האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה
הסתברות ותהליכים מקריים
מורה הקורס : עופר קלע

אקסיומות:

בהנתן קבוצה לא ריקה Ω כלשהי ניקח $A \subset \Omega$ ו-$\omega \in \Omega$. נאמר כי A "קרה" אם $\omega \in A$ ונאמר כי A "לא קרה" אם $\omega \notin A$, דהיינו, $\omega \in A^c$. לא לכל A ניתן לזהות אם A קרה או לא. אנו נקרא ל-A מאורע אם ניתן בודאות לקבוע אם הוא קרה או לא. לדוגמא, ניקח קוביה הממוספרת במספרים $1, \ldots, 6$. נצבע את הצדדים הממוספרים $1, 2, 3$ באדום ואת אילו הממוספרים ב-$4, 5, 6$ בכחול. עכשיו ניתן רק לקבוע בודאות אם הקוביה נפלה על צד אדום או על צד כחול. דהיינו אם $\omega \in \{1, 2, 3\}$ או אם $\omega \in \{4, 5, 6\}$. לכן במקרה זה $\{4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3\}$ הם מאורעות. כמו כן גם $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ הוא מאורע וגם $\emptyset$ (הקבוצה הריקה) כי הראשון קורה בודאות והשני לא קורה בודאות. נסמן את אוסף המאורעות ב-$\mathcal{F}$. שימו לב כי $\mathcal{F}$ היא קבוצה של תתי קבוצות של Ω, דהיינו, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$, כאשר 2^{Ω} הוא סימון לכל תתי הקבוצות של Ω (כולל Ω עצמה והקבוצה הריקה $\emptyset$). אנו דורשים מ-$\mathcal{F}$ שלוש דרישות ואם היא מקיימת את שלושת הדרישות הללו אז היא נקראת σ-שדה או σ-אלגברה. ה-σ קשור לדרישה השלישית.

בקורס נפרמל את מושג ההסתברות ואת המבנה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ בעזרת תורת המידה !
נשים לב כי ניתן להכריע האם הקובייה נפלה על אדום או כחול
אבל לא ניתן לדעת מהו $\mathbb{P}(\{1\})$ למשל לא ניתן לדעת מה הם $\mathbb{P}$ של כל היחידונים כאן

1. $\mathcal{F}$ אינה ריקה.
2. אם $A \in \mathcal{F}$ אז גם $A^c \in \mathcal{F}$.
3. אם $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ אז גם $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

הדרישה הראשונה אומרת שקיים לפחות מאורע אחד. הדרישה השניה היא ניסוח מתמטי לכך שאם ניתן לקבוע בוודאות אם A כן קרה או לא קרה, אז ניתן גם לקבוע בודאות אם Aלא קרה או כן קרה. הדרישה השלישית היא גם הגיונית. היא אומרת שאם יש אוסף בן מניה של מאורעות ועבור כל מאורע ניתן לקבוע בודאות אם הוא קרה או לא קרה, אז ניתן גם לקבוע בודאות אם לפחות אחד מהמאורעות קרה. יכול להיות לנו ויכוח מסויים עם הדרישה השלישית והוא עם הדרישה שהאוסף הוא בן מניה. מדוע לא רק אוסף סופי? מדוע לא אוסף שהוא לא בן מניה? הסיבה היא שאם דורשים זאת רק עבור אוסף סופי, אז התאוריה שמתקבלת היא לא מספיק עשירה, ואם דורשים זאת גם עבור אוסף שאינו בן מניה, אז מקבלים סתירות. לכן דרישה זו היא בעצם דרישה מתמטית שמאפשרת את פיתוח תורת ההסתברות (או תורת המידה באופן יותר כללי) כפי שהיא פותחה.

שתי דוגמאות מובנות מאיליהן ל-σ-שדה כזה הן $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ ו-$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. בידקו כי אתם מבינים זאת. הראשון הוא ה-σ-שדה הקטן ביותר האפשרי שנקרא ה-σ-שדה הטריוויאלי והשני הוא הגדול ביותר.

התוצאות המתקבלות מדרישות אילה הן הבאות :

1. לכל אוסף סופי $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ מתקיים כי $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$. בפרט עבור $n = 2$.
הוכחה : ניקח $A_i = A_n$ לכל $i > n$ ואז נקבל כי $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ומדרישה 3 כי $\cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

2. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$. דהיינו, כל σ-שדה מכיל את הקבוצה הריקה ואת מרחב המדגם.
הוכחה : מכיוון ש-$\mathcal{F}$ אינה ריקה אז קיים A כך ש-$A \in \mathcal{F}$. לכן גם $A^c \in \mathcal{F}$. מתוצאה 1 נובע כי גם $\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{F}$ ומדרישה 2 נובע כי $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$.

3. אם $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ אז $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ואם $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ אז $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
הוכחה : אם $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ אז גם $A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathcal{F}$ ולכן מדרישה 3 נובע כי גם

$\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$. מדרישה 2 ומכללי דה-מורגן נובע כי

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \mathcal{F}$$

בעזרת תוצאה 1 מראים את המקרה הסופי באופן זהה.

4. אם $A, B \in \mathcal{F}$ אז גם $A \setminus B \in \mathcal{F}$ (הפרש) ולכן גם

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{F}$$

(הפרש סימטרי).

הוכחה: מכיוון ש-$B \in \mathcal{F}$ אז גם $B^c \in \mathcal{F}$ (דרישה 2) ואז גם $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$ (תוצאה 3 עבור המקרה הסופי). לגבי ההפרש הסימטרי התוצאה ברורה.

אם כן, קבלנו שאם ניקח אוסף סופי או בן מניה של מאורעות וניצור קבוצה חדשה על ידי שימוש בסדרה סופית או בת מניה של פעולות על מאורעות אלה (איחוד, חיתוך, משלים, הפרש והפרש סימטרי) אז קבוצה זו היא גם מאורע, דהיינו, היא קבוצה ב-$\mathcal{F}$. כל זה נובע משלושת הדרישות שמצויינות לעיל.

משפט:
נניח כי $\mathcal{F}_\alpha$ הם σ-שדות לכל $\alpha \in \Lambda$. Λ לא חייבת להיות בת מניה. אז גם $\mathcal{F} = \cap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{F}_\alpha$ הוא σ-שדה.

הוכחה:
צריך להראות כי שלושת הדרישות מתקיימות:

1. $\Omega \in \mathcal{F}_\alpha$ לכל $\alpha \in \Lambda$ ולכן גם $\Omega \in \mathcal{F}$. מכאן ש-$\mathcal{F}$ אינו ריק.
2. אם $A \in \mathcal{F}$ אז $A \in \mathcal{F}_\alpha$ לכל $\alpha \in \Lambda$. מכאן שגם $A^c \in \mathcal{F}_\alpha$ לכל $\alpha \in \Lambda$ ולכן גם $A^c \in \mathcal{F}$.
3. אם $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ אז לכל $\alpha \in \Lambda$ מתקיים כי $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_\alpha$ ולכן $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_\alpha$ לכל $\alpha \in \Lambda$. מכאן ש-$\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \cap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{F}_\alpha$.

משפט:
נניח כי $A_\alpha \subset \Omega$ לכל $\alpha \in \Lambda$ (לא בהכרח אוסף בן מניה). אז קיים σ-שדה שנסמנו ב-$\sigma(\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\})$ שהוא ה-σ-שדה הקטן ביותר $\mathcal{F}$ עבורו $A_\alpha \in \mathcal{F}$ לכל $\alpha \in \Lambda$.
הוכחה: ניקח את החיתוך של כל ה-σ-שדות $\mathcal{F}$ עבורם $A_\alpha \in \mathcal{F}$ לכל $\alpha \in \Lambda$. האוסף הזה אינו ריק מכיוון שהוא כולל את 2^Ω (אוסף כל תתי הקבוצות של Ω מכיל כל אוסף אחר של תתי קבוצות). מהמשפט הקודם החיתוך של כל ה-σ-שדות הוא גם כן σ-שדה וברור כי הוא הקטן ביותר האפשרי (אחרת, אם היה אחד יותר קטן ממנו, אז היינו מוסיפים גם אותו לחיתוך).
עבור $\mathbb{R}$ נסמן ב-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ את ה-σ-שדה הקטן ביותר המכיל את כל הקבוצות מהצורה $(-\infty, x]$.
קוראים ל-σ-שדה הזה ה-σ-שדה של בורל והקבוצות שנמצאות בו נקראות קבוצות בורל.

טענה:
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ הוא גם ה-σ-שדה הקטן ביותר המכיל (באופן שקול) את כל אחד מהאוספים הבאים:

1. קטעים מהצורה $(a, b]$ עבור $a < b$.

2. קטעים מהצורה (a,b) עבור $a<b$.
3. כל הקבוצות הפתוחות של $\mathbb{R}$.

הוכחה:

1. אם $(-\infty,x]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $x\in\mathbb{R}$ אז גם $(a,b]=(-\infty,b]\setminus(-\infty,a]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a<b$. כמו כן, אם $(a,b]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a<b$ אז גם

$$(-\infty,x]=\left(\cup_{i=-\infty}^{\lfloor x\rfloor}(i-1,i]\right)\cup(\lfloor x\rfloor,x]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

2. אם $(a,b]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a<b$ אז גם $(a,b-1/n]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a<b$ ולכל n שלם וחיובי. אם $a\geq b-1/n$ אז $(a,b-1/n]$ מוגדרת להיות הקבוצה הריקה והיא שייכת לכל σ-שדה, בפרט ל-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$. לכן

$$(a,b)=\cup_{n=1}^{\infty}(a,b-1/n]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

באופן דומה, אם $(a,b)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a<b$ אז גם $(a,b+1/n)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ לכל $a<b$ ולכל n שלם וחיובי. מכאן ש-

$$(a,b]=\cap_{n=1}^{\infty}(a,b+1/n)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

3. ניתן להראות כי כל קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}$ היא איחוד סופי או בן מניה של קטעים פתוחים, דהיינו, מהצורה (a,b) עבור $a<b$. לכן, אם כל אחד מהם נמצא ב-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ אז גם הקבוצה הפתוחה עצמה (דרישה 3). מצד שני, כל קטע פתוח היא קבוצה פתוחה ולכן אם כל קבוצה פתוחה נמצאת ב-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ אז גם כל קטע פתוח.

יהיה לנו נוח להגדיר $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. במקרה זה נסמן ב-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ את כל הקבוצות מאחת מהצורות B, $B\cup\{\infty\}$, $B\cup\{-\infty\}$, $B\cup\{-\infty,\infty\}$ כאשר $B\in\mathbb{R}$.

בהנתן מרחב מדגם Ω ו-σ-שדה $\mathcal{F}$ אנו נקרא לזוג $(\Omega,\mathcal{F})$ "מרחב מדיד". בהנתן מרחב מדיד כזה, אנו יכולים להגדיר עליו הסתברות ואנו יכולים להגדיר עליו משתנה מקרי. לא צריך את הגדרת ההסתברות כדי להגדיר משתנה מקרי ולא צריך את הגדרת המשתנה המקרי כדי להגדיר הסתברות. נתחיל מהגדרת המשתנה המקרי ורק לאחר מכן הגדרת ההסתברות. בהינתן פונקציה

$$X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$$

לכל $B\subset\overline{\mathbb{R}}$ נסמן

$$X^{-1}(B)=\{X\in B\}=\{\omega|X(\omega)\in B\}$$

בדרך כלל נשמיט את ω שמופיעה בצד ימין ונכתוב $\{X\in B\}$ או $X^{-1}(B)$.

טענה:
לכל אוסף תתי קבוצות $\{B_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ של $\overline{\mathbb{R}}$ ותתי קבוצות A,B, מתקיים כי

$$\begin{aligned}
X^{-1}\left(\cup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right) &= \cup_{\alpha\in\Lambda}X^{-1}(B_\alpha)\\
X^{-1}\left(\cap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right) &= \cap_{\alpha\in\Lambda}X^{-1}(B_\alpha)\\
X^{-1}(B^c) &= (X^{-1}(B))^c\\
X^{-1}(A\setminus B) &= X^{-1}(A)\setminus X^{-1}(B)\\
X^{-1}(A\Delta B) &= X^{-1}(A)\Delta X^{-1}(B)
\end{aligned}$$

0.0.2 משתנה מקרי $X:(\Omega,\mathcal{F})\to\overline{\mathbb{R}}$

הגדרה: משתנה מקרי הינו אובייקט שמגיע עם סיגמא שדה !!

כלומר הוא פונקציה $X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ שמקיימת כי לכל t מתקיים כי $X^{-1}([-\infty,t])=X^{-1}(X\le t)\in\mathcal{F}$.

כאשר הסימון X^{-1} מתכוון לכך שלכל $B\in\overline{\mathbb{R}}$ נסמן $X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega|X(\omega)\in B\}$.

הוכחה: תרגיל.

משתנה מקרי היא פונקציה $X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ המקיימת לכל t

$$X^{-1}([-\infty,t])=\{\omega|X(\omega)\le t\}\in\mathcal{F}$$

הסיבה שמגדירים זאת כך היא שכאשר נגדיר פונקצית הסתברות אנו נרצה ש-$\{X\le t\}$ יהיה מאורע ואז נוכל לחשב את פונקצית ההתפלגות שלו.

מכיוון ש-$[-\infty,t)=\cup_{n=1}^{\infty}[-\infty,t-1/n]$ ו-$[-\infty,t]=\cap_{n=1}^{\infty}[-\infty,t+1/n)$ נובע כי תנאי שקול הוא שלכל t

$$X^{-1}([-\infty,t))=\{\omega|X(\omega)<t\}\in\mathcal{F}$$

ואם נסתכל על משלימים נקבל כי שני תנאים שקולים נוספים הם שלכל t

$$X^{-1}((t,\infty])=\{\omega|X(\omega)>t\}\in\mathcal{F}$$

או שלכל t

$$X^{-1}([t,\infty])=\{\omega|X(\omega)\ge t\}\in\mathcal{F}$$

כמו כן

$$\{\omega|X(\omega)=t\}=X^{-1}([-\infty,t])\cap X^{-1}([t,\infty])$$

ולכן $\{X=t\}$ הוא מאורע לכל t (אך זה אינו תנאי שקול).

טענה:
בהנתן פונקציה $X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ (לא בהכרח משתנה מקרי) ו-σ-שדה $\mathcal{F}$, אז

$$\mathcal{G}=\left\{B|B\subset\overline{\mathbb{R}},\ X^{-1}(B)\in\mathcal{F}\right\}$$

הוא σ-שדה.

הוכחה:

1. $X^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)=\Omega\in\mathcal{F}$ ולכן $\mathcal{G}$ אינו ריק.
2. אם $B\in\mathcal{G}$ אז $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$ ולכן גם $(X^{-1}(B))^c\in\mathcal{F}$. מכיוון ש-
$$(X^{-1}(B))^c=X^{-1}(B^c)$$
נובע כי $B^c\in\mathcal{G}$. דהיינו, אם $B\in\mathcal{G}$ אז גם $B^c\in\mathcal{G}$.
3. אם $B_1,B_2,\ldots\in\mathcal{G}$ אז $X^{-1}(B_1),X^{-1}(B_2),\ldots\in\mathcal{F}$ ולכן גם $\cup_{i=1}^{\infty}X^{-1}(B_i)\in\mathcal{F}$. מכיוון ש-
$$\cup_{i=1}^{\infty}X^{-1}(B_i)=X^{-1}\left(\cup_{i=1}^{\infty}B_i\right)$$
נובע כי $\cup_{i=1}^{\infty}B_i\in\mathcal{G}$. דהיינו, אם $B_1,B_2,\ldots\in\mathcal{G}$ אז גם $\cup_{i=1}^{\infty}B_i\in\mathcal{G}$.

טענות חשובות לסיגמא אלגברה נוצרת:

תהיי $\varepsilon, \mathcal{F} \in 2^X$ אזי מתקיים כי

1. $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\varepsilon) \Longleftarrow \mathcal{F} \subset \sigma(\varepsilon)$
2. $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\varepsilon) \Longleftarrow \mathcal{F} \subset \varepsilon$

איפה הטענה הזו שימושית :

כשרצינו להוכיח את הטענה הזו אם X הוא משתנה מקרי אזי לכל $B \in B(\overline{\mathbb{R}})$ מתקיים כי $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ לכן $[-\infty, x] \in \mathcal{G}$
כעת $\mathcal{G} \overset{lemma}{\subset} \sigma([-\infty, x]) = B(\overline{\mathbb{R}})$ מכיון ש $\mathcal{G} = \{B|_{\text{ב}} X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ הוא σ שדה הקטן ביותר נקבל כי $\mathcal{G} = B(\overline{\mathbb{R}})$ וסיימנו !! .

מ-1,2,3 נובע כי $\mathcal{G}$ הוא σ-שדה לכל פונקציה $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

טענה:
אם X הוא משתנה מקרי אז לכל $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ מתקיים כי $X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in \mathcal{F}$. בפרט לכל $x \in \bar{\mathbb{R}}$ (כולל פלוס ומינוס אינסוף) $X^{-1}(\{x\})$ הוא מאורע.

הוכחה:
אם X הוא משתנה מקרי אז מההגדרה נובע כי $X^{-1}([-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ לכל $x \in \bar{\mathbb{R}}$ ומכאן ש-$[-\infty, x] \in \mathcal{G}$. מכיוון ש-$\mathcal{G}$ הוא σ-שדה, אז הוא מכיל את ה-σ-שדה הקטן ביותר שמכיל את הקבוצות הללו, דהיינו בהכרח $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{G}$. מכיוון שלכל $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ מתקיים גם כי $B \in \mathcal{G}$, נובע כי $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ כנדרש.
עכשיו, לכל x סופי מתקיים כי $\{x\} = [-\infty, x] \cap [x, \infty]$ ומכאן שזוהי קבוצת בורל. כמו כן $\{-\infty\} = \cap_{n=1}^{\infty}[-\infty, n]$ ולכן גם זו קבוצת בורל. עבור $\{\infty\}$ זה נובע באופן זהה.

טענה:
לכל $X : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, האוסף $\sigma(X) = \left\{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})\right\}$ הוא σ-שדה והוא ה-σ-שדה הקטן ביותר ש-X הוא משתנה מקרי ביחס אליו.
הוכחה : תרגיל.

טענה חדשה :

אם $\Omega = \mathbb{R}$, אז משתנה מקרי כזה נקרא "פונקצית בורל". דהיינו, אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ומתקיים לכל $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ כי $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, אז f נקראת פונקצית בורל. אם במקום $\mathbb{R}$ ניקח $\bar{\mathbb{R}}$ ו-$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ גם אז נקרא לפונקציה כזו פונקצית בורל. מה שנוח בפונקציות כאילה הוא שאם X הוא משתנה מקרי על $(\Omega, \mathcal{F})$ ו-f היא פונקצית בורל אז גם $f(X)$ הוא משתנה מקרי. הסיבה היא כי

$$\{\omega | f(X(\omega)) \in B\} = \left\{\omega | X(\omega) \in f^{-1}(B)\right\} = X^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)$$

מכיוון ש-$f^{-1}(B)$ היא קבוצת בורל אז $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$.

להלן כמה תוצאות על משתנים מקריים :

1. אם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים, אז גם $\sup_{n \geq 1} X_n$ וגם $\inf_{n \geq 1} X_n$ הם משתנים מקריים.
הוכחה: לכל t

$$\left\{\sup_{n \geq 1} X_n \leq t\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \leq t\} \in \mathcal{F}$$

כמו כן,

$$\left\{\inf_{n \geq 1} X_n \geq t\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \geq t\} \in \mathcal{F}$$

2. אם $X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים אז $\limsup_{n \to \infty} X_n$ ו-$\liminf_{n \to \infty} X_n$ הם משתנים מקריים. אם הגבול קיים לכל ω אז $\lim_{n \to \infty} X_n$ הוא משתנה מקרי. אם קיים $A \in \mathcal{F}$ כך שהגבול קיים לכל $\omega \in A$ אז

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

הוא משתנה מקרי (במקום 0 כאשר $A \not\ni \omega$ אפשר לכתוב $Z(\omega)$ כאשר Z הוא משתנה מקרי).
הוכחה:

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} X_k$$

מסעיף 1 נובע כי $\sup_{k\geq n} X_k$ הוא משתנה מקרי ומכאן שגם $\inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} X_k$. באותו אופן נובע כי

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} X_k$$

הוא משתנה מקרי. מכיוון שהגבול קיים אם ורק אם

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n$$

אז ברור כי גם הוא משתנה מקרי. לבסוף, במקרה האחרון נתחיל עם $t \geq 0$. במקרה זה, אם $A \not\ni \omega$ אז $Y(\omega) = 0 \leq t$ ואם $A \ni \omega$ אז $Y(\omega) \leq t$ אם ורק אם $\limsup_{n\to\infty} X(\omega) \leq t$. לכן במקרה זה

$$\{Y \leq t\} = A^c \cup \left(\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \leq t\right\} \cap A\right) \in \mathcal{F}$$

כאשר $t < 0$ אז $Y(\omega) \leq t$ אם ורק אם $A \ni \omega$ וגם $\limsup_{n\to\infty} X(\omega) \leq t$. שימו לב כי אם למשל $A \not\ni \omega$ אז $Y(\omega) = 0 > t$. מכאן שבמקרה זה

$$\{Y \leq t\} = \left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \leq t\right\} \cap A \in \mathcal{F}$$

ולכן לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\{Y \leq t\} \in \mathcal{F}$ ולכן Y הוא משתנה מקרי.

3. אם X, Y הם משתנים מקריים סופיים אז גם $aX + bY$ הוא משתנה מקרי לכל $a, b \in \mathbb{R}$.
הוכחה: עבור $a = b = 1$

$$\begin{aligned}\{X + Y < t\} &= \{X < t - Y\} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{X < q\} \cap \{t - Y > q\} \\ &= \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{X < q\} \cap \{Y < t - q\}\end{aligned}$$

כאשר $\mathbb{Q}$ הוא אוסף המספרים הרציונלים (בן מניה). לכן צד ימין הוא מאורע ואז גם צד שמאל (לכל t). נשאר להראות כי aX הוא משתנה מקרי (ובאותו אופן, bY). אם כן עבור $a = 0$ נקבל כי $aX = 0$ וזה בודאי משתנה מקרי. עבור $a > 0$

$$\{aX \leq t\} = \{X \leq t/a\} \in \mathcal{F}$$

ועבור $a < 0$

$$\{aX \leq t\} = \{X \geq t/a\} \in \mathcal{F}$$

4. אם X,Y הם משתנים מקריים סופיים, אז גם XY הוא משתנה מקרי.

הוכחה: עבור $t>0$

$$\{XY<t\}=\{Y=0\}\cup(\{Y>0\}\cap\{X<t/Y\})\cup(\{Y<0\}\cap\{X>t/Y\}$$

ועבור $t\le 0$

$$\{XY<t\}=(\{Y>0\}\cap\{X<t/Y\})\cup(\{Y<0\}\cap\{X>t/Y\}$$

נראה כי $\{Y>0\}\cap\{X<t/Y\}$ הוא מאורע. אם כן,

$$\begin{aligned}\{Y>0\}\cap\{X<t/Y\} &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)}\{X<q\}\cap\{t/Y>q\}\cap\{Y>0\}\\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)}\{X<q\}\cap\{Y<t/q\}\cap\{Y>0\}\end{aligned}$$

מכיוון ש-$\{Y<t\}$,$\{X<q\}$ ו-$\{Y>0\}$ הם מאורעות, צד ימין הוא מאורע ומכאן שגם צד שמאל. באופן דומה ניתן להראות כי $\{Y<0\}\cap\{X>t/Y\}$ הוא מאורע וברור כי $\{Y=0\}$ הוא מאורע מכיוון ש-$\{0\}$ היא קבוצת בורל.

5. אם X,Y הם משתנים מקריים סופיים אז

$$Z(\omega)=\begin{cases}\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} & Y(\omega)\neq 0\\ 0 & Y(\omega)=0\end{cases}$$

הוא משתנה מקרי. ההוכחה מאוד דומה למקרה של כפל. מספיק למעשה להראות כי זה מתקיים עבור

$$Z(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{Y(\omega)} & Y(\omega)\neq 0\\ 0 & Y(\omega)=0\end{cases}$$

ואז להכפיל את Z ב-X ולהשתמש בסעיף הקודם.

6. כאשר המשתנים המקריים אינם סופיים צריך קצת יותר להיזהר. במקרה זה אם למשל $X(\omega)=0$ ו-$Y(\omega)=\infty$ אז $X(\omega)Y(\omega)$ אינו מוגדר. באותו אופן אם למשל $X(\omega)=\infty$ ו-$Y(\omega)=-\infty$ אז $X(\omega)+Y(\omega)$ אינו מוגדר. בכל אופן במהלך הקורס נגדיר $\infty+\infty=\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $0=\frac{1}{-\infty}=\frac{1}{\infty}$. במקרים שאינם מוגדרים, נגדיר איך שיהיה לנו נוח. למשל, כפי שנעשה בסעיף 5. דוגמה אחרת היא שאם X,Y אינם בהכרח סופיים, אז אפשר למשל (יש גם הרבה אפשריות אחרות) להגדיר

$$Z(\omega)=\begin{cases}X(\omega)+Y(\omega) & (X(\omega),Y(\omega))\notin\{(-\infty,\infty),(\infty,-\infty)\}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

ולקבל בעזרת אותה הוכחה כמו קודם כי Z הוא משתנה מקרי.

אנחנו עוד נחזור לדון במשתנים מקריים, אך עתה נגדיר למה אנו מתכוונים בהסתברות. אם כן, בהנתן מרחב מדיד $(\Omega,\mathcal{F})$ הסתברות היא גם כן פונקציה, אך התחום שלה הוא לא Ω אלא $\mathcal{F}$ והטווח הוא לא כל הממשיים אלא $[0,1]$. אם כן, אנו נקרא ל-P הסתברות על $(\Omega,\mathcal{F})$ אם

$$P:\mathcal{F}\to[0,1]$$

ומתקיימות שתי הדרישות הבאות:

1. $P(\Omega) = 1$ (בהסתברות אחת משהו ייקרה).
2. σ-אדיטיביות: לכל $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ זרים בזוגות מתקיים כי

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

זה הכל. לא דורשים יותר דבר. משתי דרישות אילה נובעות לא מעט תוצאות.

1. $P(\emptyset) = 0$.
הוכחה: ניקח $A_i = \emptyset$ לכל i. אז $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ זרים בזוגות (חיתוך כל שניים מהן הוא ריק). האיחוד שלהם הוא גם כן ריק. מכאן ש-

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

אם $0 < P(\emptyset) \le 1$ אז צד ימין שווה לאינסוף ואילו צד שמאל קטן או שווה לאחד. זה לא יתכן. לכן בהכרח $P(\emptyset) = 0$.

2. אם $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ זרים בזוגות אז

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

הוכחה: ניקח $A_i = \emptyset$ לכל $i > n$ ואז

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. אם $A, B \in \mathcal{F}$ ו-$A \subset B$ אז

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

ולכן

$$P(A) \le P(B)$$

הוכחה: $A, B \setminus A \in \mathcal{F}$ זרות ואיחודן הוא B. לכן

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

4. אם $A, B \in \mathcal{F}$ אז

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

הוכחה:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

שלושת הקבוצות מצד ימין הן זרות ולכן ההסתברות של צד שמאל שווה לסכום ההסתברויות של המאורעות בצד ימין. עכשיו $A \cap B \subset A$ ומתקיים כי

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

לכן

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

באותו אופן

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$$

לבסוף

$$\begin{aligned} &P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ =&P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ =&P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

5. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ ונסמן

$$S_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

בפרט

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad S_n = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

אז

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$$

הוכחה: באינדוקציה. לפני שנוכיח את המקרה הכללי נראה כי זה נכון עבור $n = 3$. זה יעזור להבין יותר טוב את ההוכחה. אם כן מסעיף 5 נובע כי

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \end{aligned}$$

עכשיו אני מקווה שאתם זוכרים כי $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$ וברור כי $(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. לכן

$$\begin{aligned} P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

אם נחבר הכל ביחד ונכתוב $S_1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$, $S_2 = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)$ ו-$S_3 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ נקבל באמת כי

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = S_1 - S_2 + S_3$$

נניח איפה כי התוצאה נכונה לכל $n-1$ מאורעות ונוכיח כי היא נכונה עבור n. המקרה $n=1$ וכן $n=2$ (ואפילו $n=3$) כבר הוכחנו. אז

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right)
\end{aligned}$$

עבור $P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ לכל $1 \leq k \leq n-1$, S_k המתאים יכלול את כל החיתוכים של k מאורעות מתוך המאורעות $A_1, \ldots, A_{n-1}$. דהיינו, המאורע A_n לא ישתתף באף אחד מחיתוכים אילה.
עבור $P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right)$ לכל $1 \leq k \leq n-1$ ישתתפו ב-S_k המתאים כל החיתוכים השונים של k מאורעות מתוך המאורעות $A_1 \cap A_n, \ldots, A_{n-1} \cap A_n$. בכל חיתוך כזה נקבל כי

$$(A_{i_1} \cap A_n) \cap \ldots \cap (A_{i_k} \cap A_n) = A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_n$$

כאשר $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n-1$. דהיינו, חיתוך של $k+1$ מאורעות שאחד מהם חייב להיות A_n. בפרט, עבור $k = n-1$ נקבל מצד ימין את חיתוך כל המאורעות

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

נסמן איפה ב-$S_k(n-1)$ את ה-S_k שמתאים למאורעות $A_1, \ldots, A_{n-1}$ וב-$T_k(n-1)$ את ה-S_k שמתאים למאורעות $A_1 \cap A_n, \ldots, A_{n-1} \cap A_n$. כמו כן, נסמן ב-$S_k(n)$ את ה-S_k שמתאים למאורעות $A_1, \ldots, A_n$. נשים לב כי $S_1(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i)$ ומכאן ש-

$$S_1(n-1) + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = S_1(n)$$

כמו כן, עבור $1 \leq k \leq n-2$ מכיוון ש-$S_{k+1}(n-1)$ כולל את כל החיתוכים של $k+1$ מאורעות שאינם כוללים את A_n ו-$T_k(n-1)$ כולל את כל החיתוכים של $k+1$ מאורעות שאחד מהם חייב להיות A_n (מוסבר כמה שורות למעלה) נקבל כי

$$S_{k+1}(n) = S_{k+1}(n-1) + T_k(n-1)$$

זאת מכיוון שבכל חיתוך של $k+1$ מאורעות מבין $A_1, \ldots, A_n$ או ש-A_n משתתף (ואז הוא כלול ב-$T_k(n-1)$) או שהוא לא משתתף (ואז הוא כלול ב-$S_{k+1}(n-1)$). מכאן גם נובע כי לכל $2 \leq k \leq n-1$ מתקיים כי

$$S_k(n) = S_k(n-1) + T_{k-1}(n-1)$$

לבסוף, נשים לב כי

$$T_{n-1}(n-1) = P((A_1 \cap A_n) \cap \cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n)) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = S_n(n)$$

עכשיו, מהנחת האינדוקציה

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} S_k(n-1) \\
P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} T_k(n-1) = \sum_{\ell=2}^{n}(-1)^{\ell-2} T_{\ell-1}(n-1) \\
&= -\sum_{\ell=2}^{n}(-1)^{\ell-1} T_{\ell-1} = -\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} T_{k-1}(n-1)
\end{aligned}$$

ואם נחזור למשוואה ממנה התחלנו, נקבל

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} S_k(n-1) + P(A_n) - \left(-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} T_{k-1}(n-1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} S_k(n-1) + P(A_n) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} T_{k-1}(n-1) \\
&= S_1(n-1) + P(A_n) + \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k-1}(S_k(n-1) + T_{k-1}(n-1)) \\
&\quad +(-1)^{n-1} T_{n-1}(n-1) \\
&= S_1(n) + \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k-1} S_k(n) + (-1)^{n-1} S_n(n) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} S_k(n)
\end{aligned}$$

וסיימנו את ההוכחה.
נשים לב כי אם לכל k לכל חיתוך של k מאורעות (שונים) יש את אותה הסתברות, דהיינו, לכל $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ מתקיים כי

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

אז מכיוון שיש $\binom{n}{k}$ בחירות שונות של $i_1, \ldots, i_k$ נקבל כי

$$S_k = \binom{n}{k} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

ובמקרה זה הנוסחה היא

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

למשל, אם יש לנו n מעטפות, כל אחת ממוענת לכתובת אחרת, ואנו מכניסים בהן n מכתבים (עם אותן כתובות) אך באופן מקרי, הסיכוי שהמכתבים $i_1, \ldots, i_k$ יגיעו ליעדיהם הוא זהה לכל אוסף של k מכתבים והוא שווה ל-

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

זאת מכיוון שמספר האפשרויות לשים את k המכתבים הללו במעטפות הוא n לראשון, $n-1$ לשני וכן הלאה עד שמגיעים ל-$n-k+1$ אפשרויות למכתב ה-k (כי אז כבר שמנו $k-1$ מכתבים במעטפות ולכן נשארו $n-(k-1) = n-k+1$ מעטפות פנויות). לכן

$$S_k = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

ומכאן שהסיכוי שלפחות מכתב אחד יגיע ליעדו הוא

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

לכן הסיכוי שאף מכתב לא יגיע ליעדו הוא בהכרח

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

הגבול של סדרה זו הוא e^{-1}, אך אפשר לבדוק באמצעות אחת מנוסחאות השארית של טור טיילור (או בדרכים אחרות) כי

$$\left|e^{-1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right| \le \frac{1}{(n+1)!}$$

ולכן מקבלים קרוב טוב מאוד גם עבור ערכי n לא גדולים במיוחד. לדוגמה, אם $n=6$ אז $1/7!$ הוא קצת מתחת ל-0.0002. עבור $n=1,2,3,4,5$ מקבלים שההסתברויות הן

$$\begin{aligned}
1-1 &= 0\\
1-1+\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} = 0.5\\
1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6} &= \frac{1}{3} = 0.3333...\\
1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24} &= \frac{3}{8} = 0.375\\
1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120} &= \frac{11}{30} = 0.3666...\\
e^{-1} &= 0.36787944...
\end{aligned}$$

6. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ (לא בהכרח זרות בזוגות), אז

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ובאותו אופן, אם $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ (לא בהכרח זרות בזוגות), אז

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \le \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

הוכחה: נסמן $B_1 = A_1$ ועבור $n \ge 2$, $B_n = A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$. אז B_n זרות בזוגות, מקיימות $B_n \subset A_n$ ומתקיים גם כי

$$\cup_{i=1}^n B_i = \cup_{i=1}^n A_i,\ \cup_{i=1}^\infty B_i = \cup_{i=1}^\infty A_i$$

לכן

$$P(\cup_i A_i) = P(\cup_i B_i) = \sum_i P(B_i) \le \sum_i P(A_i)$$

כאשר i עובר על כל האינדכסים החיוביים או רק על $1, \ldots, n$.

7. ההסתברות של איחוד סופי או בן מניה של מאורעות היא אפס אם ורק אם לכל אחד מהמאורעות הסתברות אפס. ההסתברות של חיתוך סופי או בן מניה של מאורעות היא אחת אם ורק אם ההסתברות של כל אחד מהמאורעות היא אחת.
הוכחה: לגבי איחוד, אם לכל אחד מהמאורעות הסתברות אפס אז מ-6 נובע כי ההסתברות של האיחוד היא אפס. מצד שני, כל מאורע מוכל באיחוד ולכן אם לאיחוד הסתברות אפס אז מ-3 נובע כי לכל אחד מהמאורעות הסתברות אפס. לגבי החיתוך, זה נובע מכך נובע מכך ש-A_i^c הם מאורעות שהסתברותן היא אפס ולכן ההסתברות של $\cup_i A_i^c$ היא אפס. מכאן שההסתברות של $\cap_i A_i = (\cup_i A_i^c)^c$ היא אחת. בכיוון ההפוך, החיתוך מוכל בכל אחד מהמאורעות ולכן אם ההסתברות שלו היא אחת אז גם ההסתברות של כל מאורע בנפרד היא אחת.

8. רציפות של פונקצית ההסתברות: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ומתקיים כי $A_n \subset A_{n+1}$ לכל $n \ge 1$. אז

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cup_{i=1}^\infty A_i)$$

אם מתקיים כי $A_n \supset A_{n+1}$ אז

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cap_{i=1}^\infty A_i)$$

בפרט

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(\cap_{m\ge n} A_m) &= P(\cup_{n\ge1} \cap_{m\ge n} A_m)\\ \lim_{n\to\infty} P(\cup_{m\ge n} A_m) &= P(\cap_{n\ge1} \cup_{m\ge n} A_m)\end{aligned}$$

נהוג לסמן

$$\cap_{n\ge1} \cup_{m\ge n} A_m = \limsup A_n = \{A_n,\ i.o.\}$$

כאשר $i.o.$ הוא קיצור ל-infinitely often. כמו כן, נהוג לסמן

$$\cup_{n\ge1} \cap_{m\ge n} A_m = \liminf A_n$$

אם שתי הקבוצות שוות אז מקובל לסמן $\lim_{n\to\infty} A_n$.

הוכחה: כאשר $A_n \subset A_{n+1}$ לכל $n \geq 1$ נובע כי עם $A_0 = \emptyset$ מתקיים כי $A_n \setminus A_{n-1}$ הן קבוצות זרות בזוגות המקיימות

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$$

לכן

$$\begin{aligned}
P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} P(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (P(A_n) - P(A_{n-1})) \\
&= \lim_{m\to\infty} (P(A_m) - P(A_0)) = \lim_{m\to\infty} P(A_m)
\end{aligned}$$

כאשר $A_n \supset A_{n+1}$ מתקיים כי $A_n^c \subset A_{n+1}^c$ ולכן

$$P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = P\left(\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c\right) = P\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

9. מסקנות נוספות: נסמן $F(t) = P(X \leq t)$. אז

(א) F לא יורדת.

הוכחה: אם $t < s$ אז $\{X \leq s\} \subset \{X \leq t\}$ ולכן

$$F(s) = P(X \leq s) \leq P(X \leq t) = F(t)$$

(ב) F רציפה מימין.

הוכחה: אם $t_n \downarrow t$ אז $\{X \leq t_n\} \supset \{X \leq t_{n+1}\}$ ולכן

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty} P(X \leq t_n) = P\left(\cap_{n=1}^{\infty} X^{-1}([-\infty, t_n])\right) \\
&= P\left(X^{-1}\left(\cap_{n=1}^{\infty} [-\infty, t_n]\right)\right)
\end{aligned}$$

מכיוון ש-

$$\cap_{n=1}^{\infty} [-\infty, t_n] = [-\infty, t]$$

נובע כי צד ימין שווה ל-$F(t)$ כנדרש.

(ג) $\lim_{t\downarrow-\infty} F(t) = P(X = -\infty)$ בפרט אם $P(X = -\infty) = 0$ אז הגבול הוא אפס.

הוכחה: באותו אופן שהראינו את הרציפות מימין בסעיף הקודם, רק שניקח $t_n \downarrow -\infty$.

(ד) $\lim_{t\uparrow\infty}F(t)=P(X<\infty)=1-P(X=\infty)$ בפרט אם $P(X=\infty)=0$ אז הגבול הוא אחד.

הוכחה: ניקח $t_n\uparrow\infty$. אז

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F(t_n) &= \lim_{n\to\infty}P(X\le t_n)=P\left(\cup_{n=1}^{\infty}X^{-1}([-\infty,t_n]\right)\\ &= P\left(X^{-1}\left(\cup_{n=1}^{\infty}[-\infty,t_n]\right)\right)\\ &= P\left(X^{-1}\left([-\infty,\infty)\right)=P(X<\infty)\end{aligned}$$

(ה) לכל t סופי מתקיים כי $P(X<t)=F_X(t-)\equiv\lim_{s\uparrow t}F_X(s)$.

הוכחה: ניקח $t_n\uparrow t$ (סדרה שעולה ל-t אך קטנה מ-t, דהיינו, שואפת ל-t משמאל) ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F(t_n) &= \lim_{n\to\infty}P(X\le t_n)=P\left(\cup_{n=1}^{\infty}X^{-1}([-\infty,t_n]\right)\\ &= P\left(X^{-1}\left(\cup_{n=1}^{\infty}[-\infty,t_n]\right)\right)\\ &= P\left(X^{-1}\left([-\infty,t)\right)=P(X<t)\end{aligned}$$

שימו לב כי ההוכחה עבור t סופי ועבור $t=\infty$ היא זהה.

(ו) נסכם בכך שנשים לב כי לכל $t>-\infty$ (כולל $t=\infty$),

$$P(X=t)=P(X\le t)-P(X<t)=F(t)-F(t-)$$

כאשר אנו מגדירים $F(\infty-)=P(X<\infty)$.

(ז) נסכם בכך שעבור ערכים אינסופיים של t נגדיר

$$\begin{aligned}F(\infty) &= P(X\le\infty)=1\\ F(\infty-) &= P(X<\infty)=1-P(X=\infty)\\ F(-\infty) &= P(X=-\infty)\end{aligned}$$

ואז F מוגדרת לכל ערך של $t\in\bar{\mathbb{R}}$ והגבול משמאל מוגדר לכל ערך פרט ל-$-\infty$ (שם אין גבול משמאל). באופן מלאכותי אפשר להגדיר את הגבול משמאל במינוס אינסוף להיות אפס, אך לא ממש נצטרך את זה.