יסודות תורת ההסתברות

אוהד נ. פלדהיים
אורי גוראל גורביץ'

מכון איינשטיין למתמטיקה

האוניברסיטה העברית בירושלים

14 בדצמבר 2018

חלק II

מרחבי הסתברות כלליים

פרק 7

מבוא למרחבי הסתברות כלליים

את תורת ההסתברות, מעצם היותה ענף של המתמטיקה, מוטב לבסס על אקסיומות, ממש כמו את הגיאומטריה ואת האלגברה. פירושו של דבר שמהרגע שהגדרנו את הגורמים ואת היחסים הבסיסיים ביניהם והצהרנו על האקסיומות המושלות ביחסים אלו, כל טענה חייבת להיות מבוססת אך ורק על אותן האקסיומות, באופן בלתי-תלוי במשמעות המקובלת המוחשית של אותם גורמים ושל אותם יחסים.

– אנדרי ניקולאביץ' קולמוגורוב, יסודות תורת ההסתברות, 1933

בבואנו להגדיר מרחבי הסתברות בפרק 1, פתחנו בהגדרת **פונקציית ההתפלגות הנקודתית**. בעקבותיה בנינו את **פונקציית ההסתברות**, וכך התאפשרה הגדרתם של מרחבי הסתברות. על מרחבי מדגם בדידים אפשרה גישה זו טיפול בכל סוגיה הסתברותית שעמדה בפנינו, ואולם עד מהרה נגלה שגישה זו מעוררת בעיות קשות שלא ניתן ליישבן כאשר פונים למרחבי הסתברות כלליים. נפתח בדוגמא.

נשווה בנפשנו בחירה אקראית של מספר ממשי בין 0 ל-1 המתבצעת על ידי הטלה חוזרת ונשנית של קוביה הוגנת בעלת עשר פיאות. בכל הטלה נקבעת ספרה נוספת של המספר אחרי הנקודה. מרחב המדגם כאן הוא מרחב סדרות הספרות האינסופית, ונשים לב שמשיקולי סימטריה, כל סדרת ספרות הנה בעלת סיכוי שווה להיבחר ולכן אם נצליח להגדיר התפלגות זו הרי שהיא תהיה אחידה על מרחב הסדרות. יתר על כן - התהליך שתואר כאן הוא תהליך שבבירור ניתן לבצעו בפועל (בהנתן פרק זמן בלתי מוגבל) ולכן טבעי לצפות שהתפלגות אחידה על סדרות הספרות אכן תהיה קיימת.

ואולם, כפי שנוכחנו בבעיה 1.1, לא ניתן להגדיר פונקציית התפלגות נקודתית אחידה על מרחב אינסופי. הרי מטעמי סימטריה נרצה לייחס לכל סדרה הסתברות שווה, ומכיוון שמספר הסדרות אינסופי – לא יתכן שסכום הסתברויותיהן של כל הסדרות יהיה 1. מתוך מודעות לבעיה זו, הגדרנו בהגדרה 1.3 את פונקציית ההתפלגות המצטברת באופן שלא נסמך על פונקציית ההתפלגות הנקודתית. אם רק נוכל למצא פונקציית התפלגות שתקיים את הגדרה 1.3, הרי שחלק הארי של התורה שפיתחנו יהא תקף לגביה. כאן מתגלה קושי נוסף ומהותי, אשר דיון מעמיק בו שייך לתחומה של תורת המידה. מסתבר שקיומה של פונקציית הסתברות אחידה על מרחב המאורעות המתואר על ידי $2^\Omega = \{A \subset [10]^\mathbb{N}\}$ איננו עולה בקנה אחד עם האקסיומות המקובלות של המתמטיקה (ובמיוחד עם אקסיומת הבחירה). בכדי להתמודד עם בעיה זו ניאלץ לצמצם את הגדרתה של $\mathcal{F}$. תחת זאת נגדיר את אוסף המאורעות המדידים ונדרוש מאוסף זה להוות σ**-אלגברה**, מושג חדש שיובהר בפרק זה. לאחר שנציג הגדרה זו

נבחן מחדש את התורה שבנינו ונסביר אילו התאמות נדרשות בכדי שתחול גם על מ"מ במרחבים שאינם בדידים.

בפרק זה, תובאנה מספר טענות בלא הוכחה. זאת משום שהכללת תורת ההסתברות למרחבים שאינם בני-מניה ולמשתנים מקריים רציפים, דורשת שימוש נרחב בתוצאות מתורת המידה - תחום דעת שאין אנו מניחים שהקורא מצוי בו. לפיתוח מנומק ומלא של התורה מופנה הקורא לספרים מתקדמים יותר בנושא תורת ההסתברות.

הערה: הקורא עשוי לשאול את עצמו: "מה המשמעות של מאורע שאינו מדיד?" למשל - כאשר נגריל סדרה מקרית באופן אחיד כפי שתואר לעיל, האם באמת קיימות קבוצות של סדרות שלא ניתן לייחס הסתברות למאורע שהסדרה המקרית שהגרלנו היא אחת מהן? כאן המקום להבהיר שלעולם לא ניתקל במאורע מפורש לא מדיד. זאת משום שלפי מערכת אקסיומות לא-סטנדרטית, אך למיטב ידיעתנו – עקיבה, ניתן להרחיב את $\mathcal{F}$ לכל קבוצת המאורעות. מן הבחינה הזו מאורעות לא מדידים אינם "קיימים" בעולם האמיתי.

7.1 מרחבי הסתברות כללים

נפתח באפיון הדרישות מקבוצת מאורעות מדידים שתתפקד עבורנו בתפקידה של $\mathcal{F}$.

הגדרה 7.1 (σ-אלגברה)**.** יהי Ω מרחב מדגם כלשהו. קבוצה $\mathcal{F}$ של תת-קבוצות של Ω נקראת **σ-אלגברה** (קרי: סיגמא-אלגברה), אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

(א) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(ב) **(סגירות לאיחוד בן מניה)** $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ גורר כי $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \in \mathcal{F}$.

(ג) **(סגירות למשלים)** $U \in \mathcal{F}$ גורר כי $\Omega \setminus U \in \mathcal{F}$.

כל מאורע $U \in \mathcal{F}$ יקרא מאורע מדיד לפי $\mathcal{F}$.

✎ **בעיה 7.1** (σ-אלגברה סגורה לחיתוכים בני-מניה)**.** תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה על מרחב מדגם Ω ותהיינה $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. יש להוכיח כי $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i \in \mathcal{F}$.

סגירותה של σ-אלגברה לחיתוכים ואיחודים מבטיחה לנו שאם נקח אוסף של מאורעות מדידים לפי $\mathcal{F}$ ונבצע עליהם מספר בן מניה של פעולות בסיסיות (איחוד, חיתוך, משלים, חיסור וכד') התוצאה שתתקבל עדיין תהיה מאורע מדיד לפי $\mathcal{F}$. נשים לב ש-2^{Ω}, כלומר אוסף כל התת-קבוצות של Ω, הוא תמיד σ-אלגברה.

נכליל כעת את הגדרתה של פונקציית ההסתברות הבדידה, על ידי כך שנשמיט את התנאי שסכום הסתברות כל המאורעות תהיה 1 ונחליף אותו בדרישה זהה במונחים של פונקציית הסתברות.

הגדרה 7.2 תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה על מרחב מדגם Ω. **פונקציית הסתברות** $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ על $(\Omega,\mathcal{F})$ היא פונקציה המקיימת את שתי התכונות הבאות.

(א) $\mathbb{P}(\Omega)=1$.

(ב) **סכימות בת-מניה (σ-additivity):** לכל אוסף בן-מניה של מאורעות זרים $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ב-$\mathcal{F}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}}A_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_i).$$

באמצעות מושג ה-σ-אלגברה נוכל להכליל את הגדרה 7.3 ולהגדיר מרחב הסתברות כללי.

הגדרה 7.3 (מרחב הסתברות). תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה על מרחב מדגם Ω ותהי $\mathcal{P}$ פונקציית התפלגות על $(\Omega,\mathcal{F})$. השלשה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מכונה - **מרחב הסתברות**.

ה-σ-אלגברה החשובה ביותר לצורכינו היא ה-σ-אלגברה על $\mathbb{R}$ שהוגדרה על ידי אמיל בורל (mile Borel) ב-1898. σ-אלגברה זו, המכונה **σ-אלגברת בורל** אשר נסמן ב-$\mathcal{F}=\mathbb{B}(\mathbb{R})$, מאופיינת בכך שהיא מכילה את כל הקטעים $[a,b]$ עבור $a\le b$ ממשיים.

טענה 7.4 (אלגברת בורל). לכל קטע $I\subset\mathbb{R}$ (פתוח או סגור, סופי או אינסופי), קיימת $\mathbb{B}(I)$ – σ-אלגברה מינימלית כך שלכל קטע $J\subset I$ מתקיים $J\in\mathbb{B}(I)$.

הוכחת טענה 7.4 מובאת בפרק 7.3 להלן.

7.2 מרחב הסתברות אחיד על $[0,1]$

כעת נבקש להגדיר מרחב הסתברות $([0,1],\mathbb{B}([0,1]),\mathbb{P})$ שיתאר התפלגות אחידה על המספרים הממשיים בין 0 ל-1. לשם כך נבקש פונקציית הסתברות על $\mathbb{B}([0,1])$ שתייצג את ההתפלגות האחידה על הקטע $[0,1]$. תוצאה מתורת המידה גורסת כי פונקציית התפלגות כזו אומנם קיימת והיא מכונה **מידת לבג** על שם המתמטיקאי הצרפתי אנרי לבג (Henri Lebesgue) שפיתח אותה בסביבות 1902.

טענה 7.5 (מידת לבג). קיימת פונקציית התפלגות על $\mathbb{B}([0,1])$ כך שלכל $0\le a\le b\le 1$ מתקיים

$$\mathbb{P}([a,b])=\mathbb{P}((a,b))=|b-a|.$$

נכנה את המרחב $([0,1],\mathbb{B},\mathbb{P})$ בשם מרחב הסתברות אחיד על $[0,1]$. נשים לב שזהו המרחב הראשון שנתעניין בו שאינו זה מרחב הסתברות בדידה, ואומנם הוא מקיים את התכונה המעניינת $\mathbb{P}(\{a\})=0$ לכל $a\in\Omega$. כלומר הסתברותו של כל יחידון היא 0. מרחב הסתברות המקיים תכונה זו נקרא מרחב **רציף** ואנו נקדיש את פרק הפניה לעיסוק במרחבים מסוג זה. נשים לב גם שהסתברותה שלכל קבוצת נקודות בת-מניה $a_i\in[0,1]$ מתקיים במרחב זה $\mathbb{P}(\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}})=0$ וזאת מתוך כך ש-$\mathbb{P}(\{a_i\}=0)$ לפי הגדרה ותוך שימוש בסכימות בת-מניה.

ישנו קשר הדוק בין חישוב הסתברויות במרחב בורל לבין אינטגרל כפי שנובע מהטענה הבאה (אף היא מובאת ללא הוכחה).

טענה 7.6 (חישוב הסתברויות במרחב בורל). תהי $A \in \mathbb{B}([0,1])$ קבוצה במרחב בורל, ויהי $([0,1], \mathbb{B}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אחיד על $[0,1]$. אזי

$$\mathbb{P}(A) = \int_0^1 \mathbb{1}(A).$$

בנוסף נגדיר את מושג ההתפלגות המצטברת הרציפה, אשר יאפשר לנו לתאר משפחה טבעית של מרחבי הסתברות שאינם אחידים על $\mathbb{R}$.

טענה 7.7 (התפלגות מצטברת רציפה). תהי $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ פונקציה מונוטונית עולה במובן החלש המקיימת $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ ו-$\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. קיימת פונקציית התפלגות $\mathbb{P}$ על $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x)$.

ניתן להוכיח את קיומה של פונקציה כזו על ידי הגדרת משתנה מקרי רציף X על מרחב ההסתברות האחיד על $[0,1]$ על ידי

$$X(a) = \inf_x (F(x) = a),$$

אלא שאנו נדחה את הדיון במשתנים מקריים רציפים לפרק **הפניה**, מפני שהעיסוק בו יהיה בלתי-מדוייק בשלב זה וידרוש מאיתנו להמשיך ולשאול תוצאות מתקדמות מתורת המידה.

לסיכום: הגדרנו מרחב הסתברות אחיד על הקטע $[0,1]$ והסברנו כי נוכל לשייך הסתברות לכל קבוצה שנבנית ממספר סופי של פעולות חוזרות של איחוד בן-מניה, חיתוך בן מניה ולקיחת משלים של קטעים. בנוסף ראינו משפחה של מרחבי הסתברות על $\mathbb{R}$ כמבוא למושג של התפלגות משתנה מקרי רציף.

7.3* סיגמא אלגברה של בורל

בפרק זה נתוודע באופן נרחב יותר למושג ה-σ-אלגברה ונוכיח את טענה 7.4.

טענה 7.8 (חיתוך σ-אלגברות). יהי Ω מרחב מדגם כלשהו. ותהי S קבוצה לא ריקה של σ-אלגבראות עליו. אז אם נסמן ב$\mathcal{F}$ את חיתוך כל ה-σ-אלגבראות ב-S, הרי ש-$\mathcal{F}$ היא σ-אלגברה על Ω.

הוכחה. נבדוק ששלוש התכונות של σ-אלגברה מתקיימות. לפי הגדרה 7.1א כל הקבוצות בS מכילות את הקבוצה הריקה ולכן היא נמצאת גם ב-$\mathcal{F}$. תהיינה $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ קבוצות שנמצאות בכל האיברים של S. לפי הגדרה 7.1ב מתקיים ש-$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \in \mathcal{F}$ נמצאת גם בכל איברי S ולכן ב-$\mathcal{F}$. תהי U שנמצאת בכל האיברים של S, לפי הגדרה 7.1ג מתקיים ש- $\Omega \setminus U$ נמצאת גם בכל איברי S ולכן ב-$\mathcal{F}$. ■

בנוסף ניתן לצמצם σ-אלגברה לתת-קבוצה של המרחב.

טענה 7.9 (σ-אלגברה מצומצמת). יהי Ω מרחב מדגם כלשהו, תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה על Ω ותהי $W \subset \Omega$. אז, הקבוצה $\mathcal{G} = \{F \cap W : F \in \mathcal{F}\}$ היא σ-אלגברה על W. זו מכונה **הצמצום של** $\mathcal{F}$ **ל-**W.

הוכחה. נבדוק ששלוש התכונות של σ-אלגברה מתקיימות. לפי הגדרה 7.1א הקבוצה הריקה מצויה ב$\mathcal{F}$ ולכן גם ב$\mathcal{G}$. תהיינה $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ קבוצות ב$\mathcal{G}$, אז קיימות $\{U'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ב-$\mathcal{F}$ כך ש-$U_i = U'_i \cap W$. . לפי הגדרה 7.1ב מתקיים ש-$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U'_i \in \mathcal{F}$ ולכן $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \in \mathcal{G}$ $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U'_i \cap W =$. לסיום, תהי $U \in \mathcal{G}$ אז קיימת $U' \in \mathcal{F}$ כך ש-$U' \cap W = U$ ולפי הגדרה 7.1ג מתקיים כי $\Omega \setminus U' \in \mathcal{F}$ ולכן $(\Omega \setminus U) \cap W = W \setminus U \in \mathcal{G}$. ■

באמצעות כלים אלו ניתן ליצור σ-אלגברה מינימלית המכילה אוסף קבוצות.

הגדרה 7.10 (σ-אלגברה שנוצרת על ידי אוסף קבוצות)**.** יהי Ω מרחב מדגם כלשהו. יהי $\mathcal{G}$ אוסף לא ריק של תת-קבוצות של Ω. ונסמן ב-S את אוסף כל ה-σ-אלגבראות על Ω שמכילות את $\mathcal{G}$. נגדיר את $\mathcal{F}$, **ה-σ-אלגברה שנוצרת על ידי** $\mathcal{G}$ בתור חיתוך כל ה-σ-אלגבראות ב-S.

נשים לב שהגדרה 7.11 מוגדרת היטב, שכן S תמיד מכילה את ה-σ-אלגברה שמורכבת מכל התת-קבוצות של Ω ולכן היא אינה ריקה. עוד ניתן דעתנו על כך ש-$\mathcal{F}$ היא מינימלית מן הבחינה שכל σ-אלגברה שמכילה את $\mathcal{G}$, מכילה גם את $\mathcal{F}$. כעת טענה 7.4 היא לא יותר ממקרה פרטי של הגדרה 7.11.

הערה: הבניה הנתונה בהגדרה 7.11 איננה מפורשת. קיימת גם בניה מפורשת ל-σ-אלגברה שנוצרת על ידי אוסף יוצרים בתור מערכת של איחודים בני מניה ולקיחת משלים של יוצרים אלה. אולם בניית מערכת זו מסובכת ומערבת אינדוקציה טרנס-פיניטית (השקולה לגרסא מסויימת של אקסיומת הבחירה). הקורא המתעניין מוזמן בסיום קריאת פרק זה להרחיב את ידיעותיו באמצעות ספרים נוספים בנושא "ההיירארכיה של בורל" אשר מהווה צוהר לבניה זו.

הגדרה 7.11 (σ-אלגברה של בורל)**. ה-σ-אלגברה של בורל** הנה ה-σ-אלגברה שנוצרת על ידי : $\mathcal{G} = \{[a, b] \; a < b\}$.

הערה: אין זה פשוט כלל ועיקר למצא קבוצה שאינה מדידה בורל. בין 1902 ל-1904 הכליל אנרי לבג (Henri Lebesgue) את ה-σ-אלגברה של בורל ל-σ-אלגברה עשירה יותר – **σ-אלגברת לבג**. עצם קיומן של קבוצות שאינן מדידות לבג תלוי באקסיומת הבחירה ולכן לעולם לא ניתקל בקבוצת כאלה. ברמת הקורס אנו נתעלם לעיתים קרובות מהשאלה האם קבוצה היא מדידה, ונסמוך על כך שכל הפעולות שאנו משתמשים בהן משמרות מדידות.