17-18.5.22

תרגול #8 שיעורי ה'

אומדי הטלה:

* היוריסטיקה: עבור בעיית רגרסיה

(בהנחה ש- $f\in L^2([0,1])$)

$$\hat{f}_{n,N}(x)=\sum_{m=1}^{n} Y_m W_{nm}(x)$$

$$W_{nm}(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x_m)\varphi_j(x)$$

בסיס אורתונורמלי ב- $L^2([0,1])$, זוכרים $f=\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,\varphi_j\rangle\varphi_j$

* פיתוח אומד דומה עבור בעיית אמידת צפיפות.

* לצורך אנליזה, ראינו את מושג הנגזרת החלשה ומחלקת סובולב וסובולב מחזורית.
בנוסף, ראינו כי ניתן לאפיין את מחלקת סובולב המחזורית ע"י מקדמי פורייה.

* הערה: מקדמי פורייה הם $\langle f,\varphi_k\rangle$ בכתיבה של f ~~בבסיס~~ כנ"ל.

שאלה 1: בסיס פורייה על $L^2([-1,1])$ נתון ע"י

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi_{2k}(x)=\cos(\pi k x)$$

$$\varphi_{2k+1}(x)=\sin(\pi k x)\quad,\ k=1,2,\dots$$

הערה: $f\in L^2([-1,1])$ אם $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx<\infty$

מ"פ: $\langle f,g\rangle:=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

נורמה מושרית ע"י מ"פ: $\|f\|=\sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx}$

א) הראו כי פונקציות אלה הן אורתונורמליות.

פתרון:

הפונקציות אורתונורמליות אם

$$\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx=\frac{1}{2}\big(1-(-1)\big)=1$$

מחזורי של π | $\sin(0)=0$

$$\langle\varphi_1,\varphi_{2k}\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\pi k x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\int_{0}^{1}\cos(\pi k x)\,dx=\sqrt{2}\cdot\left.\frac{\sin(\pi k x)}{\pi k}\right|_{x=0}^{1}=\frac{\sqrt{2}}{\pi k}\big(\sin(\pi k)-\sin(0)\big)=0\quad\forall k=1,2,\dots$$

cos זוגית ולכן $2\int_0^1$, סימטרית.

$$\langle\varphi_1,\varphi_{2k+1}\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\pi k x)\,dx=0$$

$\cos(-x)=\cos(x)$

$\sin(-x)=-\sin(x)$

אינטגרל של פונק' אי-זוגית על תחום סימטרי,
הוא 0 כי הם מתאפסים.

Scanned with CamScanner

$$\langle \varphi_{2k}, \varphi_{2m}\rangle = \int_{-1}^{1}\cos(\pi k x)\cos(\pi m x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos(\pi x(k-m))\,dx + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos(\pi x(k+m))\,dx}_{\frac{1}{2}\frac{1}{\pi(k+m)}\left[\sin(\pi(k+m))-\sin(0)\right]=0 \quad \forall k,m\in\mathbb{N}}$$

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$

אם $k=m$: $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{\cos(0)}_{1}dx = 1$ ואם $k\neq m$: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi(k-m)}\left[\sin(\pi(k-m))-\sin(0)\right]=0$

לסיכום,

$$\langle \varphi_{2k}, \varphi_{2m}\rangle = \mathbb{1}_{\{k=m\}}$$

באופן דומה פשוט לחשבן את השאר: בעזרת זהויות:

$$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cos(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

ב) נמצא את טור פורייה עבור הפונקציה: $f = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0\end{cases}$.

פתרון:

$$\langle f, \varphi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{sign}(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-1)\,dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0-(-1)) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-0) = 0$$

$$\langle f, \varphi_{2k}\rangle = \int_{-1}^{1}\cos(\pi k x)\cdot\mathrm{sign}(x)\,dx = \int_{-1}^{0}-\cos(\pi k x)\,dx + \int_{0}^{1}\cos(\pi k x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\left[\sin(0)-\sin(-\pi k)\right] + \frac{1}{\pi k}\left[\sin(\pi k)-\sin(0)\right] = 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$\langle f, \varphi_{2k+1}\rangle = \int_{-1}^{1}\sin(\pi k x)\,\mathrm{sign}(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{0}-\sin(\pi k x)\,dx}_{\int_0^1 \sin(\pi k x)dx} + \int_{0}^{1}\sin(\pi k x)\,dx = 2\int_{0}^{1}\sin(\pi k x)\,dx$$

$$= 2\cdot\frac{-\cos(\pi k x)}{\pi k}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{-2}{\pi k}\Big[\underbrace{\cos(\pi k)}_{=(-1)^k} - \underbrace{\cos(0)}_{=1}\Big] = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ odd}\end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{sign}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi k}\cdot\sin(\pi k x)\cdot\mathbb{1}_{\{k \text{ odd}\}} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(\pi(2n-1)x) \quad //$$

הערה: הטור מתכנס נקודתית ושווה אך לא במ"ש. ניתן לראות שהגבול הוא sign(x) בנקודות רציפות.

3: (שחזור)

הגדרה: פולינום טריגונומטרי מדרגה q על האינטרוול $[0,1]$ הוא קומבינציה לינארית של כל החזקות של $\sin(2\pi x)$ ו- $\cos(2\pi x)$ עד החזקה ה- q.

כיוון שכל חזקה היא בעצמה קומבינציה לינארית של סינוסים וקוסינוסים בתדרים $2\pi j$, $j\in\{0,\dots,q\}$, נקבל שכל פולינום טריגונומטרי יש צורה

$$P(x)=\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k(x)$$

כאשר φ_k הוא בסיס פורייה על הקטע $[0,1]$ ו- $N=2q$.

הוכח כי אם $N\le n-1$, אזי ההחלקה המבוססת על בסיס פורייה על $[0,1]$ משחזרת את הפולינום הטריגונומטרי:

$$\sum_{m=1}^{n} P(X_m)W_{nm}(x)=P(x)\quad,\ \forall x\in[0,1]$$

כאשר $X_m=m/n$, $m=1,\dots,n$ ו- $W_{nm}(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(X_m)\varphi_j(x)$

פתרון:

$$\sum_{m=1}^{n} P(X_m)W_{nm}(x)=\sum_{m=1}^{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k(X_m)}_{P(X_m)}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(X_m)\varphi_j(x)}_{W_{nm}(x)}$$

$$=\sum_{k=1}^{N} b_k\cdot\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\cdot\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varphi_k(X_m)\varphi_j(X_m)$$

$X_m = m/n$

$$\left[\begin{array}{l}\text{תזכורת: בסיס פורייה על } [0,1] \text{ מקיים}\\ \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varphi_i(m/n)\varphi_j(m/n)=1\{i=j\}\ ;\ i,j\in\{1,\dots,n-1\}\end{array}\right]\ (\text{שאלה } 3.1)$$

נכון עבור $k,j\in\{1,\dots,n-1\}$

$$=\sum_{k=1}^{N} b_k\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\,1\{k=j\}$$

$N\le n-1$

$$=\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k(x)=P(x)$$

//

שאלה 4: יהי $X_1,\dots,X_n$ מדגם iid מצפיפות p. $p\in L^2([0,1])$. ונתון לו אומד

$$\hat{p}_{n,N}(x)=\sum_{j=1}^{N}\hat{c}_j\varphi_j(x)$$

$\hat{c}_j := \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varphi_j(X_m)$; (φ_j) בסיס אורתונורמלי של ב- $L^2([0,1])$.

(a) הוכיחו כי $\hat{c}_j$ הם חח״ה עבור המקדמים $c_j=\langle\varphi_j,p\rangle$ ומצאו את השונות שלהם.

פתרון:

$$\mathbb{E}_p\hat{c}_j=\mathbb{E}_p\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\varphi_j(X_m)=\mathbb{E}_p\varphi_j(X_1)=\int_0^1\varphi_j(x)p(x)\,dx=\langle\varphi_j,p\rangle=c_j$$

$$\mathrm{Var}_p(\hat{c}_j)=\frac{1}{n}\mathrm{Var}_p(\varphi_j(X_1))=\frac{1}{n}\Big[\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1)-\big(\underbrace{\mathbb{E}_p\varphi_j(X_1)}_{c_j}\big)^2\Big]=\frac{1}{n}\Big(\int_0^1\varphi_j^2(x)p(x)\,dx-\Big(\int_0^1\varphi_j(x)p(x)\,dx\Big)^2\Big).$$

(b) הביעו את ה-MISE של $\hat{p}_{n,N}(x)$ ~~האומד~~ כפונקציה של p ו-φ_j-ים. [סמנו ב-MISE(N)]

פתרון:

$$\mathrm{MISE}(N)=\mathbb{E}_p\int_0^1\big(\hat{p}_{n,N}(x)-p(x)\big)^2dx=\mathbb{E}_p\int_0^1\Big(\sum_{j=1}^{N}\hat{c}_j\varphi_j(x)-\sum_{j=1}^{\infty}c_j\varphi_j(x)\Big)^2dx$$

$$=\mathbb{E}_p\Big\{\int_0^1\Big(\sum_{j=1}^{N}(\hat{c}_j-c_j)\varphi_j(x)-\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j\varphi_j(x)\Big)^2dx$$

כי $\int\varphi_k\varphi_j=0$ לכל $k\neq j$

$$=\underbrace{\mathbb{E}_p\int_0^1\Big(\sum_{j=1}^{N}(\hat{c}_j-c_j)\varphi_j(x)\Big)^2dx}_{\mathrm{I}}-\underbrace{2\mathbb{E}_p\int_0^1\sum_{j=1}^{N}(\hat{c}_j-c_j)\varphi_j(x)\sum_{k=N+1}^{\infty}c_j\varphi_k(x)\,dx}_{=0}$$

$$+\underbrace{\int_0^1\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j\varphi_j(x)\Big)^2dx}_{\mathrm{II}}$$

כיוון שהבסיס אורתונורמלי, האיברים המעורבים מתאפסים

(I) $\mathbb{E}_p\int_0^1\sum_{j=1}^{N}(\hat{c}_j-c_j)^2\varphi_j^2(x)\,dx=\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}(\hat{c}_j-c_j)^2\underbrace{\int_0^1\varphi_j^2(x)\,dx}_{=1}=\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}(\hat{c}_j-c_j)^2$

(II) $\int_0^1\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j\varphi_j(x)\Big)^2dx=\int_0^1\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j^2\varphi_j^2(x)\,dx=\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j^2$

$$\Rightarrow\ \mathrm{MISE}(N)=\sum_{j=1}^{N}\underbrace{\mathbb{E}_p(\hat{c}_j-c_j)^2}_{\mathrm{Var}_p(\hat{c}_j)}+\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\big(\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1)-c_j^2\big)+\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j^2$$

//

[illegible] הסימון. הראו כי

$$\mathbb{E}_p \hat{J}(N) = MISE(N) - \int_0^1 p^2(x)\,dx$$

כאשר

$$\hat{J}(N) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_j^2(X_i) - (n+1)\hat{c}_j^2\right)$$

והציעו כעת לבחור את N ע"י המינימום.

רמז: זהות פרסבל: $\|p\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$.

פתרון:

$$\mathbb{E}_p \hat{J}(N) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N} 2\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_i)}_{\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1)} - (n+1)\underbrace{\mathbb{E}_p\hat{c}_j^2}_{Var_p(\hat{c}_j)+\underbrace{(\mathbb{E}_p\hat{c}_j)^2}_{c_j^2}}$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N} 2\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1) - (n+1)\left[\frac{1}{n}\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1) \underbrace{- \frac{1}{n}c_j^2 + c_j^2}_{\left(1-\frac{1}{n}\right)c_j^2 = \frac{n-1}{n}c_j^2}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N}\underbrace{\left(2 - \frac{n+1}{n}\right)}_{\frac{2n-n-1}{n} = \frac{n-1}{n}}\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1) - \frac{n+1}{n}\cdot(n-1)c_j^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\left(E_p\varphi_j^2(X_1) - (n+1)c_j^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\left(E_p\varphi_j^2(X_1) - c_j^2 - nc_j^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\left(E_p\varphi_j^2(X_1) - c_j^2\right) - \frac{1}{\cancel{n}}\sum_{j=1}^{N}\cancel{n}\,c_j^2 =$$

מה שרצינו להראות

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1) - (n+1)c_j^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1) - c_j^2\right) - \sum_{j=1}^{N}c_j^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1) - c_j^2\right) + \sum_{j=N+1}^{\infty}c_j^2}\ \underbrace{- \sum_{j=N+1}^{\infty}c_j^2 - \sum_{j=1}^{N}c_j^2}$$

$$= MISE(N) - \sum_{j=1}^{\infty}c_j^2 = MISE(N) - \int_0^1 p^2(x)\,dx$$

Parseval: $\|p\|_2^2 = \int_0^1 p^2(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty}c_j^2$

$$\left(\sqrt{\langle p,p\rangle}\right)^2$$

אותו מינימום ל- MISE(N) ול- $\mathbb{E}_p\hat{J}(N)$ ולכן נבחר $\hat{N} := \underset{N\geq 1}{\operatorname{argmin}}\ \hat{J}(N)$

③ נניח כעת כי $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ הוא בסיס פורייה הטריגונומטרי. הראו ש

$$MISE(N) \le \frac{N+1}{n} + \rho_N \quad ; \quad \rho_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2$$

הוכיחו בעזרת החסם כי הסיכון אחיד על $p \in W^{per}(\beta,L)$ אם $\beta,L>0$, ה-MISE הוא
מסדר גודל $O(n^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}})$ עבור בחירה מתאימה של $N=N_n$.

פתרון:

$$MISE(N) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\Big(\underbrace{\mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1)}_{(*)} - c_j^2\Big) + \rho_N$$

נחשב את התוחלת (*) עבור בסיס פורייה. נזכור כי

$$\varphi_1(x) = 1$$

$$\varphi_j(x) = \sqrt{2}\cos(\pi j x) \;;\; j \text{ even} \iff \varphi_{2k}(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi k x)$$

$$\varphi_j(x) = \sqrt{2}\sin(\pi (j-1) x) \;;\; j \text{ odd} \iff \varphi_{2k+1}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi k x)$$

$$\Rightarrow \varphi_1^2(x) = \varphi_1(x)$$

$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$

(even) $$\varphi_j^2(x) = \left(\sqrt{2}\cos(\pi j x)\right)^2 = \cancel{2}\cdot\frac{1+\cos(2\pi j x)}{\cancel{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{2j}(x)$$

(odd) $$\varphi_j^2(x) = \left(\sqrt{2}\sin(\pi (j-1) x)\right)^2 = \cancel{2}\cdot\frac{1-\cos(2\pi(j-1)x)}{\cancel{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{2(j-1)}(x) \quad : j>1$$

$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_p\varphi_j^2(X_1) = \begin{cases} 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}_p\varphi_{2j}(X_1) \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}_p\varphi_{2(j-1)}(X_1)\end{cases} = \begin{cases} 1+\frac{1}{\sqrt{2}}c_{2j}, & j \text{ even} \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}c_{2(j-1)}, & j \text{ odd}\end{cases} \qquad \underline{\underline{j>1}}$$

$$\Rightarrow MISE(N) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}_p(\varphi_j^2(X_1)) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}c_j^2 + \rho_N =$$

$$= \frac{1}{n}\Big(\underbrace{1}_{j=1} + \underbrace{(1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}c_4)}_{j=2} + \underbrace{(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}c_4)}_{j=3} + \underbrace{(1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}c_8)}_{j=4} + \underbrace{(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}c_8)}_{j=5} + \dots\Big) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}c_j^2 + \rho_N$$

$$= \frac{N}{n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}c_j^2 + \rho_N \le \frac{N}{n} + \rho_N \le \frac{N+1}{n} + \rho_N$$

Scanned with CamScanner

(שאלה א + 1.80)

כאשר N הוא מצוי, מתקיים אותו חסם כיוון שעבור האומד של המקדם נקבל:

$$MISE(N) = \frac{N}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}c_{2N} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} c_j^2 + \rho_N$$

מתקיים כי

$$\frac{1}{\sqrt{2}}c_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \varphi_{2N}, p\rangle = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\int_0^1 \cancel{\sqrt{2}}\cos(2\pi N(x))p(x)dx$$

$$\le \max_{x\in[0,1]} \cos(2\pi N x)\int_0^1 p(x)dx = 1$$

דהיינו:

$$MISE(N) \le \frac{N}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} c_j^2 + \rho_N \le \frac{N+1}{n} + \rho_N$$

לבסוף, אם $p\in W^{per}(\beta,L)$ אז לפי הלמה שראינו בכיתה מתקיים כי מקדמי פוריה שלה שייכים לאליפסואיד:

$$\Theta(\beta,Q) = \left\{\theta\in\ell^2 : \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\theta_j^2 \le Q\right\}$$

$$Q = L^2/\pi^{2\beta} \quad ; \quad a_j = \begin{cases} j^\beta & , j \text{ odd} \\ (j-1)^\beta & , j \text{ even}\end{cases}$$

לכן:

$$\rho_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 \le \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2\cdot\left(\frac{a_j}{a_{N+1}}\right)^2 \le \frac{1}{a_{N+1}^2}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 a_j^2}_{\le Q} \le N^{-2\beta}Q$$

a_j סדרה מונוטונית עולה. בכיתה

$\frac{a_j}{a_{N+1}}$ גדול מ-1 עבור $j \ge N+1$

$$a_{N+1}^2 = \frac{(N+1)^\beta}{N^\beta}$$

$$\Rightarrow MISE(N) \le \frac{N+1}{n} + QN^{-2\beta}$$

נבחר $N_n = \lfloor c n^{\frac{1}{2\beta+1}} \rfloor$ ונקבל

$$MISE(N) \le (C+Q)n^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}} + \frac{1}{n} = O\left(n^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}}\right)$$

//