הסתברות 1 – תרגול 2

25 באוקטובר 2018

1 הסתברות מותנית

תזכורת יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. יהיו A, B שני מאורעות כך ש $P(A) > 0$ אז

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

היא ההסתברות של המאורע B, בהינתן שידוע לנו ש-A קרה.

כמה הערות:

- ברגע שידוע לנו שמאורע A התקיים פונקצית ההסתברות המקורית קצת פחות רלוונטית. נרצה להגדיר פונקצית הסתברות חדשה ומעודכנת (הוכחנו בכיתה שזו אכן פונקצית הסתברות);

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

ההסתברות המותנית של B היא ההסתברות המקורית של $A \cap B$ שהרי לאור המידע החדש $P(B \cap A^c) = 0$. אם ניקח רק את ההסתברות של החיתוך לא נקבל פונקצית הסתברות ולכן מחלקים ב $P(A)$ לצורך נרמול (כדי ש $P_A(\Omega) = 1$).

- זהו נושא קצת מבלבל ולא אינטואיטיבי. כאן יותר מתמיד אסור לסמוך על האינטואיציה (לפחות בהתחלה).

- ניתן להתנות ביותר ממאורע אחד, למשל, אם A_1, A_2 מאורעות כך ש $P(A_i) > 0$ אזי

$$P_{A_1}(B|A_2) = P_{A_1 \cap A_2}(B) =: P(B|A_1, A_2)$$

- במקרים רבים ניתן לפתור שאלות של הסתברות מותנית על סמך מידע חלקי בלבד. כלומר, לא צריך לדעת מהו מרחב המדגם במלואו אלה רק הסתברויות מסוימות כדי לפתור את השאלה.

ראה דוג' 3 בתרגול

דוגמא 1

מטילים מטבע הוגן פעמיים. חשבו את ההסתברות שקיבלנו פעמיים ראש, בהנתן ש: (א) בהטלה הראשונה קיבלנו ראש (ב) לפחות בהטלה אחת קיבלנו ראש?

הערה: בגלל מ״מ ת פתרון נוסף של $\frac{|B\cap A|}{|A|}$

פתרון:

מה שמונה ל

$$\left\{\begin{array}{l} F = \{HH, HT\} \\ B = \{HH\} \end{array}\right.$$

איבר 1 מונה

נתחיל מלבנות מרחב הסתברות שמתאר נכוחה את השאלה. ניקח

$$\Omega = \{H,T\}^2 = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ואת $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ להיות הסתברות אחידה. נסמן ב $B = \{HH\}$ המאורע שיצאו שני ראשים, ב $F = \{HH, HT\}$ המאורע שיצא ראש ראשון, ו $A = \{HH, HT, TH\}$ המאורע שיצא לפחות ראש אחד. אז ההסתברות עליה אנחנו נשאלים ב (א) היא

$$P(B|F) = \frac{P(F\cap B)}{P(F)} = \frac{P(\{H,H\})}{P(\{HH, HT\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$|F| = 2$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A\cap B|}{|A|}$$

עבור (ב) נקבל

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{H,H\})}{P(\{H,H\},\{H,T\},\{T,H\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

כך שקיבלנו, באופן מעט מפתיע אולי, שההסתברות שיצא פעמיים ראש בהנתן שיצא ראש בפעם הראשונה גדולה מההסתברות שיצא פעמיים ראש בהנתן שיצא לפחות ראש אחד.

דוגמא 2

זורקים שתי קוביות הוגנות שונות. נתון שסכום התוצאות שהתקבלו גדול מ 10. מה ההסתברות שבקובייה הראשונה יצא המספר 6?

פתרון:

ובכן, ניקח את $\Omega = \{1, 2, .., 6\}^2$ ונצייד אותו בפונקציית ההסתברות האחידה. נסמן ב A את המאורע שסכום התוצאות שהתקבלו גדול מ 10. נסמן ב B את המאורע שבקובייה הראשונה יצא המספר 6. אז $A = \{(6,6),(5,6),(6,5)\}$, $B = \{(6,i) : 1 \le i \le 6\}$ וכן $A \cap B = \{(6,6),(6,5)\}$. לכן,

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega}} = \frac{|A\cap B|}{|A|} = \frac{2}{3}$$

דוגמא 3

שמוליק מחפש מכתב מביטוח לאומי, זכור לו במעורפל ששם את המכתב בשולחן העבודה שלו. נניח שההסתברות שהמכתב יהיה בשולחן הוא $0 < p < 1$. בשולחן n מגירות בהם מפוזרת בערבוביה (אחידה) ניירת. נניח ששמוליק בדק את k המגירות הראשונות ($k < n$) ולא מצא את המכתב. מהי ההסתברות שהמכתב נמצא בשולחן?

פתרון:

נסמן ב A את המאורע בו המכתב נמצא בשולחן. ונסמן ב B_k את המאורע בו שמוליק בדק את k המגירות הראשונות ולא מצא את המכתב. אזי $P(A) = p$ לכל מגירה הסתברות השווה ל p/n ולכן ולכן

$$P(B_k) = 1 - P(B_k^c) = 1 - \frac{kp}{n}$$

בנוסף, $A \cap B_k$ הינו המאורע בו המכתב נמצא באחד מ $n - k$ המקומות הנותרים ולכן $P(A \cap B_k) = \frac{(n-k)p}{n}$. ומכאן ש

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} = \frac{(n-k)p}{n - kp}$$

שימו לב, ככל ש k (מספר המגירות שבדקנו) מתקרב ל n כך קטן הסיכוי למצוא את המכתב.

כעת נניח ש $p = 3/4$ ו $n = 10$, שמוליק החליט באופן מתודי להפסיק את החיפוש כאשר ההסתברות למצאו קטנה מ $1/4$. מהו מספר שמגירות המקסימלי שעליו לפתוח כדי לסיים את החיפוש?

לעולן הצגמנוות
כאשר כותבים מספרים
לפרמלרים

תשובה: נציב בנוסחה למעלה -

$$P(A|B_k) = \frac{(10-k)\frac{3}{4}}{10 - k\frac{3}{4}} < \frac{1}{4} \iff k > 89/11$$

ולכן מספיק לבדוק 8 מגירות.

2 חוק ההסתברות השלמה

חוק ההסתברות השלמה: נניח כי $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, כשה־$(A_n)$ זרות זו לזו ומתקיים $P(A_j) > 0$ לכל j. אז לכל מאורע B מתקיים

$$P(B) = \sum_j P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)$$

דוגמא 4

נתונים 3 יצרנים של מחשבים - מחשבים מסוג 1, סוג 2, סוג 3. אחוז המחשבים מסוג 1 בשוק הוא 50%, אחוז המחשבים מסוג 2בשוק הוא 30%, אחוז המחשבים מסוג 3 הוא 20%. ידוע שמחשב מסוג 1 יתקלקל בשנה הראשונה בהסתברות $\frac{1}{10}$, שמחשב מסוג 2 יתקלקל בשנה הראשונה בהסתברות $\frac{1}{5}$, שמחשב מסוג 3 יתקלקל בשנה הראשונה בהסתברות $\frac{15}{100}$.אם מחשב נקנה באופן אקראי, מה ההסתברות שיתקלקל בשנה ראשונה?

בחזרה לדוגמא נסמן ב־C_j את המאורע "קיבלנו המחשב מסוג j", וב־B המאורע "המחשב יתקלקל בשנה ראשונה". הנתונים הם:

$$P(C_1) = 0.5,\ P(C_2) = 0.3,\ P(C_3) = 0.2$$

$$P(B \mid C_1) = 0.1,\ P(B \mid C_2) = 0.2,\ P(B \mid C_3) = 0.15$$

המאורעות C_1, C_2, C_3 זרים, ואיחודם מכסה את מרחב המדגם. מכלל ההסתברות השלמה:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(B \mid C_j)P(C_j) = 0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.15 = 0.14$$

דוגמא 5

בדיקת פוליגרף משטרתית מגלה שקרן בהסתברות 0.8 ומגלה שאדם דובר אמת בהסתברות 0.9. ידוע ש 0.7 מהנבדקים בבדיקה משקרים. נרצה לחשב מה ההסתברות שאדם יוכרז כ "דובר אמת" במכונה.

פתרון:

נסמן ב A את המאורע שהאדם דובר אמת, ב B את המאורע שהוא דובר שקר, ב A' את המאורע שהאדם הוכרז כדובר אמת וב B' את המאורע שהאדם הוכרז כדובר שקר. לפי נוסחת ההסתברות השלמה, היות והאדם הוא דובר אמת או דובר שקר,

$$P(A') = P(A'|A)P(A) + P(A'|B)P(B).$$

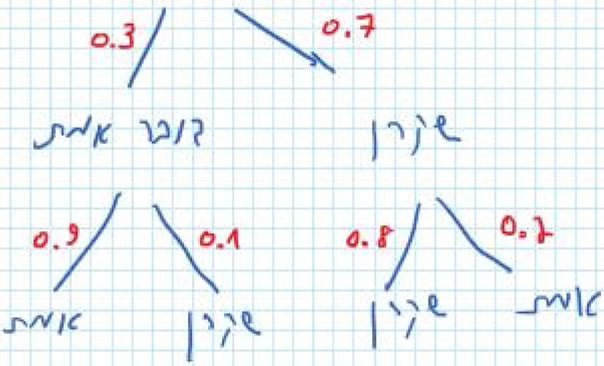
ידוע ש $P(B'|B) = 0.8$ וכן ש $P(A'|A) = 0.9$. מכיוון ש $P(B'|B) + P(A'|B) = 1$ (מדוע זה נכון?) אז $P(A'|B) = 0.2$. לבסוף, ידוע ש $P(B) = 0.7$ ולכן $P(A) = 0.3$. לכן,

$$P(A') = P(A'|A)P(A) + P(A'|B)P(B) = 0.9 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.41$$

נתאר את הניסוי גרפית:

I [האדם משקר או דובר אמת]

II [מכונה נותנת תשובה אמת/שקר]



A = דובר אמת   A' = מכונה קבעה שהוא דובר אמת

B = דובר שקר   B' = מכונה קבעה דובר שקר

יצא אמת במכונה $0.3 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.2$ =

נשים לב כי

P[יצא אמת | שקרן] + P[יצא שקר | שקרן] = 1

מכיוון ש $P(B'|B) + P(A'|B) = 1$