

## 板書のzoom URL

<https://u-tokyo-ac-jp.zoom.us/j/87367136435?pwd=VVZJQVN1N0ZsWnMrZ2dKZXQyY1Mzdz09>

ミーティングID: 873 6713 6435 パスコード: 169212

## SlidoのURL

<https://app.sli.do/event/pobCph4XZh88FVGyrdHGa8>

Event code: BioSysEng

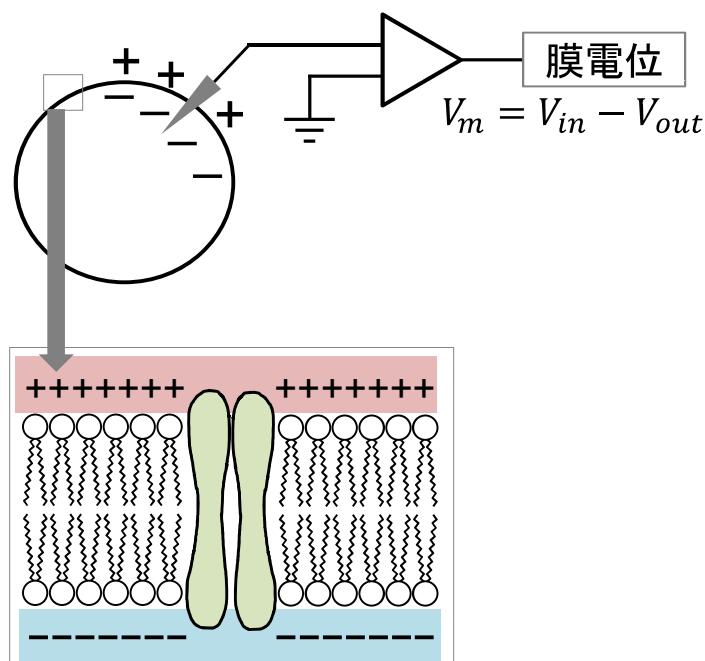
0

# 神経信号の数理モデル

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

## 前回までの復習

- ・ 神経細胞の電気化学的駆動力: イオン濃度差と電位差で決まる
- ・ 膜の能動的性質: イオンの透過性は、膜電位に依存して変わる



1

# 復習:Hodgkin-Huxley方程式

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

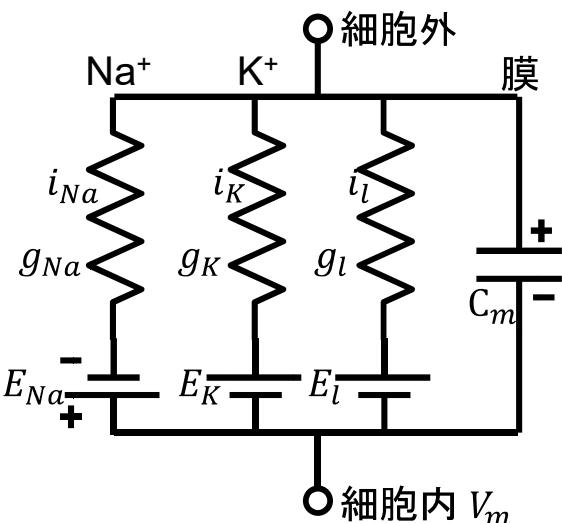
## 前回までの復習

- 神経細胞の電気化学的駆動力: イオン濃度差と電位差で決まる
- 膜の能動的性質: イオンの透過性は、膜電位に依存して変わる

膜電流は、それぞれの電流の総和なので

$$I =$$

各要素でオームの法則が成り立つので



2

# 復習:Hodgkin-Huxley方程式

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

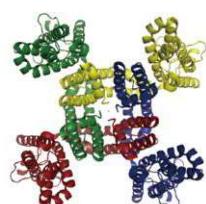
## 前回までの復習

- 神経細胞の電気化学的駆動力: イオン濃度差と電位差で決まる
- 膜の能動的性質: イオンの透過性は、膜電位に依存して変わる

## カリウムコンダクタンスについて

$$g_K = \overline{g_K} n^4$$

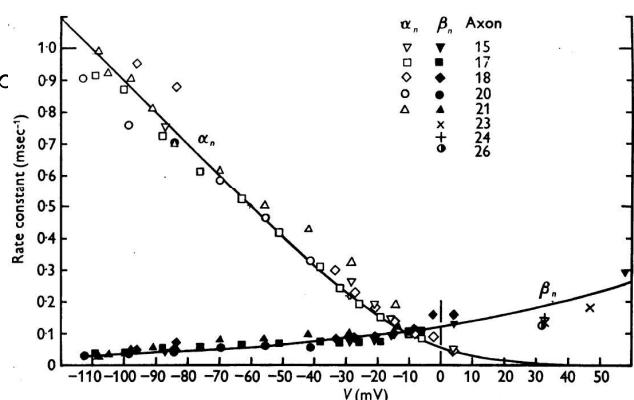
$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n n \quad (0 \leq n \leq 1),$$



$$\frac{1}{(\alpha_n + \beta_n)} = \tau, \quad \frac{\alpha_n}{(\alpha_n + \beta_n)} = n_\infty$$

$$\alpha_n = \frac{0.01 \times (V + 10)}{\left( \exp \frac{V + 10}{10} - 1 \right)}$$

$$\beta_n = 0.125 \times \exp \left( \frac{V}{80} \right)$$



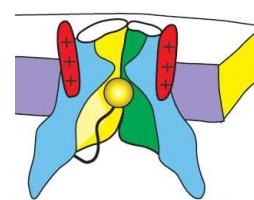
# 復習: Hodgkin-Huxley方程式

ナトリウムコンダクタンスについて

$$g_{Na} = \overline{g_{Na}} m^3 h$$

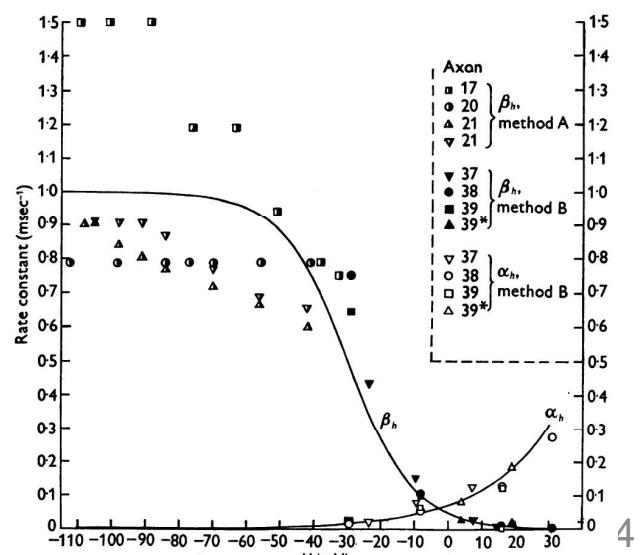
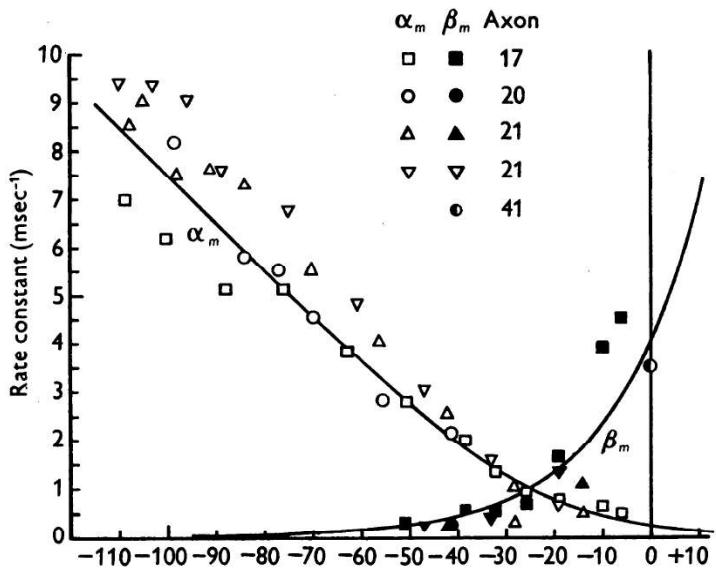
$$\alpha_m = \frac{0.1 \times (V + 25)}{(exp \frac{V + 25}{10} - 1)}$$

$$\beta_m = 4 \times exp \left( \frac{V}{18} \right)$$



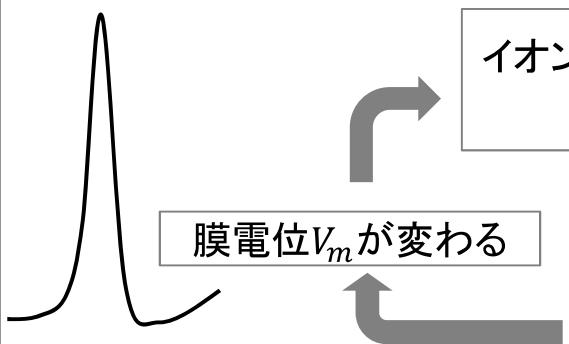
$$\alpha_h = 0.07 \times exp \left( \frac{V}{20} \right)$$

$$\beta_h = \frac{1}{(exp \frac{V + 30}{10} + 1)}$$



4

$$I = g_{Na}(E_m - E_{Na}) + g_K(E_m - E_K) + g_l(E_m - E_l) + C_m \frac{dE_m}{dt}$$

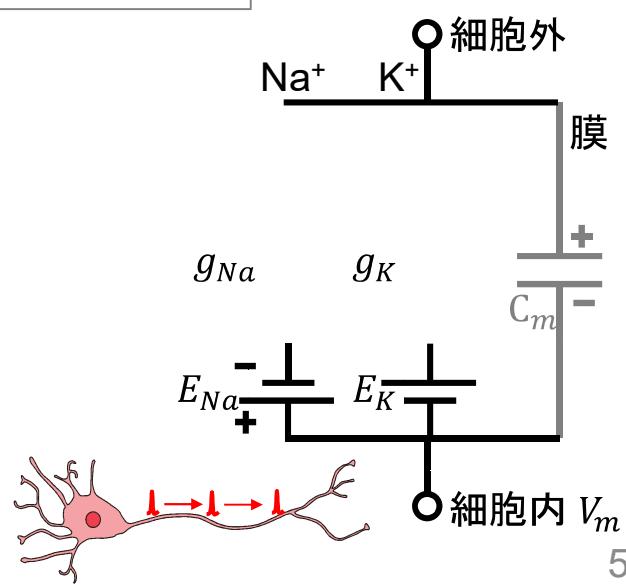
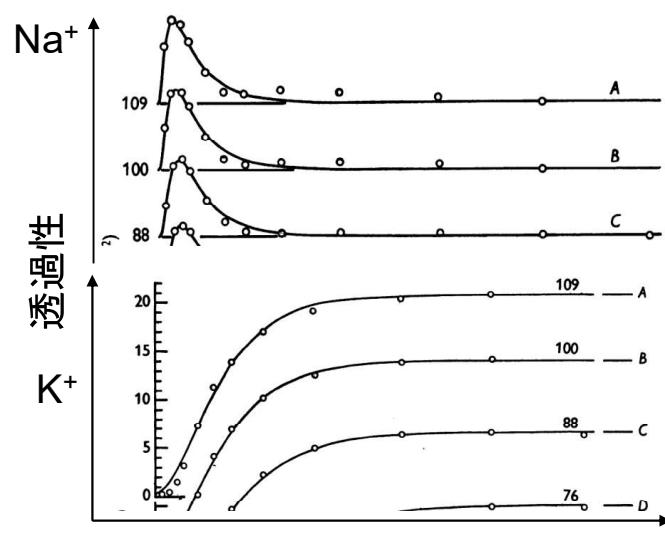


イオンのコンダクタンスが変わる  
 $g_{Na}(V_m, t), g_K(V_m, t)$

イオンチャネルの  
開口率が変わる

膜電位  $V_m$  が変わる

イオンが流れる  
 $i_{Na}(V_m, g_{Na}), i_K(V_m, g_K)$



McCulloch-Pittsのモデル (1943):

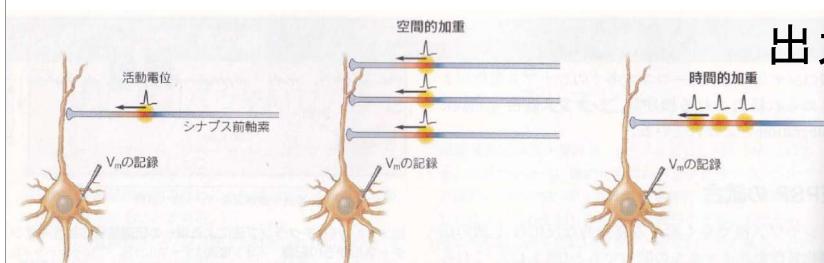
1. 出力は‘all or none’
2. 興奮性(E)・抑制性(I)シナプスの入力を受ける  
→ 神経細胞 (point neuron) は論理的な制御素子とみなせる

6

# 神経信号の数理モデル

McCulloch-Pittsのモデル (1943):

1. 出力は‘all or none’
2. 興奮性(E)・抑制性(I)シナプスの入力を受ける  
→ 神経細胞 (point neuron) は論理的な制御素子とみなせる



出力が生成されるのは、

ミクロ Hodgkin-Huxley  
ケーブル方程式

oscillation回路  
スモールワールドNW

マクロ

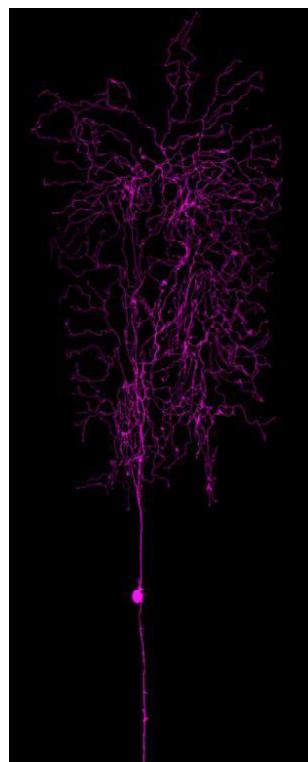
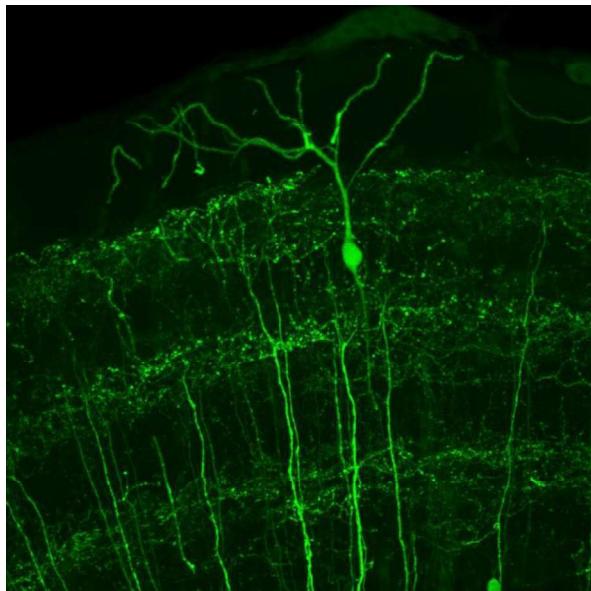
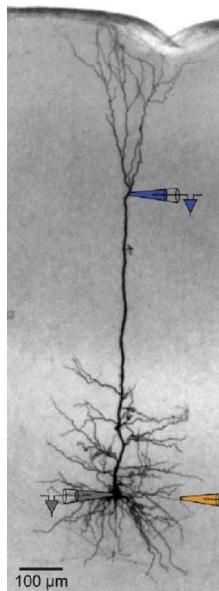
7

# 神経信号の数理モデル

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

Wilfrid Rallのモデル (1960~):

樹状突起のケーブル特性を考慮することで、  
樹状突起上の統合的・論理的処理に言及した



ミクロ Hodgkin-Huxley  
ケーブル方程式

oscillation回路  
スモールワールドNW マクロ

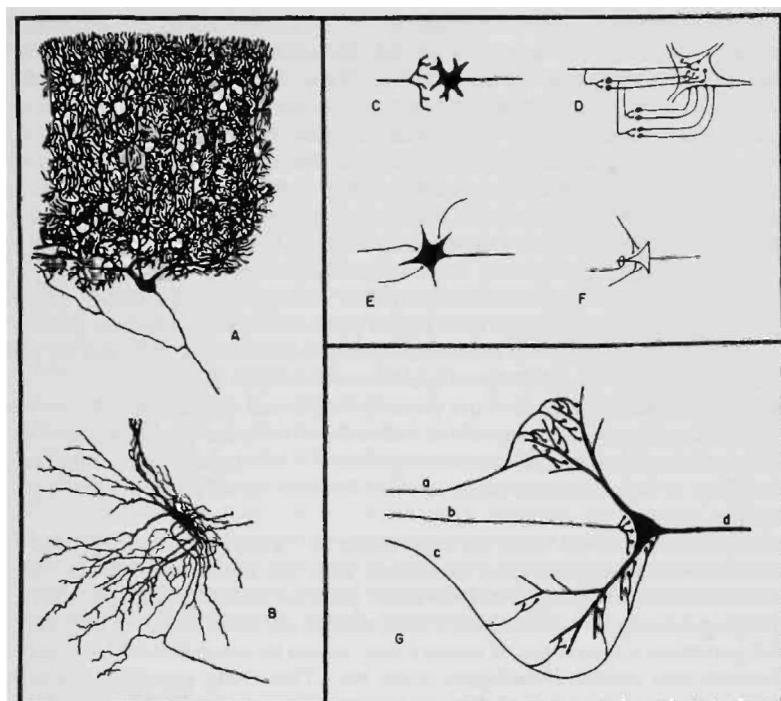
8

## ケーブル方程式

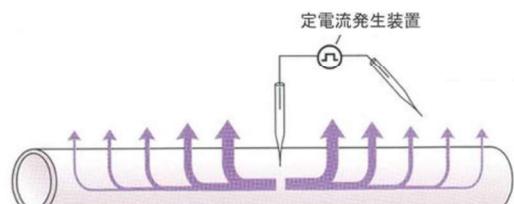
生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

Wilfrid Rallのモデル (1960~):

樹状突起のケーブル特性を考慮することで、  
樹状突起上の統合的・論理的処理に言及した



- ・コンパートメントへの分割
- ・神経細胞のケーブル特性  
(Hodgkin, 1937)



↓  
神経細胞の形態の影響を  
議論

9

# ケーブル方程式の導出

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

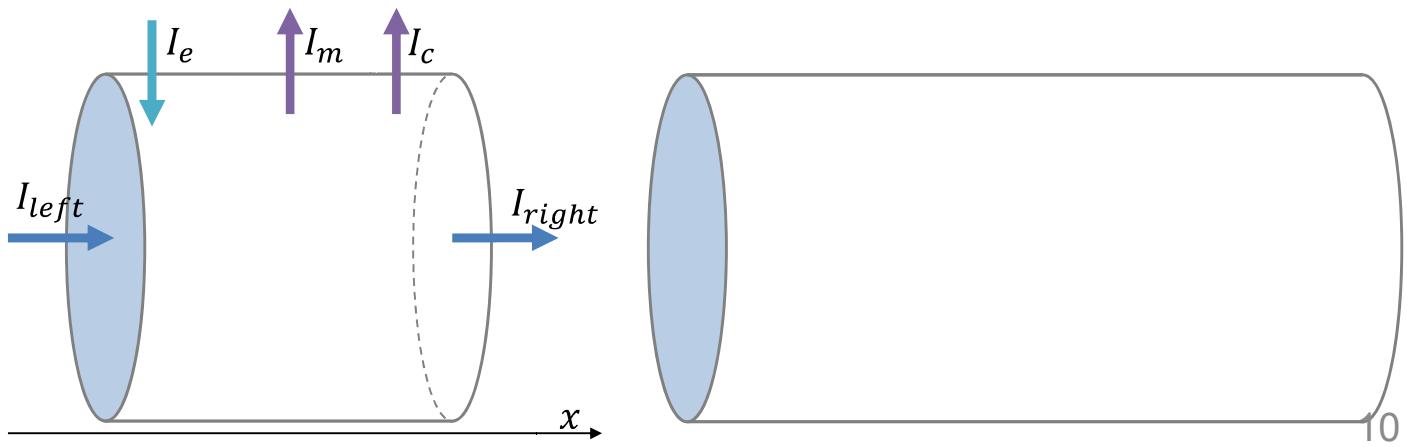
キルヒ霍フの法則より

$C_m$  : 膜容量 (単位長さ当たり)

$R_m$  : 膜抵抗 (〃)

$R_e$  : 細胞外, 軸 ( $x$ ) 方向の抵抗 (〃)

$R_i$  : 内部抵抗 (軸方向, 〃)

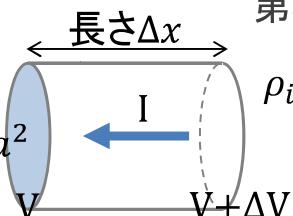


# ケーブル方程式の導出

オームの法則より,

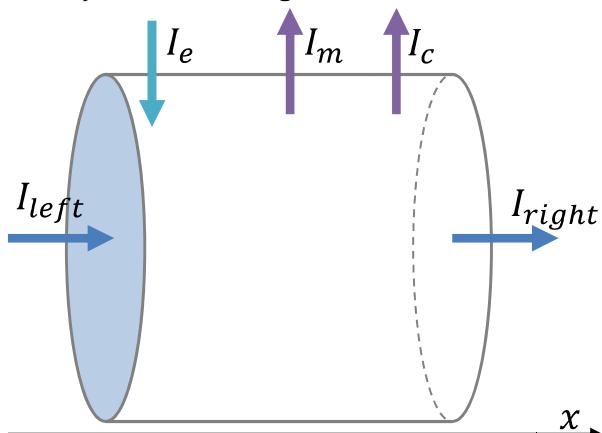
生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

半径  $a$  のとき,  
断面積  $\Delta S = \pi a^2$



キルヒ霍フの法則

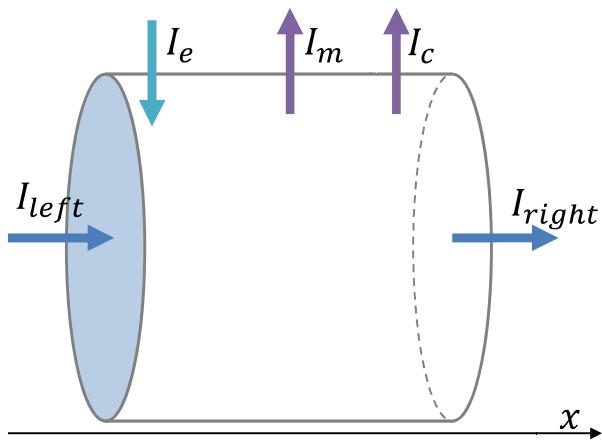
$$I_{left} + I_e - I_{right} - I_m - I_c = 0$$



# ケーブル方程式の導出

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

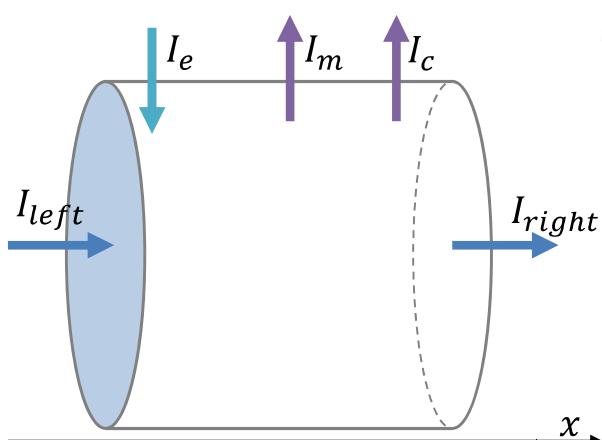
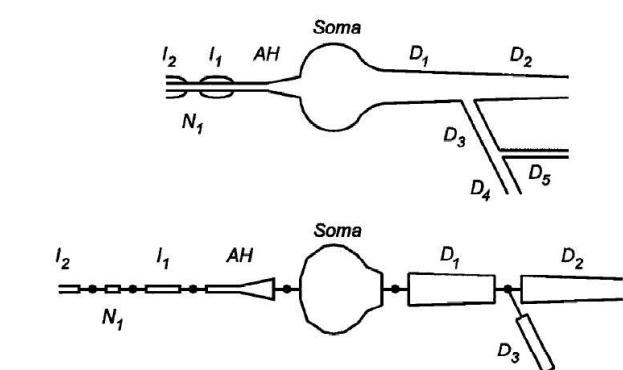
代入すると、



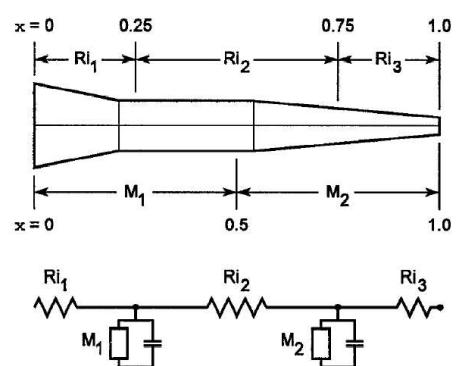
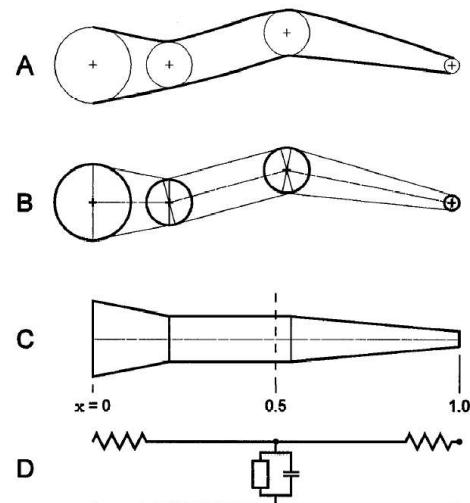
12

## コンパートメントモデル

ケーブル方程式に従うコンパートメントに分割して、  
神経細胞の膜電位を計算する→NEURON (6月)



生体システム工学  
第3回(再配布禁止)



3

# 神経細胞のケーブル特性

Kelvin卿 (William Thomson) (1850s) :

海底ケーブルにおける信号減衰の数理モデル

Hodgkin (1937) :

神経細胞のケーブル特性を実験的に確認

$x_0$ での電位を一定 ( $V_0$ ) にした場合、距離と電位の関係は、

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

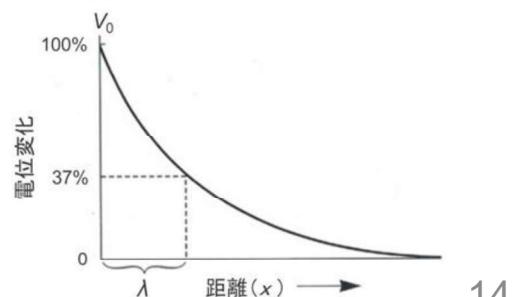
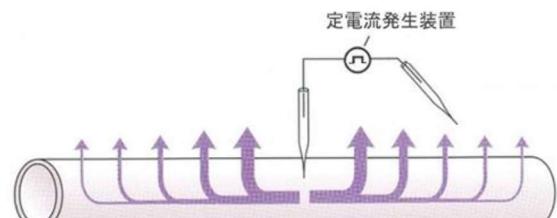
$\lambda$  : 長さ定数

$a$  : 半径

$R_m$  : 膜抵抗 (単位長さ)

$r_m$  : 膜抵抗 (単位面積)

$R_i, r_i$  : 内部抵抗



14

減衰は、

太いほど(強い・弱い)

細胞内抵抗が低いほど(強い・弱い)

膜抵抗が高いほど(強い・弱い)

# 神経細胞のケーブル特性

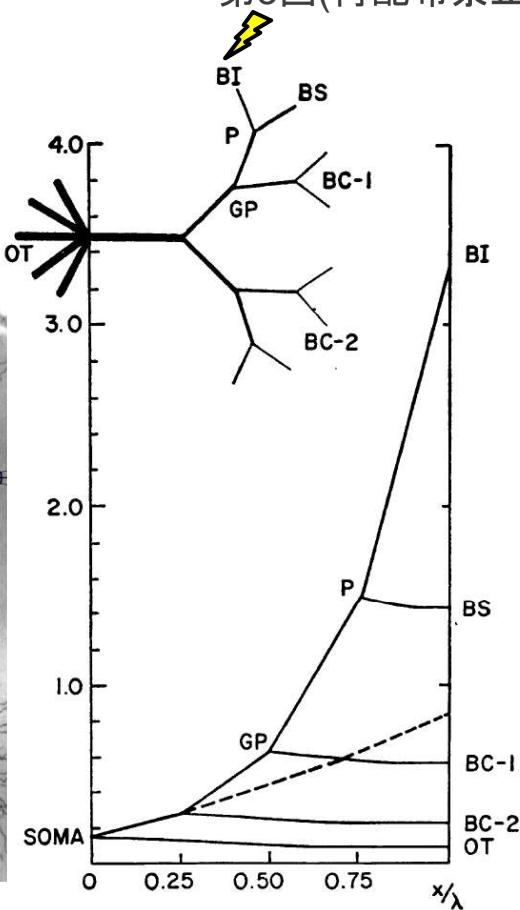
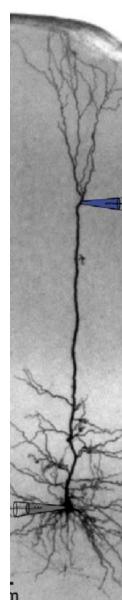
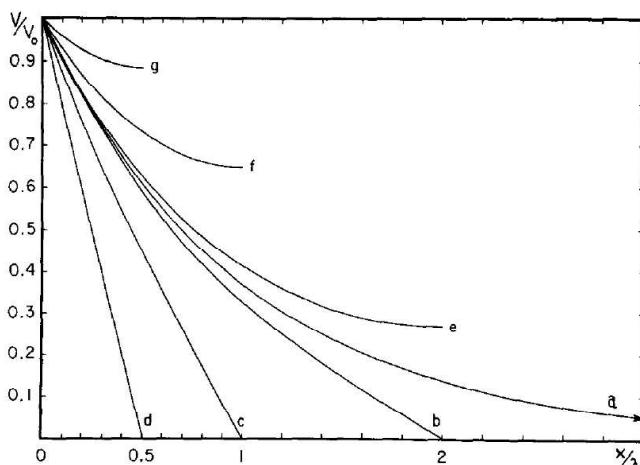
生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V(X, T) = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}$$

$$X = \frac{x}{\lambda}, \quad T = \frac{t}{\tau_m}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{a r_m}{2 r_i}}, \quad \tau_m = r_m c_m$$

Rall (1959) :

様々な境界条件でこれを解いた

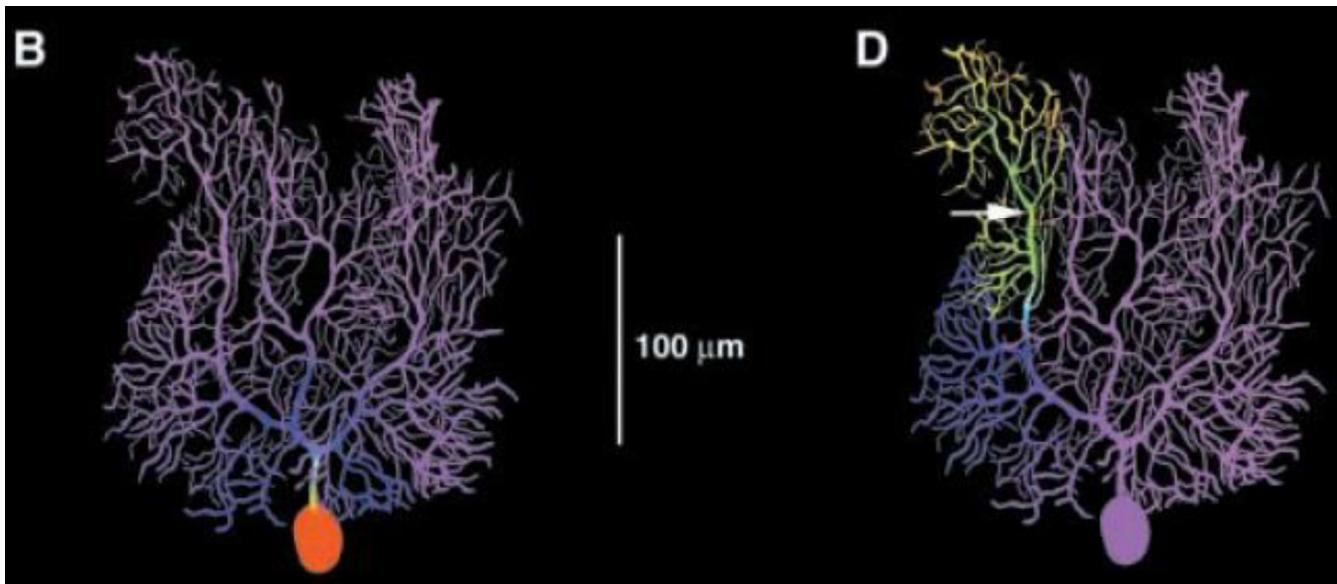


15

# 神経細胞のケーブル特性

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

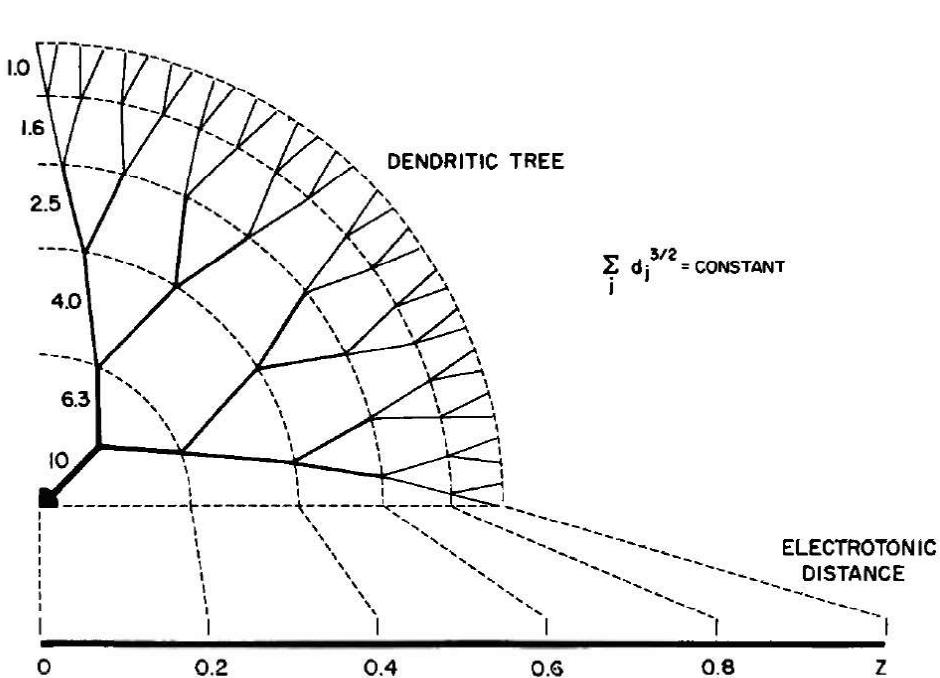
樹状突起の形状



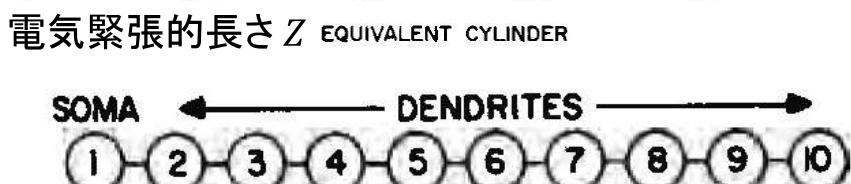
16

## 方向性の検出

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)



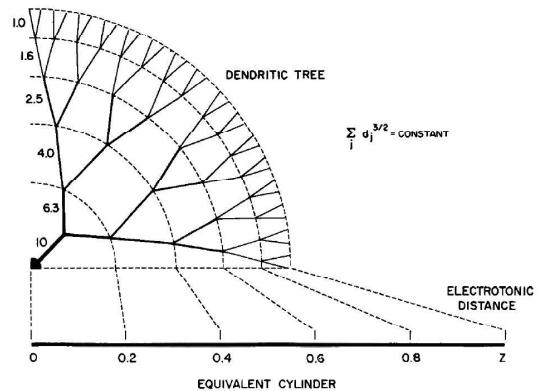
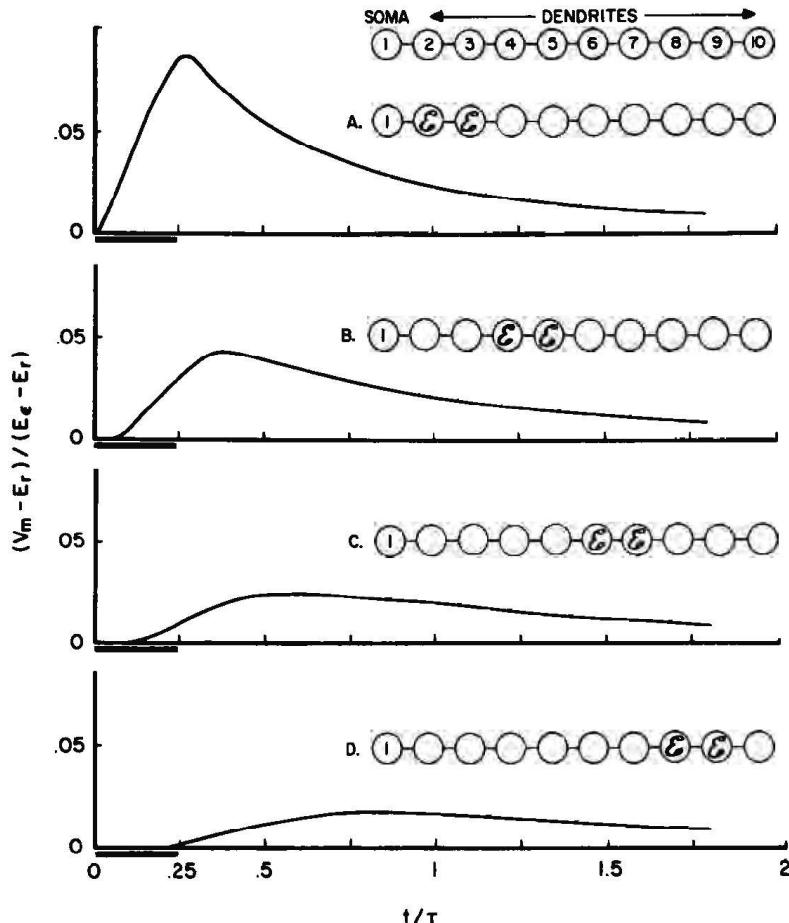
$$\lambda = \sqrt{\frac{a r_m}{2 r_i}}$$



17

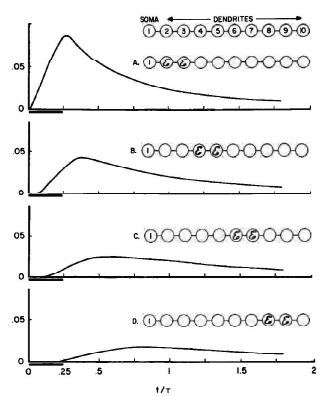
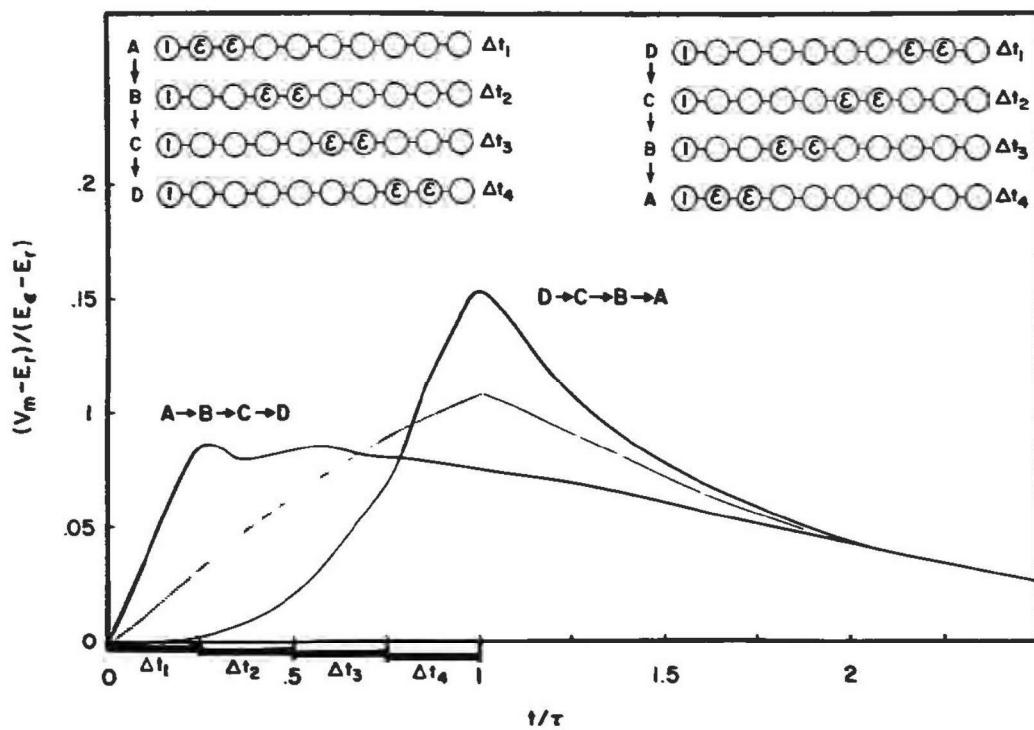
# 方向性の検出

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)



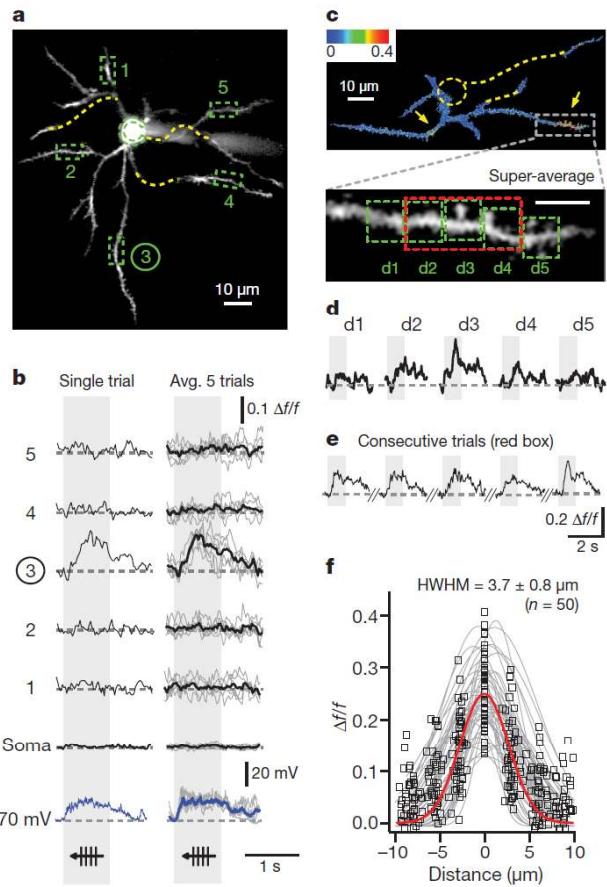
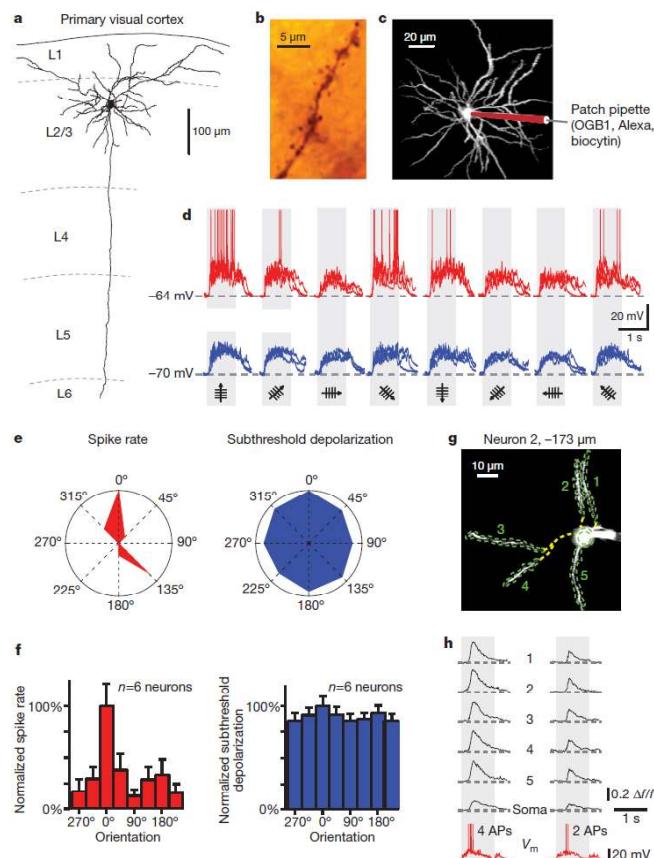
# 方向性の検出

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)



# 方向性の検出

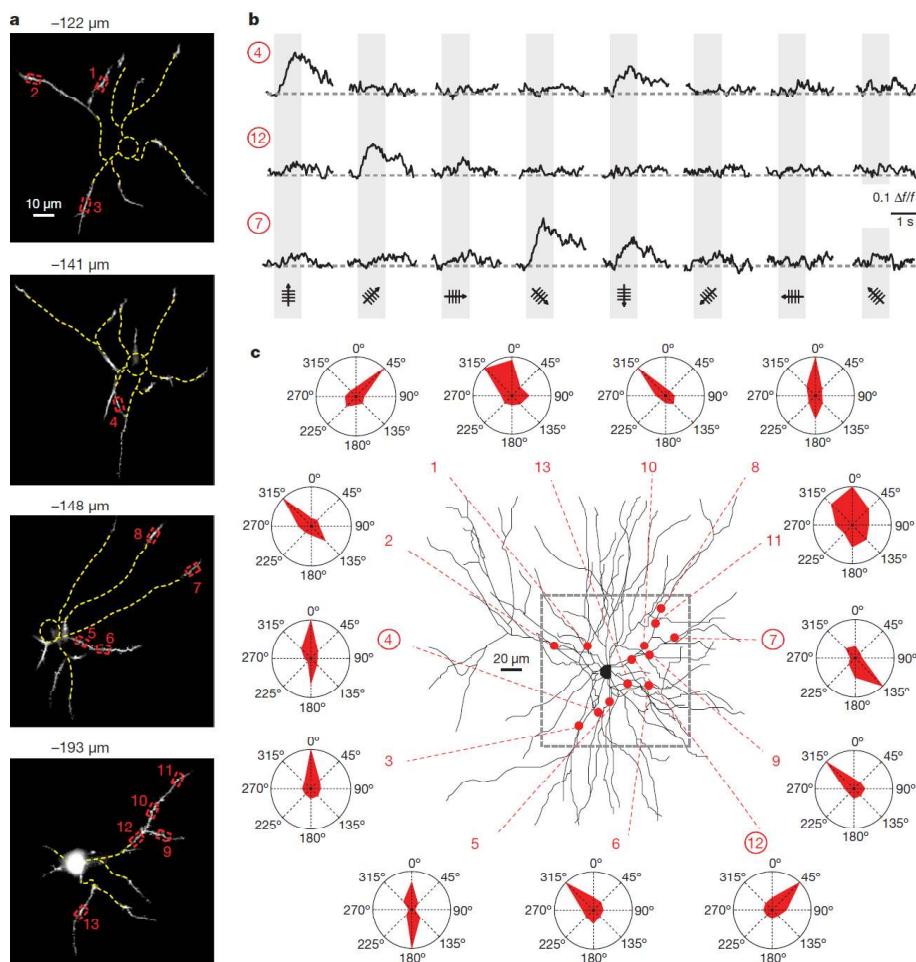
生体システム工学  
第3回(再配布禁止)



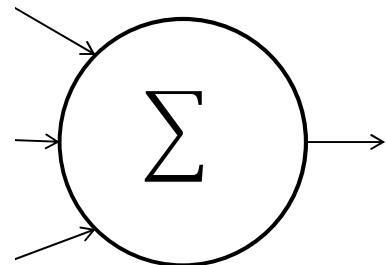
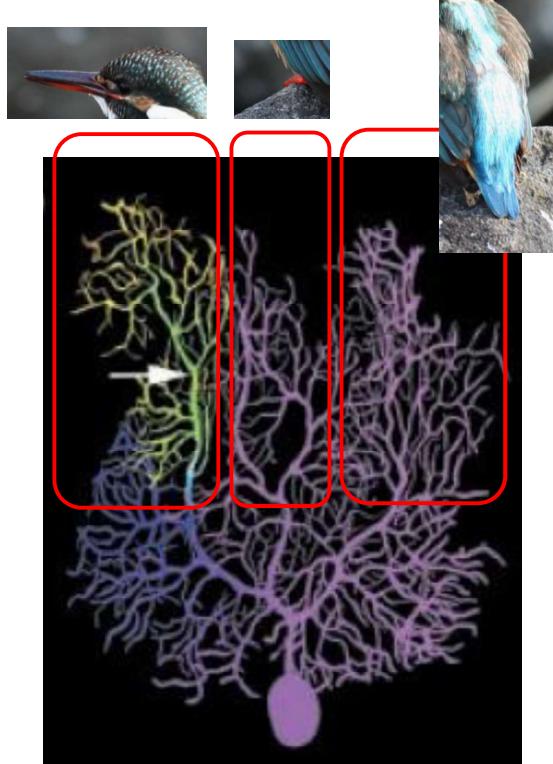
Jia, et al., 2010 20

# 方向性の検出

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)



Jia, et al., 2010 21



22

## 神経信号の数理モデル まとめ

生体システム工学  
第3回(再配布禁止)

McCulloch-Pittsのモデル  
Hodgkin-Huxleyの神経方程式  
ケーブル方程式

よいモデルとは…

ミクロ **Hodgkin-Huxley**  
ケーブル方程式

oscillation回路  
スモールワールドNW

マクロ

23