הסתברות - תרגול חזרה

קומבינטוריקה

15 באוקטובר 2018

1 הקדמה (5 דקות)

אנחנו בקורס הסתברות. מאחר וזה השבוע הראשון ועוד לא למדתם הסתברות שאפשר לתרגל, אנחנו נדבר היום על כל מיני מושגים בסיסיים בקומבינטוריקה שישמשו אותנו במהלך הקורס.
לאורך הסמסטר יהיו לנו טיפים ותובנות פרטניים לגבי הדברים שנלמד, אבל יש תובנה כללית שיכולה לעזור להתמודד עם הקורס הזה: הבעיה המרכזית עם ללמוד הסתברות היא, שבסתר ליבם, אנשים חושבים שהם כבר יודעים מה זה הסתברות. אנחנו מדברים בשפה הזו כל הזמן: "אין סיכוי", "אנחנו 90% בטוחים". גם מדברים איתנו בשפה הזו מסביבנו: "לטיפול יש סיכוי של 1 ל-100 להיכשל" או שמספרים לנו על תשואות של קרנות שונות עד היום, כדי שנניח שאלו יהיו התשואות גם מחר. כבר בשבועיים הראשונים אתם תראו דוגמאות בהן האינטואיציה של רובכם תגיד לכם שהתוצאה אינה הגיונית כמו "פרדוקס יום ההולדת".
אינטואיציה היא כלי חשוב, אבל מתמטיקה זה תחום מדויק, שבו מסקנות נובעות לוגית מהנחות ומאקסיומות. אם תוצאה "לא הגיונית" נובעת לוגית, הרי שהבעיה היא באינטואיציה שלנו, ולא במתמטיקה. אנחנו ממליצים לכולכם, כשאתם נתקלים בתוצאה שלא מסתדרת לכם, לא לחפש איך לאנוס אותה להתאים לכם, או לנסות להתווכח אם התוצאות. במקום זה, יש להבין איך להתאים את האינטואיציה שלנו למסגרת המתמטית, כדי שתשרת אותנו, במקום להכשיל אותנו.

מי שלמד קומבינטוריקה או מתמטיקה דיסקרטית, חלק זה יהיה חזרה. למי שלא, זו תהיה הצגה די חפוזה של כמה נוסחאות וטענות חשובות. מי שרוצה לדעת יותר או לתרגל יותר, הספר של נתי ליניאל ומיכל פרנס "מתמטיקה בדידה", ספציפית פרק 4, הוא מקור מצוין לדיון מסודר ולתרגילים, והוא אפילו בעברית.

עקרון שובך היונים

נקרא גם "עיקרון דיריכלה". בשפה חופשית הוא מנוסח כך: "אם יש יותר יונים משובכים, הרי שיהיה שובך ובו לפחות שתי יונים." האתגר המרכזי בשימוש בעיקרון פשוט זה הוא לזהות את השובכים והיונים.

הטריק הוא לזהות את שובכים ואת יונים

דוגמאות:

1. אם במסיבה יש יותר מ־ 367 אנשים, בטוח שיש שניים אם אותו תאריך יום הולדת (לועזי). האנשים הם היונים והשובכים הם התאריכים הזמינים (הבאנו בחשבון שנים מעוברות). לפי עיקרון שובך היונים, יש שובך (תאריך) ובו לפחות שתי יונים (אנשים).

2. תהי $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. לכל תת־קבוצה $B \subset A$ כך ש־$|B| = 6$ יש שני איברים $b_1, b_2 \in B$ כך ש־$b_1 + b_2 = 9$.

הוכחה: נציין את כל הזוגות שסכומם 9:

$$\{0,9\}, \{1,8\}, \{2,7\}, (3,6), \{4,5\}$$

יש חמישה זוגות כאלו. אלו השובכים שלנו. עכשיו בהינתן קבוצה $B \subset A$ בעלת 6 איברים (אלו היונים) הרי שיש שובך שבו יש שתי יונים. שתי יונים אלו הן שני מספרים שונים, ולכן סכומם 9. ∎

בעיות מנייה

הרבה שאלות בהסתברות הן בסופו של דבר מהסוג "כמה אפשרויות טובות יש מתוך כלל האפשרויות?" למשל "מה ההסתברות שסכום שתי קוביות הוגנות הוא 7?" שהתשובה תהיה פשוט למנות את כל תוצאות הגלגולים שסכומם 7 ולחלק במספר כל התוצאות האפשריות. למעשה, זהו סוג השאלות שאנשים חושבים עליו כשהם חושבים על הסתברות. כמובן שיש בהסתברות הרבה יותר עומק, אבל למנייה יש תפקיד חשוב אל תוך העומק הזה.

כשאני למדתי מתמטיקה דיסקרטית, המרצה אמר לנו משפט חשוב "בקורס הזה, אין חטא חמור יותר ממנייה כפולה." בלי להיכנס לתאולוגיה ופילוסופיה, כשתצטרכו לחשב כמה אפשרויות יש למשהו ־ כדאי לזכור את הדיבר הזה.

הערה 1.1 אנו מעוניינים למצוא את מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך קבוצה בת n איברים. יש לנו שני פרמטרים שמשנים לנו:

1. האם הבחירה עם או בלי חזרה ־ דהיינו, האם אחרי שבחרנו איבר אנחנו יכולים לבחור בו שוב ־ או לא.

2. האם הסדר (שבו בחרנו את האיברים) משנה או לא.

במילים אחרות אנו רוצים למלא את הטבלה הבאה:

	עם חזרה	ללא חזרה
סדר משנה		
סדר לא משנה		

$A_1 \times A_2 \times A_3 — \times A_n = \left\{ (a_1, a_2, — a_n) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_1 \in A_1 \\ | \\ a_n \in A_n \end{array} \right\}$

מכפלה קרטזית

עם חזרות, סדר משנה.

כמה מספרים בינריים עם n ספרות יש?

למה זה מתאים לבעיית המנייה שלנו? אנחנו בוחרים מתוך קבוצה בת שני איברים $\{0,1\}$. הסדר משנה: $01 \neq 10$, ובלי חזרות לא נוכל לכתוב הרבה מספרים בכלל. אז כמה מספרים יש?

טענה 1.2 (כלל המכפלה) יהיו $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות. אזי:

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

הוכחה: באינדוקציה על מספר הקבוצות. ■

במקרה שלנו $A_i = \{0,1\}$ לכל $1 \leq i \leq n$ ולכן יש 2^n מספרים שונים. שימו לב שהמכפלה הקרטזית אכן מתארת את פתרון הבעיה שלנו, כי איברי $\{0,1\}^n$ הם n־יות של 0 ו־1־ים שהסדר שלהם משנה.

דוגמה 1: מטילים קוביה 10 פעמים ומקבלים סדרה של 10 תוצאות. מהו מספר האפשרויות לקבלת סדרה כזו?
תשובה: נסמן ב־ A את אוסף התוצאות האפשריות בהטלת קובייה:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

סדרת תוצאות אפשרית היא מהצורה $(x_1, \ldots, x_{10})$, כאשר לכל $1 \leq i \leq 10$, $x_i \in A$. לכן אוסף התוצאות האפשריות בהטלת 10 קוביות הוא:

$$\underbrace{A \times \ldots \times A}_{10\, times}$$

ומספר האפשרויות הוא:

$$\underbrace{|A \times \ldots \times A|}_{10\, times} = |A|^{10} = 6^{10}$$

ללא חזרות, סדר משנה.

ראשית נניח כי בוחרים n איברים מתוך n. אם כך, בעיה זו שקולה לסידור כל איברי הקבוצה בשורה. לאיבר הראשון יש לנו n אפשרויות. לשני יש $n-1$ (כי אחד כבר שמנו ראשון) לשלישי יש $n-2$ וכך הלאה. באינדוקציה נראה שמספר האפשרויות הוא

$$n! = n \cdot (n-1)\,(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

זהו גם מספר **התמורות** (העתקות חחע"ל) מקבוצה בת n איברים ־ לעצמה.

הערה 1.3 בשלב זה כבר לפחות פעמיים אמרנו "באינדוקציה נראה ש־" ולא מילאנו את הפרטים. כשאתם פותרים תרגילים, אם אתם משתמשים באינדוקציה, עליכם לכתוב הכל בצורה מסודרת: בסיס, הנחה וצעד. דילוג על השלבים הללו יוביל לאבדן נקודות אפילו אם התשובה נכונה. יותר גרוע, באופן תדיר אנשים שמדלגים על השלבים חושבים שהם הוכיחו דברים שהם למעשה שגויים.

טענה 1.4 מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך קבוצה בת $n \geq k$ ללא חזרות כשהסדר משנה הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$

הוכחה: נוכיח את זה בשתי דרכים:

1. כמו קודם, לאיבר הראשון יש n אפשרויות, לשני $n-1$ וכך הלאה. באופן כללי לאיבר ה־m יש $n-m+1$ אפשרויות, כלומר המספר שאנו מחפשים הוא $n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. חשבון יראה שהביטוי בטענה (אחרי צמצומים) שווה לביטוי הזה.
2. נסדר את כל האיברים בשורה. כבר אמרנו שיש $n!$ אפשרויות לסידור הזה. אבל אנחנו מעוניינים רק ב־k האיברים הראשונים. לכל k־יה סדורה יש $(n-k)!$ אפשרויות לסידור כל האיברים שאחריהם. כלומר מבחינתנו קיבלנו את אותו סידור $(n-k)!$ פעמים! דבר זה נכון לכל k־יה. סידורים שמתחילים ב־k־יות שונות הם בהכרח שונים ולכן אם נתעלם מהסידור של סוף השורה לא נקבל מנייה כפולה של אותו איבר. לפיכך יש לנו $n!$ סידורים שאפשר לחלק לקבוצות זרות בנות $(n-k)!$ איברים, שכל אחת מייצגת k־יה אפשרית אחת. לכן מספר הקבוצות הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$.

$n(n-1)$ — $(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ לכן אפשר כי

ללא חזרות, סדר לא משנה.

זה בעצם המשך ישיר לסעיף הקודם. בחרנו k איברים מתוך n וסידרנו בשורה, אבל עכשיו גם מהסדר שלהם לא אכפת לנו. לכל k־יה יש $k!$ סידורים לפי מה שאמרנו על תמורות. לכן את אוסף ה־k־יות הסדורות אפשר לחלק לקבוצות זרות בעלות $k!$ איברים כל אחת. לכן יש

$$\frac{n!}{(n-k)!}/k!$$

דרכים לבחור k איברים מתוך n כשהסדר לא משנה.

בעצם השאלה ששאלנו היא "כמה תתי־קבוצות בגודל k יש לקבוצה בגודל n" כי בחרנו k איברים ולא אכפת לנו הסדר ־ זה בדיוק תת־קבוצה של k איברים, להבדיל מ־k־יה שהיא סדורה.

מספר זה הוא כ"כ חשוב שיש לו סימון מיוחד ושם מיוחד ־ **המקדם הבינומי**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

הערה 1.5 שימו לב שברגע שזיהינו את הביטוי מלא העצרות הזה כספירה של משהו, הוכחנו שהוא מספר שלם! הוכחה אלגברית ישירה של עובדה זו היא קשה.

נעיר כי כמוסכמה $0! = 1$ (יש לזה צידוק אלגברי) ולכן $\binom{n}{0} = 1$. זה הגיוני - כמה דרכים יש לבחור 0 איברים מתוך n? דרך אחת - שהיא לא לבחור בכלל.

טענה 1.6

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

הסבר עוד אחרי

הוכחה: נרצה לחשב את מספר תתי הקבוצות של קבוצה A בת n איברים. מצד אחד, זוהי סכימת מספר תתי הקבוצות בגודל k, כאשר הסכימה עוברת על כל k בטווח $0 \leq k \leq n$. זהו אגף ימין. מצד שני, כל תת קבוצה $B \subset A$ שקולה לפונקציה $\{0,1\} \longrightarrow f_B : A$ המוגדרת על ידי:

$$f_B(a) = \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & a \notin B \end{cases}$$

ולכן מספר תתי הקבוצות של A שווה לעוצמה $|\{0,1\}^A| = 2^n$. ■

דוגמה 2: נתונים 10 נשים ו־12 גברים. מהו מספר האפשרויות, לבחירת 5 נשים ו־5 גברים, והתאמתם בזוגות: אשה עם גבר.

תשובה: לכל בחירה של 5 נשים ו־5 גברים, מספר האפשרויות להתאמתם בזוגות הוא מספר הפונקציות החח"ע (ובמקרה זה גם על) מקבוצת הנשים לקבוצת הגברים, כלומר, 5!.

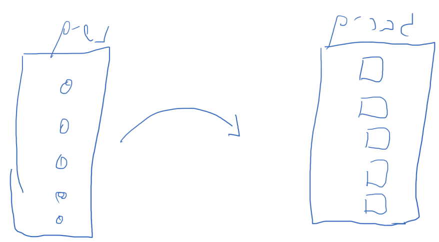
הערה על הקוג׳

מספר הבחירות של 5 נשים ו־5 גברים הוא:

$$|\{M \subset \text{Men} \mid |M| = 5\} \times \{W \subset \text{Women} \mid |W| = 5\}| =$$
$$|\{M \subset \text{Men} \mid |M| = 5\}| \times |\{W \subset \text{Women} \mid |W| = 5\}| = \binom{12}{5} \cdot \binom{10}{5}$$

סה"כ התוצאה המתקבלת היא:

$$\binom{12}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot 5!$$



האישה ה-I יכולה לבחור 5 גברים
האישה ה-II יכולה לבחור 4 גברים

האישה ה-5 יכולה לבחור רק גבר 1

לכן $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

אז נראה שמתקיים השוויון הנ"ל $2^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$

נב' בקב' בעלת n איברים דוג' $\{1, \ldots, n\} = G$ ונספור בה דרכים שונות

מה הם אוסף כל תתי הקב' של הקבוצה G כלומר מהו?

$\left| \{ \text{תתי קב' בגודל } 1, \text{ תתי קב' בגודל } 2, \text{ תתי קב' בגודל } 3, \ldots, \text{ תתי קב' בגודל } n \} \right|$

עוצמה של קב' זו

נשים לב כי (תתי קב' בגודל n), (תתי קב' בגודל $n+1$) זרים זה לזה כלומר

אין אף איבר משותף בהן! ← $\{ \{\text{קב' בגודל } 1\}, \{\text{קב' בגודל } 2\} \}$

כי תמיד (קב' בגודל 1) $\neq$ (קב' בגודל 2)

הי"מ וידוע כי אם $A_1, \ldots, A_n$ קב' זרות זוגות מתקיים כי:

אחוד קב' זרים

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

כלומר $5 = |\{1,2,3\} \cup \{4,5\}| = |\{1,2,3\}| + |\{4,5\}| = 5$

בנוסף לכך המקדם הבינומי סופר לי כמה תתי קב' מגודל k קיימות בקב' n

קרי $\binom{n}{k}$

לכן אסיק כי

$$\left| \text{עוצמת כל תתי הקב' של } G \right| = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

מצד שני נוכל לספור את אוסף כל תתי הקב' של G כך:

$1, 2, 3, \ldots, n$

$0, 1, 0, 0, 1, \ldots, 0$ ← מתאים לתת קב' כלשהי

$1, 0, 1, 1, \ldots, 1$ ← מתאים לתת קב' אחרת

וכן הלאה

נתאים לכל איבר

$1 =$ (נמצא בתת קב')

$0 =$ (לא נמצא בתת קב')

לכן כמות האפשרויות לספור כך היא $2^n = 2^{|G|}$

ומכאן מתקיים כי $2^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$

עם חזרות, סדר לא משנה.

דוגמה 3: עבור $k \leq n$, כמה פתרונות אי שליליים שלמים יש למשוואה:

$$x_1 + ... + x_k = n$$

או באופן שקול, בכמה אופנים ניתן לחלק n תפוזים ל־k סלסלות?

ראשית, למה השאלות שקולות? נסמן את מספר התפוזים בסל ה־i ב־x_i. זהו מספר שלם ואי־שלילי, ואחרי שנחלק את כל התפוזים סכום התפוזים בסלים צריך להיות n. עד כאן השקילות של השאלות.

שנית, למה זה מתאים למבנה של עם חזרות וללא סדר? חשבו על זה כך ־ אנו מבצעים n בחירות (כל תפוז הוא בחירה) ויש לנו k אפשרויות (כי יש k סלים) מותר לבחור בכל סל כמה שרוצים, ולא אכפת לנו איזה תפוז בדיוק נכנס לסל ־ כל התפוזים זהים בעינינו, כך שאחרי החלוקה איננו מבחינים בסדר שבו הם נכנסו לסלים.

טענה 1.7 מספר הפתרונות למשוואה הנ"ל הוא $\binom{n+k-1}{k-1}$.

הוכחה: נטען שמספר הפתרונות הוא כמו מספר הסידורים של n עיגולים ו־$k-1$ קווים בשורה.

מצד אחד, אם יש לנו פתרון $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ למשוואה, נכתוב לכל $1 \leq i \leq k$ x_i עיגולים בשורה ובין כל שתי קבוצות נשים קו (כאילו להפריד בין הסלים). למשל $(2,4,0,1)$ יתורגם ל־

$$00 \mid 0000 \mid\mid 0$$

מצד שני, בהינתן שורה כנ"ל נוכל לשחזר את הפתרון ע"י הגדרת x_i להיות מספר העיגולים בין הקו ה־$i-1$ לקו ה־i (אם $i=1$ אז כל העיגולים עד הקו הראשון ואם $i=k$ אז כל העיגולים מהקו האחרון ועד הסוף). מכאן שההתאמה הזו היא הפיכה ולכן חח"ע ועל.

לפיכך, עוצמת קבוצת הפתרונות שווה לעוצמת קבוצת הסידורים האלו.

מהי עוצמת קבוצת הסידורים. יש לנו שורה של $n+k-1$ סמלים. מספיק לומר איפה יבואו הקווים, כי בשאר המקומות יהיו עיגולים. יש לנו $k-1$ קווים שהסדר שלהם לא משנה, אז השאלה היא כמה תתי קבוצות בגודל $k-1$ יש לקבוצה $\{1, 2, \dots n+k-1\}$ והתשובה היא $\binom{n+k-1}{n}$ לפי מה שכבר אמרנו ממקודם. ■

סיכום

הטבלה הבאה מסכמת את הנוסחאות לבחירת k איברים מתוך n לפי הפרמטרים שציינו:

	עם חזרה	ללא חזרה
סדר משנה	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא משנה	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{n}{k}$

חומר שלא הועבר בתרגול:

נוסחת הכלה והדרה :

זהו כלי שימושי למדיי (שעוזר להימנע מספירה חוזרת של מקרים). אתם תראו בקרוב אנלוג הסתברותי שלו.

תהי X קבוצה כלשהי, $A_1, ..., A_n \subset X$, מתקיים:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{J\subset\{1,...,n\}:|J|=k\}} |\bigcap_{i\in J} A_i| \cdot (-1)^{k+1}$$

ההוכחה של טענה זו הוא באינדוקציה. .

דוגמה 6: כמה מספרים בין 1 ל־100 אינם מתחלקים ב־2,3 או 5?

תשובה: נסמן ב־A_1, A_2, A_3 את קבוצת המספרים בין 1 ל־100 המתחלקים ב־2, המתחלקים ב־3 והמתחלקים ב־5 בהתאמה. אנו רוצים לחשב את:

$$|\{1, ..., 100\} \backslash \bigcup_{i=1}^{3} A_i| = 100 - |\bigcup_{i=1}^{3} A_i|$$

לכל k שלמים $n_1, ..., n_k$, מספר המתחלקים ב־$n_1, ..., n_k$ בין 1 ל־100 הוא $\left[\frac{100}{n_1\cdot ...\cdot n_k}\right]$ ("$[\cdot]$" הוא החלק השלם של $\cdot$). תוצאה זו יחד עם נוסחת ההכלה וההדרה תיתן את התוצאה הנדרשת (26).