תחילה תזכורת לכך שכאשר התוחלת של X מוגדרת, Y היא גירסה של $E\left(X|\mathcal{F}_0\right)$ אם מתקיים כי $Y\in\mathcal{F}_0$ ולכל $A\in\mathcal{F}_0$ מתקיים כי $EX1_A = EY1_A$. כמו כן זכרו כי $P\left(B|\mathcal{F}_0\right) = E\left(1_B|\mathcal{F}_0\right)$ ולכן

$$EP\left(B|\mathcal{F}_0\right)1_A = E\left(1_B 1_A\right) = P(B\cap A)$$

לכל $A\in\mathcal{F}_0$. כלומר Y היא גירסה של $P\left(B|\mathcal{F}_0\right)$ אם ורק אם $Y\in\mathcal{F}_0$ ומתקיים לכל $A\in\mathcal{F}_0$ כי

$$EY1_A = P(B\cap A)$$

כמו כן, נזכור כי $P\left(B|X\right) = P\left(B|\sigma(X)\right)$.

ההגדרה הכללית של שרשרת מרקוב היא כי בהינתן פילטרציה כלשהי $\mathbb{F}$ מתקיים לכל $n\geq 0$ כי $X_n\in\mathcal{F}_n$ וכן לכל j (במרחב המצבים) מתקיים כי

$$P\left(X_{n+1}=j|\mathcal{F}_n\right) = P\left(X_{n+1}=j|X_n\right)$$

ראינו כי מכך נבע כי לכל $n\geq 0$ קיימת מטריצה $P(n) = p_{ij}(n)$ כך ש-

$$P\left(X_{n+1}=j|\mathcal{F}_n\right) = p_{X_n j}(n)$$

נניח כי τ הוא זמן עצירה ביחס ל-$\mathbb{F}$ ונניח $A\in\mathcal{F}_\tau$. נזכור כי זה אומר כי לכל $n\geq 0$ מתקיים כי $A\cap\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n$. המטרה כאן היא להראות כי לכל זמן עצירה מתקיים כי

$$P\left(X_{\tau+1}=j|\mathcal{F}_\tau\right)1_{\{\tau<\infty\}} = p_{X_\tau j}(\tau)1_{\{\tau<\infty\}}$$

שוויון זה נקרא "תכונת מרקוב החזקה" והיא מתקיימת לכל שרשרת מרקוב בזמן בדיד.

שימו לב כי לכל $n\geq 0$ מתקיים כי $\tau+n$ הוא גם זמן עצירה ומתקיים כי $\{\tau+n<\infty\} = \{\tau<\infty\}$ ולכן ינבע מכך כי

$$P\left(X_{\tau+n+1}|\mathcal{F}_{\tau+n}\right)1_{\{\tau<\infty\}} = p_{X_{\tau+n}}(\tau+n)1_{\{\tau<\infty\}}$$

בפרט, כאשר השרשרת הומוגנית בזמן ינבע מכך שעל $\{\tau<\infty\}$ נקבל כי $X_\tau, X_{\tau+1}, X_{\tau+2}, \ldots$ היא שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן עם מצב התחלתי X_τ ומטריצת מעברים $P = \left(p_{ij}\right)$ (כמו השרשרת המקורית). כמו כן, באותה דרך כמו שהראינו בכיתה מתקיים כי לכל $B\in\sigma\left(X_{\tau+1},\ldots,X_{\tau+k}\right)$ מתקיים כי

$$P\left(B|\mathcal{F}_\tau\right)1_{\{\tau<\infty\}} = P\left(B|X_\tau\right)1_{\{\tau<\infty\}}$$

ומזה נובע שבהינתן המאורע $\{X_\tau=i,\tau<\infty\}$ העבר עד לזמן העצירה והעתיד אחרי זמן העצירה הם בלתי תלויים. לכל $A\in\mathcal{F}_\tau$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}
EP\left(X_{\tau+1}=j,\tau=n|\mathcal{F}_\tau\right)1_A &= P\left(\{X_{\tau+1}=j,\tau=n\}\cap A\right)\\
&= P\left(\{X_{n+1}=j,\tau=n\}\cap A\right)\\
&= EP\left(X_{n+1}=j|\mathcal{F}_n\right)1_{A\cap\{\tau=n\}}\\
&= Ep_{X_n j}(n)1_{A\cap\{\tau=n\}} = Ep_{X_\tau j}(\tau)1_{\{\tau=n\}}1_A
\end{aligned}$$

השוויון הראשון נובע מההגדרה של הסתברות מותנה. בשוויון השני החלפנו את $X_{\tau+1}$ ב-X_{n+1} (עקב $\tau = n$). בשוויון השלישי השתמשנו בעובדה ש-$A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ (כי $A \in \mathcal{F}_\tau$) ובהגדרת ההסתברות המותנה. בשוויון הרביעי השתמשנו בתכונת מרקוב, דהיינו, בהסתברות אחת $P\left(X_{n+1} = j|\mathcal{F}_n\right) = p_{X_n j}(n)$ ולבסוף בשוויון החמישי החלפנו את X_n ב-X_τ (שוב, עקב $\tau = n$). אם נסכם את שני צידי השוויון נקבל כי

$$EP\left(X_{\tau+1} = j, \tau < \infty|\mathcal{F}_\tau\right) 1_A = Ep_{X_\tau j}(\tau) 1_{\{\tau<\infty\}} 1_A$$

לכל $A \in \mathcal{F}_\tau$. לכן, אם נסיק כי $p_{X_\tau j}(\tau)1_{\{\tau<\infty\}} \in \mathcal{F}_\tau$ אז המסקנה היא כי בהסתברות אחת מתקיים כי

$$P\left(X_{\tau+1} = j|\mathcal{F}_\tau\right) 1_{\{\tau<\infty\}} = P\left(X_{\tau+1} = j, \tau < \infty|\mathcal{F}_\tau\right) = p_{X_\tau j}(\tau)1_{\{\tau<\infty\}}$$

כאשר השוויון הראשון נובע מכך ש-$\tau \in \mathcal{F}_\tau$ ולכן $1_{\{\tau<\infty\}} \in \mathcal{F}_\tau$ ואפשר להוציא אותו מחוץ לתוחלת המותנה (בהסתברות אחת כמובן).

מדוע $p_{X_\tau j}(\tau)1_{\{\tau<\infty\}}$ מדידה ביחס ל-$\mathcal{F}_\tau$? נשים לב כי

$$\{X_\tau = i, \tau = m\} \cap \{\tau = n\} = \begin{cases} \phi & n \neq m \\ \{X_m = i\} \cap \{\tau = m\} & n = m \end{cases}$$

מכיוון ש-X_n תהליך מותאם ו-τ הוא זמן עצירה, המאורעות $\{X_m = i\}$ ו-$\{\tau = m\}$ הם שניהם ב-$\mathcal{F}_m$ ולכן גם החיתוך. לכל $n \neq m$ הקבוצה הריקה נמצאת ב-$\mathcal{F}_n$. קיבלנו איפה כי $\{X_\tau = i, \tau = m\} \in \mathcal{F}_\tau$ כי כאשר חותכים מאורע כזה עם $\{\tau = n\}$ מקבלים מאורע ב-$\mathcal{F}_n$. מכאן נובע כי

$$p_{X_\tau j}(\tau)1_{\{\tau<\infty\}} = \sum_i \sum_{m=0}^{\infty} p_{ij}(m) 1_{\{X_\tau = i, \tau = m\}} \in \mathcal{F}_\tau$$

מסקנה מיידית מתכונת מרקוב החזקה היא כי עבור שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן מתקיים כי אם $\tau_i = \inf\{n|X_n = i\}$ אז על $\{\tau_i < \infty\}$ נקבל כי $X_{\tau_i}, X_{\tau_i+1}, \ldots$ היא שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן עם אותה מטריצת מעברים כמו השרשרת המקורית ועם מצב התחלתי i (בהסתברות אחת). מכאן נובע כי הזמן עד הביקור הבא ב-i (אם יקרה) הוא בלתי תלוי ב-τ_i. בפרט, אם נתחיל את השרשרת ממצב i נובע מכך כי זמני החזרה ל-i הם בלתי תלויים ושווי התפלגות. נובע מכך כי התפלגות מספר החזרות ל-i היא כמו ההתפלגות של מספר הכשלונות בהתפלגות גיאומרית עם סיכוי $f_{ii} = P_i(\tau = \infty)$ להצלחה ולכן תוחלת מספר הביקורים (אחד ועוד מספר החזרות) היא $\frac{1}{1-f_{ii}}$. נובע מכך כי אם $P_i\left(\tau_i < \infty\right) = 1$ אז נחזור ל-i אינסוף פעמים כי החיתוך של מאורעות שהסתברותם אחת הוא מאורע שהסתברותו היא אחת.

לכן עבור שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן התנאים הבאים שקולים:

1. i נשנה.
2. $P_i\left(\tau_i < \infty\right) = 1$
3. כשמתחילים מ-i הסיכוי שנחזור ל-i אינסוף פעמים הוא 1.
4. תוחלת מספר הביקורים ב-i אי פעם כשמתחילים מ-i היא אינסוף.

ובאותו אופן גם התנאים הבאים שקולים:

1. i חולף.

2. $P_i\left(\tau_i < \infty\right) < 1$.

3. כשמתחילים מ-i הסיכוי שנחזור ל-i אינסוף פעמים הוא אפס.

4. תוחלת מספר הביקורים ב-i אי פעם כשמתחילים מ-i היא סופית.

את התנאי השקול 4 הוכחנו בכיתה. התנאי השקול 3 נובע מתכונת מרקוב החזקת.