הסתברות ־ תרגול 1
מרחבי הסתברות

18 באוקטובר 2018

1 מרחבי הסתברות סופיים ובני מנייה

נזכר בהגדרה למרחב הסתברות:

הגדרה 1.1 תהא Ω קבוצה בת מנייה או סופית ו $\mathcal{F}=2^{\Omega}=\{A\,|\,A\subseteq\Omega\}$. פונקציה $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_{+}$ תקרא פונקציית הסתברות אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. חיוביות: לכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $P(A)\geq0$.
2. $P(\Omega)=1$.
3. סיגמא־אדיטיביות: תהא $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת תתי קבוצות זרות של Ω. כלומר $A_i\in\mathcal{F}$ לכל i, ולכל $i\neq j$ מתקיים $A_i\cap A_j=\emptyset$. אז

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_i\right)$$

סימון אם Ω קבוצה בת מנייה או סופית ו $P:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציית הסתברות, נאמר שהזוג (Ω,P) הוא **מרחב הסתברות** (בדיד) . אם $A\in\mathcal{F}$ נאמר ש־A הוא **מאורע**.

הערה 1.2

1. תכונה ב' היא **תנאי נרמול**. אין סיבה פילוסופית עמוקה לבחירת המספר 1. זה פשוט נוח לחישובים ומסתדר עם האינטואיציה שהסתברות היא שבר, כי אנחנו בוחרים חלק מהאפשרויות מתוך כלל האפשרויות.

2. מדוע אנו דורשים בתכונה (3) איחודים בני מנייה (ולא רק איחודים סופיים)? (כדי להתמודד עם תהליכים גבוליים)

נזכר לרגע בדוגמא של הטלת קוביה.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \; P(\{i\}) = \frac{1}{6} \, \forall i$$

כפי שראיתם בכיתה, הגדרה של P על היחידונים $\{i\} \in 2^{\Omega}$ מגדירה את P באופן יחיד וניכר שזו אכן פונקצית הסתברות. שימו לב שההסתברות של כל התוצאות ($1-6$) היא זהה, כלומר יש סימטריה בין כל התוצאות ולכן פונקצית ההתפלגות היא אחידה - $P(\{i\}) = \frac{|\{i\}|}{|\Omega|}$.

במקרים רבים נתקל בבעיות עם סימטריה. למשל כאשר נטיל שלוש מטבעות אשר ניתן להבחין ביניהן. בדוגמא כזו לכל הטלה יש את אותה ההסבירות, כלומר, קיימת סימטריה בין התוצאות.

הגדרה 1.3 תהא Ω קבוצה סופית. נגדיר פונקצית הסתברות ההסתברות $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$: ע"י $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ כאשר A מאורע, ו־$|A|$ מסמן את מספר האיברים של A. מרחב ההסתברות (Ω, P) שנקבל באופן הזה יקרא **מרחב הסתברות אחיד**, ו־P נקראת **פונקציית הסתברות אחידה**.

אנו משאירים כתרגיל את הבדיקה שזו אכן פונקציית הסתברות. שימו לב שבאופן שקול ניתן לדרוש $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\})$ לכל $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.

בכיתה ראיתם שעבור מרחב מדגם איסופי לא תתכן הסתברות אחידה.

הערה:

בשלב זה לפחות, נשאף תמיד לבטא בעיה באמצעות מרחב הסתברות אחיד. זאת לא תהיה שגיאה מתמטית לעשות אחרת אבל זה יאפשר לנו לחשב הסתברויות בצורה יחסית נוחה (מנייה..). יותר על כן, זה יאפשר לנו לחשב ביתר נוחות שלל הסתברויות של מאורעות שונים הנוגעים למודל שלנו.

נניח ש $|\Omega| = N$ מרחב הסתברות שלי אחיד

[illegible]

כלומר מתקיים כי לכל $w_1, w_2 \in \Omega$

$$P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n}$$

כלומר:

$$P\Big(\bigcup_{i \in N} A_i\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leftarrow$$ לא מתכנס $\neq 1$

דוגמאות:

דוגמא 1:

מטילים מטבע הוגן שלוש פעמים. נבנה מרחב הסתברות שמתאים לניסוי הנ"ל. נגדיר

$$\Omega = \{H, T\}^3 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THH, THT\}.$$

כלל המכפלה מעלה ש $|\Omega| = 2^3 = 8$ ועל כן נוכל להגדיר על Ω את ההסתברות האחידה $P(A) = \frac{|A|}{8}$.

1. מה ההסתברות שיצא עץ פעמיים?
המאורע שיצא עץ פעמיים הוא $A = \{HHT, THH, HTH\}$ ועל כן $P(A) = \frac{|A|}{8} = \frac{3}{8}$.

(א) מה ההסתברות שיצא עץ לפחות פעמיים?
המאורע המדובר הוא $B = \{HHT, THH, HTH, HHH\}$ ועל כן $P(B) = \frac{|B|}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

שימו לב שיכולנו להגדיר מרחב הסתברות גם אחרת. בשאלות ששאלנו התעניינו רק בתוצאות המתקבלות אך לא בסדר. לכן יכולנו לקודד את התוצאות למשל ע"י $\Omega = \{(3,0), (1,2), (2,1), (0,3)\}$ (כמה פעמים יצא כל צד). מה היתה פונקצית ההסתברות המתאימה? לכאורה זה מתאר את הבעיה בצורה יותר מדויקת ו $|\Omega| = 4$, כלומר מרחב המדגם יותר קטן. עם זאת, זה הרבה פחות נוח ולמעשה, צריך לפתור את הבעיה רק כדי להגדיר את פונקצית ההסתברות.

דוגמא 2:

מטילים קובייה 30 פעמים. נחשב את ההסתברות שהפעם הראשונה שקיבלנו את הספרה 6 הייתה באחת מעשר ההטלות הראשונות?
פתרון:נגדיר מרחב הסתברות: כל רצף של 30 הטלות ייוצג במרחב המדגם כרצף באורך 30 של ספרות בין 1 ל־6. מרחב המדגם יהיה כל הרצפים האפשריים:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{30}$$

P תהיה פונקציית הסתברות אחידה. נגדיר את A להיות המאורע בו הספרה 6 מתקבלת בעשר ההטלות הראשונות:

$$A = \{(x_1, ..., x_{30}) \in \Omega : \exists 1 \le i \le 10 \,\text{such that}\; x_i = 6\}$$

עלינו לחשב את $P(A)$. מתכונות פונקציית ההסתברות (נרמול ואדיטיביות), אנו יודעים ש־

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

לכן נוכל לחשב את $P(A^c)$ במקום.

שימו לב! זאת שיטה סטנדרטית. אם נראה לכם קשה לחשב הסתברות של מאורע בדקו את המאורע המשלים.

מכלל המכפלה מתקיים $|\Omega| = 6^{30}$. עבור $|A^c|$ - נשים לב שהרצפים שלא נמצאים ב־A הם בדיוק כל הרצפים בהם **לא** מופיעה הספרה 6 ב־10 המקומות הראשונים:

$$A^c = \{(x_1, ..., x_{30}) \in \Omega : \; \forall 1 \le i \le 10, \; x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

או במילים אחרות:

$$A^c = \underbrace{\{1, ..., 5\} \times ... \times \{1, ..., 5\}}_{10\, times} \times \underbrace{\{1, ..., 6\} \times ... \times \{1, ..., 6\}}_{20\, times}$$

ולכן (כלל המכפלה) $|A^c| = 5^{10} \cdot 6^{20}$. כעת התוצאה היא:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

דוגמא 3:

8 בנים ו־8 בנות עומדים בשורה לפי סדר כלשהו. בהנחה שלכל סדר יש את אותה הסתברות, מה ההסתברות שיעמדו כך ש־8 הבנים יעמדו ב־8 המקומות הימניים, ו־8 הבנות יעמדו ב־8 המקומות השמאליים?

פתרון: ראשית נתאר את מרחב ההסתברות. מרחב המדגם Ω יהיה כל הדרכים של 16 אנשים אלו לעמוד בשורה. אם נרצה לתאר מרחב מדגם במפורש, אפשר לקחת את אוסף התמורות של 16 איברים כאשר נסכים מראש שהמספרים $1-8$ מייצגים גברים (או מקומות משמאל) ו $9-16$ נשים (או מקומות מימין)

$$\Omega = \{f : [16] \to [16] \,|\, f \text{ is a bigection}\}$$

אם A הוא המאורע "8 הבנים עומדים ב־8 המקומות הימניים, ו־8 הבנות עומדות ב־8 המקומות השמאליים", עלינו לחשב את $P(A)$. אנו מניחים ש־ P היא פונקציית הסתברות אחידה, לפי הנתון, ולכן מתקיים $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. ולכן עלינו למצוא את $|\Omega|$ ואת $|A|$:

- אנו יודעים ש־$|\Omega| = 16!$.
- גודלה של A הוא מספר הדרכים להושיב את שמונת הבנים במקומות הראשונים מימין ($8!$), כאשר לכל מקרה כזה יש להושיב את שמונה הבנות במקומות הנותרים ($8!$ לכל אפשרות הושבה של הבנים). נקבל, $|A| = 8! \cdot 8!$, ולכן התשובה היא

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8! \cdot 8!}{16!}$$

פתרון חלופי:

התשובה שקיבלנו נראית מאוד מוכרת. זה ההופכי למקדם הבינומי, $\binom{16}{8}^{-1}$. כשאנו מקבלים תשובה כזו, יש מקום לשאול האם יש סיבה לכך, והאם אפשר לפתור את השאלה גם אחרת. היתרון של פתרון נוסף הוא חיזוק הביטחון שלנו בנכונות התשובה שלנו: אם הגענו לאותה תשובה ע"י טיעונים או מודלים שונים, אז ההסתברות שטעינו ־ פוחתת.

אז מה זה $\binom{16}{8}$? כל הדרכים לבחור 8 מקומות מתוך 16, למשל. איך זה ממדל לנו את הבעיה? נשים לב שאמרנו 8 בנים ו־8 בנות, אך לא נתנו להם שמות. כל מה שאכפת לנו זה שהבנות יעמדו יחד משמאל והבנים יעמדו יחד מימין. אי לכך, מרחב ההסתברות שלנו יכול להיות גם כל הבחירות של 8 מספרים מתוך $\{1, 2, \ldots, 16\}$

כשכמוסכמה, נאמר שהמקומות שנבחר הם המקומות בהם יעמדו הבנות, והבנים יעמדו במקומות הנותרים. גודל המרחב הזה הוא אכן $\binom{16}{8}$. מאחר והנחנו שכל הסידורים הם סבירים באותה מידה, גם כל בחירת המיקומים סבירים באותה מידה, כי מהרגע שבחרנו את המקומות יש בדיוק אותו מספר סידורים לבנים ולבנות בתוכם (זה ה־$8!8!$ של $|A|$). לכן גם מרחב ההסתברות החדש הוא מרחב הסתברות אחידה. מתוך כל הבחירות של המקומות ־ רק אחת מתאימה לנו: הבחירה של כל המקומות השמאליים. לכן ההסתברות שהבנים והבנות יהיו מסודרים כמו בשאלה היא

$$\frac{1}{\binom{16}{8}} = \binom{16}{8}^{-1}$$

ואכן הגענו לאותה תשובה.

יש לי 16 בנים ובנות בשורה וידוע כי

(כל הסידורים של הבנות בשורה של 16 מקומות) = (כל הסידורים של הבנים בשורה של 16 מקומות)

בנוסף לכך מהרגע שהסידור מקומות של הבנים נקבע הסידור של הבנות נקבע ביחידות ולכן אני מתעניין רק בסידור של הבנים לצורך העניין מכיוון שכל הסידורים האפשריים הינו $\binom{8}{16}$ ואני מתעניין בסידור ספציפי יחיד

[בת — בנות, בן, — בן, בן]

8 בנות   8 בנים

אקבל כי

$$p(w) = \frac{1}{\binom{8}{16}}$$

דוגמא 5 : (אם יש זמן)

בחפיסת קלפים סטנדרטית יש 4 סוגי קלפים (לב יהלום, תלתן ועלה) ו 13 ערכים שונים לכל סוג $\{2, 3, \ldots 10, J, Q, K, A\}$ כאשר J, Q, K, A מסמלים נסיך, מלכת מלכה ואס בהתאמה. סה"כ 52 קלפים. "יד פוקר" היא אוסף של חמישה קלפים (ללא חשיבות לסדר) מהחפיסה.

בהנחה שחפיסת הקלפים מעובבת היטב. מהי ההסתברות לקבל בדיוק שלשה קלפים עם אותו ערך? (לדוגמא 3 קלפי נסיך)

פתרון:

ראשית נתאר את מרחב ההסתברות (מרחב ידיי הפוקר). ניתן לחשוב על יד פוקר כתת קבוצה בת 5 איברים של חפיסת הקלפים (אין חשיבות לסדר).

$$\Omega = \{A \subset [52] \,|\, |A| = 5\}$$

כל תת־קבוצה כזו היא בחירה של 5 איברים מתוך 52 כלומר, $|\Omega| = \binom{52}{5} \approx 2.6 \cdot 10^6$. פונקצית ההסתברות היא אחידה , $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ לכל $A \in \mathcal{F} = 2^\Omega$.

נסמן ב A_3 את המאורע בו בדיוק שלושה קלפים הם בעלי אותו ערך. נחשב את $|A_3|$:

ראשית, יש 13 אפשרויות לערך השלשה ולכן $|A_3| = 13|A_{3,J}|$ כאשר $A_{3,J}$ הוא המאורע בו התקבלו 3 נסיכים. כעת, יש $\binom{4}{3}$ דרכים לבחור שלושה נסיכים, נותר לספור את האפשרויות שנותרו לשני הקלפים הנותרים. מאחר ונותרו 48 קלפים מהם ניתן לבחור (הכל חוץ מנסיך) נותרו $\binom{48}{2}$ אפשרויות. בסה"כ

$$|A_3| = 13 \cdot \binom{4}{3}\binom{48}{2} = \frac{13 \cdot 4!48!}{3!2 \cdot 46!} = 26 \cdot 47 \cdot 48 = 58656$$

אני חושב על זה ככה: אני לוקח את 52 הקלפים שלי ומסדר
אותם מחדש ככה:

א ———— 2 1

ל 13 חפיסות כאשר בכל חפיסה מונחים קלפים מסוגים שונים כך:

א ———— 1

לב
תלתן
יהלום
עלה

כעת יש לי 13 אפשרויות לבחור חפיסה
מתוך כל חפיסה שבחרתי אני בוחר 3 קלפים ללא חשיבות לצורות
ולסדר לכן $\binom{4}{3}$

לאחר מכן אני מסדר את 48 הקלפים שלא לקחתי מסדר אותם
בערימה אחת ומזה לוקח 2 קלפים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות
לכן $\binom{48}{2}$ לסיכום:

$$13\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}$$

ולכן

$$P(A_3) \approx \frac{1}{50}$$

נוסחת סטירלינג:

נוסחת סטירלינג נותנת קירוב ל $n!$. ובכך מאפשרת לחשב אסימפטוטיקה של הסתברויות (כפי שנראה למשל בדוגמא הבאה.

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n + \Theta(1)$$

כאשר, להזכירכם, $f(n) = \Theta(g)$ אם $\limsup_n \frac{|f(n)|}{|g(n)|} < \infty$ וגם $\liminf_n \frac{|f(n)|}{|g(n)|} > 0$

ניתן גם לתת חסמים מדויקים:

$$\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \leq n! \leq e n^{n+1/2} e^{-n}$$

דוגמא:

נתונה סדרה סופית של אפסים ואחדות באורך $2n$. מהו הסיכוי שבדיוק חצי מאברי הסדרה יהיו אחדות?

פתרון:

מספר הסדרות של אפסים ואחדות באורך $2n$, הוא $|\Omega| = |\{0,1\}^{2n}| = 2^{2n}$.

מספר הסדרות בהם בדיוק חצי מהאיברים הם אחדות שווה למספר האפשרויות לבחור את n המיקומים של האחדות (ללא חזרות ובלי חשיבות לסדר), כלומר $\binom{2n}{n}$. ההסתברות היא לכן

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \leq \frac{e(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}}{2^{2n}2\pi n^{2n+1}e^{-2n}} = \frac{e\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{n}} = \frac{c}{\sqrt{n}}$$

ובאופן דומה ניתן לראות כי $\frac{C}{\sqrt{n}} \leq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ עבור $C > 0$. ומכאן ש $P(A) = \Theta(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

עוד כמה נקודות לסיכום (אפשר להשאיר לקריאה)

1. לכל ניסוי יכולים להיות הרבה (אינסוף) מרחבי הסתברות שמתארים אותו. כאן המטרה היא לנסות לבחור את מרחב ההסתברות שיתאים לצרכים שלנו על מנת לפתור את הבעיה.

דוגמה: מטילים קובייה. מה הסיכוי שיצא 6?

פתרון: נביא שלוש אפשרויות למרחב ההסתברות:

(א) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, P(\{n\})=\frac{1}{6}\ \forall n\in\Omega$

(ב) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7\}, P(\{\omega\})=\begin{cases}\frac{1}{6} & \omega\neq 7\\ 0 & \omega=7\end{cases}$

(ג) $\Omega=\{\text{True,False}\}, P(\{\omega\})=\begin{cases}\frac{1}{6} & \omega=\text{True}\\ \frac{5}{6} & \omega=\text{False}\end{cases}$

כל שלוש האפשרויות מתארות באופן זה או אחר את הניסוי: במקרה הראשון, מרחב ההסתברות מתאר את כל האפשרויות ה"סבירות" שיקרו, כלומר, כל ששת המקרים. כאן עלינו לחשב מהו $P(\{6\})$. במקרה השני במרחב ההסתברות קיים עוד מקרה, בו יוצא 7 בקובייה. אנו יוצאים מנקודת הנחה שמקרה זה בלתי אפשרי, ולכן נותנים לו הסתברות 0. גם כאן עלינו לחשב את $P(\{6\})$. במקרה השלישי מרחב ההסתברות מכיל רק שתי נקודות: או שהניסוי הצליח (True) , כלומר, התקבל 6, או שהניסוי נכשל (False). כאן יהיה עלינו לחשב את $P(\{6\})$.

חשוב לשים לב, שעל אף שבמקרה השני נוספה נקודה למרחב המדגם, 7, היא לא מפריעה ל־(Ω,P) להיות מודל לשאלה מכיוון שההסתברות שלה היא אפס.