{s}{s + k_P}$$

כאשר תדירות הצומת בין תחומי הסינון (crossover frequency) נתונה ע"י, $k_P \ \frac{rad}{s}$

במסנן זה יש פרמטר אחד בלבד לתכנן (k_P), הנבחר בדרך כלל לפי מאפייני התדר הנמוך של y_x (כלומר כך שהמידע הרלוונטי מהחיישן יעבור במסנן מעביר הנמוכים והרעש בתדר גבוהה יסונן).

מעניין לראות שבמישור הזמן (מרחב המצב) משוואת המסנן היא

$$\dot{\hat{x}} = y_u + k_P \left(y_x - \hat{x} \right) \quad (11.3)$$

אם ניתן להניח שההיסט של מדידת המהירות הינו קבוע, כלומר,

$$b(t) = b_0$$

אז ניתן לתכנן $C(s)$ בצורה של בקר PI, כך תתקבל מערכת סוג אחד ביחס להפרעות (זה קורה כאשר בבקר יש אינטגרטור). מערכת כזאת מעלימה לגמרי השפעה של הפרעות קבועות במצב המתמיד (לכן השפעת ההיסט תעלם לגמרי במצב המתמיד).

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} \quad (11.4)$$

כאן יש לתכנן את הקבועים k_P ו- k_I (בדרך כלל התכנון הוא במישור התדר, כדי לקיים את הדרישות לגבי תחומי התדרים המשלימים).

משוואות המסנן במקרה זה (במרחב המצב) הן,

$$\dot{\hat{x}} = y_u - \hat{b} + k_P\left(y_x - \hat{x}\right)$$

$$\dot{\hat{b}} = -k_I\left(y_x - \hat{x}\right)$$

$$\dot{\hat{x}} = y_u - \hat{b} + k_P \left(y_x - \hat{x} \right)$$
$$\dot{\hat{b}} = -k_I \left(y_x - \hat{x} \right)$$

סימן המינוס לפני $\hat{b}$ אומר ששערוך ההיסט $\hat{b}$ למעשה מבטל לגמרי את השפעת ההיסט הקיים ב- y_u (במצב המתמיד).

ניתן להראות יציבות של המסנן ע"י שימוש בפונקציית ליאפונוב מהצורה

$$L = \frac{1}{2} \left| x - \hat{x} \right|^2 + \frac{1}{2k_I} \left| b_0 - \hat{b} \right|^2$$

כאשר $\tilde{x} = \left(x - \hat{x} \right)$ שגיאת השערוך של המדידה ו- $\tilde{b} = \left(b_0 - \hat{b} \right)$ שגיאת השערוך של ההיסט.

הנגזרת בזמן של פונקציית ליאפונוב כאן, היא,

$$\frac{d}{dt} L = -k_P \left| \tilde{x} \right|^2 - \mu_u \tilde{x} + \mu_x \left(\tilde{b} - k\tilde{x} \right)$$

$$\frac{d}{dt}L = -k_P\left|\tilde{x}\right|^2 - \mu_u\tilde{x} + \mu_x\left(\tilde{b} - k\tilde{x}\right)$$

ולכן, בהעדר רעש ברור כי הנגזרת היא שלילית (כאשר קיים רעש ברור כי k_P צריך להיות מספיק גדול כדי להבטיח שהנגזרת שלילית).

אם מתעלמים מהרעש, וע"י עקרון האינווריאנטיות של LaSall ניתן להראות יציבות אסימפטוטית לכן,

$$\hat{b} \to b_0$$

כל זה נכון עבור מערכות ליניאריות (כמו לדוגמא $\dot{x} = u$)

אנו יודעים שהמשוואות הקינמטיות הקושרות בין מצב זוויתי ומהירות זוויתית של גוף קשיח במרחב הן משוואות לא ליניאריות.

ניתן לבצע ליניאריזציה תחת הנחות מסוימות, או, להשתמש בתיאוריה הבאה.

שערוך לא ליניארי ע"י מסנן משלים

נשתמש בהגדרות הבאות.

קבוצת המטריצות $SO(3)$ נקראת special orthogonal group.

קבוצה זו כוללת את מטריצות הסיבוב (שהן מטריצות אורתוגונליות) במישור אוקלידי תלת ממדי.

נגדיר גם קבוצה של מטריצות אנטי סימטריות, באופן הבא.

$$\mathbf{SO}(3) = \left\{ A \in R^{3\times3} \mid A = -A^T \right\}$$

עבור כל שתי מטריצות $A, B \in R^{n\times n}$ נגדיר את האופרטור Lie-bracket (או matrix commutator), ע"י,

$$[A, B] = AB - BA$$

נניח ווקטור $\Omega \in R^3$ עבורו נגדיר את האופרטור,

$$\Omega_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

המייצרת מטריצה אנטי סימטרית ביחס לווקטור נתון.

כפל בין מטריצה אנטי סימטרית ווקטור יכול להיות שקול לפעולת cross product בין שני ווקטורים, כלומר,

עבור כל $v \in R^3$ מתקיים, $\Omega_\times v = \Omega \times v$

נגדיר גם את האופרטור $\mathbf{vex} : \mathbf{SO}(3) \to R^3$ (vector extraction) באופן הבא

$$\begin{aligned} &\mathrm{vex}(\Omega_\times) = \Omega, \quad \Omega \in R^3 \\ &\mathrm{vex}(A)_\times = A, \quad A \in \mathbf{SO}(3) \end{aligned}$$

זוהי למעשה הפעולה ההפוכה של האופרטור $\Omega_\times$

עבור כל שתי מטריצות $A, B \in R^{n\times n}$ ניתן להגדיר

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle = \mathrm{tr}\left(A^T B\right) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}$$

Euclidian matrix inner product

$$\|A\| = \sqrt{\langle\langle A, B\rangle\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}{}^2}$$

Frobenius norm

וכן, ניתן לרשום את הזהויות הבאות

(1) $$(Rv)_\times = R v_\times R^T, \qquad R \in SO(3), v \in R^3$$

(2) $$(v \times w)_\times = [v_\times, w_\times], \qquad v, w \in R^3$$

(3) $$v^T w = \langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \langle\langle v_\times, w_\times \rangle\rangle, \qquad v, w \in R^3$$

(4) $$v^T v = |v|^2 = \frac{1}{2} \|v_\times\|^2, \qquad v \in R^3$$

(5) $$\langle\langle A, v_\times \rangle\rangle = 0, \qquad A = A^T \in R^3, v \in R^3$$

(6) $$\mathrm{tr}([A, B]) = 0, \qquad A, B \in R^{3\times 3}$$

נשתמש במינוח הבא כדי לתאר את מערכות הצירים השונות

$\{A\}$ מערכת אינרציאלית (קבועה במרחב)

$\{B\}$ מערכת הגוף (קבועה בגוף)

$\{E\}$ מערכת הצופה (המערכת של השיערוך)

נגדיר גם את האופרטורים P_a, P_s ,

$$P_a(H) = \frac{1}{2}\left(H - H^T\right), \qquad P_s(H) = \frac{1}{2}\left(H + H^T\right)$$

המבצעים הטלה של מטריצה ביחס לקבוצת המטריצות הסימטריות (P_s) וביחס לקבוצת המטריצות האנטי סימטריות (P_a).

נניח כי (θ, a) ($|a|=1$) מייצגים ציר סיבוב וזווית סיבוב (angle-axis coordination) של מטריצת סיבוב,

$$R \in SO(3)$$

אז ידוע כי מתקיימים הקשרים הבאים

$$R = \exp(\theta a_\times), \qquad \ln(R) = \theta a_\times$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(R) - 1), \qquad P_a(R) = \sin(\theta) a_\times$$

וכן, עבור כל $R \in SO(3)$, מתקיים $3 \geq \mathrm{tr}(R) \geq -1$

אם $\mathrm{tr}(R) = 3$ אז $\theta = 0$ ובעצם $R = I$.

אם $\mathrm{tr}(R) = -1$ אז $\theta = \pm\tau$ והערכים העצמיים של R הם $(1, -1, -1)$ (כולם ממשיים)

מדידות

כאמור המדידות המתקבלות מ- IMU אופייני הן, מדידות מהירות זוויתית בשלושה צירים (ע"י ג'ירו), מדידות תאוצה בשלושה צירים ומדידות שדה מגנטי בשלושה צירים.

ה- IMU הינו רתום לגוף (strap down) לכן המדידות מתקבלות במערכת הגוף $\{B\}$.

מטריצת הסיבוב $R = R_B^A$ מתארת את המצב הזוויתי היחסי של $\{B\}$ ביחס $\{A\}$.

מדידות ג'ירו

הג'ירו מודד את המהירות הזוויתית של $\{B\}$ ביחס $\{A\}$ כאשר היא מבוטאת במערכת הגוף.

מודל האות המתקבל הוא,

$$\Omega^y = \Omega + b + \mu \in R^3$$

כאשר $\Omega \in \{B\}$ הוא הערך האמתי μ רעש ו- b היסט (קבוע בזמן או משתנה לאט).

מדידות חיישן התאוצה

חיישן התאוצה מודד את התאוצות הקוויות של $\{B\}$ ביחס $\{A\}$.

התאוצות נובעות מהכוחות הפועלים על הגוף וכן מכוח הגרביטציה (g_0 היא תאוצת הגרביטציה).

מודל האות הנמדד,

$$a = R^T\left(\dot{v} - g_0\right) + b_a + \mu_a$$

כאשר $g_0 = |g_0| e_3$ ו $|g_0| \approx 9.8$

הווקטור $\dot{v}$ מתאר את התאוצות הקוויות של הגוף במערכת האינרציאלית

גם כאן b_a הינו היסט ו- μ_a רעש.

כאשר הגרביטציה היא הגורם הדומיננטי בביטוי של מדידות התאוצה a , נהוג להניח

$$v_a = \frac{a}{|a|} \approx -R^T e_3$$ כלומר מדידה (תדר נמוך) של ציר z האינרציאלי מבוטא במערכת הגוף.

<u>מדידות חיישן מגנטי</u>

חיישנים אלה מספקים מדידה של השדה המגנטי

$$m = R^T m^A + B_m + \mu_b$$

כאשר m^A הוא השדה המגנטי של כדור הארץ מבוטא במערכת האינרציאלית.

האות B_m מייצג הפרעות מגנטיות מקומיות (היסט מגנטי, יכול להיות משמעותי), ו μ_b רעש מדידה (בדרך כלל נמוך).

לצורך שערוך המצב הזוויתי, אנו משתמשים אך ורק במדידת הכיוון של השדה המגנטי (הגודל אינו חשוב) כלומר

$$v_m = \frac{m}{|m|}$$

ניתן להשתמש בשני ווקטורי הכיוון הנמדדים v_m ו- v_a כדי להרכיב את מטריצת הסיבוב הרגעית

$$R_B^A : \{B\} \to \{A\}$$

$$R_B^A : \{B\} \to \{A\}$$

ע"י החישוב,

$$R_y = \arg\min_{R \in SO(3)} \left(\lambda_1 \left| e_3 - R v_a \right|^2 + \lambda_2 \left| v_m^A - R v_m \right|^2 \right) \approx R_A^B$$

כאשר v_m^A הוא כיוון השדה המגנטי של כדור הארץ (נתון) במקום בו מבוצעת המדידה.

המשקלים λ_1 ו λ_2 נבחרים בהתאם לרמת הביטחון שלנו בכל אחד משני החיישנים.

פתרון הבעיה האופטימלית כאן הוא לרוב מסובך, לכן פותרים בעיה אופטימלית באופן חלקי (האילוצים מופעלים זה אחרי זה ולא ביחד). לדוגמא, שתי דרגות חופש (עלרוד, סבסוב) מחושבות באופן בלעדי מתוך מדידות התאוצה והדרגה השלישית (כיוון) מתוך מדידות השדה המגנטי (כאשר מניחים ששתי דרגות החופש האחרות ידועות).

כמובן שטכניקה כזאת מעוררת בעיות רבות (לדוגמא אחד מהחיישנים אינו זמין), וגם תכונות השגיאה של R_y אינן ברורות.

קריטריון שגיאה עבור שערוך מצב זוויתי ב- $SO(3)$

נניח $\hat{R}$ מתארת את שערוך מטריצת הסיבוב $R = R_B^A$

המטריצה $\hat{R}$ תקבע את מערכת הקואורדינאטות של המשערך $\{E\}$, כלומר

$$\hat{R} = \hat{R}_E^A : \{E\} \rightarrow \{A\}$$

מטרת השערוך היא $\hat{R} \rightarrow R$

את שגיאת השערוך ניתן להגדיר באופן הבא

$$\tilde{R} := \hat{R}^T R, \qquad \tilde{R} = \tilde{R}_B^E : \{B\} \rightarrow \{E\} \quad (11.5)$$

שגיאת השערוך מוגדרת כמטריצת הסיבוב ממערכת הגוף $\{B\}$ למערכת $\{E\}$.

ברור כי הערך הטוב ביותר של השגיאה הוא $\tilde{R} = I$.

תכנון המשערך מתבסס על ניתוח יציבות ע"י פונקציית ליאפונוב מהצורה

$$E_{\mathrm{tr}} := \frac{1}{2}\left\| I_3 - \tilde{R} \right\|^2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(I_3 - \tilde{R} \right) \quad (11.6)$$

כאשר גם ידוע כי,

$$E_{\mathrm{tr}} := \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(I_3 - \tilde{R} \right) = \left(1 - \cos\left(\theta\right) \right) = 2\sin\left(\theta/2\right)^2 \quad (11.7)$$

והזווית θ היא זווית הסיבוב בין $\{B\}$ ל- $\{E\}$,

כלומר יציבות כאן משמע,

$$\theta \to 0$$

מה שמבטיח גם,

$$\hat{R} \to R$$

תכנון מסנן משלים ב- $SO(3)$

תחילה נניח מקרה אידיאלי בו $R(t)$ ו- $\Omega(t)$ ידועים, אלה יספקו את הדינמיקה לצורך שערוך $\hat{R}(t) \in SO(3)$, כך שהשגיאה,

$$\tilde{R}(t) \to I_3$$

הקינמטיקה של המערכת האמתית היא

$$\dot{R} = R\Omega_\times = (R\Omega)_\times R \quad (11.8)$$

כאשר ווקטור המהירות הזוויתית $\Omega \in \{B\}$ (במערכת הגוף)

משוואת המשערך נתונה באופן הבא

$$\dot{\hat{R}} = \left(R\Omega + k_P \hat{R}\omega\right)_\times \hat{R}, \quad \hat{R}(0) = \hat{R}_0 \quad (11.9)$$

כאשר הקבוע $k_P > 0$

$$\dot{\hat{R}} = \left(R\Omega + k_P \hat{R}\omega\right)_\times \hat{R}, \quad \hat{R}(0) = \hat{R}_0$$

חיזוי (על בסיס מודל)
prediction

תיקון (על בסיס מדידות)
correction

מבנה המשערך נגזר כמובן מהמשוואה הקינמטית $R \; (R\Omega)_\times$ כאשר $k_P\omega$ מהווה את גורם התיקון, והווקטור

$$\omega := \omega\left(\tilde{R}\right)$$

(נגזר ממטריצת השגיאה $\tilde{R}$, כלומר הוא פונקציה של השגיאה)

הביטוי $\{A\} \in \left(R\Omega + k_P \hat{R}\omega\right)$ מבוטא במערכת האינרציאלית

המהירות הזוויתית במערכת הגוף ממופת אל המערכת האינרציאלית $\Omega^A \in R\Omega$

$$\dot{\hat{R}} = \left(R\Omega + k_P \hat{R}\omega\right)_\times \hat{R}, \quad \hat{R}(0) = \hat{R}_0$$

אם לא מציבים את גורם התיקון ($k_P\omega \equiv 0$) אז השגיאה $\tilde{R}$ היא קבועה

$$\dot{\tilde{R}} = \hat{R}^T \left(R\Omega\right)_\times^T R + \hat{R}^T \left(R\Omega\right)_\times R = \hat{R}^T \left(-\left(R\Omega\right)_\times + \left(R\Omega\right)_\times\right) R = 0 \quad (11.10)$$

גורם התיקון $k_P\omega$ כולל את הקבוע $k_P > 0$ ואת ווקטור התיקון $\omega := \omega\left(\tilde{R}\right) \in \{E\}$

(נתון היחס למערכת השיערוך)

ניתן לחשוב על ווקטור זה כעל קירוב של השגיאה בין R ל- $\hat{R}$.

באופן מעשי, הוא מחשב שגיאה בין המדידה R_y לבין השערוך $\hat{R}$.

אנו מעוניינים בביטוי פשוט עבור ω אשר יוביל להתכנסות הרצויה $\tilde{R} \to I$, נבחר,

$$\omega = \operatorname{vex}\left(P_a\left(\tilde{R}\right)\right) \quad (11.11)$$

<u>טענה</u>

נניח שהקינמטיקה של המצב הזוויתי מתוארת ע"י (11.8) ונניח ש R ו- Ω ידועים.

בחר ω לפי (11.11), וגם $k_P > 0$ (קבוע חיובי). נניח $\hat{R}(t)$ הוא הפתרון של (11.9) עבור תנאי ההתחלה $\hat{R}_0$. אז

$$\dot{E}_{\mathrm{tr}} = -2k_P \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) E_{\mathrm{tr}}$$

כאשר E_{tr} מוגדרת ב- (11.7).

עבור כל תנאי התחלה $\hat{R}_0$ כך ש $\mathrm{tr}\left(\tilde{R}_0\right) \neq -1$ מתקבל $\hat{R}(t) \to R(t)$ באופן אקספוננציאלי

התנאי עבור השגיאה ההתחלתית $\tilde{R}_0$ נועד להבטיח $-\pi < \theta_0 < \pi$

הוכחה:

מתוך גזירה בזמן של פונקציית ליאפונוב E_{tr} ושימוש במודל (11.9) מתקבל,

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{tr}} &= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\dot{\tilde{R}}\right) = -\frac{k_P}{2}\operatorname{tr}\left(\omega_\times^T \tilde{R}\right)\\ &= -\frac{k_P}{2}\operatorname{tr}\left[\omega_\times^T\left(P_s\left(\tilde{R}\right)+P_a\left(\tilde{R}\right)\right)\right] - \frac{k_P}{2}\operatorname{tr}\left[\omega_\times^T P_a\left(\tilde{R}\right)\right]\\ &= -\frac{k_P}{2}\left\langle\left\langle \omega_\times, P_a\left(\tilde{R}\right)\right\rangle\right\rangle\end{aligned}$$

מתוך הצבה של ω ב- (11.9) מקבלים,

$$E_{\text{tr}} = -\frac{k_P}{2}\left\|P_a\left(\tilde{R}\right)\right\|^2 = -\frac{k_P}{2}\left|\omega\right|^2$$

נגדיר את θ כזווית הסיבוב (סביב הציר a), לכן, $\sin\left(\theta\right)a_\times = P_a\left(\tilde{R}\right)$ כאשר $\left|a\right| = 1$

וגם $\left\|a_\times\right\| = 2$

מכאן, את פונקציית ליאפונוב ניתן לנסח גם באופן הבא,

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{tr}} &= -k_P \sin^2(\theta)\left\|a_\times\right\|_\times^2 = -2k_P \sin^2(\theta) \\
&= -8k_P \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= -2k_P \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)E_{\mathrm{tr}}
\end{aligned}
$$

התנאי במשפט על המצב ההתחלתי $\tilde{R}_0$ מבטיח ש- $-\pi < \theta_0 < \pi$

וסיום ההוכחה מתבסס על תיאוריית היציבות של ליאפונוב.

המסנן (11.9) נקרא מסנן משלים ב- $SO(3)$ מכיוון שדיאגרמת המלבנים שלו היא בעלת מאפיינים דומים לאלה של דיאגרמת המלבנים של המסנן המשלים הקלסי.

ב- $SO(3)$ הפעולה $\hat{R}^T$ היא למעשה חישוב הופכי ולכן שקולה לפעולת '$-$' (מינוס) במסנן המקורי. הפעולה $\hat{R}^T R$ שקולה לחישוב שגיאת השערוך $y-\hat{x}$ במסנן המקורי.

מבנה המסנן נתון בדיאגרמה הבאה

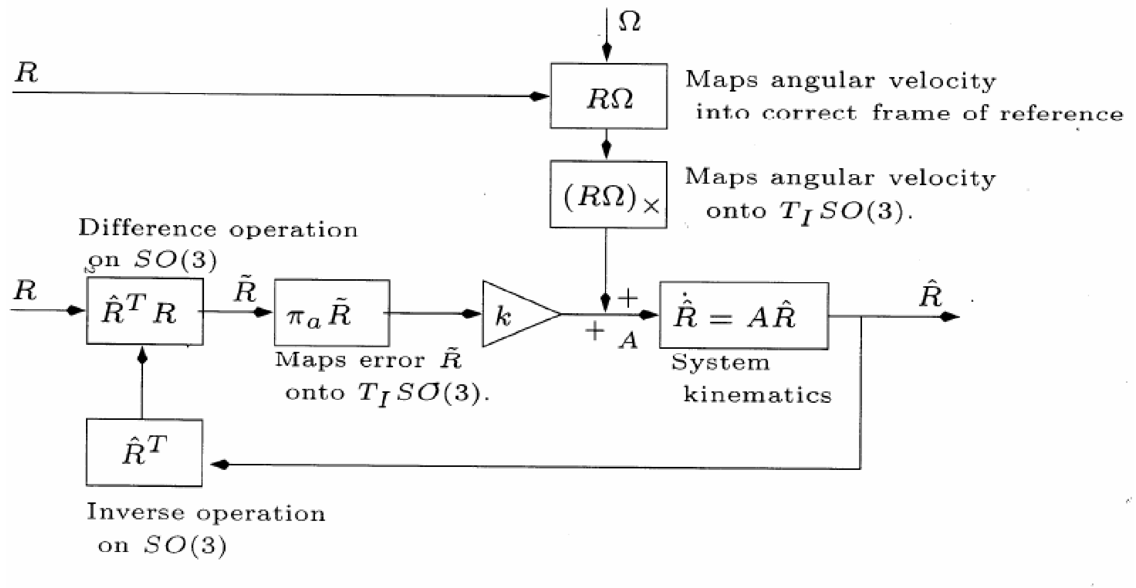


Fig. 11.2. Block diagram of the general form of a complementary filter on $SO(3)$.

שתי הפעולות $P_a\left(\tilde{R}\right)$ ו- $(R\Omega)_\times$ מהוות העתקה ממרחב השגיאה ומרחב המהירות אל ה tangent space של $SO(3)$, פעולות אשר אינן נחוצות במסנן המקורי (אינן נחוצות במרחב אוקלידי בגלל הזהות $T_\times R^n \equiv R^n$).

המודל הקינמטי שקול למשוואה הדיפרנציאלית מסדר אחד הקיימת במסנן המקורי.

המסנן שהוצג עדיין אינו ניתן למימוש מכיוון שמצריך ייצוג של ווקטור המהירות הזוויתית Ω במערכת הצירים האינרציאלית (ע"י שימוש במטריצה R , והיא אינה נתונה).

לכן משתמשים בשיערוך של R , כאשר שתי צורות שונות מוצעות,

1) Direct complementary filter

כאן משתמשים במדידות באופן ישיר כדי לבנות את מטריצת הסיבוב (מסומנת ע"י R_y), לכן שיטה זו מתבססת על הקירוב $\Omega^A \approx R_y\Omega_y$, צורה זו יותר פשוטה למימוש (כי לא דורשת משוב נוסף), החיסרון שלה קשור בשימוש הישיר ב- R_y המתבססת על מדידות רועשות.

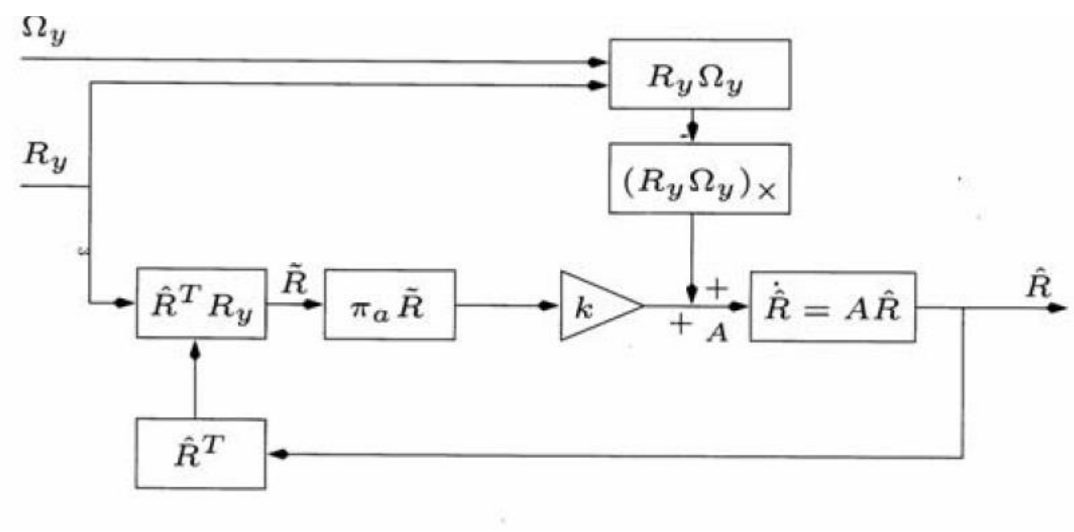


Fig. 11.3. Block diagram of the direct complementary filter on $SO(3)$.

2) Passive complementary filter

כאן משתמשים במטריצת הסיבוב המשוערכת $\hat{R}$ כדי לייצג את ווקטור המהירות הזוויתית הנמדדת במערכת האינרציאלית, כלומר $\Omega^A \approx \hat{R}\Omega_y$.

לכן רעש המדידה (של חיישני המצב הזוויתי) לא נכנס למשוואת המסנן באופן ישיר אבל המסנן כולל עכשיו ערוץ משוב נוסף (לכן דורש משאבי חישוב יותר גדולים).

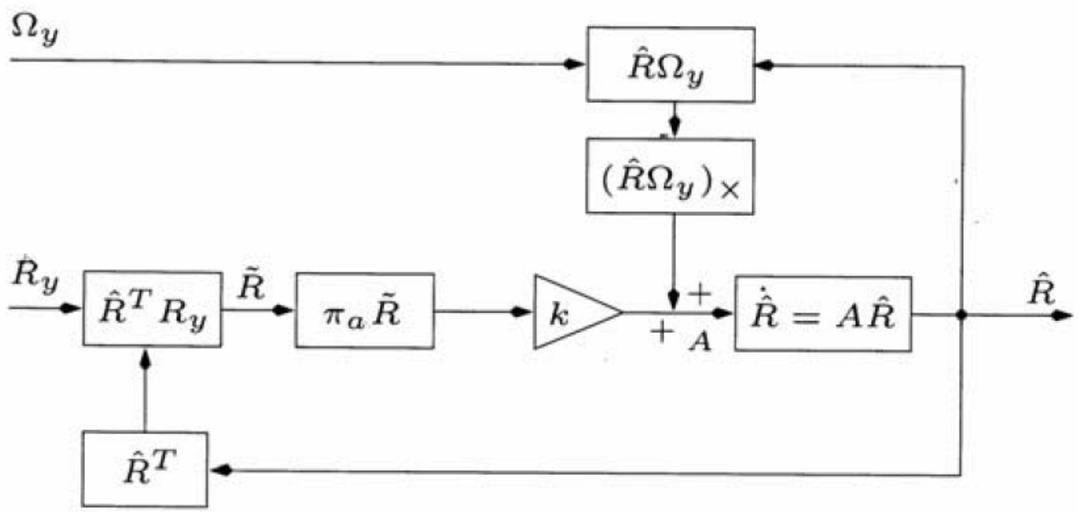


Fig. 11.4. Block diagram of the passive complementary filter on $SO(3)$.

טענה (Passive complementary filter),

בהתבסס על המודל הקינמטי (11.8), קח $k_p > 0$ ובחר ω לפי (11.11). חשב את $\hat{R}(t)$ ע"י,

$$\dot{\hat{R}} = \left(\hat{R}\Omega + k_p \hat{R}\omega\right)_\times \hat{R}, \qquad \hat{R}(0) = \hat{R}_0 \qquad (11.2)$$

אז,

$$\dot{E}_{tr} = -2k_p \cos^2(\theta/2) E_{tr}$$

כאשר E_{tr} מוגדרת ב- (11.7). לכן לכל תנאי התחלה $\hat{R}_0$ כך ש $tr\left(\tilde{R}_0\right) \neq -1$, מתקבל,

$\hat{R}(t) \to R(t)$ באופן אקספוננציאלי,

הוכחה

ניתן לראות כי

$$\left(\hat{R}\Omega + k_p \hat{R}\omega\right)_\times \hat{R} = \hat{R}\left(\Omega + k_p\omega\right)_\times \hat{R}^T \hat{R} = \hat{R}\left(\Omega + k_p\omega\right)_\times$$

גזירה של E_{tr} ושימוש במודל (11.12) נותן

$$E_{\mathrm{tr}} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\dot{\tilde{R}}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(-\left(\Omega + k_p\omega\right)_{\times}\tilde{R} + \tilde{R}\Omega_{\times}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left[\tilde{R},\Omega_{\times}\right]\right) - \frac{k_p}{2}\operatorname{tr}\left(\omega_{\times}{}^{T}\tilde{R}\right)$$

$$= -\frac{k_p}{2}\left\langle\left\langle\omega_{\times}, P_a\left(\tilde{R}\right)\right\rangle\right\rangle$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש $\operatorname{tr}\left(\left[\tilde{R},\Omega_{\times}\right]\right) = 0$.

את משוואת המסנן הפסיבי ניתן לכתוב גם כך,

$$\dot{\hat{R}} = \hat{R}\left(\Omega_{\times} + k_p P_a\left(\tilde{R}\right)\right) \qquad (11.13)$$

מה שמוביל לדיאגרמת מלבנים יותר פשוטה,

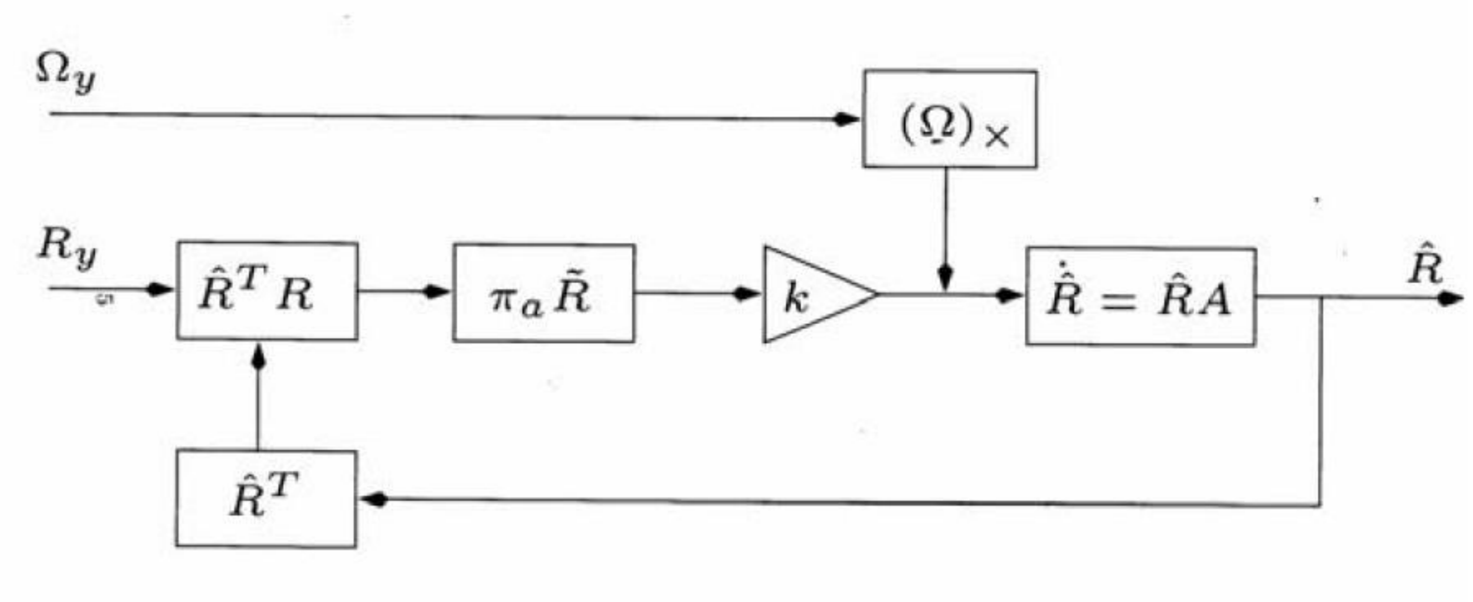


Fig. 11.6. Block diagram of the simplified form of the passive complementary filter.

כמו במסנן המשלים הקלאסי, גם כאן ניתן לבצע קיזוז של היסט לא ידוע במדידות המהירות הזוויתית (ע"י הג'ירו). כאן מניחים,

$$R_y \approx R, \quad \text{valid for low frequencies,} \qquad (11.14)$$

$$\Omega_y \approx \Omega + b, \quad \text{for constant bias } b, \qquad (11.15)$$

עבור הצורה הראשונה של המסנן (כאשר כוללים קיזוז היסט),

Direct complementary filter with bias correction

$$\dot{\hat{R}} = \left(R_y\left(\Omega^y - \hat{b}\right) + k_P \hat{R}\omega\right)_\times \hat{R}, \quad \hat{R}(0) = \hat{R}_0, \qquad (11.16)$$

$$\dot{\hat{b}} = -k_I\omega, \quad \hat{b}(0) = \hat{b}_0, \qquad (11.17)$$

$$\omega = vex\left(P_a\left(\tilde{R}\right)\right), \quad \tilde{R} = \hat{R}^T R_y, \qquad (11.18)$$

$$k_P, k_I > 0$$

עבור הצורה השנייה של המסנן (כאשר כוללים קיזוז היסט),

Passive complementary filter with bias correction

$$\dot{\hat{R}} = \hat{R}\left(\Omega^y - \hat{b} + k_P\omega\right)_\times, \quad \hat{R}(0) = \hat{R}_0, \qquad (11.19)$$

$$\dot{\hat{b}} = -k_I\omega, \quad \hat{b}(0) = \hat{b}_0, \qquad (11.20)$$

$$\omega = vex\left(P_a\left(\tilde{R}\right)\right), \quad \tilde{R} = \hat{R}^T R_y, \qquad (11.21)$$

$$k_P, k_I > 0$$

פיתוח מקביל של המסננים המתבסס על ייצוג סיבוב ע"י קווטרניון

Quaternion Versions of Direct and Passive Complementary Filters

נשתמש במינוח הבא,

קבוצת הקווטרניונים מוגדרת ע"י, $Q=\left\{q=(s,v)\in R\times R^3 : |q|=1\right\}$

עם פעולה כפל (קווטרניוני),

$$q_1\otimes q_2=\begin{bmatrix} s_1 s_2 - {v_1}^T v_2 \\ s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1\times v_2 \end{bmatrix}$$

וקווטרניון יחידה, $1=(1,0,0,0)$

המעבר מ- Q ל- $SO(3)$ (ולהיפך), הוא ע"י,

$$F: Q\to SO(3),\quad F(q):=I_3+2sv_\times+2{v_\times}^2$$

$$F^{-1}(R)=\left\{\pm\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right),\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)a\right)\right\}$$

אם $\Omega \in \{A\}$ היא המהירות הזוויות (מנוסחת במערכת האינרציאלית), אז הייצוג הקווטרניוני הוא

$$\mathbf{p}(\Omega) = (0, \Omega)$$

המודל הקינמטי (הקושר בין מצב זוויתי ומהירותת זוויתית), מנוסח ע"י קווטרניון q נתון באופן הבא,

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \mathbf{p}(\Omega) \qquad (11.24)$$

אנו מניחים כי נתונות מדידות המצב הזוויתי (עם אינפורמציה בתדר נמוך) $q_y \approx q$

ומדידות של המהירות הזוויתית, הכוללות גם היסט $\Omega_y = \Omega + b$

מוצא המסנן יהיה $\hat{q}$ (שערוך של המצב הזוויתי מיוצג ע"י קווטרניון)

שגיאת השערוך תוגדר באופן הבא,

$$\tilde{q} = \hat{q}^{-1} \otimes q = \begin{bmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}$$

(רוצים שהשגיאה תתכנס אל קווטרניון היחידה)

(11.16) – (11.18) הגרסה הקוונטרניונית של המסנן הישיר

Direct complementary filter

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\hat{q} \otimes \mathbf{p}\left(\tilde{R}\left(\Omega_y - \hat{b}\right) + 2k_p \tilde{s}\tilde{v}\right) \qquad (11.25)$$

$$\dot{\hat{b}} = -2k_I \tilde{s}\tilde{v} \qquad (11.26)$$

(11.19) – (11.21) הגרסה הקוונטרניונית של המסנן הישיר

Passive complementary filter

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\hat{q} \otimes \mathbf{p}\left(\Omega_y - \hat{b} + 2k_P \tilde{s}\tilde{v}\right) \qquad (11.29)$$

$$\dot{\hat{b}} = -2k_I \tilde{s}\tilde{v} \qquad (11.30)$$