מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

סמסטר ב' – תשפ"ג

תאריך: 19/06/2023
9:00-12:00

מבחן סוף סמסטר בקורס "חשבון אינפיניטסימלי 1" 20151

המרצים:
ד"ר אלה ליפץ, ד"ר אלכסנדר ספיבק, ד"ר לובה ברומברג,
ד"ר בוריס קריכלי, ד"ר ילנה לונה, ד"ר נירה גרוברגר

הוראות:
- משך המבחן: 3 שעות (180 דקות).
- חומר עזר: דף נוסחאות של הקורס ומחשבון פשוט.
- משקלה של כל שאלה הוא 20%. יש לפתור את חלק א' ועוד 4 שאלות מחלק ב'.
- נמקו היטב את כל מסקנותיכם.
- יש לכתוב בעט ולא בעפרון. נא להתחיל כל שאלה וכל סעיף בראש הדף.

חלק א' (חובה)

שאלה 1:

חקרו את הפונקציה $f(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)}$ על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, אסימפטוטות, שרטוט.

שאלה 1 (חקירת פונקציה) $y=f(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln x}$

פתרון: (א) תחום הגדרתה הוא $D=\{x>0,\, x\neq 1\}$.

(ב) נקי חיתוך עם הצירים היא $(e,0)$.

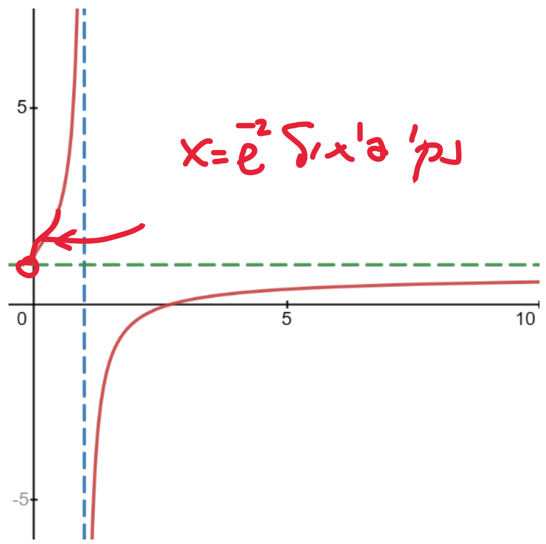
(ג) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\ln x-(\ln x-1)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}>0$ ולכן הפונקציה עולה ממש כל הזמן ללא נקודת קיצון.

(ד) $f''(x)=\dfrac{-(\ln x+2)}{x^2(\ln x)^3}$ ולכן פונקציה קעורה כאשר $e^{-2}<x<1$ וקמורה כאשר $x>1$ או $x<e^{-2}$. בנקודה $x=e^{-2}$ הפונקציה בעלת נקודת פיתול.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

(ה) אסימפטוטות: אם נחשב $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = -\infty \end{cases}$, אז נקבל שקו ישר $x=1$ מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה. בנוסף, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1 \end{cases}$ ולכן קו ישר $y=1$ מהווה אסימפטוטה אופקית באינסוף לגרף הפונקציה.

נקי אי- רציפות מימין בנק' $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$



חלק ב' (בחירה 4 מתוך 5)

שאלה 2:

א. חשבו את האינטגרל הבא: $\int \frac{2x^2+x+4}{(x+1)(x^2+4)}dx$. (10%)

ב. נתונה הסדרה: $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right)$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את הגבול של הסדרה. (10%)

פתרון:

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

א. $\int \frac{2x^2+x+4}{(x+1)(x^2+4)}dx$. מנת פולינומים והדרגה במונה קטנה מהדרגה במכנה. לכן נפרק לסכום של מנות פולינומים:

$$\frac{2x^2+x+4}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

מכאן

$$A(x^2+4) + \left(Bx+C\right)\left(x+1\right) = 2x^2+x+4 \Rightarrow$$
$$x=0 \Rightarrow 4A+C=4$$
$$x=-1 \Rightarrow 5A=5 \Rightarrow A=1 \Rightarrow C=0$$
$$x=1 \Rightarrow 5A+(B+C)\cdot 2=7 \Rightarrow 5+2B=7 \Rightarrow B=1$$

לכן:

$$\int \frac{2x^2+x+4}{(x+1)(x^2+4)}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{x}{x^2+4}dx =$$
$$\ln\left|x+1\right| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C \, .$$

ב.
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{7}{a_n}) \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = \frac{1}{2}(3+\frac{7}{3}) = \frac{8}{3} < 3$$
$$a_3 = \frac{1}{2}(\frac{8}{3}+\frac{21}{8}) = \frac{127}{48} < \frac{8}{3}$$

נראה באינדוקציה כי הסידרה יורדת וחיובית.

<u>**הוכחת חסימות**</u>: קודם כל , לפי אי שיוויון הממוצעים , $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{7}{a_n}) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{7}{a_n}} = \sqrt{7}$.

לכן לכל n $a_n \geq \sqrt{7}$.

<u>**הוכחת מונוטוניות**</u>:

$a_1 = 3$. נניח $a_2 = \frac{1}{2}(3+\frac{7}{3}) = \frac{8}{3} < 3 = a_1$. נניח $a_n < a_{n-1}$

צריך להוכיח כי $a_{n+1} < a_n$.

נסתכל על

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) - a_n = -\frac{1}{2}a_n + \frac{7}{2a_n} =$$
$$= \frac{7-a_n{}^2}{2a_n} = \frac{\left[\sqrt{7}-a_n\right]\left[\sqrt{7}+a_n\right]}{2a_n}$$

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

המכנה שלילי כי $a_n \geq \sqrt{7}$ ו- $a_n > 0$.

המכנה חיובי.

לכן $a_{n+1} - a_n < 0$.

לכן הסידרה מונוטונית יורדת.

כמו כן הסדרה חסומה מלרע כי ראינו כי $a_n \geq \sqrt{7}$.

ולפי משפט סידרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

נניח שהגבול הוא L, כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$

מתוך ההגדרה הרקורסיבית של הסידרה $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right)$ ואריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}L = \frac{7}{2L} \Rightarrow L^2 = 7 \Rightarrow L = \pm\sqrt{7}$$

אבל הסידרה חיובית ולכן לא ייתכן שהגבול שלה שלילי.

לכן $L = \sqrt{7}$.

שאלה 3:

א. חשבון את הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^4} (1+t)^{\frac{2}{t}} dt}{x^4}$. (10%)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^4} (1+t)^{\frac{2}{t}} dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^4)^{\frac{2}{x^4}} 4x^3}{4x^3} = \lim_{x\to 0} (1+x^4)^{\frac{2}{x^4}} = e^2$$

ב. חשבון את האינטגרל הבא: $\int \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x + 2\ln x + 5)}$. (10%)

$$\int \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x + 2\ln x + 5)} \begin{Bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{(t^2 + 2t + 5)}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{(t+1)}{2} + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{(\ln(x)+1)}{2} + C$$

שאלה 4

א. הוכיחו כי לכל $x \in [-2,2]$ מתקיים את האי-שוויון הבא:

.$(x+2)\sqrt{4-x^2} \le 3\sqrt{3}$ (10%)

פתרון: נגדיר הפונקציה $f(x)=(x+2)\sqrt{4-x^2}$

היא רציפה ב- $[-2,2]$ ו- $f(-2)=f(2)=0$

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+(x+2)\frac{1}{\cancel{2}}(4-x^2)^{-1/2}(-\cancel{2}x) = (4-x^2)^{1/2} - \frac{x^2+2x}{(4-x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{-2x^2-2x+4}{(4-x^2)^{1/2}} = -2\cdot\frac{x^2+x-2}{(4-x^2)^{1/2}} ,$$

$$f'(x)=0 \iff x^2+x-2=0 \iff x=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2\,\frac{(x-1)(x+2)}{(2-x)^{1/2}(2+x)^{1/2}} = -2\,\frac{(x-1)(x+2)^{1/2}}{(2-x)^{1/2}}$$

אז הפונקציה רציפה ב- $[-2,2]$ וגזירה ב- $(-2,2)$

$f(1)=3\sqrt{3}$

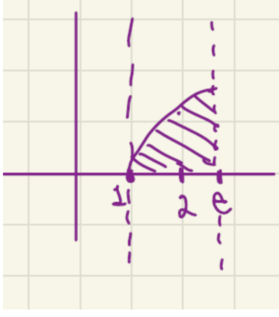
אז $x=1$ מקסימום מוחלט של f ב- $[-2,2]$

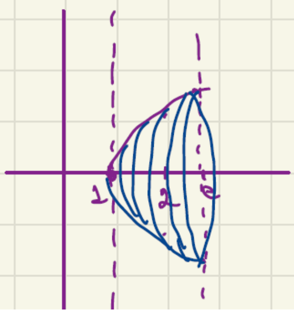
לכן: $\forall x\in[-2,2]$ $f(x)\le f(1)=3\sqrt{3}$

ב. חשבו את נפח גוף הסיבוב הנוצר מסיבוב של התחום המישורי

הכלוא בין הקווים: $y=\sqrt{x\ln x}\,, y=0\,, x=1, x=e$ סביב ציר ה- X. (10%)

פתרון:





$y(1)=0$

$y(2)\approx 1.177$

$y(e)\approx 1.64$

$y=f(x)=\sqrt{x\ln x}$

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

$$V=\pi\int_1^e f^2(x)\,dx=\pi\int_1^e x\ln x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x\,dx & v=\frac{1}{2}x^2\end{matrix}\right|=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx\right)=\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)\right)=\pi\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{\pi}{4}\left(e^2+1\right)}$$

שאלה 5

א. חשבון את הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{\sin(2x-2)}}$. (10%)

$$\operatorname{Lim}_{x\to1} x^{\frac{1}{\sin(2x-2)}}=\lim_{x\to1}(1+x-1)^{\frac{1}{\sin(2x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to1}(1+x-1)^{\frac{x-1}{(x-1)\sin(2x-2)}}=\sqrt{e}$$

ב. בדקו האם הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x\arctan\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ גזירה

בנקודה $x=0$. אם כן, מצאו את הנגזרת, אם לא, נמקו. (10%)

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x\,arctan\frac{1}{\Delta x^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0} arctan\frac{1}{\Delta x^2}=\frac{\pi}{2}$$

שאלה 6:

א. חשבון את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות: $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{3}{9+x^2}$ (10%)

ב. חשבון בקירוב $\ln(0.9)$ באמצעות נוסחת מקלורן מסדר 2 של פונקציה $y=\ln(1+x)$ והעריכו את שגיאת החישוב. (10%)

פתרון

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619 www.hit.ac.il
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

שאלה 6:

א. חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות: $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{3}{9+x^2}$ (10%)

ב. חשבו בקירוב $\ln(0.9)$ באמצעות נוסחת מקלורן מסדר 2 של פונקציה $y=\ln(1+x)$ והעריכו את שגיאת החישוב. (10%)

פתרון

א.

$$y=\frac{3}{9+x^2},\qquad y=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{3}{9+x^2}=\frac{1}{1+x^2},\qquad 3+3x^2=9+x^2,\qquad x^2=3,\ x=\pm\sqrt{3}$$

$$S=2S_1=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{3}{9+x^2}\right)dx=2\left(\arctan x-3\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=2\left(\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Ans.

$$\frac{\pi}{3}$$

ב.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+R_2(x),\qquad R_2(x)=\frac{\left(\ln(1+x)\right)^{(3)}(c)}{3!}x^3=\frac{1}{3(1+c)^3}x^3,$$

c *between* x *and* 0

$$\ln 0.9=\ln\left(1+(-0.1)\right)=-0.1-\frac{(-0.1)^2}{2}+R_2(x)\approx-0.105,$$

$$R_2(x)=\frac{1}{3(1+c)^3}(-0.1)^3,\ -0.1<c<0$$

$$\left|R_2(x)\right|=\left|\frac{1}{3(1+c)^3}(-0.1)^3\right|<\frac{1}{3000\cdot 0.9^3}=0.00045=\delta$$

Ans.

$$\ln 0.9\approx-0.105,\qquad \delta<0.00045$$

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
www.hit.ac.il
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences