24-25.5.22

תרגול #9 מודול ב'

(Wavelets)

(הכללה של Hilbert)

בסיס Haar:

הבניה של בסיס Haar הינה באופן הבא: עבור $\varphi(x)=\mathbb{1}_{\{x\in(0,1]\}}$, $x\in\mathbb{R}$ הגדרנו

$$\varphi_{0m}(x)=\varphi(x-m)$$

$$\varphi_{1m}(x)=\sqrt{2}\,\varphi(2x-m) \qquad m\in\mathbb{Z}$$

$$\varphi_{jm}(x)=2^{j/2}\,\varphi(2^j-m) \qquad ;j\in\mathbb{N}$$

$\cancel{V_j = \varphi_j}$

$V_0 =$ linear subspace spanned by $\{\varphi_{0m}\}$ — ~~אם~~ מורכב מפונקציות קבועות על הקטעים $(m,m+1]$

$V_1=\{f(2x): f\in V_0\}=\text{span}\{\varphi_{1k};\ k\in\mathbb{Z}\}$ — פונקציות ב-$L^2(\mathbb{R})$ קבועות על $\left(\frac{m}{2},\frac{m+1}{2}\right]$, $m\in\mathbb{Z}$

$\vdots$

$V_j=\{f(2^j x): f\in V_0\} \qquad j\in\mathbb{N}$ — פונקציות קבועות על $\left(\frac{m-1}{2^j},\frac{m}{2^j}\right]$, $m\in\mathbb{Z}$.

* מתקיים כי $V_0\subseteq V_1\subseteq V_2\subseteq\dots$.

טענה: $\lim_{j\to\infty}V_j=\bigcup_{j=0}^{\infty}V_j$ צפוף ב-$L^2(\mathbb{R})$.

דהיינו, ניתן לקרב כל פונקציה ב-$L^2(\mathbb{R})$ ע"י סדרת פונקציות מ-$\bigcup_{j=1}^{\infty}V_j$.

מערכת הפונקציות $\{\{\varphi_{0m}\},\{\varphi_{1m}\},\dots\}$ לא אורתוגונליות, אבל השתמשנו בה כדי לבנות בסיס אורתונורמלי שלם ב-$L^2(\mathbb{R})$:

$W_0=V_1\ominus V_0=\{f\in V_1: f\perp V_0\}$ המשלים האורתוגונלי של V_0 ב-V_1.

טענה: הפונקציות $\psi_{0k}(x)=\psi(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$ כאשר

$$\psi(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,\frac12]\\ -1 & x\in(\frac12,1]\end{cases}$$

יוצרות בסיס אורתונורמלי ב-W_0.

הערה: אם $V=U\oplus W$ אז $U=V\ominus W$

הערה 2: (orthogonal sum) $V=U\oplus W$; $U\perp W$ ועבור פונקציה ~~אלמנט~~ אורתוגונליות מתקבל הסכום ב-V.

באותו אופן, נגדיר $W_j = V_{j+1} \ominus V_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$

ואז הפונקציות $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \; ; k \in \mathbb{Z}$ יוצרות בסיס אורתונורמלי ב-W_j, ומתקיים

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{j-1}$$

כיוון ש-$\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ צפופה ב-$L^2(\mathbb{R})$, אז כך גם $V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j$. דהיינו, לכל $f \in L^2(\mathbb{R})$ ניתן לכתוב

$$f = \sum_k \alpha_{0k}\varphi_{0k} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_k \beta_{jk}\psi_{jk}$$

$$\alpha_{0k} = \langle f, \varphi_{0k}\rangle \quad ; \quad \beta_{jk} = \langle f, \psi_{jk}\rangle$$

מסקנה: מערכת הפונקציות $\{\{\varphi_{0k}\},\{\psi_{0k}\},\{\psi_{1k}\},\dots\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי שלם ב-$L^2(\mathbb{R})$:

Haar Basis

- בסיס Haar לא נוח להציג כי פונקציות הבסיס שלו לא רציפות, ולכן אפשר לבנות Wavelets כלליים יותר ע"י הכללה של בסיס Haar.
  - MRA
  - multiresolution expansion

- בניית של Wavelets: - המטרה - איפיון פונקציות שמקיימות את התנאים. - טרנספורם פוריה.

הגדרה: טרנספורם פוריה של $f \in L^1(\mathbb{R})$ מוגדר ע"י האופרטור פוריה:

$$\hat{f}(\lambda) = (\mathcal{F} f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

משפט: לכל $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{|\lambda| \to \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$ וגם.

אם, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}\, dx$$

inverse fourier transform

Scanned with CamScanner

1:

נניח כי $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ צפוף ב-$L^2(\mathbb{R})$, דהיינו כי ניתן לקרב כל $f\in L^2(\mathbb{R})$ באמצעות פונקציה מ-$\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$. הוכיחו את הצעדים הבאים.

(1) הסבירו מדוע ניתן להניח בה"כ כי $f(x)\geq 0$.

פתרון:

נפרק את הפונקציה f לחלק החיובי וחלק השלילי: $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ כאשר

$$0\le f^+(x)=f(x)\vee 0 \quad ; \quad f^-(x)=-f(x)\wedge 0\geq 0$$

ונשים לב כי אם $\|f\|_2^2<\infty$ אז גם $\|f^+\|_2, \|f^-\|_2<\infty$. כיוון ש:

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad |f^-(x)|\le|f(x)| \quad ; \quad |f^+(x)|\le|f(x)|$$ (או שווה אפס או שווה f)

נרצה להראות שניתן לקרב כל אחד בנפרד ועדיין לקרב מספיק טוב את f.

אם כן, נניח כי $\tilde f^+,\tilde f^-\in V_j$ הם קירובים ל-f^+,f^- עבור j גדול מספיק עבורו

$$\|\tilde f^+-f^+\|_2\le\varepsilon \quad ; \quad \|\tilde f^--f^-\|_2\le\varepsilon$$

כיוון ש-V_j הוא תת מרחב לינארי, אז גם $\tilde f:=\tilde f^+-\tilde f^-\in V_j$ ולכן

$$\|f-\tilde f\|_2=\|f^+-f^--\tilde f^++\tilde f^-\|_2\le\|f^+-\tilde f^+\|_2+\|f^--\tilde f^-\|_2\le 2\varepsilon$$

לכן, $\tilde f$ מקרבת את f ולכן ניתן להסתכל בה"כ על פונקציות אי-שליליות. ■

בונים סדרה של פונק חסומות שמתכנסת לפונק אי שלילית
הסדרה היא על בסיס חסם זה

(2) הוכיחו כי ניתן לקרב פונ' אי שלילית $f\in L^2(\mathbb{R})$ ע"י פונ' חסומה: דהיינו, לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונ' $\tilde f$ כך ש-$\tilde f(x)\le M$ עבור M כלשהו ומתקיים $\|f-\tilde f\|_2\le\varepsilon$.
מכאן נסיק כי ניתן להוכיח את הטענה בה"כ עבור פונ' אי שלילית וחסומה.
רמז: $\tilde f_M(x)=f(x)1_{\{f(x)\le M\}}$ עבור M מתאים.

פתרון: $\tilde f_M(x)\le M$ ולכן:

$$\|f-\tilde f_M\|_2^2=\int_{\mathbb{R}}\left(f(x)-f(x)1_{\{f(x)\le M\}}\right)^2dx=\int_{\mathbb{R}}f^2(x)dx-2\int_{\mathbb{R}}f^2(x)1_{\{f(x)\le M\}}dx+\int_{\mathbb{R}}f^2(x)1_{\{f(x)\le M\}}dx$$

$$=\|f\|_2^2-\underbrace{\int_{\mathbb{R}}f^2(x)1_{\{f(x)\le M\}}dx}_{\text{לכל } x \text{, האינדיקטור עולה ל-1 ועולה כש-}M\text{ עולה}\ \xrightarrow{M\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f^2(x)dx}\xrightarrow{M\to\infty}0$$

(כיוון ש-M שרירותי ניתן לבחור גדול)

(3) הראו כי ניתן לקרב פונקציה $f\in L^2(\mathbb{R})$, $0\le f(x)\le 1$ ע"י פונ' פשוטות, שמוגדרת ע"י סכום של
דהיינו, כי לכל $\varepsilon>0$ קיימות m זרות קבוצות $A_1,\dots,A_m$ וקבועים $c_1,\dots,c_m$ כך ש-

$$\|f-\tilde{f}_m\|_2\le\varepsilon \quad \text{כאשר}$$

$$\tilde{f}_m(x)=\sum_{j=1}^{m}c_j\mathbb{1}_{\{x\in A_j\}}\quad ;x\in\mathbb{R}$$

רמז: קחו עבור $m=2^n$, $n\in\mathbb{N}$, $c_j=\frac{j-1}{2^n}$; $A_j=\{x: f(x)\in[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n})\}$

פתרון:

לפי הרמז, מקבלים הקירוב

$$\tilde{f}_n(x)=\sum_{j=1}^{2^n}\frac{j-1}{2^n}\mathbb{1}_{\{f(x)\in[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n})\}}$$

ונרצה להראות כי $\|f-\tilde{f}_n(x)\|_2^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

$$\lim_{n\to\infty}\|f-\tilde{f}_n(x)\|_2^2=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(f(x)-\tilde{f}_n(x)\right)^2dx$$

המהלך כאן יהיה להוכיח כי (1) האינטגרנד מתכנס ל-0 וכי (2) ניתן להחליף בין גבול לאינטגרל.

(1)

$$f(x)-\tilde{f}_n(x)=f(x)-\frac{j-1}{2^n}\le\frac{j}{2^n}-\frac{j-1}{2^n}=2^{-n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

עבור j מסוים אשר האינדיקטור ידלק. $f(x)\in[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n})$

ומצד שני:

$$0=\frac{j-1}{2^n}-\frac{j-1}{2^n}\le f(x)-\frac{j-1}{2^n}$$

דהיינו $0\le f(x)-\tilde{f}_n(x)\le 2^{-n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ולכן $f(x)-\tilde{f}_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

(2) מ-(1) נובע כי $0\le\tilde{f}_n(x)\le f(x)$ ולכן

$$|f(x)-\tilde{f}_n(x)|\le|f(x)|+|\tilde{f}_n(x)|\le 2f(x)$$ דהיינו האינטגרנד חסום.

(1)+(2): לכן, לפי משפט ההתכנסות החסומה:

$$\lim_{n\to\infty}\|f-\tilde{f}_n(x)\|_2^2=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(f(x)-\tilde{f}_n(x)\right)^2dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-\tilde{f}_n(x)\right)^2dx=0$$

כנדרש.

שימו לב, ההוכחה ע"י הספר מדוע ניתן לקרב כל פונקציה מהצורה

$$\tilde{f}_m(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}\{x\in A_j\}$$

ע"י פונקציה מ-V_k שהגדרנו קודם עבור k גדול מספיק.

ישרים עם מונים שהוגדו חוקק $\mathbb{R}$ ב

רמז: ידוע כי $\tilde{V}$ קבוצה בורל חסומה A של $\mathbb{R}$ ניתנת לקירוב ע"י קבוצות דיאדיות מעודנות מספיק.

פתרון:

לפי הרמז, לכל קבוצה בורל חסומה A ולכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה דיאדית B כך ש-

$$Leb(A\Delta B)\le\varepsilon$$ מידת לבג.

הערה: B דיאדית אומר שניתן להגדירה כאיחוד סופי של קטעים עם קצוות דיאדיים ($\frac{m}{2^n}$, $m\in\mathbb{Z}$).

הערה 2: $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

* נרצה לקרב את $\tilde{f}_m(x)$ ע"י פונקציה $g\in V_k$, עבור k גדול מספיק.
* מההנחה בסעיף הקודם, A_j בורל וחסומה (אחרת לא אינטגרבילית כפונקציה על $\mathbb{R}$)
* תהי B_j קבוצה דיאדית כך ש- $Leb(A_j\Delta B_j)\le\varepsilon$ (קיימת כמו לפי הרמז.)

$$\Rightarrow \left|\tilde{f}_m(x)-g(x)\right|\le\sum_{i=1}^{k}|c_i|\cdot\mathbb{1}_{\{A_i\Delta B_i\}}(x)$$

$$\Rightarrow \|\tilde{f}_m(x)-g(x)\|_2^2\le k\sum_{i=1}^{k}c_i^2\,Leb(A_i\Delta B_i)\le\varepsilon\cdot C$$

שימוש בא"ש ינסן ואינטגרציה.

$$\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2=k^2\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2\le k\sum_{i=1}^{k}a_i^2$$

$$\left(f \text{ convex} \Rightarrow \mathbb{E}f(x)\ge f(\mathbb{E}x)\right)$$

שאלה 3:

הוכיחו את התכונות הבאות של טרנספורם פורייה:

(1) $f(x-a) \Leftrightarrow \hat f(\lambda) e^{-ia\lambda}$ (translation property)

פתרון:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-a) e^{-i\lambda x}\,dx \underset{\substack{t=x-a\\ dt=dx}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda(t+a)}\,dt = e^{-ia\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt = e^{-ia\lambda}\hat f(\lambda)$$

$\blacksquare$

(2) $f(ax) \Leftrightarrow |a|^{-1}\hat f(a^{-1}\lambda)\ ;\ a\neq 0$ (scaling property)

פתרון:

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-i\lambda x}\,dx \underset{\substack{t=ax \Leftrightarrow x=a^{-1}t\\ dt=a\,dx \Leftrightarrow dx=\frac{1}{a}dt}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|} f(t) e^{-i\lambda a^{-1}t}\,dt = \frac{1}{|a|}\hat f(a^{-1}\lambda)$$

ערך מוחלט הוא
כי גבולות האינטגרציה
יתהפכו לפי הסימן של a.

$\blacksquare$

(3) $f_1 * f_2 \Leftrightarrow \hat f_1(\lambda)\hat f_2(\lambda)$ (Convolution property)

$(f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(u) f_2(x-u)\,du$ - זוהי הגדרת קונבולוציה.

פתרון:

$$\int_{\mathbb{R}} (f_1 * f_2)(x) e^{-i\lambda x}\,dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_1(u) f_2(x-u)\,du\, e^{-i\lambda x}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_1(u) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f_2(x-u) e^{-i\lambda x}\,dx\right)}_{\overset{(1)}{=}\ \hat f_2(\lambda) e^{-iu\lambda}} du$$

$$\cancel{\int_{\mathbb{R}}} = \hat f_2(\lambda)\int_{\mathbb{R}} f_1(u) e^{-iu\lambda}\,du = \hat f_2(\lambda)\hat f_1(\lambda) \quad \blacksquare$$

(4) אם $\hat f$ בעלת p מומנטים סופיים, אז f גזירה p פעמים וכן $\frac{d^p}{dx^p} f \Leftrightarrow (i\lambda)^p \hat f(\lambda)$

פתרון: נוכיח עבור $p=1$: המומנט הראשון סופי, כלומר ש- $\int_{\mathbb{R}} |\lambda \hat f(\lambda)|\,d\lambda < \infty$ ולכן האינטגרל של $i\lambda \hat f(\lambda)$ מתכנס!

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\lambda \hat f(\lambda) e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat f(\lambda)\frac{d}{dx}e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{d}{dx}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat f(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{d}{dx} f(x)$$

הת' נגזר בשלמה.

//

4:

מצאו את טרנספורם פורייה של הפונקציות הבאות.

תזכורת: $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$

(1) $f(x)=1_{\{|x|\le 1\}}$

פתרון:

$$\hat f(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} 1_{\{|x|\le 1\}} e^{-i\lambda x}\,dx=\int_{-1}^{1} e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{1}{-i\lambda}\cdot e^{-i\lambda x}\Big|_{x=-1}^{1}$$

$$=-\frac{1}{i\lambda}\left(e^{-i\lambda}-e^{i\lambda}\right)=-\frac{1}{i\lambda}\Big[\overbrace{\cos(-\lambda)}^{\cos(\lambda)}+\underbrace{i\sin(-\lambda)}_{-\sin(\lambda)}-\left(\cos(\lambda)+i\sin(\lambda)\right)\Big]$$

$$=-\frac{1}{i\lambda}\left[-2i\sin(\lambda)\right]=\frac{2}{\lambda}\sin(\lambda)$$

(2) $f(x)=(1-|x|)1_{\{|x|\le 1\}}$

פתרון:

$$\hat f(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}(1-|x|)1_{\{|x|\le 1\}}\cdot e^{-i\lambda x}\,dx$$

$$=\underbrace{\int_{-1}^{1} e^{-i\lambda x}\,dx}_{\frac{2}{\lambda}\sin(\lambda)}-\Big[\underbrace{\int_{-1}^{0}-x e^{-i\lambda x}\,dx}_{\substack{t=-x\\ dt=-dx\\ \int_0^1 x e^{+i\lambda x}dx}}+\int_{0}^{1} x e^{-i\lambda x}\,dx\Big]$$

$$* \quad \int_0^1 x\left(e^{i\lambda x}+e^{-i\lambda x}\right)dx=2\int_0^1 x\cos(\lambda x)\,dx=2\Big[\frac{x}{\lambda}\sin(\lambda x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\,dx\Big]$$

$$e^{i\lambda x}+e^{-i\lambda x}=\cos(\lambda x)+i\sin(\lambda x)+\underbrace{\cos(-\lambda x)}_{\cos(\lambda x)}+\underbrace{i\sin(-\lambda x)}_{-i\sin(\lambda x)}=2\cos(\lambda x)$$

$$\left\langle\begin{matrix} f=x & f'=1\\ g=\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x) & g'=\cos(\lambda x)\end{matrix}\right\rangle$$

$$=2\Big[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda)+\frac{1}{\lambda^2}\cos(\lambda x)\Big|_{x=0}^{1}\Big]=\frac{2}{\lambda}\Big[\sin(\lambda)+\frac{\cos(\lambda)-1}{\lambda}\Big]$$

$$\Longrightarrow \hat f(\lambda)=\frac{2}{\lambda}\sin(\lambda)-\Big[\frac{2}{\lambda}\sin(\lambda)+\frac{2}{\lambda^2}\left[\cos(\lambda)-1\right]\Big]=\frac{2}{\lambda^2}\left(1-\cos(\lambda)\right)$$

$$f(x) = e^{-|x|}$$ (3)

פתרון:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \cdot e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot e^{-i\lambda x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\lambda x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\cancel{\infty}\,0} e^{(1-i\lambda)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\lambda)x}\, dx$$

$$= \left.\frac{e^{(1-i\lambda)x}}{1-i\lambda}\right|_{x=-\infty}^{\cancel{\infty}\,0} + \cancel{\int_0^\infty} \left.\frac{e^{-(1+i\lambda)x}}{-(1+i\lambda)}\right|_{x=0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-i\lambda} + \frac{1}{1+i\lambda} = \frac{2}{(1-i\lambda)(1+i\lambda)} = \frac{2}{1+\lambda^2}$$

$$(i\lambda)^2 = -|\lambda|^2$$ ▥