האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה
הסתברות ותהליכים מקריים
מורה הקורס: עופר קלע

הגדרות:

- נאמר כי מחלקה $\mathcal{C}$ (אוסף של קבוצות) סגורה תחת חיתוכים סופיים אם לכל $n \geq 2$ ולכל $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ מתקיים כי גם $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$.
- נאמר כי מחלקה $\mathcal{C}$ סגורה תחת גבולות לא יורדים אם לכל $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$ עם $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ מתקיים כי $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$.
- נאמר כי מחלקה $\mathcal{C}$ סגורה תחת הפרשים אם לכל $A, B \in \mathcal{C}$ עם $B \subset A$ מתקיים כי גם $A \setminus B \in \mathcal{C}$.

משפט מחלקה מונוטונית (יש יותר מאחד):
נניח כי $\mathcal{C}$ היא מחלקה של תתי קבוצות של Ω הסגורה תחת חיתוכים סופיים וכי $\Omega \in \mathcal{C}$. אז המחלקה הקטנה ביותר שמכילה את $\mathcal{C}$ וסגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים היא $\sigma(\mathcal{C})$.

הוכחה:
תחילה נשים לב כי 2^{Ω} מכילה את $\mathcal{C}$ וסגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים. כמו כן חיתוך כלשהו של מחלקות הסגורות תחת גבולות לא יורדים והפרשים היא מחלקה שסגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים. לכן תמיד קיימת מחלקה קטנה ביותר בעלת תכונות אילה (כמו במקרה של σ־שדות). אם כן, נסמן ב־$\mathcal{D}$ את המחלקה הקטנה ביותר שמכילה את $\mathcal{C}$ וסגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים. מכיוון ש־$\Omega \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, אז $\mathcal{D}$ אינו ריק ומכיוון ש־$\mathcal{D}$ סגורה תחת הפרשים, אז לכל $A \in \mathcal{D}$ מתקיים כי $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{D}$. עבור $B \subset \Omega$ כלשהו, נסמן $\mathcal{D}_B$ את אוסף הקבוצות A המקיימות $A \in \mathcal{D}$ וגם $A \cap B \in \mathcal{D}$. נניח כי $A_1, A_2, \ldots \mathcal{D}_B$ וכי $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. אז גם $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots \in \mathcal{D}$ ו־$A_1 \cap B \subset A_2 \cap B \subset \ldots$ ולכן מתקיים כי

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &\in \mathcal{D} \\ \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B &\in \mathcal{D} \end{aligned}$$

ולכן $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ סגורה תחת גבולות לא יורדים. כמו כן, עבור $A_1, A_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ עם $A_2 \subset A_1$ מתקיים כי $A_1, A_2, A_1 \cap B, A_2 \cap B \in \mathcal{D}$ וכי $A_1 \cap B \subset A_2 \cap B$ ולכן ($\mathcal{D}$ סגורה תחת הפרשים)

$$\begin{aligned} A_1 \setminus A_2 &\in \mathcal{D} \\ (A_1 \setminus A_2) \cap B = A_1 \cap A_2^c \cap B = A_1 \cap B \cap (A_2^c \cup B^c) = (A_1 \cap B) \setminus (A_2 \cap B) &\in \mathcal{D} \end{aligned}$$

מכאן ש־$\mathcal{D}_B$ סגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים. כמו כן, ברור כי $\mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}$ (לכל B).
עכשיו, אם $B \in \mathcal{C}$ אז, מכיוון ש$\mathcal{C}$ סגורה תחת חיתוכים סופיים נובע כי לכל $A \in \mathcal{C}$ גם $A \cap B \in \mathcal{C}$ ולכן $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}$. מכיוון ש־$D$ היא המחלקה הקטנה ביותר שמכילה את $\mathcal{C}$ שסגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים ו־$\mathcal{D}_B$ היא גם מחלקה כזו, נובע כי בהכרח

$\mathcal{D}_B = \mathcal{D}$. לכן $A \cap B \in \mathcal{D}$ לכל $A \in \mathcal{D}$ ולכל $B \in \mathcal{C}$. מכאן ש־$B \in \mathcal{D}_A$ לכל $B \in \mathcal{C}$ ו־$A \in \mathcal{D}$ ולכן $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}$ ומכיוון ש־$\mathcal{D}_A$ סגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים נובע כי $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$ לכל $A \in \mathcal{D}$. מכך נובע כי אם $B \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_A$ אז גם $A \cap B \in \mathcal{D}$ ובאינדוקציה נובע כי $\mathcal{D}$ סגורה תחת חיתוכים סופיים. ראינו כבר כי $\mathcal{D}$ סגורה תחת משלימים. עבור $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ מתקיים כי $A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathcal{D}$ ולכן לכל $n \geq 1$ מתקיים כי

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \in \mathcal{D}$$

ואז גם

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c \in \mathcal{D}$$

מכיוון ש־$\mathcal{D}$ סגורה תחת גבולות לא יורדים נובע כי

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$$

אם כן קיבלנו כי $\mathcal{D}$ אינה ריקה, סגורה תחת משלימים ותחת איחודים בני מניה ולכן היא בעצם σ־שדה. מכאן שהיא מכילה את ה־σ־שדה הקטן ביותר שמכיל את $\mathcal{C}$. דהיינו, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$. מצד שני $\sigma(\mathcal{C})$ סגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים (זה נכון לכל σ־שדה) ולכן היא מכילה את הקבוצה הקטנה ביותר בעלת תכונה זו, דהיינו, $\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{C})$. מכאן ש־$\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$.

מסקנה:
נניח כי $\mathcal{C}$ היא מחלקה הסגורה תחת חיתוכים סופיים. נניח כי P, Q הסתברויות על $\sigma(\mathcal{C})$ כך ש־$P(C) = Q(C)$ לכל $C \in \mathcal{C}$. אז $P(A) = Q(A)$ לכל $A \in \sigma(\mathcal{C})$.

הוכחה:
מכיוון שלכל $C \in \mathcal{C}$ מתקיים כי גם $C \cap \Omega = C \in \mathcal{C}$ וכן $P(\Omega) = Q(\Omega) = 1$, נובע כי בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח כי $\Omega \in \mathcal{C}$. אחרת, נצרף את Ω ל־$\mathcal{C}$ ושוב נקבל מחלקה שסגורה תחת חיתוכים סופיים ומכילה את Ω וכי P, Q מסכימות על כל קבוצה במחלקה זו.
עכשיו, נסמן

$$\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C}) \quad \mathcal{D} = \{A | A \in \sigma(\mathcal{C}), P(A) = Q(A)\}$$

אם $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ ו־$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ אז מרציפות פונקצית ההסתברות נובע כי

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} Q(A_n) = Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

ולכן $\mathcal{D}$ סגורה תחת גבולות לא יורדים. כמו כן אם $A, B \in \mathcal{D}$ ו־$B \subset A$ אז

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B) = Q(A) - Q(B) = Q(A \setminus B)$$

ולכן $\mathcal{D}$ סגורה תחת הפרשים. לכן $\mathcal{D}$ מכילה את הקבוצה הקטנה ביותר הסגורה תחת גבולות לא יורדים והפרשים ומכילה את $\mathcal{C}$. דהיינו, את $\sigma(\mathcal{C})$.