האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה
הסתברות ותהליכים מקריים
מורה הקורס : עופר קלע

- $\mathbb{N}$ הוא אוסף המספרים הטבעיים $\{1, 2, \ldots\}$. הוא סגור תחת סכומים ומכפלות אך לא תחת הפרשים.
- $\mathbb{Z}$ הוא אוסף המספרים השלמים (כולל אפס והשליליים). בנוסף לסכומים ומכפלות הוא סגור גם תחת הפרשים אך לא תחת מנות.
- $\mathbb{Q}$ הוא אוסף המספרים הרציונלים אותם אפשר להציג כמנות של מספרים שלמים. אוסף זה סגור גם תחת חלוקה, אך אינו סגור תחת גבולות, שרשים, כמו כן יש מספרים כמו π ו-e שאינם רציונלים.
- $\mathbb{R}$ הוא אוסף המספרים הממשיים. הוא סגור גם תחת גבולות, שרשים והמספרים π ו-e נמצאים בו. זה כבר מתחיל להראות טוב. לכל מספר חיובי יש שני שרשים (אחד חיובי ואחד שלילי) ולאפס יש שורש אחד, אך אין אף מספר ממשי שאם נעלה אותו בריבוע נקבל מספר שלילי ולכן למספרים הממשיים אין שורש ממשי.
- $\mathbb{C}$ הוא אוסף המספרים המרוכבים אותו נגדיר למטה.

נגדיר i להיות "מספר" שאם נעלה אותו בריבוע נקבל -1. דהיינו, $i^2 = -1$. אין באמת מספר כזה, לכן זהו מספר דמיוני אותו אנו מגדירים באופן מלאכותי. שימו לב כי גם

$$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

כך של--1 יש שני שרשים.
$z = x + iy$ כאשר $x, y \in \mathbb{R}$ נקרא מספר מרוכב ו-$\mathbb{C}$ הוא אוסף המספרים המרוכבים. אפשר לחשוב על $\mathbb{C}$ כעל מרחב ווקטורי כמו $\mathbb{R}^2$ אך מוגדות עליו תכונות נוספות. נגדיר אותן.

1. אם $z_k = x_k + iy_k$ עבור $k = 1, 2$, נגדיר את הסכום או ההפרש באופן דומה שמגדירים אותו עבור וקטורים, דהיינו

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

2. אנו רוצים שמכפלה של שני מספרים מרוכבים תקיים את התכונות של מספרים ממשיים, בפרט, חוק הפילוג. לכן אנו חייבים להגדיר מכפלה באופן הבא

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1iy_2 \\ &= x_1x_2 + i^2y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) \end{aligned}$$

עם הגדרה כזו של הכפל מתקיים חוק החילוף (הסדר לא חשוב) וחוק הפילוג וחוק הצרוף. דהיינו

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_2 z_1 \\ z_1(z_2 + z_3) &= z_1z_2 + z_1z_3 \\ z_1(z_2z_3) &= (z_1z_2)z_3 \end{aligned}$$

כמו כן, ברור כי חוק החילוף והצרוף מתקיים גם עבור הסכום.

3. כיצד נגדיר $1/z$ עבור $z \neq 0$? אם $z = x + iy$ ו-$1/z = u + iv$ אז נרצה ש-

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + i0 = z \cdot 1/z = (x + iy)(u + iv) \\ &= xu - yv + i(yu + xv) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} xu - yv &= 1 \\ yu + xv &= 0 \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כל ילד יודע לפתור מערכת כזו (יש לא מעט שיטות) וניתן לבדוק כי הפתרון הוא

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

לכן בהכרח

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$$

4. כיצד נגדיר חילוק? אם $z_2 \neq 0$ אז

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

וניתן לבדוק מכך שהפעולות הבאות חוקיות

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2 + i(y_2x_2 - x_2y_2)}$$

וצד ימין שווה למה שכתוב בצד ימין של המשוואה הקודמת.

5. לכל $z = x + iy$ נגדיר $\bar{z} = x - iy$. קל מאוד לבדוק את המסקנות הבאות

(א) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(ב) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$ ולכן לכל $n \geq 1$ מתקיים באינדוקציה כי $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

(ג) אם $z_2 \neq 0$ אז $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.

(ד) $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ וכן $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ כאשר $\Re(z)$ הוא החלק הממשי של z ו-$\Im(z)$ הוא החלק הדמיוני. דהיינו, אם $z = x + iy$ אז $\Re(z) = x$ ו-$\Im(z) = y$.

(ה) הצמוד של הצמוד של z הוא z.

6. נסמן $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$. קל גם לבדוק את המסקנות הבאות:

(א) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

(ב) $|1/z|=1/|z|$

(ג) $1/z=\bar{z}/|z|^2$

(ד) לכל $n\ge 1$, $|z^n|=|z|^n$.

(ה) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ (אי שוויון המשולש). זה נובע מכך שנורמה מקיימת זאת ולכן אם נסתכל על הווקטורים $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ נקבל כי הנורמה של הסכום קטנה או שווה לסכום הנורמות, דהיינו

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\le\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

שימו לב שצד שמאל שווה ל-$|z_1+z_2|$ ואילו צד ימין ל-$|z_1|+|z_2|$.

(ו) לכל $0\le\lambda\le 1$ ממשי מתקיים כי

$$|\lambda z_1+(1-\lambda)z_2|\le|\lambda z_1|+|(1-\lambda)z_2|=\lambda|z_1|+(1-\lambda)|z_2|$$

כלומר

$$|\lambda z_1+(1-\lambda)z_2|\le\lambda|z_1|+(1-\lambda)|z_2|$$

לתכונה הזו קוראים "קמירות". תכונה דומה מתקיימת באופן דומה עבור נורמה. דהיינו הנורמה (או הערך המוחלט) של ממוצע משוקלל קטנה או שווה מהממוצע המשוקלל של הנורמות (או הערכים המוחלטים). מאי שוויון Jensen נובע כי אם X,Y משתנים מקריים בעלי תוחלות סופית EX,EY אז

$$\sqrt{(EX)^2+(EY)^2}\le E\sqrt{X^2+Y^2}$$

דהיינו, אם $Z=X+iY$ אז

$$|EZ|\le E|Z|$$

זה מיידי עבור משתנה מקרי המקבל ערכים ממשיים אך כפי שראינו דורש קצת יותר מאמץ עבור משתנה מקרי המקבל ערך מרוכב.

עכשיו, ניזכר בפיתוח טיילור של הפונקציות הבאות

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!}\\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

אז

$$\cos x + i\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

ולכן מגדירים

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

ובאופן כללי אם $z = x + iy$ אז מגדירים

$$e^{z} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)$$

דהיינו

$$\begin{aligned} \Re\left(e^{z}\right) &= e^{\Re(z)}\cos\left(\Im(z)\right) \\ \Im\left(e^{z}\right) &= e^{\Re(z)}\sin\left(\Im(z)\right) \end{aligned}$$

אפשר לבדוק (תרגיל) כי

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

לכל $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
לכל θ ממשי מתקיים כי

$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

כמו כן עבור $U \sim \mathrm{U}(0,1)$

$$\begin{aligned} |1-e^{i\theta}| &= |1-\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{\left(\theta\int_0^1 \sin(\theta t)dt\right)^2 + \left(\theta\int_0^1 \cos(\theta t)dt\right)^2} \\ &= |\theta|\sqrt{(E\sin(\theta U))^2 + (E\cos(\theta U))^2} \\ &= |\theta|\left|Ee^{i\theta U}\right| \le |\theta|E\left|e^{i\theta U}\right| = |\theta|E1 = |\theta| \end{aligned}$$

מכאן שלכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$\left|e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right| = \left|e^{i\beta}\right|\left|1 - e^{i(\alpha-\beta)}\right| = \left|1 - e^{i(\alpha-\beta)}\right| \le |\alpha-\beta| = |\beta-\alpha|$$

מכיוון ש-

$$-1 \le \cos x \le 1$$

אז אם עבור $x > 0$ ניקח אינטגרל מ-0 עד x בשלושת האגפים נקבל כי

$$-x \le \sin x \le x$$

ואם שוב ניקח אינטגרל נקבל

$$-\frac{x^2}{2} \le 1-\cos x \le \frac{x^2}{2}$$

קבלנו איפה כי

$$-1 \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

וגם (מכיוון ש- $\cos \le 1$ ולכן $(1-\cos x)/(x^2/2) \ge 0$)

$$0 \le \frac{1-\cos x}{x^2/2} \le 1$$

עכשיו מכלל לופיטל נובע כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

מכאן ש-

$$\frac{e^{i(x+h)}-e^{ix}}{h} = e^{ix}\frac{e^{ih}-1}{h} = e^{itx}\frac{\cos h - 1 + i\sin h}{h}$$

ולכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{i(x+h)}-e^{ix}}{h} = e^{ix}\lim_{h\to 0}\left(-\frac{h}{2}\frac{1-\cos h}{h^2/2} + i\frac{\sin h}{h}\right) = e^{ix}\,(0+i) = ie^{ix}$$

מכאן שהנגזרת של e^{ix} לפי x קיימת ושווה ל- ie^{ix}.
נניח כי X הוא משתנה מקרי עם $P(|X|<\infty)=1$. נסמן

$$\psi_X(\alpha) = Ee^{i\alpha X} = E\cos(\alpha X) + iE\sin(\alpha X)$$

$\psi_X(\cdot)$ נקראת הפונקציה האופיינית של X והיא מוגדרת לכל משתנה מקרי סופי X. היא תלויה אך ורק בהתפלגות של X, דהיינו

$$\psi_X(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x}dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}}\cos(\alpha x)dF_X(x) + i\int_{\mathbb{R}}\sin(\alpha x)dF_X(x)$$

נשים לב כי

$$|\psi_X(\alpha)| = \left|Ee^{i\alpha X}\right| \le E\left|e^{i\alpha X}\right| = 1$$

ולכן הפונקציה האופיינית מוגדרת היטב וסופית (חסומה על ידי 1) לכל משתנה מקרי סופי בהסתברות אחת.

תכונות:

1. $\psi_X(0)=1$.

2. $\psi_X(\cdot)$ רציפה בכל נקודה. זה נובע מהרציפות של הסינוס, הקוסינוס וממשפט ההתכנסות הנשלטת באופן הבא:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} E\cos(\alpha X) = E \lim_{\alpha\to\alpha_0} \cos(\alpha X) = E\cos\left(\alpha_0 X\right)$$

כאשר השוויון הראשון נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת (כי קוסינוס חסום בערכו המוחלט על ידי 1) והשוויון השני נובע מהרציפות של פונקצית הקוסינוס. באותו אופן

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} E\sin(\alpha X) = E\sin(\alpha_0 X)$$

ולכן בסך הכל קיבלנו כי גם

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \psi_X(\alpha) = \psi_X(\alpha_0)$$

3. נניח כי $E|X| < \infty$ אז

$$\frac{\psi_X(\alpha+h)-\psi(\alpha)}{h} = E\frac{e^{i(\alpha+h)X}-e^{i\alpha X}}{h}$$

עכשיו

$$\left|\frac{e^{i(\alpha+h)X}-e^{i\alpha X}}{h}\right| \le \frac{|(\alpha+h)X-\alpha X|}{|h|} = \frac{|h||X|}{|h|} = |X|$$

ולכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\psi_X(\alpha+h)-\psi(\alpha)}{h} &= E\lim_{h\to 0}\frac{e^{i(\alpha+h)X}-e^{i\alpha X}}{h} = E\left(iXe^{i\alpha X}\right) = iE\left(Xe^{i\alpha X}\right)\\ &= i\left(EX\cos(\alpha X)+iEX\sin(\alpha X)\right)\\ &= -EX\sin(\alpha X)+iEX\cos(\alpha X)\end{aligned}$$

או בקיצור

$$\psi'_X(\alpha) = iEXe^{i\alpha X}$$

מכיוון ש-$E|X| < \infty$ ו- $\left|Xe^{i\alpha X}\right| = |X|$ נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת כי $\psi'_X(\cdot)$ היא פונקציה רציפה ולכן, אם $E|X| < \infty$ אז $\psi_X(\cdot)$ גזירה ברציפות ובפרט עבור $\alpha = 0$ נקבל כי

$$\psi'_X(0) = iEX$$

או

$$EX = -i\psi'_X(0)$$

4. באופן דומה אפשר להוכיח כי אם $E|X|^n < \infty$ (ואז גם $E|X|^k < \infty$ לכל $1 \le k \le n$) אז $\psi_X(\cdot)$ גזירה ברציפות n פעמים ומתקיים לכל $k = 1, \dots, n$ כי

$$EX^k = (-i)^k \psi_X^{(k)}(0)$$

(אני גוזר k פעמים)

5. לכל a, b ממשיים

$$\psi_{aX+b}(\alpha) = \psi_X(\alpha a)e^{ib}$$

(תרגיל)

6. אם X, Y בלתי תלויים אז

$$\psi_{X+Y}(\alpha) = \psi_X(\alpha)\psi_Y(\alpha)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha(X+Y)} &= \cos(\alpha(X+Y)) + i\sin(\alpha(X+Y)) \\ &= (\cos\alpha X\cos\alpha Y - \sin\alpha X\sin\alpha Y) + i(\sin\alpha X\cos\alpha Y + \cos\alpha X\sin\alpha Y) \end{aligned}$$

אם ניקח תוחלות ונעזר באי התלות בין X ו-Y (ולכן בין כל פונקציה של X לכל פונקציה של Y) ומכך שכל הפונקציות חסומות ולכן התוחלות מוגדרות היטב וסופיות, נקבל כי

$$\begin{aligned} \psi_{X+Y}(\alpha) &= (E\cos\alpha X E\cos\alpha Y - E\sin\alpha X E\sin\alpha Y) + i(E\sin\alpha X E\cos\alpha Y + E\cos\alpha X E\sin\alpha Y) \\ &= (E\cos\alpha X + iE\sin\alpha X)(E\cos\alpha Y + iE\sin\alpha Y) = \psi_X(\alpha)\psi_Y(\alpha) \end{aligned}$$

באופן דומה נובע באינדוקציה כי אם $X_1, \dots, X_n$ בלתי תלויים (וסופיים בהסתברות אחת) אז

$$\psi_{\sum_{k=1}^n X_k}(\alpha) = \prod_{k=1}^n \psi_k(\alpha)$$

אם הם שווי התפלגות ומתפלגים כמו X אז

$$\psi_{\sum_{k=1}^n X_k}(\alpha) = \psi_X^n(\alpha)$$

ואילו

$$\psi_{\bar{X}_n}(\alpha) = \psi_X^n(\alpha/n)$$

כאשר $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

טענה:

$$0 \le \int_0^t \frac{\sin x}{x}dx \le \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx \le \pi$$

לכל $t \geq 0$ ומתקיים כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

הוכחה: ראו את הקובץ שמופיע בצמוד לקובץ זה באתר.

משפט:

נניח כי $F \sim X$ ונסמן $\psi = \psi_X$. אז לכל $x_1 < x_2$ (סופיים) מתקיים כי

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \psi(t) dt &= \frac{P(X = x_1) + P(X = x_2)}{2} + P(x_1 < X < x_2) \\
&= F(x_2) - F(x_1) - \frac{\Delta F(x_2) - \Delta F(x_1)}{2}
\end{aligned}$$

מסקנה: (משפט היחידות)

אם $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$ אז $X \sim Y$, דהיינו, $F_X(x) = F_Y(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכחת המסקנה:

נסמן ב-D_X ו-D_Y את אוסף נקודות אי הרציפות של F_X ו-F_Y, בהתאמה. מכיוון ששני אוספים אילה הם בני מניה אז גם האיחוד שלהם בן מניה. מהמשפט נובע כי לכל $x_1 < x_2$ שאינם ב-$D_X \cup D_Y$ מתקיים כי

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = F_Y(x_2) - F_Y(x_1)$$

נשאיף את x_1 ל-$-\infty$ דרך נקודות שאינם ב-$D_X \cup D_Y$ ונקבל בגבול

$$F_X(x_2) = F_Y(x_2)$$

השוויון האחרון מתקיים לכל $x_2 \in D_X \cup D_Y$. עכשיו לכל x נשאיף את x_2 מימין ל-x דרך נקודות שאינם ב-$D_X \cup D_Y$ ונקבל מהרציפות מימין של שתי פונקציות ההתפלגות כי

$$F_X(x) = F_Y(x)$$

כנדרש.

הערה: מכיוון שהכיוון ההפוך מובן מאליו, קיבלנו בעצם כי $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ לכל t אם ורק אם $F_X(x) = F_Y(x)$ לכל x.

הוכחת המשפט:

נסתכל על הפונקציה (של (ω, t))

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} e^{itX(\omega)} &= \frac{e^{it(X(\omega)-x_1)} - e^{it(X(\omega)-x_2)}}{it} \\
&= \frac{\sin t(X(\omega) - x_1) - \sin t(X(\omega) - x_2)}{t} \\
&\quad -i \frac{\cos t(X(\omega) - x_1) - \cos t(X(\omega) - x_2)}{t}
\end{aligned}$$

עכשיו נשים לב כי מכיוון ש-$-1 \leq \sin x \leq 1$ אז

$$-(x_2 - x_1) = \int_{X(\omega)-x_2}^{X(\omega)-x_1} (-1) du \leq \int_{X(\omega)-x_2}^{X(\omega)-x_1} \sin(tu) du \leq \int_{X(\omega)-x_2}^{X(\omega)-x_1} 1 du = x_2 - x_1$$

אך

$$\int_{X(\omega)-x_2}^{X(\omega)-x_1} \sin(tu)du = \frac{-\cos(tu)}{t}\Bigg|_{X(\omega)-x_2}^{X(\omega)-x_1} = -\frac{\cos t(X(\omega)-x_1) - \cos t(X(\omega)-x_2)}{t}$$

ומכאן שהפונקציה

$$\frac{\cos t(X(\omega)-x_1) - \cos t(X(\omega)-x_2)}{t}$$

היא פונקציה חסומה. כמו כן הפונקציה

$$\frac{\cos t(x-x_1) - \cos t(x-x_2)}{t}$$

המוגדרת להיות אפס עבור $t=0$. היא פונקציה רציפה בשני המשתנים ולכן היא גם פונקצית בורל של (x,t). לכן

$$\frac{\cos t(X(\omega)-x_1) - \cos t(X(\omega)-x_2)}{t}$$

היא פונקציה $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ מדידה (כפונצקית בורל של $((X\omega),t)$). מכיוון שהיא גם חסומה אז מותר להשתמש במשפט טונלי-פוביני:

$$\int_{-T}^{T} E\frac{\cos t(X(\omega)-x_1) - \cos t(X(\omega)-x_2)}{t}dt = E\int_{-T}^{T} \frac{\cos t(X(\omega)-x_1) - \cos t(X(\omega)-x_2)}{t}dt$$

לפי משפט טונלי-פוביני הפונקציה

$$\frac{\cos t(X(\omega)-x_1) - \cos t(X(\omega)-x_2)}{t}$$

כפונקציה של t, היא מדידה לבג וחסומה. כמו כן היא פונקציה אי זוגית (כמנה של פונקציה זוגית בפונקציה האי זוגית $f(t)=t$) ולכן האינטגרל שלה על $[-T,0]$ הוא מינוס האינטגרל שלה על $[0,T]$ ולכן האינטגרל על $[-T,T]$ הוא אפס. לכן

$$\int_{-T}^{T} E\frac{\cos t(X(\omega)-x_1) - \cos t(X(\omega)-x_2)}{t}dt = 0$$

כמו כן גם הפונקציה

$$\frac{\sin t(X(\omega)-x_1) - \sin t(X(\omega)-x_2)}{t}$$

היא $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ מדידה וחסומה (אותה הוכחה כמו הקוסינוס), אך פונקציה זו היא זוגית (כמנה של שתי פונצקיות אי זוגיות) ואז האינטגרל על $[-T,T]$ הוא פעמיים האינטגרל על $[0,T]$. גם כאן

מותר להחליף בין התוחלת לאינטגרל (מאותה סיבה כמו המקרה עם הקוסינוס) ולקבל כי

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \psi(t) dt &= \int_{-T}^{T} E \frac{\sin t(X - x_1) - \sin t(X - x_2)}{t} dt \\
&= E \int_{-T}^{T} \frac{\sin t(X - x_1) - \sin t(X - x_2)}{t} dt \\
&= 2E \int_{0}^{T} \frac{\sin t(X - x_1) - \sin t(X - x_2)}{t} dt \\
&= 2E \left(\operatorname{sgn}(X - x_1) \int_0^{|X - x_1|T} \frac{\sin s}{s} ds - \operatorname{sgn}(X - x_2) \int_0^{|X - x_2|T} \frac{\sin s}{s} ds \right)
\end{aligned}$$

כאשר

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} -1 & a < 0 \\ 0 & a = 0 \\ 1 & a > 0 \end{cases}$$

כפי שראינו קודם

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x} \leq \pi$$

לכל t ובפרט גם

$$\int_0^{|X - x_i|t} \frac{\sin s}{s} ds \leq \pi$$

לכן

$$\operatorname{sgn}(X - x_1) \int_0^{|X - x_1|T} \frac{\sin s}{s} ds - \operatorname{sgn}(X - x_2) \int_0^{|X - x_2|T} \frac{\sin s}{s} ds$$

היא פונקציה חסומה של T וממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$\begin{aligned}
&\lim_{T \to \infty} 2E \left(\operatorname{sgn}(X - x_1) \int_0^{|X - x_1|T} \frac{\sin s}{s} ds - \operatorname{sgn}(X - x_2) \int_0^{|X - x_2|T} \frac{\sin s}{s} ds \right) \\
&= 2E \left(\operatorname{sgn}(X - x_1) \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds - \operatorname{sgn}(X - x_2) \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds \right) \\
&= 2\frac{\pi}{2} E(\operatorname{sgn}(X - x_1) - \operatorname{sgn}(X - x_2))
\end{aligned}$$

שימו לב כי כאשר $X - x_i = 0$ מתקיים כי $\operatorname{sgn}(X - x_i) = 0$ ולכן גם במקרה זה

$$\lim_{T \to \infty} \operatorname{sgn}(X - x_i) \int_0^{|X - x_i|T} \frac{\sin s}{s} ds = 0 = \operatorname{sgn}(X - x_i) \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds$$

מכאן שאם נחלק ב-2π נקבל

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\psi(t)dt=\frac{1}{2}E(\operatorname{sgn}(X-x_1)-\operatorname{sgn}(X-x_2))$$

עכשיו,

$$\operatorname{sgn}(X-x_1)-\operatorname{sgn}(X-x_2)=\begin{cases}0=(-1)-(-1) & X<x_1\\ 1=0-(-1) & X=x_1\\ 2=1-(-1) & x_1<X<x_2\\ 1=1-0 & X=x_2\\ 0=1-1 & X>x_2\end{cases}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E(\operatorname{sgn}(X-x_1)-\operatorname{sgn}(X-x_2)) &= \frac{1}{2}E\left(1_{\{X=x_1\}}+21_{\{x_1<X<x_2\}}+1_{\{X=x_2\}}\right)\\ & \frac{1}{2}P(X=x_1)+P(x_1<X<x_2)+\frac{1}{2}P(X=x_2)\end{aligned}$$

וסיימנו את ההוכחה.

משפט הרציפות:
נניח כי ψ_n הן פונקציות אופייניות של F_n (התפלגויות של משתנים מקריים סופיים) וכי מתקיימים שני תנאים:

1. $\lim_{n\to\infty}\psi_n(t)=\psi(t)$ לכל $t\in\mathbb{R}$.
2. $\lim_{t\to 0}\psi(t)=\psi(0)$ (רציפות באפס של הגבול).

אז קיימת פונקצית התפלגות F של משתנה מקרי סופי כך ש-

$$\psi(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}dF(x)$$

ומתקיים כי

$$F_n\xrightarrow{d}F$$

הערה: הכיוון ההפוך נובע מכך שגם $\cos(tx)$ וגם $\sin(tx)$ הן פונקציות רציפות וחסומות של x, כאשר אנו זוכרים כי $F_n\xrightarrow{d}F$ אם ורק אם לכל פונקציה רציפה וחסומה g מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}g(x)dF_n(x)=\int_{\mathbb{R}}g(x)dF(x)$$

הוכחה:
תחילה נשים לב כי מכיוון ש-$\psi_n(0)=1$ לכל $n\geq 1$ אז גם $\psi(0)=1$ (כגבול של אחדים).

כמו כן עבור $u > 0$ ומשתנה מקרי כלשהו X עם פונקציה אופיינית ψ מתקיים כי

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\int_0^u (1-\Re(\psi(t)))\,dt &= \frac{1}{u}\int_0^u (1-E\cos tX)dt \\ &= = E\frac{1}{u}\int_0^u (1-\cos(tX))dt = E\left(1-\frac{\sin uX}{uX}\right)\end{aligned}$$

כאשר $\sin 0/0$ מוגדר להיות 1. עכשיו, נזכור כי $\frac{\sin x}{x} \le 1$ ולכן גם $1-\frac{\sin uX}{uX} \ge 0$ ומכאן ש-

$$E\left(1-\frac{\sin uX}{uX}\right) \ge \{|uX|>1\}\_1\left(1-\frac{\sin |uX|}{|uX|}\right)=\mathrm{E}\,\{|uX|>1\}\_1\left(1-\frac{\sin uX}{uX}\right)\mathrm{E}$$

עכשיו

$$\inf\left\{1-\frac{\sin|uX|}{|uX|}\middle||uX|>1\right\} = \inf\left\{1-\frac{\sin t}{t}\middle|t>1\right\}$$

נסמן את הביטוי בצד ימין ב-α ונשים לב כי בהכרח $\alpha > 0$ (מדוע?). אפשרות אחת לודא זאת היא באופן הבא: ניקח $\frac{\pi}{2} > t_0 > 1$. אז לכל $1 < t < t_0$ מתקיים כי

$$\frac{\sin t}{t} < \frac{\sin t_0}{t} \le \sin t_0 < \sin\frac{\pi}{2} < 1$$

ולכל $t \ge t_0$ מתקיים כי

$$\frac{\sin t}{t} \le \frac{1}{t_0} =< 1$$

ולכן לכל $t > 1$ מתקיים כי

$$\frac{\sin t}{t} \le \max\left(\sin t_0, 1/t_0\right) < 1$$

ולכן

$$\alpha = \inf\left\{1-\frac{\sin t}{t}\middle|t>1\right\} = 1-\sup\left\{\frac{\sin t}{t}\middle|t>1\right\} \ge 1-\max(\sin t_0, 1/t_0) > 0$$

אם כן,

$$E\left(1-\frac{\sin|uX|}{|uX|}\right)1\_\{|uX|>1\} \ge \alpha P(|uX|>1) = \alpha P\left(|X|>\frac{1}{u}\right)$$

ואם נסכם את מה שקיבלנו עד עכשיו:

$$P\left(|X|>\frac{1}{u}\right) \le \frac{1}{\alpha u}\int_0^u (1-\Re(\psi(t))dt$$

מכאן שגם

$$P\left(|X_n|>\frac{1}{u}\right) \le \frac{1}{\alpha u}\int_0^u (1-\Re(\psi_n(t))dt = \frac{1}{\alpha}(1-E\Re(\psi_n(uU)))$$

כאשר $U \sim \mathrm{U}(0,1)$. ממשפט ההתכנסות הנשלטת והעובדה ש-$\Re(z)$ היא פונקציה רציפה של z, נובע כי הגבול של הסדרה בצד ימין הוא

$$\frac{1}{\alpha}(1-E\psi(uU))$$

ואם שוב נשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת ונשאיף את $u \downarrow 0$ נקבל כי הגבול של הביטוי האחרון הוא

$$\frac{1}{\alpha}(1-E\psi(0)) = \frac{1}{\alpha}(1-1) = 0$$

מכאן שקיים $u_0 > 0$ עבורו

$$\frac{1}{\alpha}(1-E\psi(u_0U)) < \frac{\epsilon}{2}$$

לאחר שבחרנו את u_0 אז קיים $N \geq 1$ כך שלכל $n \geq N$

$$\frac{1}{\alpha}(1-E\Re(\psi_n(u_0U))) < \frac{1}{\alpha}(1-E\Re(\psi(u_0U))) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

(מכיוון ש-$E\Re(\psi_n(u_0U)) \to E\Re(\psi(u_0U))$). עכשיו, לכל $n = 1,\ldots,N-1$ קיים $u_n > 0$ כך ש-

$$P\left(|X_n| > \frac{1}{u_u}\right) < \epsilon$$

לכן אם ניקח עכשיו

$$K = \max\left(\frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1}, \ldots, \frac{1}{u_{N-1}}\right)$$

נקבל כי לכל $n \geq 1$ מתקיים כי

$$P(|X_n| > K) < \epsilon$$

מכיוון שאפשר לעשות זאת לכל $\epsilon > 0$ קיבלנו כי לכל $\epsilon > 0$ קיים K (סופי) כך ש-$P(|X_n| > K) < \epsilon$, כלומר, סדרת ההתפלגויות F_n הדוקה. לכן גם כל תת סדרה היא הדוקה ולכן, ממשפט Helley קיימת תת-תת סדרה ששואפת בהתפלגות לאיזושהי פונקצית התפלגות F. מכיוון שכבר ראינו כי כאשר יש שאיפה בהתפלגות אז גם הפונקציות האופייניות שואפות אז הפונקציה האופיינית של הגבול היא הגבול של הפונקציות האופייניות. אך מהנחת המשפט, גבול זה הוא ψ ולכן הפונקציה האופיינית של F היא ψ. בפרט זה מראה כי ψ היא פונקציה אופיינית של התפלגות כלשהי.

לבסוף, ממשפט היחידות נובע כי לכל תת סדרה של F_n קיימת תת-תת סדרה ששואפת בהתפלגות לאיזושהי פונקצית התפלגות, אך מכיוון שהפונקציה האופיינית היא ψ לכל תת-תת סדרה כזו, קיבלנו כי תת-תת הסדרה בהכרח שואפת בהתפלגות ל-F. כלומר, לכל תת סדרה של F_n קיימת תת-תת סדרה של F_n ששואפת ל-F. ממה שראינו בעבר, זה שקול לכך ש-F_n שואפת בהתפלגות ל-F.

דוגמה: משפט הגבול המרכזי. הוכחה של משפט הגבול המרכזי

בתרגיל בית תראו כי אם $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ אז

$$\psi_Z(t) = e^{-t^2/2}$$

כמו כן, אם תפתרו את תרגיל הרשות תגלו כי אם $z_n \to z$ (מספרים מרוכבים) אז

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$$

כאשר e^z מוגדרת כפונקציה מרוכבת של מספר מרוכב.

נניח אם כן כי $X_1, X_2, \ldots,$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים עם $EX_1^2 = 1$ ו-$EX_1 = 0$ ונסמן ב-ψ את הפונקציה האופיינית שלהם. אז

$$\psi_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \psi^n(t)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &\equiv \psi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \psi_{\sum_{k=1}^n X_k}(t/\sqrt{n}) = \psi(t/\sqrt{n})^n \\ &= (1+\psi(t/\sqrt{n})-1) = \left(1+\frac{1}{n}\frac{\psi(t/\sqrt{n})-1}{(t/\sqrt{n})^2/2}\frac{t^2}{2}\right)^n\end{aligned}$$

עכשיו, מכיוון ש-$EX_1^2 < \infty$ אז ψ גזירה ברציפות פעמיים ומתקיים כי $\psi'(0) = iEX = 0$ ו-$\psi''(0) = (i)^2EX^2 = -1$. עכשיו $\Re(\psi)$ ו-$\Im(\psi)$ גם גזירות ברציפות פעמיים. הנגזרת הראשונה של שניהם היא אפס ואילו הנגזרת השניה היא -1 ואפס בהתאמה. לכן אם נבצע את כלל לופיטל עבור הקוסינוס והסינוס בנפרד נקבל כי כלל לופיטל תופס גם עבור ψ, דהיינו

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)-1}{t^2/2} = \lim_{t\to 0}\frac{\psi'(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\psi''(0) = -1$$

היינו צריכים להשתמש בכלל לופיטל פעמיים מכיוון ש-$\psi'(0) = 0$. מכאן נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(t/\sqrt{n})-1}{(t/\sqrt{n})^2/2} = -1$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\psi(t/\sqrt{n})-1}{(t/\sqrt{n})^2/2}\frac{t^2}{2}\right) = -\frac{t^2}{2}$$

ואם ניקח $z_n = \frac{\psi(t/\sqrt{n})-1}{(t/\sqrt{n})^2/2}\frac{t^2}{2}$ נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}z_n\right)^n = e^{-t^2/2}$$

אם נסמן $\psi(t) = e^{-t^2/2}$ אז קיבלנו כי

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\psi_n(t) &= \psi(t) \\ \lim_{t\to 0}\psi(t) &= \lim_{t\to 0}e^{-t^2/2} = 1\end{aligned}$$

ואילו שני התנאים של משפט הרציפות. המסקנה היא כי קיימת פונצקית התפלגות F עם פונקציה אפיינית ψ כך שסדרת ההתפלגויות שואפות בהתפלגות ל-F. מכיוון ש-$\psi(t) = e^{-t^2/2}$ אז ממשפט היחידות אנו יודעים כי בהכרח F היא ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית וקיבלנו כי

$$F_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k} \xrightarrow{d} \Phi$$

כאשר Φ היא ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית. מכיוון שהתפלגות זו היא רציפה, אז כל הנקודות הן נקודות רציפות וקבלנו איפה כי

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \leq x\right) = \Phi(x)$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. אם נסמן ב-$\bar{X}_n$ את הממוצע אז נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

עכשיו, אם X_n הם בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $EX_1^2 < \infty$, $EX_1 = \mu$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 > 0$ אז $\frac{X_n - \mu}{\sigma}$ הם משתנים מקריים המתפלגים נורמלית שתוחלתם 0 ושונותם 1. הממוצע שלהם הוא

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$$

ולכן קבלנו את משפט הגבול המרכזי באופן יותר כללי:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

תוצאות נוספות (ללא הוכחה): נניח כי F היא התפלגות של משתנה מקרי סופי עם פונקציה אופיינית ψ.

1. אם $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|dt < \infty$ אז F גזירה ברציפות על $\mathbb{R}$ (הנגזרת במקרה זה היא גם הצפיפות) ומתקיים כי

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\psi(t)dt$$

במקרה זה מתקיים כי

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}F'(x)dx$$

הנוסחה הראשונה היא נוסחת ההיפוך של Fourier (מי ששמע פעם שיש דבר כזה שקוראים לו טורי Fourier וטרנספורם Fourier). למעשה פונצקיות אופייניות הן הכללה של הרעיון של טרנספורם Fourier.

2. מתקיים כי

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\psi(t)|^2 dt = \sum_x (\Delta F(x))^2$$

ומכאן שהגבול בצד שמאל הוא אפס אם ורק אם F רציפה (אך לא בהכרח בעלת צפיפות, למשל, עבור פונצקית דיריכלה הגבול הוא אפס).

3. מתקיים כי

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\psi(t)dt = \Delta F(x)$$

דהיינו, הגבול בצד שמאל הוא $P(X = x)$.