האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה
הסתברות ותהליכים מקריים
מורה הקורס: עופר קלע

נניח כי נתונה סדרת פונקציות F_n לא יורדות המקבלות ערכים בקטע $[0,1]$. נכתוב את ערכי הרציונלים $\mathbb{Q}$ כסדרה כלשהי, דהינו $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$. מכיוון ש־$\{F_n(r_1) | n \geq 1\}$ היא סדרה חסומה אז קיימת לה תת סדרה

$$\{n_k^1 | k \geq 1\}$$

כך ש־$F_{n_k^1}(r_1)$ היא סדרה מתכנסת. נסמן את הגבול שלה ב־$H(r_1)$, דהיינו

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k^1}(r_1) = H(r_1)$$

עכשיו, גם הסדרה $\left\{F_{n_k^1}(r_2) | k \geq 1\right\}$ היא סדרה חסומה ולכן קיימת תת־סדרה

$$\{n_k^2 | k \geq 1\} \subset \{n_k^1 | k \geq 1\}$$

ומספר שנסמנו ב־$H(r_2)$ כך ש־

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k^2}(r_2) = H(r_2)$$

נמשיך ככה. דהיינו, נקבל

$$\ldots \subset \left\{n_k^\ell | k \geq 1\right\} \subset \left\{n_k^{\ell-1} | k \geq 1\right\} \subset \ldots \left\{n_k^2 | k \geq 1\right\} \subset \left\{n_k^1 | k \geq 1\right\}$$

כך שלכל $\ell \geq 1$ מתקיים כי

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k^\ell}(r_\ell) = H(r_\ell)$$

נסמן $n_m = n_m^m$ ונניח כי $\ell \leq m$. אז מתקיים כי

$$n_m = n_m^m \in \{n_k^m | k \geq 1\} \subset \left\{n_k^\ell | k \geq 1\right\}$$

ולכן

$$\{n_m | m \geq \ell\} \subset \left\{n_k^\ell | k \geq 1\right\}$$

דהיינו $\{n_m | m \geq \ell\}$ היא תת סדרה של $\left\{n_k^\ell | k \geq 1\right\}$ ולכן

$$\lim_{m\to\infty} F_{n_m}(r_\ell) = H(r_\ell)$$

שימו לב כי זה מתקיים לכל $\ell \geq 1$ ומכיוון ש־$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ אז בעצם מצאנו תת סדרה $\{n_m | m \geq 1\}$ עבור מתקיים סימולטנית כי

$$\lim_{m\to\infty} F_{n_m}(q) = H(q)$$

לכל $q \in \mathbb{Q}$. לשיטה הזאת למציאת תת סידרה עבורה מתקיימת התכנסות סימולטנית קוראים "ליכסון", כי אנו בעצם מסתכלים על אברי האלכסון n_m^m, כאשר n_m^m הוא האיבר ה־m בסדרה ה־m.
עכשיו, אם $q < q'$ הם מספרים רציונלים, אז לכל $n \geq 1$ מתקיים כי $F_{n_m}(q) \leq F_{n_m}(q')$. מכאן שגם הגבולות מקיימים אי שוויון זה ולכן

$$H(q) \leq H(q')$$

כמו כן, מכיוון ש־$F_{n_m}(q) \in [0,1]$ אז גם $H(q) \in [0,1]$.
עכשיו, באמצעות $H(q)$, המוגדרת רק עבור מספרים רציונלים, אנו רוצים למצוא פונקציה F לא יורדת, רציפה מימין, עם ערכים ב־$[0,1]$ כך ש־$F_{n_m}(x) \to F(x)$ לכל נקודת רציפות של F. את זה נבצע באופן הבא:

$$F(x) = \inf\{H(q) | q > x, q \in \mathbb{Q}\}$$

ברור מההגדרה כי לכל $q \in \mathbb{Q}$ עם $q > x$ מתקיים כי $F(x) \leq H(q)$. יתכן ועבור $q \in \mathbb{Q}$ מסויים נקבל $F(q) > H(q)$ ולא בהכרח שוויון (מדוע לא יתכן אי השוויון ההפוך?). ברור כי $F(x)$ מקבל ערכים ב־$[0,1]$ כאינפימום על ערכים שכולם ב־$[0,1]$. כמו כן, אם $x < y$ אז

$$\{H(q) | q > x, q \in \mathbb{Q}\} \supset \{H(q) | q > y, q \in \mathbb{Q}\}$$

ומכאן שהאינפימום של הקבוצה השמאלית קטן או שווה מזה של הקבוצה הימנית. דהיינו,

$$F(x) \leq F(y)$$

ומכאן נובעת המונוטוניות של F. לבסוף, ממונוטוניות זו מתקיים כי

$$\begin{aligned}
\lim_{y \downarrow x} F(y) &= \inf_{y > x} F(y) = \inf_{y > x} \inf_{\substack{q > y \\ q \in \mathbb{Q}}} H(q) = \inf\{H(q) | x < y < q, q \in \mathbb{Q}\} \\
&= \inf_{\substack{q > x \\ q \in \mathbb{Q}}} \inf_{y \in (x,q)} H(q) = \inf_{\substack{q > x \\ q \in \mathbb{Q}}} H(q) = F(x)
\end{aligned}$$

ולכן F רציפה מימין. עכשיו, אם $q, q' \in \mathbb{Q}$ ומתקיים כי $q' < x < q$ אז

$$F_{n_m}(q') \leq F_{n_m}(x) \leq F_{n_m}(q)$$

ולכן

$$H(q') = \lim_{m \to \infty} F_{n_m}(q') \leq \liminf_{m \to \infty} F_{n_m}(x) \leq \limsup_{m \to \infty} F_{n_m}(x) \leq \lim_{m \to \infty} F_{n_m}(q) = H(q)$$

מכך נובע כי

$$\limsup_{m \to \infty} F_{n_m}(x) \leq \inf\{H(q) | q > x, q \in \mathbb{Q}\} = F(x)$$

וכמו לכל $x < y$ קיים $q' \in \mathbb{Q}$ כך ש$x < q' < y$ ואז

$$F(y) \leq H(q') \leq \liminf_{m \to \infty} F_{n_m}(x)$$

ולכן גם

$$F(x-)=\lim_{y\uparrow x}F(y)=\sup_{y<x}F(y)\le\lim_{m\to\infty}F_{n_m}(x)$$

אם כן, קבלנו כי

$$F(x-)\le\liminf_{m\to\infty}F_{n_m}(x)\le\limsup_{m\to\infty}F_{n_m}(x)\le F(x)$$

ולכן, אם x היא נקודת רציפות של F אז קיים הגבול

$$\lim_{m\to\infty}F_{n_m}(x)=F(x)$$

אם כן, מה שסיימנו עכשיו להוכיח הוא את הטענה הבאה.

טענה:
אם $\{F_n|n\ge 1\}$ הן סדרה של פונקציות לא יורדות המקבלות ערכים בקטע $[0,1]$, אז קיימת פונקציה לא יורדת ורציפה מימין F המקבלת ערכים בקטע $[0,1]$ ותת סדרה $\{n_m|m\ge 1\}$ כך שלכל נקודת רציפות x של F מתקיים כי

$$\exists F_{n_m}(x)=F(x)$$

הערה: נשים לב כי לא הנחנו כי F_n רציפות מימין או כי הן שואפות לאחד כאשר $x\to\infty$ או לאפס כאשר $x\to-\infty$. כמו כן, מכיוון ש־F מונוטונית, אנו יודעים כי אוסף נקודות האי רציפות שלה הוא לכל היותר בן מניה.

משפט Helley:
נניח כי $\{F_n|n\ge 1\}$ היא סדרה של פונקציות התפלגות עבורה מתקיים לכל $\epsilon>0$ כי קיים $K>0$ עבורו

$$F_n(K)-F_n(-K)\ge 1-\epsilon$$

לכל $n\ge 1$. אז קיימת פונקצית התפלגות F המקיימת $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$ ו־$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ ותת סדרה $\{n_m|m\ge 1\}$ כך ש־

$$F_{n_m}\xrightarrow{d}F$$

הוכחה:
את קיום תת הסדרה המתאימה הראינו כבר וכמו כן F כפי שהגדרנו אותה קודם היא לא יורדת ורציפה מימין. נשאר רק להראות כי $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$ ו־$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$.
אם כן, עבור $\epsilon>0$ ניקח $K>0$ עבורו

$$F_n(K)-F_n(-K)\ge 1-\epsilon$$

אז, מכיוון ש־

$$\limsup_{m\to\infty}F_{n_m}(K)\le F(K)$$

ו־

$$\liminf_{m\to\infty}F_{n_m}(-K)\ge F((-K)-)$$

נובע כי בהכרח

$$F(K) - F((-K)-) \geq 1 - \epsilon$$

ואז, מכיוון שלכל $K' < -K$ מתקיים כי $F(K') \leq \sup_{K'<K} F(K') = F((-K)-)$ נקבל כי

$$F(K) - F(K') \geq 1 - \epsilon$$

מכיוון שזה נכון לכל $K' < -K$ אז גם

$$F(K) - \lim_{K' \to -\infty} F(K') \geq 1 - \epsilon$$

עכשיו נשאיף גם את $K \to \infty$ ונקבל כי

$$\lim_{K \to \infty} F(K) - \lim_{K' \to -\infty} F(K') \geq 1 - \epsilon$$

או בכתיבה פחות מגושמת

$$\lim_{x \to \infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x) \geq 1 - \epsilon$$

מכיוון שזה מתקיים לכל $\epsilon > 0$ אז אם נשאיף $\epsilon \downarrow 0$ נקבל כי

$$\lim_{x \to \infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$$

לבסוף, אם $a, b \in [0,1]$ ומתקיים כי $b - a = 1$ אז $1 \leq 1 + a = b \leq 1$ ולכן $b = 1$ ו־ $a = b - 1 = 1 - 1 = 0$. מכאן ש־

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} F(x) &= 1 \\ \lim_{x \to -\infty} F(x) &= 0 \end{aligned}$$

וסיימנו את ההוכחה.