השמטתי את הכמתים הלוגיים

כך:

∀ לכל $\cap$

∃ קיים $\cup$

ובינתיים רק שלב 1 את לכל $\epsilon>0$ השמטתי ל $\cap_{\epsilon>0}$



# הסתברות 1 - תרגול 11
# סדרות של מ"מ

27 בדצמבר 2018

ראשית, נזכר בהגדרה שניתנה בכיתה:

**הגדרה 0.1** תהי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מ"מ .
נאמר כי הסדרה $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת למ"מ $X$ כמעט תמיד ונסמן $X_n \overset{a.s.}{\to} X$ אם

$$P(\lim_n X_n = X) = 1$$

נאמר כי הסדרה $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת למ"מ $X$ בהסתברות ונסמן $X_n \overset{p}{\to} X$ אם לכל $\epsilon > 0$

$$\lim_n P(|X_n - X| \leq \epsilon) = 1$$



נפתח את ההגדרות:

$$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega) \iff \forall\epsilon, \exists N\, s.t. \forall n \geq N\, |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon$$

ולכן

$$\begin{aligned} P(\lim_n X_n = X) &:= P\left(\left\{\omega\in\Omega \,|\, \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) \\ &= P\left(\{\omega\in\Omega \,|\, \forall\epsilon, \exists N\, s.t. \forall n\geq N\, |X_n(\omega)-X(\omega)|<\epsilon\}\right) \\ &= P\left(\cap_{\epsilon>0}\{\omega\in\Omega \,|\, \exists N\, s.t. \forall n\geq N\, |X_n(\omega)-X(\omega)|<\epsilon)\}\right) = 1 \end{aligned}$$

הערה לעיל

נסיק שלכל $\epsilon > 0$

$$P\left(\{\omega\in\Omega \,|\, \exists N\, s.t. \forall n\geq N\, |X_n(\omega)-X(\omega)|<\epsilon)\}\right) = 1$$

נסמן

$$A_{n,\epsilon} = \{\,|X_n - X| < \epsilon)\} := \{\omega\in\Omega \,|\, |X_n(\omega)-X(\omega)|<\epsilon\}$$

(החל מעתה נשמיט את ה $\omega$ מהסימון לשם הנוחות) אזי

$$\{\omega\in\Omega \,|\, \exists N\, s.t. \forall n\geq N\, |X_n(\omega)-X(\omega)|<\epsilon)\} = \{A_{n,\epsilon}\, a.e.\} := \liminf_n A_{n,\epsilon}$$

הניתוח לעיל מאפשר לי
להתחשב בלמות של בורל

כאן לא ניתן להמיר את
הביטוי לבולים שמגדירה A i.o
A a.e

ולכן קיבלנו את התנאי

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff \forall\epsilon > 0\, P(A_{n,\epsilon}\, a.e) = P(\liminf_n A_{n,\epsilon}) = 1$$

באופן דומה

$$X_n \xrightarrow{p} X \iff \lim_n P(|X_n - X| \le \epsilon) = 1 \iff \liminf_n P(A_{n,\epsilon}) = 1$$

האפיון לעיל רומז שהלמה של בורל־קנטלי רלוונטיות מאוד לדיון. הנה דוגמא לטיעון בסגנון:

**טענה 0.2** נניח כי לכל $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) < \infty$$

אזי $X_n \xrightarrow{a.s.} X$. בפרט אם $\sum_n E(|X_n - X|) < \infty$ אז $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

**הוכחה:** נסמן $B_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| > \epsilon\}$. אזי, מההנחה $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_{n,\epsilon}) < \infty$ ולכן מהלמה הראשונה של בורל קנטלי נסיק כי $P(B_{n,\epsilon}\, i.o.) = 0$. בפרט,

$$P\left((B_{n,\epsilon}\, i.o.)^c\right) = P(\{|X_n - X| \le \epsilon\}\, a.e.) = 1$$

כנדרש. לבסוף, אם $\sum_n E(|X_n - X|) < \infty$ נסיק מא"ש מרקוב

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \le \frac{1}{\epsilon} \sum_n E(|X_n - X|) < \infty$$

ולכן, מהחלק הראשון של הטענה נסיק את הנדרש
נחקור את הקשר בין שני סוגי ההתכנסות, ■

**טענה 0.3** נניח כי $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אזי $X_n \xrightarrow{p} X$.

**הוכחה:** כבר ראינו כי $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אם"ם

$$\forall\epsilon > 0\, P(\liminf A_{n,\epsilon}) = 1 \qquad A_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| < \epsilon\}$$

וכן $X_n \xrightarrow{p} X$ אם"ם

$$\forall\epsilon > 0,\ \liminf_n P(E_n^\epsilon) = 1$$

מהלמה של פאטו

$$P(\liminf_n E_n^\epsilon) \le \liminf_n P(E_n^\epsilon)$$

ולכן אם צד שמאל שווה ל־1 (זאת הנחתנו) אז כך גם צד ימין. ■

הכיוון השני לא נכון, כלומר התכנסות בהסתברות לא גוררת התכנסות כ.ת..

הדוגמה הזו מראה שגם ש $x_n \xrightarrow{P} x$

גם לא אומר

ש $x_n \xrightarrow{a.s} x$

באי:

$$\lim_n P(X_n > \varepsilon) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

**אפלף**

$$P(\overbrace{|X_n > \varepsilon|}^{A_n} \ i.o) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(\lim_n X_n = 0) = P(\overbrace{|X_n < \varepsilon|}^{A_n^c} \ a.e) = 1$$

### ~~דוגמא 1 :~~

תהי $\{X_n\}$ סדרת מ"מ ב"ת עם התפלגות

$$P(X_n = 0) = 1 - 1/n, \quad P(X_n = n) = \frac{1}{n}$$

אזי $X_n \xrightarrow{p} 0$. אכן, לכל $0 < \epsilon < 1$

$$P(X_n \le \epsilon) = 1 - 1/n$$

ומכאן

$$\lim_n P(X_n \le \epsilon) = 1$$

כנדרש. מצד שני, נשים לב כי לכל $\epsilon > 0$

$$P(X_n > \epsilon) = \frac{1}{n} \Longrightarrow \sum_n P(X_n > \epsilon) = \infty$$

והמאורעות $\{X_n > \epsilon\}$ הם בלתי תלויים. מהלמה של בורל קנטלי נסיק כי לכל $\epsilon > 0$

$$P(X_n > \epsilon,\ i.o.) = 1$$

נסיק (מהגדרת הגבול) כי

$$P(\lim_n X_n = 0) = 0 \ne 1$$



בדוגמא זו נעזרנו בכך ש $X_n$ ב"ת. אם נניח קשר מסויים בין ה $X_n$ ינוכל לקבל התכנסות כ.ת כפי שקורה בדוגמא הבאה:

### דוגמא 2 :

נתבונן ב $\Omega = [0,1]$ עם הסתברות - מידת לבג (כלומר הסתברות של כל קטע היא אורכו).
ונתבונן במ"מ

$$X_n = n1_{[0,1/n]},\ X_n(t) = \begin{cases} n & 0 \le t \le 1/n \\ 0 & 1/n < t \le 1 \end{cases}$$

מ"מ מציין של $[0,\frac{1}{n}]$

אזי

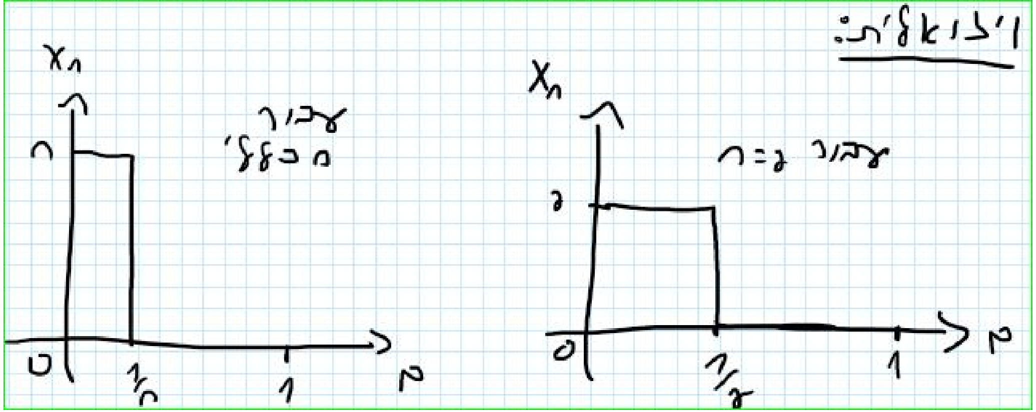
$$P(X_n = 0) = 1 - 1/n, \quad P(X_n = n) = \frac{1}{n}$$

נטען שבמקרה זה

$$X_n \xrightarrow{a.s.} 0$$

(ובפרט יש גם התכנסות בהסתברות) נוכיח כי

$$\forall \epsilon > 0\ P(\liminf A_{n,\epsilon}) = 1 \qquad A_{n,\epsilon} = \{X_n < \epsilon\}$$








הערה:

השתמשנו בשיוון בכיון ההפוך
היות ונביה צריך להכניס את lim
לנושא כדי להוכיח ש $x \xrightarrow{a.s} 0$

**משפט 2.20** (רציפות פונקציית ההסתברות על מאורעות עולים). יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. ותהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה עולה של מאורעות ב-$\mathcal{F}$. אזי מתקיים,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

הערה
שלי? קודם

ניעזר בעובדה שמדובר במאורעות עולים, כלומר ל $n < m$

$$\{X_n < \epsilon\} = (1/n, 1] \subset (1/m, 1] = \{X_m < \epsilon\}$$

ולכן לכל $n$, $\cap_{m\geq n} A_{n,\epsilon} = A_{n,\epsilon}$ ולכן

$$\{A_n \; a.e.\} = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m\geq n} A_{n,\epsilon} = \cup_{n=1}^{\infty} A_{n,\epsilon}$$

ומרציפות המידה לאיחודים עולים,

$$P(\{A_{n,\epsilon} \; a.e.\}) = \lim_n P(A_{n,\epsilon}) = \lim_n (1 - \frac{1}{n}) = 1$$

כנדרש.

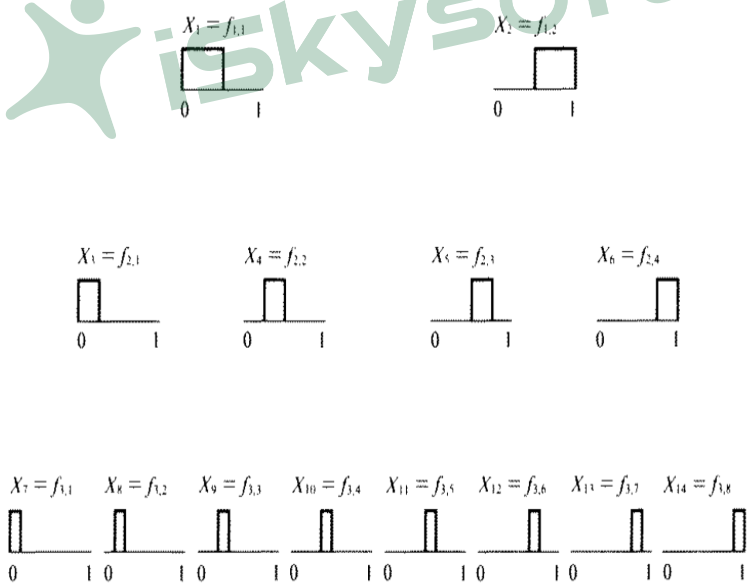
### דוגמא 3:

רק לצייר: $\Omega = (0, 1)$ עם מידת לבג כמקודם. ו $A_{k,j} = ((j-1)2^{-k}, j2^{-k})$ עבור $k \geq 1$ ו $1 \leq j \leq 2^k$

$$f_{k,j} = 1_{A_{k,j}}$$

כעת נסדר אותם בסדרה לפי סדר לקסיפוגרפי כלומר בתור סדרה

$$(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{31}, \ldots)$$




מאחר והסדרה הזו מטיילת על קבוצות קטנות וקטנות יש התכנסות בהסתברות. כלומר

$$\lim_k P(f_{k,j} < \epsilon) = \lim_k 2^{-k} = 0$$

אולם, מאחר והתאים המטיילים עוברים כל נקודה אינסוף פעמים הקבוצה בה קיים הגבול היא ריקה ובפרט בעלת הסתברות 0.

**דוגמא 4 :**

בדוגמא זו, ניתן סדרה של מ"מ בלתי תלויים המתכנסים בהסתברות לאפס אך $\liminf$ שלהם הוא $-\infty$ ו $\limsup$ הוא $\infty$. זה מראה עד כמה חלשה ההתכנסות הזו.
יהיו $H_n \sim Ber(\frac{1}{n})$ ב"ת. נגדיר

$$X_n = (-1)^n n H_n$$

מאחר ו

$$P(X < \epsilon) \leq P(X_n = 0) = P(H_n = 0) = 1 - 1/n \to 1$$

נסיק כי $X_n \xrightarrow{p} 0$.
מצד שני

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty$$

מהלמה השנייה של בורל קנטלי נסיק $P(X_n = n \ i.o.) = 1$ לכן $\limsup X_n = \infty$ בהסתברות 1.
ובאותו אופן $\liminf X_n = -\infty$ בהסתברות 1.

**דוגמא 5 : (חיפוש בינארי אקראי).**

יהיו $X_i \sim Ber(1/2)$ ב"ת. לכל $n$ נגדיר

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i 2^{-i}$$

נסמן $S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 2^{-i}$ (מדוע זה מוגדר היטב?)
ראשית נראה כי $S_n \xrightarrow{a.s} S$ . אכן,

זנב של טור
באינסוף מתכנס $\to 0$

$$|S_n - S| = \sum_{m=n+1}^{\infty} X_m 2^{-m} \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-m} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-m}$$

ולכן לכל $\epsilon > 0$ עבור $m$ גדול דיו

$$P(|S_m - S| < \epsilon) = 1$$

ומכאן הטענה.
נחשב כעת את ההתפלגות של $S$, נוכיח כי $S$ מתפלג אחיד (רציף) על הקטע $[0,1]$.
(כלומר קיבלנו התפלגות רציפה כגבול כ.ת. של התפלגויות בדידות).
ראשית נשים לב כי $X_n$ מתפלג אחיד על הקבוצה

$$\{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}\}$$

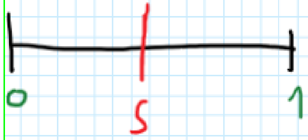
כי כל אחד מה=מאברי קבוצה זו מהצורה $\sum_{i=1}^{n} a_i 2^{-i}$ כאשר $a_i \in \{0,1\}$ ולכל קומבינציה אותה הסתברות $2^{-n}$. נראה שלכל קטע דיאדי מהצורה

$$J = [\frac{k}{2^N}, \frac{l}{2^N}), \quad 0 \leq k \leq l \leq 2^{n-1}$$

נגדיר n עבור בה"ת $X_i \sim ber(\frac{1}{2})$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot 2^{-i}$$

נסמן $S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 2^{-i}$ מתנהג כמו פיתוח בינארי אקראי




אני כל פעם מחצה את הקטע

שלי ל-2 ושואל באיזה צד

נמצא S בסיכוי ½ להיות

צודק

הסתברות של קטע = לאורכו (מידת לבג)

מתקיים

$$P(S \in J) = |J| = \frac{l-k}{2^N}$$

אכן, לכל $n$ גדול דיו

$$\frac{k}{2^N} = \frac{k2^{n-N}}{2^n}, \quad \frac{l}{2^N} = \frac{l2^{n-N}}{2^n}$$

כלומר עבור $n$ גדול דיו קצוות הקטע שייכים ללקבוצת הערכים של $S_n$. בפרט

$$\begin{aligned} P(S_n \in J) &= \frac{1}{2^n}\#\left(\{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}\} \cap J\right) \\ &= \frac{(l-k)2^{n-N}}{2^n} = \frac{l-k}{2^N} = |J| \end{aligned}$$

מאחר והוצאה לא תלויה ב $n$ (קבועה החל משלב מסוים) נסיק שגם

$$P(S \in J) = |J|$$

כעת, כל קטע הוא איחוד זר של קטעים דיאדיים מהצורה לעיל ולכן מחיבוריות המידה לאיחודים זרים בני־מנייה נסיק את הטענה.



### המשך דוגמא:

נתבונן בסכום דומה

$$S_n = \sum_n X_i 3^{-i}, \quad P(X_i = 0) = P(X_i = 2) = 1/2$$

גם הפעם, מאותם שיקולים

$$S_n \overset{a.s.}{\to} S := \sum_{n=1}^{\infty} X_i 3^{-i}$$

מהי התפלגות של הגבול? הפעם נקבל התפלגות אחידה על קבוצת קנטור (צריך קצת לעבוד כדי להגדיר בכלל מה זה אומר). אם עוד לא שמעתם על קבוצת קנטור אני ממליץ להציץ לויקיפדיה.