# הסתברות 1 - תרגול 5

15 בנובמבר 2018

## 1 התפלגות מותנית

### 1.1 הגדרות ודיון

כשם שיש עניין - גם מעשי וגם תאורטי - במציאת היחסים בין מאורעות שונים, כך יש עניין ביחסים בין מ"מ שונים. באופן דומה כשם שבנוסחת ההסתברות השלמה ניתן לחשב את הסתברותו של מאורע מתוך התנייה במאורעות כך ניתן ללמוד על משתנה מקרי בעזרת התניה במ"מ אחר.

נזכר בהגדרה של התפלגות מותנית

**הגדרה 1.1** (התפלגות מותנית) יהי $X$ מ"מ על המרחב הבדיד $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ויהי $A \in \mathcal{F}$ מאורע המקיים $P(A) > 0$. נסמן ב $(X|A)$ את המ"מ $X$ על מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P_A)$. כאשר $P_A$ ההסתברות המותנית.

נזכר בהגדרה של התפלגות משותפת: יהיו $X, Y$ מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. ההתפלגות המשותפת הנקודתית $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ נתונה ע"י

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

**הגדרה 1.2** יהיו $X, Y$ מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. ההתפלגות הנקודתית המותנה של $X$ בהנתן $Y$ מוגדרת ע"י

$$p_{X|Y}(x|y) := p_{(X|Y=y)}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

**הערה 1.3** 1) חשוב להדגיש שאין כאן הגדרה חדשה של התנייה, כי הביטוי האחרון שווה ל-

$$\frac{P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\} \cap \{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) = y\})}{P(\{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) = y\})}$$

תמיד כאשר צריך לדעת מה היא פונק' ההתפלגות המותנית של מאורע
אני תמיד אעבור קודם דרך פונק' התפלגות נק' זה לא נכון לכתוב

$$\boxed{\mathbb{P}(x|y) = \frac{\mathbb{P}(X=A, Y=B)}{\mathbb{P}(Y=B)}}$$

היא נקודתית
פונק' התפלגות של מאורע/ת (A,B)

צריך לבדוק מה היא פונק' התפלגות נק' של וקטורים משתנים מק' $P(x|y)$ ולא סתם כך לבנות את פונק' ההתפלגות המותנית

וזהו הביטוי עבור הסתברות מותנה של המאורע $X^{-1}\left(x\right)$ ב־$Y^{-1}\left(y\right)$.

2) ההגדרה הזו מסתדרת לנו עם הרעיון של אי תלות: אם $X$ ו־$Y$ הם משתנים ב"ת אז אנו רוצים שיתקיים $p_{X|Y}\left(x|y\right)=p\left(x\right)$ לכל $x\in S$ ו־$y\in Y$, ואכן:

$$p_{X|Y}\left(x|y\right)=\frac{p_{X,Y}\left(x,y\right)}{p_{Y}\left(y\right)}=\frac{p_{X}\left(x\right)p_{Y}\left(y\right)}{p_{Y}\left(y\right)}=p_{X}\left(x\right)$$

3) בגלל הקשר למאורעות אנו מקבלים באופן מיידי את חוק ההסתברות השלמה עבור מ"מ:

$$p_{X}\left(x\right)=\sum_{y\in Y}p_{X|Y}\left(x|y\right)p_{Y}\left(y\right)$$

## 1.2 דוגמאות

1. מבצעים $n$ ניסויים ב"ת, כל אחד עם סיכוי הצלחה $p$. בהנתן שהיו $k$ הצלחות, $1\leq k\leq n$ , הוכיחו שההסתברות של כל סידור אפשרי של $k$ הצלחות ו־$n-k$ כישלונות שווה לכל סידור אחר.

במילים אחרות, בהנתן שהיו $k$ הצלחות, ההסתברות על הסידורים הרלוונטיים היא אחידה.

**הוכחה:** יהי $X\sim Bin\left(n,p\right)$ המשתנה המונה את מספר ההצלחות. יהי $\omega$ סידור מסוים של $k$ הצלחות ו־$n-k$ כישלונות מבין ה־$\binom{n}{k}$ הסידורים האפשריים, למשל $\omega=\left(ww\cdots wff\cdots f\right)$.

$$P\left(\omega|X=k\right)=\frac{P\left(\omega,X=k\right)}{P\left(X=k\right)}=\frac{P\left(\omega\right)}{p_{X}\left(k\right)}=\frac{p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}}{\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}}=\binom{n}{k}^{-1}$$

כשהנקודה הקריטית היא לשים לב שאם הסידור הוא $\omega$ אז ממילא מתקיים $X=k$, ולכן השיוויון השני. הסידור שבחרנו הוא שרירותי, ולכן הטענה מוכחת לכל סידור מתאים. ■

2. מגלגלים קוביה הוגנת עד שיוצא 6. מה ההסתברות שיצא פעם אחת 5 לפני שמפסיקים?

**הוכחה:** המשתנה של מספר הזריקות הוא $N\sim Geo\left(1/6\right)$. אם ידוע ש־$N=n$ אז ההסתברות שלא יצא 5 לפני כן היא $\left(4/5\right)^{n-1}$, כי ידוע שלא יצא 6, ולכן יש רק 5 תוצאות אפשריות בעלות הסתברות שווה. נסמן ב־$X$ את המשתנה המקרי שנותן 1 אם יצא 5 לפני ה־6 ו־0 אחרת. אז מקבלים

X מתפלג ברנולי

$$p_{X|N}\left(1|n\right)=1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

1, 2, 3, 4, 5, 6

$$P\left(\text{לא יצא 5 ב } n-1 \text{ נסיונות} \;\middle|\; \text{לא יצא 6}\right)=\frac{\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}{\frac{5}{6}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

* מאורע לא יצא 6 | המאורע לא יצא 5 ב n-1 נסיונות בה

גם יצא 6 בניסיון ה-n
וגם לא יצא 5 ב-n-1
ניסיונות

ואז לפי חוק ההסתברות השלמה עבור מ"מ

$$\begin{aligned}
p_X(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{X|N}(1|n)\, p_N(n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right) \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(5^n-4^n)}{6^n}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-5/6} - \frac{1}{1-2/3}\right] = \frac{6-3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

למי שהאינטואיציה לא מסתדרת, חישבו על השאלה כך - אנו בעצם שואלים מה ההסתברות באינסוף גלגולים של קוביה שיצא 5 לפני שיצא 6. על כל סדרה שבה יצא 5 קודם, יש סדרה מתאימה שבה יצא 6 קודם - פשוט תחליפו להם מקומות. ההסתברות על כל שתי סדרות כאלו היא שווה, וההסתברות שלא יוצא 5 או 6 אף פעם היא 0, לכן תוצאה של 0.5 היא הגיונית מאוד. ∎

3. בכיתה הוכחנו שאם $X \sim Po(\lambda)$ ו $Y|X \sim Bin(X,p)$ אז $Y \sim Po(\lambda p)$.

4. יהי $Y \sim Po(\lambda)$ ו $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה של מ"מ ב"ת עם התפלגות ברנולי $p$. יהי $X = \sum_{k=1}^{Y} B_k$ שימו לב ש $X$ הוא סכום של מ"מ אך גם מספר האיברים המופיעים בסכום הוא מ"מ. מחשב את ההתפלגות של $X$. נחשב ראשית את ההתפלגות המותנית

$$p_{X|Y}(k|n) = P(X=k|Y=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

כלומר ההתפלגות המותנית $\sim Bin(n,p)$ (הרי מדובר מסכום של $n$ נסיונות ברנולי).
נסיק במהטענה מהכיתה ש $X \sim Po(\lambda p)$

## 2 תוחלת

### 2.1 הגדרה

בעולם של הימורים, מהמר רציני רוצה להרוויח, ולכן לפני שהוא נכנס למשחק הוא רוצה לדעת לאיזה רווח הוא יכול לצפות כשהוא מסיים. מילה נוספת לציפיה היא תוחלת ($Expectation$). זהו אחד מהמקרים הנחמדים שדווקא בעברית יש מילה מיוחדת למושג. לתוחלת שימושים רבים - למשל כשחברה רוצה לייצר מוצר, היא מנסה לצפות כמה יקנו אותו בפרק זמן נתון, על מנת שלא לייצר יותר או פחות מדי, וכך למקסם רווחים.

**הגדרה 2.1** יהי $X$ מ"מ המוגדר על מרחב הסתברות בדידה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. התוחלת של $X$ מוגדרת ע"י

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

במידה והטור מתכנס במובן הרחב. אחרת נאמר של $X$ אין תוחלת.

**הערות:**

1. הגדרה זו שקולה להגדרה הבאה: נזכר כי

$$Supp(X) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, P(X = x) > 0\}$$

ונשים לב שזוהי קבוצה בדידה שניתן לסכום עליה. אזי

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}_+} x p_X(x) - \sum_{x \in \mathbb{R}_-} -x p_X(x)$$

במקרה שלפחות אחד הטורים באגף ימין סופי. אחרת נאמר של $X$ אין תוחלת. ההגדרות אכן שקולות כי

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{x \in Supp(X)} \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P(X = x)$$

מכאן גם נסיק שהתוחלת היא תכונה של ההתפלגות.

2. אפשר להגדיר תוחלת גם עבור משתנה מקרי שמקבל ערכים במרחב שאינו $\mathbb{R}$. במקרה זה צריך שהטווח של $X$ יהיה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, כי צריך להיות לו כפל בסקלר (ע"מ לכפול בהסתברות) וחיבור. למשל, אפשר לדבר על התוחלת של מ"מ $Z = (X, Y)$, שהתפלגות שלו היא ההתפלגות המשותפת. הטווח של $Z$ הוא $S \times T \subset \mathbb{R}^2$. התוחלת תהיה גם היא וקטור ב-$\mathbb{R}^2$.

3. עוד יש להדגיש את החשיבות שהטור הנ"ל יהיה טור מתכנס בהחלט. אין לנו סידור א-פריורי על $X$ או על $\Omega$. אפשר להגדיר סידור, אבל הוא יהיה שרירותי. תוצאה חשובה בתורת הטורים היא שטור שלא מתכנס בהחלט, אפשר ע"י שינוי סדר סכימה לגרום לו להתכנס לכל דבר. אי לכך הטור שמגדיר את התוחלת חייב להתכנס בהחלט, ואחרת התוחלת לא מוגדרת. מה שכן, מותרת התכנסות במובן הרחב, דהיינו ל-$\infty$ או ל-$-\infty$.

## 2.2 דוגמאות

למשתנים מקריים סטנדרטים יש תוחלות מחושבות כפונקציות של הפרמטרים שלהם. זה עוד דרך שבה חקירה של מ"מ סטנדרטים היא שימושית.

1. $X \sim Uni(n)$, אז $E[X] = \frac{n+1}{2}$

**הוכחה:** $E[X] = \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$. ■

2. $X\sim Ber\left(p\right)$, אז $E\left[X\right]=p\cdot1+\left(1-p\right)\cdot0=p$

3. $X\sim Bin\left(N,p\right)$, אז $E\left[X\right]=Np$

**הוכחה:**

$$
\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \sum_{n=0}^{N}n\binom{N}{n}p^{n}(1-p)^{N-n}=\sum_{n=0}^{N}n\frac{N!}{(N-n)!n!}p^{n}(1-p)^{N-n}\\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{N!}{(N-n)!(n-1)!}p^{n}(1-p)^{N-n}=\\
(m=n-1) &= \sum_{m=0}^{N-1}\frac{N!}{(N-m-1)!m!}p^{m+1}(1-p)^{N-m-1}\\
&= Np\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(N-1)!}{(N-1-m)!m!}p^{m}(1-p)^{N-1-m}\\
(binom) &= Np(p+(1-p))^{N-1}=Np
\end{aligned}
$$

$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

כאן $n=N-1$

$k=m$

$x=p$

$y=1-p$

■

4. $X\sim Poi\left(\lambda\right)$, אז $E\left[X\right]=\lambda$

**הוכחה:**

$$
\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\lambda}\frac{\lambda^{n}}{n!}\\
&= e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\\
(m=n-1) &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n}}{n!}=\lambda
\end{aligned}
$$

$e^{\lambda}$



כששוב מחקנו את המחובר הראשון בגלל ש־ $n=0$, והשתמשנו בטור טיילור עבור $e^{\lambda}$.

■

5. $X\sim Geo\left(p\right)$, אז $E\left[X\right]=p^{-1}$

**הוכחה:** ע"פ הגדרה

$$E\left[X\right]=\sum_{n=1}^{\infty}np\left(1-p\right)^{n-1}$$

נזכר כי עבור $|x|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}$$

ובעזרת גזירה איבר איבר

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ניקח $x = 1 - p$ ונקבל

$$E\left[X\right] = \sum_{n=1}^{\infty} np\left(1-p\right)^{n-1} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

ההיגיון בתוצאה זו הוא די ברור ־ אנו מצפים שבשתי הטלות מטבע יצא לפחות פעם אחת ראש, וב־6 הטלות קוביה לפחות פעם אחת 6 . ■