הסתברות 1 – תרגול 3

1 בנובמבר 2018

תזכורת יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. יהיו A, B שני מאורעות כך ש $P(A) > 0$ אז

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

1 חוק בייס

חוק בייס: יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. ו A, B מאורעות המקיימים $P(A), P(B) > 0$, אזי

$$P(B \mid A) \cdot P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

דוגמא 1

במבחן אמריקאי לכל שאלה יש ארבע תשובות אפשריות. סטודנט פותר מבחן אמריקאי. כאשר הוא נתקל בשאלה עליה הוא לא יודע את התשובה, הוא בוחר תשובה באופן מקרי (כלומר בהסתברות אחידה). נניח שהסטודנט יודע 60% מהחומר. נסמן ב־B את המאורע שהסטודנט יודע לענות על השאלה הראשונה (כלומר יודע את החומר הרלוונטי), וב־A את המאורע שהסטודנט ענה נכון על השאלה הראשונה. אז לפי הנתון $P(B) = 0.6$ וכן $P(A|B) = 1$, $P(A|B^C) = \frac{1}{4}$. מכאן ההסתברות של המאורע A היא, לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^C)P(B^C) = 1 \cdot 0.6 + \frac{1}{4} \cdot 0.4 = 0.7.$$

נניח כעת שהסטודנט ענה נכון על השאלה הראשונה. ההסתברות שהוא אכן ידע את התשובה לשאלה היא, לפי חוק בייס,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{6}{7}.$$

נשים לב למה $P(A|B^c)$:

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) \cdot P(B^c)}{P(B^c)}$$

גם לא לדעת את
בחומר וגם לטעות בין אלו מאורעות צריך כי הם לא תלויים אחד בשני

דוגמא 2:

טכנאית אחראית על מערכת כלשהי ובה שני רכיבים א ו־ב. נסמן את המאורעות $A = \{$רכיב א תקין היום$\}$ ו־$B = \{$רכיב ב תקין היום$\}$. מניסיונה של הטכנאית מתקיים בכל יום:

$$\mathbb{P}(A) = 0.9,\ \mathbb{P}(B|A) = 0.8,\ \mathbb{P}(B|A^c) = 0.5$$

נחשב:

1. מהי ההסתברות שרכיב ב תקין היום?
2. מהי ההסתברות ששני הרכיבים תקינים היום?
3. בהנתן זה שישנה תקלה במערכת מהי ההסתברות שרכיב א תקול?
4. בהנתן זה שרכיב ב' תקין מהי ההסתברות שרכיב א' תקין?

<u>פתרון:</u> 1. מנוסחאת ההסתברות השלמה מתקיים:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\,\mathbb{P}(A^c) = 0.8 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.77$$

2. נשתמש בהגדרה של ההסתברות המותנה:

$$0.8 = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{0.9} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0.8 \cdot 0.9 = 0.72$$

3. המאורע "ישנה תקלה במערכת" הינו המאורע $A^c \cup B^c$. נבחין כי מתקיים $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ ולכן:

$$\mathbb{P}(A^c \cup B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.28$$

ומכאן:

$$\mathbb{P}(A^c|A^c \cup B^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap (A^c \cup B^c))}{\mathbb{P}(A^c \cup B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(A^c \cup B^c)} = \frac{0.1}{0.28} \approx 0.36$$

4. נשתמש בנוסחת $Bayes$:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.9}{0.77} \approx 0.94$$

2 אי תלות

הגדרה יהא (Ω, P) מרחב הסתברות. שני מאורעות A, B הם בלתי תלויים (נכתוב בדרך כלל ב"ת) אם מתקיים

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

הערה חשובה אי תלות של מאורעות לא גוררת שהם זרים! בתרגיל תדונו עוד ביחסים בין שתי ההגדרות הנ"ל. שימו לב שאם $P(B) > 0$ זה שקול ל $P(A|B) = P(B)$, כלומר התנייה ב B לא תשנה את ההסתברות, ובאופן דומה, אם $P(A) > 0$ אז $P(B|A) = P(B)$.

דוגמא 3

בכד נמצאים 3 מטבעות - שניים מהם הוגנים, ואילו על השלישי מסומן H (כלומר "עץ") על שני הצדדים. נניח שבוחרים מטבע אחד באופן מקרי ומטילים אותו פעמיים. נסמן את המאורע $A_i, i = 1, 2$ להיות המאורע שבו יצא בהטלה ה-i "עץ". האם המאורעות הנ"ל הם ב"ת?

כדי לענות על השאלה הזאת, נחשב את שני הביטויים בהגדרה בנפרד ונבדוק האם הם שווים. נסמן ב D את המאורע ששלפנו מטבע הוגן מהכד. לפי הנתון $P(D) = \frac{2}{3}$. כמו כן,

$$P(A_1|D) = \frac{1}{2}, P(A_1|D^C) = 1.$$

לפי נוסחת ההסתברות השלמה,

$$P(A_1) = P(A_1|D)P(D) + P(A_1|D^C)P(D^C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

קל לראות שנקבל בדיוק מאותו החישוב ש $P(A_2) = \frac{2}{3}$. מצד שני,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2|D)P(D) + P(A_1 \cap A_2|D^C)P(D^C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

אבל $P(A_1) \cdot P(A_2) = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$. לכן, המאורעות הנ"ל **אינם** בלתי תלויים.

המאורעות תלויים זה בזה

דוגמא 3

מטילים שתי קוביות הוגנות. יהא E_1 המאורע "סכום הקוביות יצא 6", ויהא E_2 המאורע "סכום הקוביות יצא 7". יהא F המאורע "הקובייה הראשונה יצאה 4". האם המאורעות E_1 ו F ב"ת? האם המאורעות E_2 ו F ב"ת?

יהא $(\{1, .., 6\}^2, P)$ מ"ה אחידה המתאים לשאלה. נתחיל מלבדוק את אי התלות של המאורעות E_1 ו F. אם כן,

$$F = \{(4, i) : 1 \leq i \leq 6\} \quad E_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

ע"י ספירה ישירה, רואים ש $|F| = 6$ ולכן $P(F) = \frac{6}{36}$ וכן ש $P(E_1) = \frac{5}{36}$ כי $|E_1| = 5$.
כמו כן

$$E \cap F = \{(4,2)\}$$

ומכאן $P(E \cap F) = \frac{1}{36}$. מצד שני,

$$P(E_1)P(F) = \frac{5}{36}\frac{1}{36} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36}$$

ולכן המאורעות אינם ב"ת.

מצד שני,

$$E_2 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(1,6)\}$$

ולכן $|E_2| = 6$ ומכאן $P(E_2) = \frac{1}{6}$. כמו כן

$$E_2 \cap F = \{(4,3)\}$$

ולכן $P(E_2 \cap F) = \frac{1}{36}$. מכאן,

$$P(E_2) \cdot P(F) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E_2 \cap F)$$

ולכן המאורעות E_2 ו F הינם ב"ת.

הסבר לא פורמלי: המאורע E_2 יוצא דופן כי כדי שסכום הקוביות יצא 7 אפשר לקבל כל תוצאה בקוביה הראשונה (ועבור כל תוצאת הטלה ראשונה ההסתברות אותו דבר). זאת בשונה מ E_1 ששולל את האפשרות שנקבל 6 בהטלה הראשונה ולכן בפרט משפיעה על הסיכוי שנקבל 4.

3 ניסויים חוזרים ב"ת

למה יהא (Ω, P) מ"ה. יהיו $A_1, A_2, ..$ סידרת מאורעות יורדת, כלומר $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 ...$.
אז

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i) = \lim_n P(A_i)$$

תזכורת

1. יהיו (Ω_1, P_1) וכן (Ω_2, P_2) שני מ"ה הסתברות. בכיתה הגדרתם מ"ה נוסף ע"י $(\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \times P_2)$. נזכיר שלכל $A_1 \subset \Omega_1$ ו $A_2 \subset \Omega_2$ מתקיים

$$P_1 \times P_2(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$

מקבלים שלכל A_1ו A_2 כנ"ל, המאורעות $A_1 \times \Omega_2$ וכן $\Omega_1 \times A_2$ הם ב"ת במ"ה $(\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \times P_2)$.

2. בדומה, אם נתונה לנו סידרה של מרחבים הסתברות $(\Omega_1,P_1),...,(\Omega_n,P_n)$ אז הגדרתם מ"ה נוסף ע"י $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\times_{i=1}^{n}P_i)$, כך שלכל סידרת מאורעות $A_i\subset\Omega_i$ מתקיים

$$\times_{i=1}^{n}P_i(A_i)=\prod_{i=1}^{n}P_i(A_i)$$

ומכאן מקבלים שלכל סידרה כנ"ל, המאורעות שבקוארדינטה ה i שלהם מופיעה הקבוצה A_i ואחרת מופיע Ω_i בשאר הקוארדינטות, הינם ב"ת.

3. נאמר שסידרת מאורעות $A_1,...,A_n$ במ"ה (Ω,P) הן ב"ת אם לכל k ולכל לכל תת קבוצה מגודל k $A_{i_1},...,A_{i_k}$ מתוך המאורעות הנ"ל,

$$P(\bigcap_{n=i_1}^{i_k}A_n)=\prod_{n=i_1}^{i_k}P(A_n)$$

נבחין שזה אומר בפרט שלכל סידרת סימנים $\epsilon_i\in\{1,C\}$ מתקיים

$$P(\bigcap A_i^{\epsilon_i})=\prod_{i=1}^{n}P(A_i^{\epsilon_i})$$

כאשר מגדירים $A_i^1=A_i$ ו A_i^C הוא המאורע המשלים.

דוגמא 4

נתון מטבע בעל הסתברות p ליפול על ראש. מטילים את המטבע n פעמים, כאשר אנחנו מניחים שההטלות ב"ת.

1. מה ההסתברות שקיבלנו לפחות ראש אחד?
2. יהא $0\le k\le n$. מה ההסתברות שקיבלנו בדיוק k ראשים?
3. נניח שמבצעים אינסוף הטלות כנ"ל. מה ההסתברות שקיבלנו ראש בכל ההטלות?

נתחיל מלבנות מ"ה מתאים. יהא (Ω_1,P_1) מ"ה $\Omega=\{H,T\}$ עם $P(\{H\})=p$ וכן $P(\{T\}=1-p$. ניקח בתור (Ω,P) את מ"ה $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_1,\times_{i=1}^{n}P_1)$. לפי התזכורת למעלה, נקבל שכל תוצאה בהטלה בקוארדינטה הi הינה ב"ת בשאר ההטלות בשאר הקוארדינטות.

כעת, על מנת לחשב את ההסתברות בסעיף הראשון, קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים. כלומר, לחשב את ההסתברות שלא יצא H בכלל. יהא A_i המאורע "בהטלה ה i קיבלנו ראש". אז לפי נוסחת המכפלה, $P(A_i)=p$ לכל i. אז עלינו לחשב

$$P(A_1^C\cap A_2^C\cap...\cap A_n^C)=P(A_1^C)\cdots P(A_n^C)=(1-p)^n$$

ומכאן ההסתברות המבוקשת היא $P(A_1\cup...\cup A_n)=1-(1-p)^n$. שימו לב שכאשר $n\to\infty$ הסתברות זו שואפת ל 1!

עבור החלק השני, נבחן סידרה נתונה של k הצלחות ושל $n-k$ כשלונות. למשל, נניח שהיו לנו k הצלחות בהתחלה ו $n-k$ כשלונות אחר כך. ההסתברות לכך היא

$$P(A_1 \cap ... \cap A_k \cap A^C_{\{k+1\}} \cap ... \cap A^C_n) = p^k(1-p)^{n-k}.$$

נשים לב שלמעשה לכל סידרה כנ"ל של k הצלחות ו $n-k$ כשלונות יש את אותה ההסתברות שכתובה למעלה. לכן, כדי לחשב את ההסתברות שבשאלה, עלינו לחשב כמה סדרות כאלו יש. נשים לב שרק מעניין אותנו באילו k זמנים קיבלנו H, כי אז ממילא בשאר ה $n-k$ זמנים מקבלים T. כלומר, אנחנו מחפשים כמה תתי קבוצות מגודל k יש לקבוצה מגודל n, כלומר $\binom{n}{k}$. מכאן,

$$P(\{\text{exactly k times heads}\}) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

לבסוף, עבור השאלה השלישית, יהא $n \in \mathbb{N}$. ההסתברות שבכל ההטלות עד לזמן n קיבלנו ראש היא

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = p^n$$

נגדיר סידרת מאורעות B_n ע"י $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. אז רואים ש $B_n \subseteq B_{n-1}$ לכל $n \geq 1$. כמו כן, אנחנו מעוניינים במאורע $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$. לפי הלמה

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_n P(B_i) = \lim_n p^n = 0.$$

הערה חשובה שימו לב שיש עניין שטיאטנו מתחת לשטיח כאן. אמנם, לכל $n \in \mathbb{N}$ בנינו במפורש מרחב הסתברות שמתאר n הטלות ב"ת של המטבע. אבל **לא** בנינו מ"ה מפורש שמתאר בו זמנית הטלות של אינסוף מטבעות. לשם כך נזדקק למושג של סיגמא אלגברה, שיבוא בהמשך הקורס. עם זאת, החישוב שלנו איננו שגוי (רק שצריך להגדיר מיהי ה P שמופיעה במשוואה האחרונה).