הסתברות 1 ־ תרגול 12

3 בינואר 2019

נושא נוסף־ חוסר זכרון

משתנים מקריים רציפים

הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה נאמר שמשתנה מקרי X הוא רציף בהחלט אם קיימת פונקציה $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ אינטגרבילית כך שלכל $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx$$

f_X נקראת הצפיפות של X. נשים לב כי לכל $x \in \mathbb{R}$ ההתפלגות המצטברת נתונה ע"י

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

מתקיים תנאי נרמול :

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt = 1$$

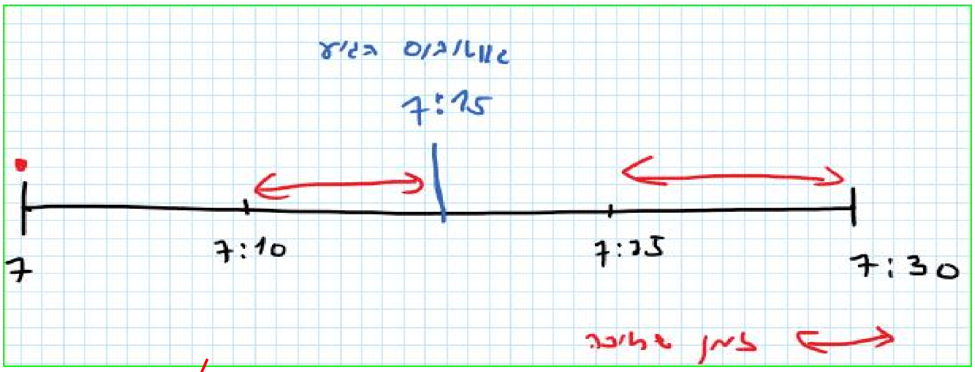
כמו כן, פונקצית ההתפלגות המצטברת F_X היא רציפה. בפרט $P(X = a) = 0$ לכל $a \in \mathbb{R}$ (ראיתם בכיתה).

טענה שימושית שהוכחה בכיתה:

טענה 0.1 יהי X מ"מ בעל צפיפות f_X ותהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית ממש וגזירה. אזי $Y = g(X)$ מ"מ בעל צפיפות

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(y)|}, \qquad x = g^{-1}(y)$$

בתרגול זה נעבור על שלוש התפלגויות נפוצות. התפלגות אחידה, גיאומטרית ונורמלית.



ההתפלגות האחידה

הגדרה משתנה מקרי רציף X מתפלג אחיד בקטע $[a,b]$ ונסמן $X \sim Unif([a,b])$ אם

$$f_X(x) = \frac{1_{[a,b]}(x)}{b-a}$$

במצב הזה נסמן $X \sim U([a,b])$.

דוגמא אוטובוס מגיע לתחנה כל 15 דקות החל משעה עגולה (כולל). אדם מגיע לתחנה בין $7:00$ ל $7:30$, וזמן ההגעה שלו מפולג באופן אחיד. מה ההסתברות שהוא יחכה פחות מ 5 דקות?

יהא X המשתנה המקרי שמתאר את זמן ההגעה של האדם בדקות אחרי 7:00. אז $X \sim Unif([0,30])$. יהא Y המשתנה המקרי שמתאר את הזמן בו האדם חיכה. אז

$$P(Y \le 5) = P(\{X=0\} \bigcup \{10 \le X \le 15\} \bigcup \{25 \le X \le 30\})$$

$$= P(X=0) + P(10 \le X \le 15) + P(25 \le X \le 30) = 0 + \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

נחשֵב כעת כמה גדלים רלוונטים:

טענה 0.2 יהי $X \sim Unif([a,b])$ אזי

$$E(X) = \frac{a+b}{2},\ Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12},\ M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

וכן

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t \le b \\ 1 & t > b \end{cases}$$

הוכחה:

$$E(X) = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)}|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

וכן

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

ולכן

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

לבסוף

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b \frac{e^{tx}dx}{b-a} = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$$

הערה: לכל $\alpha > 0$ ו $\beta \in \mathbb{R}$

$$Y = \alpha X + \beta \sim Unif([\alpha a + \beta, \alpha b + \beta])$$

אכן, ניעזר בטענה לעיל, נגדיר

$$g(x) = \alpha x + \beta, \quad Y = g(X)$$

$g(x) \circ g^{-1}(x) = 1$

$g(x) = \alpha x + \beta = t$

$\Updownarrow$

$g^{-1}(t) = \frac{t-\beta}{\alpha}$

אזי

$$f_Y(t) = \frac{f_X(g^{-1}(t))}{\alpha} = \frac{1_{[a,b]}(\frac{t-\beta}{\alpha})}{\alpha(b-a)} = \frac{1_{[\alpha a+\beta, \alpha b+\beta]}}{\alpha(b-a)}$$

כנדרש!

התפלגות מעריכית

הגדרה מ"מ ר X מתפלג מעריכית (או אקספוננציאלית) עם פרמטר λ , $X \sim Exp(\lambda)$, אם פונקציית הצפיפות שלו נתונה ע"י

$$f_X(x) = 1_{[0,\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}$$

לכן, פונקציית ההתפלגות המצטברת של X נתונה ע"י $F_X(x) = 0$ עבור $x \leq 0$ ועבור $x > 0$ נקבל

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

לכן

$$F_X(t) = \max(1 - e^{-\lambda t}, 0)$$

התפלגות זו היא המקבילה הרציפה להתפלגות הגיאומטרית. היא מתארת היטב את הזמן שחולף עד להתרחשות בתנאי חוסר זכרון. למשל, הזמן עד כניסת לקוח לחנות או הזמן עד להתפרקות אטום אורניום.

דוגמא נניח שזמן שיחת טלפון בדקות הוא מ"מ $X \sim Exp(\frac{1}{10})$. מה ההסתברות ששיחה נתונה תמשך יותר מ 10דקות?

נחשב:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - (1 - e^{-\frac{10}{10}}) = e^{-1}$$

טענה 0.3 יהי $X \sim Exp(\lambda)$. אזי

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2},\ M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}\,(t < \lambda)$$

כמו כן, לכל $\alpha > 0$ מתקיים

$$\alpha X \sim Exp(\lambda/a)$$

הוכחה:

$$E(X) = \int_0^\infty s\lambda e^{-\lambda s} ds = -se^{-\lambda s}|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda s} = 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

כמו כן,

$$E(X^2) = \int_0^\infty \lambda s^2 e^{-\lambda s} ds = \left[-s^2 e^{-\lambda s}\right]_0^\infty - \int 2s(-e^{-\lambda s})ds$$
$$=0 + 2\int se^{-\lambda s} = \frac{2E(X)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

ומכאן

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

עבור $t < \lambda$ מתקיים

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{ts}\lambda e^{-\lambda s} = \int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)s} ds = \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)s}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

לבסוף

$$F_{\alpha X}(t) = F_X(\frac{t}{\alpha}) = \max(1 - e^{-\lambda t/\alpha}, 0)$$

נוכיח את תכונת חוסר הזכרון של מ"מ אקספוננציאלי.

טענה אם $X \sim Exp(\lambda)$ אזי המ"מ $Y = (X - x_0|X > x_0)$ מקיים $Y \sim Exp(\lambda)$.

הוכחה: נחשב את ההתפלגות השיורית

$$\bar{F}_Y(t) = P(X - x_0 > t|X > x_0) = \frac{\bar{F}_X(t + x_0)}{\bar{F}_X(x_0)} = \frac{e^{-\lambda(t+x_0)}}{e^{-\lambda x_0}} = e^{-\lambda t}$$

וזוהי התפלגות שיורית של מ"מ אקספוננציאלי ומכאן הטענה. ■

הכיוון השני קצת יותר קשה ונוותר עליו כרגע.

התפלגות נורמלית

הגדרה 0.4 נאמר שמ"מ X מתפלג נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2 ונכתוב $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אם צפיפותו היא

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

אם $\mu = 0$ ו $\sigma = 1$ נאמר ש X נורמלי סטנדרתי.
התפלגות נורמלית דומה להתפלגות בינומית עבור מספר רב של ניסויים והיא מתארת מ"מ אשר נקבעים כסכום של מספר רב של גורמים ב"ת (בקירוב). למשל, כמות הגשם שירדה בשנה שעברה או גובהו של אדם מקרי באוכלוסיה.
נסמן מעתה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של $X \sim N(0,1)$ ב

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

טענה 0.5 יהי $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, אזי

$$E(X) = \mu \qquad F_X(t) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}),$$
$$Var(X) = \sigma^2 \qquad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

הוכחה:
ראשית נעיר כי פונקציית הצפיפות מוגדרת היטב. עבור $Y = N(0,1)$ =

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = (t = x/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

השוויון האחרון הוא חישוב שלא נעשה כעת (מתבסס על אינטגרציה דו־מימדית וקאורדינטות פולריות) ותראו אותו כנראה רק בסמסטר הבא.
עבור $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ החישוב הנ"ל נובע מיידית מחילוף משתנה

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = (t = \frac{x-\mu}{\sigma}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 1$$

נשים לב שחילוף משתנה זה נותן לנו מיד ש

$$F_X(t) = \Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$$

נחשב ראשית את התוחלת והשונות עבור $Y \sim N(0,1)$ ולאחר מכן נסיק למ"מ נורמלי כללי.

ראשית נראה שהתוחלת מוגדרת היטב:

$$E(|Y|)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|s|e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}se^{-\frac{s^2}{2}}ds$$
$$=(t=s^2/2)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-t}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

כעת, נשים לב שהפונקציה $xf_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}$ היא אי זוגית ולכן

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0}xf_X(x)dx+\int_{0}^{\infty}xf_X(x)dx=0$$

נחשב שונות:

$$Var(X)=E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,,(u=x,-v=e^{-\frac{x^2}{2}})$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

כעת, יהי $Y\sim N(0,1)$ ונגדיר $X=\sigma Y+\mu$. כך ש $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ אזי מלינאריות התוחלת, $E(X)=\mu$ וכן

$$Var(X)=\sigma^2Var(Y)+0=\sigma^2$$

נותר אם כן להראות כי $X\sim N(\mu,\sigma)$. אכן, נגדיר $g(y)=\sigma y+\mu$. אזי $X=g(Y)$ ולכן (מהטענה בתחילת השיעור)

$$f_X(t)=\frac{f_Y(g^{-1}(t))}{|g'(t)|}=\frac{f_Y(\frac{t-\mu}{\sigma})}{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

כנדרש!

את שאר החלקים בטוח לא נספיק..