מכיוון ש-$-1 \leq \cos x \leq 1$ אז

$$-t \leq \int_0^t \cos x dx \leq t$$

ומכאן ש-$-t \leq \sin t \leq t$ ולכן

$$-1 \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$$

לכל $t > 0$. מכיוון ש-$\sin t/t$ היא פונקציה זוגית אז זה גם נכון לכל $t < 0$. אם נשאיף את $t \to 0$ וניעזר בכלל לופיטל נקבל כי

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

מכאן שאם נגדיר

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

נקבל פונקציה רציפה. ברור שהיא גזירה בכל $t \neq 0$ והנגזרת היא

$$f'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$

עבור $t = 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin t}{t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{2} = 0$$

מכאן שהנגזרת קיימת ושווה ל-0. כמו כן נשים לב כי

$$\lim_{t\to 0} f'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-t\sin t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{2} = 0$$

ומכאן ש-f גזירה ברציפות.

אם שוב ניקח אינטגרל באי השוויון $-t \leq \sin t \leq t$ נקבל

$$-\frac{t^2}{2} \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$$

ומכאן ש-

$$-1 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2/2} \leq 1$$

לכל $t > 0$ ומכיוון שגם זו פונקציה זוגית גם לכל $t < 0$. אם ניעזר בכלל לופיטל נקבל כי

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2/2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

עכשיו, נסתכל על הפונקציה

$$g(t)=\int_0^t \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^t f(x)dx$$

עבור $t \geq 0$ ונחקור את תכונותיה. תחילה נשים לב כי

$$g'(t)=\frac{\sin t}{t}$$

ומתקיים שוויון לאפס עבור $t \in \{\pi n | n \geq 1\}$. לכל $n \geq 1$

$$g''(\pi n)=f'(\pi n)=\frac{\cos \pi n}{\pi n}-\frac{\sin \pi n}{(\pi n)^2}=\frac{\cos \pi n}{\pi n}$$

לכן $g''(\pi n)$ חיובי לכל n זוגי ושלילי לכל n אי זוגי. מכאן ש-$\{\pi 2n | n \geq 1\}$ הן נקודות מינימום מקומי ואילו $\{\pi(2n+1) | n \geq 0\}$ הן נקודות מכסימום מקומי. נשים לב כי גם $t=0$ הי מינימום מקומי מכיוון שלכל $0<t\leq \pi$ מתקיים כי $g(t)>0=g(0)$.

טענה: לכל $t \geq 0$

$$0 \leq g(t) \leq g(\pi)$$

הוכחה: מספיק להראות שני דברים. האחד הוא כי לכל $n \geq 0$ מתקיים כי

$$g(\pi 2n) \geq 0$$

כי אם כל ערכי המינימום המקומיים גדולים או שווים לאפס אז גם כל שאר ערכי הפונקציה. השני הוא כי

$$g(\pi(2n+1)) \leq g(\pi)$$

כי אם כל ערכי המכסימום המקומיים קטנים או שווים מ-$g(\pi)$ אז גם כל שאר ערכי הפונצקיה. כדי להראות את שניהם, נשים לב כי אם $n \geq 1$ אז

$$\begin{aligned}
g(\pi 2n)-g(\pi 2(n-1)) &= \int_{\pi 2(n-1)}^{\pi 2n} \frac{\sin x}{x}dt \\
&= \int_{\pi 2(n-1)}^{\pi(2n-1)} \frac{\sin x}{x}dt+\int_{\pi(2n-1)}^{\pi 2n} \frac{\sin x}{x}dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin(\pi 2(n-1)+y)}{\pi 2(n-1)+y}dy+\int_0^{\pi} \frac{\sin(\pi(2n-1)+y)}{\pi(2n-1)+y)}dy \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin y}{\pi 2(n-1)+y}-\frac{\sin y}{\pi(2n-1)+y}\right)dy \\
&= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{(\pi 2(n-1)+y)(\pi(2n-1)+y)}dy>0
\end{aligned}$$

כאשר השוויון השלישי נובע מכך ש- $\sin(\pi k+y)=\sin y$ כאשר k זוגי ו-$\sin(\pi k+y)=-\sin y$ כאשר k אי זוגי. אי השוויון האחרון נובע מכך שהאינטגרנד חיובי לכל $0<y<\pi$. לכן, אם נזכור כי $g(0)=0$ אז

$$g(\pi 2n)=g(0)+\sum_{k=1}^{n}(g(\pi 2k)-g(\pi 2(k-1))) \geq 0$$

לכל $n \geq 1$ ומכאן ש-0 היא נקודת המינימום הגלובלי ובפרט $g(t) \geq 0$ לכל $t \geq 0$ עם שוויון אם ורק אם $t = 0$.

באותו אופן בדיוק, מתקיים כי

$$g(\pi(2n+1)) - g(\pi(2n-1)) = -\pi \int_0^\pi \frac{\sin y}{(\pi(2n-1)+y)(\pi(2n+1)+y)} dy < 0$$

ומכאן ש-

$$g(\pi(2n+1)) = g(\pi) + \sum_{k=1}^{n} (g(\pi(2k+1)) - g(\pi(2k-1))) \leq g(\pi)$$

ומכאן כ-$g(t) \leq g(\pi)$ עם שוויון אם ורק אם $t = \pi$.

נסתכל עכשיו על

$$h(u,x) = e^{-ux} \sin x$$

זו פונקציה רציפה ולכן בורל (כפונקציה של שני משתנים). ברור כי

$$\int_0^t \int_0^\infty |h(u,x)| du dx \leq \int_0^t \frac{|\sin x|}{x} dx \leq \int_0^t 1 dx = t < \infty$$

ולכן מותר להשתמש במשפט פוביני. תחילה, נשים לב כי

$$\int_0^t \int_0^\infty h(u,x) du dx = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = g(t)$$

מצד שני ביטוי זה שווה גם ל-

$$\int_0^\infty \int_0^t e^{-ux} \sin x dx du$$

עכשיו נבצע אינטגרציה בחלקים פעמיים ונקבל

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-ux} \sin x dx &= 1 - e^{-ut} \cos t - u \int_0^t e^{-ux} \cos x dx \\ &= 1 - e^{ut} \cos t - u e^{-ut} \sin t - u^2 \int_0^t e^{-ux} \sin x dx \end{aligned}$$

ומכאן ש-

$$\int_0^t e^{-ux} \sin x dx = \frac{1 - e^{-ut}(\cos t + u \sin t)}{1 + u^2} \qquad (1)$$

ומכיוון שהמונה בצד ימין שואף ל-1 כאשר $t \to \infty$ נובע כי

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-ux} \sin x dx = \frac{1}{1+u^2}$$

אם נגזור את $\int_0^t e^{-ux} \sin x dx$ לפי t נקבל כמובן $e^{-ut} \sin t$ וזה שווה לאפס עבור $t \in \{\pi n | n \geq 0\}$. ומכאן שנקודות המינימום והמכסימום של $\int_0^t e^{-ux} \sin x dx$ הן כולן כפולות שלמות של π. לכל

נקודה כזו נקבל כי המונה מצד ימין של משוואה (1) הוא מהצורה $1 \pm e^{-ut}$ ומכאן שהוא בין אפס ל-2. בפרט

$$0 \leq \int_0^t e^{-ux} \sin x dx \leq \frac{2}{1+u^2}$$

ומכיוון ש-

$$\int_0^\infty \frac{2}{1+u^2} du = 2 \arctan u|_0^\infty = 2(\pi/2 - 0) = \pi < \infty$$

נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת כי

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \int_0^t e^{-ux} \sin x dx du = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux} \sin x dx du = \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2}$$

מצד שני

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \int_0^t e^{-ux} \sin x dx du = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^\infty e^{-ux} \sin x du dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$$

ולכן קיבלנו כי הגבול של $\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$ כאשר $t \to \infty$ קיים ומתקיים כי

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

מכיוון ש-$\frac{\sin x}{x}$ היא פונצקיה סימטרית אז קבלנו לבסוף כי

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

הערה: בדרך כלל מקובל להראות תוצאה זו בקלות בעזרת תוצאות מפונצקיות מרוכבות, אך אין לנו את הידע הזה בקורס זה ולכן היינו צריכים לעבוד קצת יותר.
עוד הערה: בעזרת אינטגרציה בחלקים מתקיים כי

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^t \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1-\cos t}{t} - \frac{1-\cos \epsilon}{\epsilon} + \int_\epsilon^t \frac{1-\cos x}{x^2} dx \\ & \frac{1-\cos t}{t} - \frac{1-\cos \epsilon}{\epsilon^2/2} \cdot \frac{\epsilon}{2} + \int_\epsilon^t \frac{1-\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

ואם נשאיף $\epsilon \downarrow 0$ ו-$t \uparrow \infty$ נקבל

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

בניגוד לצד שמאל, האינטגרנד בצד ימין הוא אי שלילי. עכשיו נשים לב כי $\int_0^\infty ue^{-ux} du = 1/x^2$ (למשל, מכיוון ש-$\frac{x^2}{\Gamma(2)} e^{-xu} u^{2-1}$ היא צפיפות ב-u) ולכן

$$\int_0^\infty \int_0^\infty ue^{-ux}(1-\cos x) du dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

מכיוון ש-$ue^{-ux}(1-\cos x)$ היא פונקציה אי שלילית ובורל (כי היא רציפה כפונקציה של שני משתנים) ניתן להשתמש כאן במשפט טונלי-פוביני ולהסיק כי

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^\infty \int_0^\infty ue^{-ux}(1-\cos x)dxdu$$

בעזרת אינטגרציה בחלקים פעמיים אפשר להראות כי

$$\int_0^\infty e^{-y}\cos(y/u)dy = \frac{u^2}{1+u^2}$$

ואז

$$\int_0^\infty ue^{-ux}(1-\cos x)dx = 1-\int_0^\infty e^{-y}\cos(y/u)dy = \frac{1}{1+u^2}$$

ומכיוון ש-

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}$$

קבלנו שוב את התוצאה המבוקשת.