יסודות תורת ההסתברות

אוהד נ. פלדהיים
אורי גוראל גורביץ'

מכון איינשטיין למתמטיקה

האוניברסיטה העברית בירושלים

3 בינואר 2019

תזכורת מה זה אומר ש-2 מ"מ בעלי אותה פונק' התפלגות ז"א $X \overset{d}{=} Y$

שימו לב לשני ההבדלים הבאים? $X=Y: R \to \Omega$

1) אם $X=Y$ זה אומר שהפונק' שוות ממש. אותו איבר במקור יקבלו את אותו איבר בטווח

2) אם $X \overset{d}{=} Y$ זה אומר ש $P_Y = P_X$ [2 מאורעות עם אותה הסתברות] כלומר באופן כללי X שווה להתפלגות של Y

דוג' להמחשת ההבדלים: בין $X=Y$ לבין $X \overset{d}{=} Y$

ברור כי $X \neq Y$ כהגדרת הפונק' מ $\Omega \to R$ אבל הן נותנות בדיוק את אותן ההסתברויות למאורעות ב Ω

Ω	P	$X(w)$	$Y(w)$
0	1/3	w	w mod3
1	1/3		
2	1/3		
3	0		

פרק 10
סדרות של התפלגויות

כמעט שאינני מכיר דבר-מה אשר מותיר רושם כה עז על הדמיון כמו תבנית הסדר הקוסמי המתבטאת באמצעות חוק שכיחות הסטיות. החוק היה זוכה להאנשה על ידי היוונים אילו הכירוהו. הוא מושל בשלווה ובצניעות מושלמת בלב התוהו הפראי ביותר. ככל שרב האספסוף, ניכרת יותר האנארכיה, כך נשעית שליטתו מושלמת. זהו החוק העליון שבשיגעון.

– סר פרנסיס גלטון על משפט הגבול המרכזי, "תורשה טבעית", 1889

במובן מסויים של התכנסות משתנים מקריים נתקלנו בפרק 3, בדוגמא 3.42. שם רצינו להראות שהתפלגות מספר המטבעות המוטלים לפני תוצאה ראשונה של עץ (או סיום הטלת כל המטבעות), כאשר מטילים N מטבעות, מתכנסת להתפלגותו של משתנה גיאומטרי. קשרים דומים שימשו אותנו לניסוח הקשר בין התפלגות בינומית לפואסונית (בעיה 3.27) ולניסוח החוק החלש של המספרים הגדולים (משפט 5.8). בפרק זה נגדיר מושג זה של התכנסות המכונה **התכנסות התפלגויות** או **התכנסות בהתפלגות** ונחקור תכונות אוניברסליות שלו.

10.1 התכנסות התפלגויות

את מושג ההתכנסות עבור התפלגויות נגדיר במונחים של פונקציות התפלגות מצטברות.

הגדרה 10.1 (התכנסות בהתפלגות למשתנה מקרי בדיד)**.** תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים, לא בהכרח על אותו מרחב הסתברות, ויהי X משתנה מקרי. נאמר כי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת **בהתפלגות (in distribution)** ל-X, ונסמן $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ אם לכל a שהיא **נקודת רציפות** של F_X מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(a) = F_X(a).$$

התכנסות בהתפלגות היא תכונה חלשה יותר מ-"התכנסות של ההסתברות ש-X_n נמצאת ב-I לכל קטע ב-$\mathbb{R}$". בכדי להבין את המוטיבציה להגדרה המורכבת והחלשה יותר, נסתכל על הדוגמא הבאה.

דוגמא 10.2. תהי $X_n \overset{\text{a.s.}}{=} c_n$ סדרת משתנים מקריים קבועים, כאשר $c_n \to 0$ ויהי $X \overset{\text{a.s.}}{=} 0$. פונקציית ההתפלגות

נניח $c_n = \frac{1}{n}$

$F_{X_n}(a) = \mathbb{1}(a \geq \frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} F_X(a) = \mathbb{1}(a > 0)$

גדול

קצת אינטואיציה לפני דוגמאות בסיסיות:

יש לי מ״מ לא בהכרח מאותו מרחב מדגם זהה:

$\Omega_1 \xrightarrow{X_1}$

$\Omega_2 \xrightarrow{X_2}$

$\vdots$

$\Omega_n \xrightarrow{X_n}$

$\mathbb{R}$

החל ממקום מסוים מתקיים ש:

$\Omega_1 \xrightarrow{X_1} X$

$\Omega_2 \xrightarrow{X_2}$

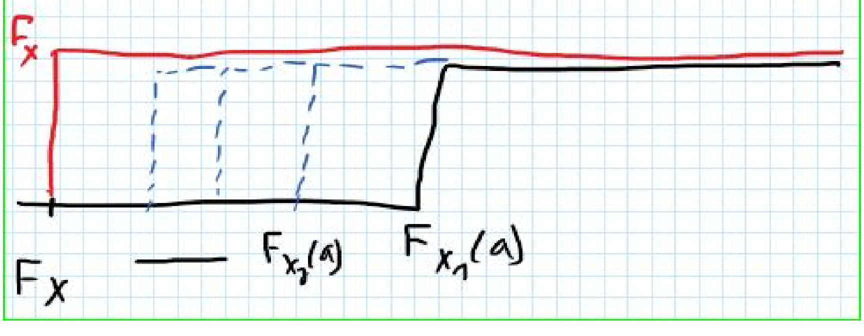
במובן

בהתפלגות?? נשים לב שהתפלגות בו שונה במהותה מהתכנסות נק׳ מהתכנסות בהסתברות?

הדגש כאן בהמשך ממומש מאורע מופיעה בדרישה המעניינת של a נק׳ רציפות של F_X

אותה דרישה נמצא באינפי 1 שמכוני רציפה בנק׳ כלומר גבולות חד צדדים שווים??

ויזואלית:



המצטברות של הסדרה הן

$$F_{X_n}(a)=\begin{cases}0 & a<c_n\\ 1 & a\geq c_n\end{cases}$$

ואומנם $\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(a)=F_X(a)$ בכל נקודה מלבד 0, נקודת האי-רציפות היחידה של F_X. ניתן לומר שההגדרה המורכבת שבחרנו נועדה לאפשר גם להתכנסות כזו להיקרא התכנסות בהתפלגות, ואכן לפי הגדרה זו $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

דוגמא 10.3 (דוגמאות פשוטות להתכנסות בהתפלגות).

(א) אם X_n, X כולם משתנים מקריים שווי-התפלגות, אז $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

(ב) אם $\mathbb{P}(X_n=c_n)=1$ ו- $\mathbb{P}(X=c)=1$, אז $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ אם ורק אם $c_n\to c$.

(ג) אם $X_n\sim U([-\frac{1}{n},\frac{1}{n}])$ אז $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$. כך גם לגבי $X_n\sim U([0,\frac{1}{n}])$ ו- $X_n\sim U([\frac{1}{n},\frac{2}{n}])$. נשים לב שבדוגמאות אלה הערכים של $F_{X_n}(0)$ שונים ולא חייבים להתכנס ל- $F_X(0)=1$. כיוון ש-0 היא נקודת אי-רציפות של F_X הדבר עולה בקנה אחד עם הגדרת התכנסות בהתפלגות.

כעת נראה כיצד ההתפלגויות הרציפות בהחלט שלמדנו להכיר בפרק 9, מתקבלות כגבול של התפלגויות בדידות. בכך נצדיק את השימושים שהצגנו עבור התפלגויות אלו.

דוגמא 10.4.

(א) $X_n\sim U(\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\})$, $X\sim U([0,1])$. כל a היא נקודת רציפות של F_X. עבור $a>1$ או $a<0$ ההתכנסות טריויאלית ואילו עבור $0<a<1$ מתקיים $\mathbb{P}(X\leq a)=a\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\lfloor na\rfloor}{n}=\mathbb{P}(X_n\leq a)$, ולכן $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

בתרגין [illegible] הבא

(ב) $X_n\sim \mathrm{Bin}(n,\frac{1}{n})$, $X\sim \mathrm{Po}(1)$. לכל $k\in\mathbb{N}_0$ נחשב את הגבול:

$$\mathbb{P}(X_n=k)=\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{e^{-1}}{k!}=\mathbb{P}(X=k).$$

קבוצת נקודות הרציפות של F_X היא $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. אם נקח $a\in(k,k+1)$ עבור k טבעי, אז

$$F_{X_n}(a)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X_n=j)\xrightarrow{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X=j)=F_X(a),$$

ולכן $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$. בדוגמה זו $F_{X_n}(a)\to F_X(a)$ גם בנקודות האי-רציפות של F_X.

~~(ג) $X_n\sim U(\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\})$, $X\sim U([0,1])$. כל a היא נקודת רציפות של F_X. עבור $a>1$ או $a<0$ ההתכנסות טריויאלית. עבור $0<a<1$ מתקיים $\mathbb{P}(X\leq a)=a\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\lfloor na\rfloor}{n}=\mathbb{P}(X_n\leq a)$ ולכן יש התכנסות בהתפלגות.~~

(ד) אם $X_n\sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{n})$ ו $X\sim \mathrm{Exp}(1)$ אזי $Y_n:=\frac{1}{n}X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$. נקח $a>0$.

$$\mathbb{P}(Y_n\leq a)=\sum_{k=1}^{\lfloor na\rfloor}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\frac{1}{n}=\frac{1-(1-\frac{1}{n})^{na+1}}{1-(1-\frac{1}{n})}\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}1-e^{-a}=F_X(a).$$

נפקדת יחידה מרשימת דוגמאות זו היא ההתפלגות הנורמלית. ההתכנסות להתפלגות זו מבוארת בפרק הבא.

מס' דוג' בסיסיות כדי לפתח אינטואיציה:

תחילה כיצד נמצא מועמד לX עבור X_n מסוימים?

נחשב את $F_{X_n}(a)$ ונראה האם מתכנס עבור a שונים כך ש:

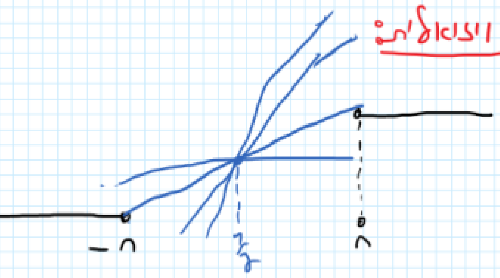
$F_X(a)$ זו פונק' מונו' עולה ל-1 ומתלכדת עם הגבול

דוג' בסיסית: $X_n \sim Unif([-n,n])$ אז נקבל ש:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & t=-n \\ \frac{t+n}{2n} \, * & t\in[-n,n] \\ 1 & t\geq n \end{cases}$$

גדול

ויזואלית:



* חישבתי לפי הגדרה מבין $F_{X_n}(a)$ כש $X_n \sim U([-n,n])$ כלומר X_n מתפלג אחיד על קטע לכן זה משתנה רציף ואני לוקח את ההגדרה לפי פונק' הסתברות מצטברת של משתנה מקרי רציף קרי:

$$F_{X_n}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathbb{1}[-n,n]}{2n}\,dt = \frac{x}{2n}\Big|_{-n}^{t} = \frac{t+n}{2n}$$

לכן

$$\lim_{x\to\infty} F_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t+n}{2n} = \frac{1}{2} = F_X(a)$$

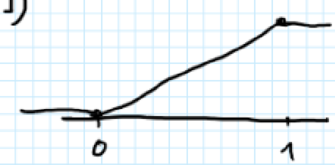
מבין ש $F_X(a)$ זו פונק' קבועה $\frac{1}{2}$ אבל אין התכנסות בהתפלגות מכיוון ש $F_X(a)$ לא מונו' עולה ל-1

הערה לגבי דוג' א:

$$F_{X_n}(a) = P(X_n \leq a) = \sum_{m<na} P(X_n = m) = \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \xrightarrow{n\to\infty} a$$

$X_n \sim Unif([0,1])$

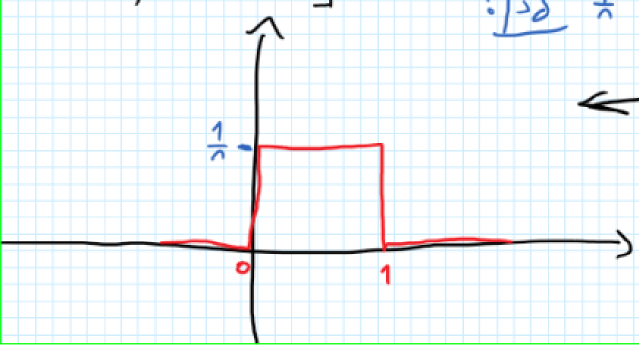
ויזואלית: $a\cdot\mathbb{1}_{a\geq 0} + \mathbb{1}_{a\geq 1}$



רגע לאינטואיציה: לכל מס' בקטע $[0,1]$ נקבל סיכוי של $\frac{1}{n}$ לכן:

לכן אם אבצע אינטגרציה לפונק' הנ"ל אקבל בדיוק את התמונה הויזואלית הקודמת

פונק' התפלגות מצטברת קרי $F_{X_n}(a)$



הערה לגבי דוג' ב:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

קבוע

אינטואיציה לגבי משפט הגבול המרכזי:

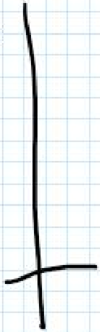
נחזור לשאלה של הילוך שיכור

סיכוי	ערך
$\frac{1}{2}$	1
$-\frac{1}{2}$	-1

$X_n \sim$

הילוך שיכור

הליכה על ציר המספרים.



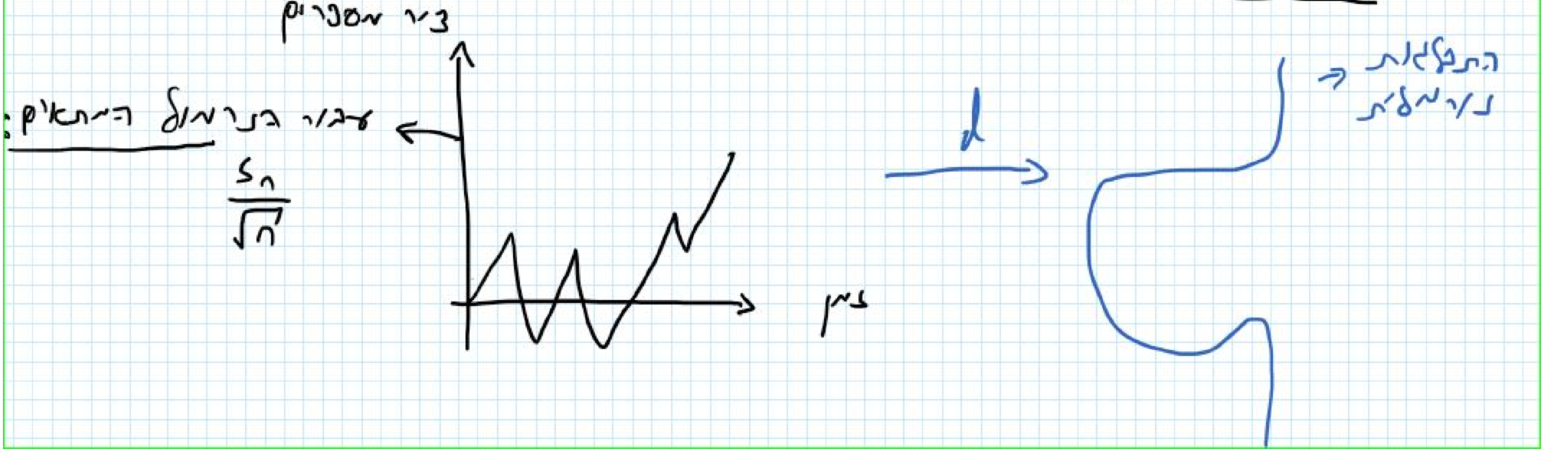
החוק החזק של המספרים הגדולים אומר ש: $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \overset{a.s}{=} 0$

ויותר מזה הוא אומר ש $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^\alpha} \overset{a.s}{=} 0$ עבור $\alpha > \frac{1}{2}$

נשים לב שאם $\frac{S_n}{n^\alpha}$ עבור $\alpha < \frac{1}{2}$ אז לא ש $\frac{S_n}{n^\alpha} \not\to$

כנראה יתכן שאני לא מסתכל על הבעיה בצורה הנכונה אם אני אנרמל את S_n בצורה מספיק נכונה אז אקבל התפלגות נורמלית

כלומר ויזואלית:



10.2 משפט הגבול המרכזי

אחת התוצאות המרשימות ביותר של תורת ההסתברות, אשר תהילתה מובאת בציטוט שבתחילת הפרק, היא **משפט הגבול המרכזי**. משפט זה קובע כי כאשר מספר גדול של גורמים בלתי-תלויים בעלי שונות נסכמים, אז לאחר נרמול בסטיית התקן של הסכום - סטייתו מהתוחלת שואפת תמיד להתפלגות נורמלית. זו דוגמא לתופעה של אוניברסליות, כלומר מצב שבו תנאי ההתחלת המתמטיים אינם משפיעים על התוצאה. תוצאות כאלו זוכות לעיתים קרובות לשימושים רבים בכל תחומי המדע.

גרסא בסיסית של המשפט הייתה ידועה כבר לאברהם דה-מואבר ב-1733, והוא הורחב לתנאים מקלים יותר ויותר, כאשר גרסאותיו המודרניות מאפשרות גם סכימה של משתנים בעלי תלויות ובלבד שהללו תהיינה חלשות דיו. כאן נביא את גרסתו הקלאסית והמוכרת ביותר של המשפט.

משפט 10.5 (משפט הגבול המרכזי). תהי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי התפלגות, בעלי תוחלת 0 ושונות 1. אזי

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{d}} Z$$

כאשר Z הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

הגדרה של מונח
הסתברות מצטברת
של מ"מ רציפים בכללי

באופן שקול, לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \le a\right) \to \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}dx.}$$

גרסא כמותית של המשפט הוכחה על ידי אנדרו ברי (Andrew Berry) וקרל-גוסטב אסין (Carl-Gustav Esseen).

משפט 10.6 (משפט ברי-אסין). תהי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי התפלגות, בעלי תוחלת 0, שונות 1 ומומנט מוחלט שלישי $\rho = \mathbb{E}\left[|X_1^3|\right] < \infty$. אזי לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \le a\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}dx\right| \le \frac{\rho}{\sqrt{n}}.$$

דוגמא 10.7. תהי $X_n \sim \text{Bin}(n,p)$ סדרת משתנים מקריים בינומים ויהי $X\sim N(0,1)$. נראה כי $\frac{X_n-pn}{\sqrt{p(1-p)n}} \xrightarrow{\text{d}} X$.

תשובה: יהיו $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים בלתי-תלויים ושווי התפלגות כך שמתקיים $Y_i \sim \text{Ber}(p)$. נשים לב כי מתקיים $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ ולכן

$$\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i - \mathbb{E}(Y_i)}{\sqrt{\text{Var}(Y_i)}}$$

למה שונות = 1 :

$$Var(z_i) = var\left(\frac{\boxed{y_i - E(y_i)}}{\sqrt{Var(y_i)}}\right) = \frac{var(y_i) - 0}{Var(y_i)} = 1$$

נסמן $\sigma = \sqrt{var y_i}$

$$= var\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{var\, x}{\sigma^2} = \frac{Var(y_i)}{var(y_i)} = 1$$

להוציא סקלר בשונות צב לעלות אותו בריבוע

נסמן $Z_i = \frac{Y_i - \mathbb{E}(Y_i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_i)}}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים בעלי תוחלת 0 ושונות 1 ונקבל כי לפי משפט הגבול המרכזי

$$\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{\mathrm{d}} X,$$

כנדרש.

10.3 התכנסות בהתפלגות והתכנסות בהסתברות

משפט 10.8 (התכנסות בהסתברות גוררת התכנסות בהתפלגות). תהי X_n סדרת משתנים מקריים ויהי X משתנה מקרי, כולם על אותו מרחב הסתברות. אם $X_n \xrightarrow{\mathrm{p}} X$ אז $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

הוכחה. תהי a נקודת רציפות של F_X, ויהי $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n \le a) &= \mathbb{P}(X_n \le a, X \le a+\epsilon) + \mathbb{P}(X_n \le a, X > a+\epsilon) \\ &\le \mathbb{P}(X \le a+\epsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)\end{aligned}$$

(1)

ולכן $F_{X_n}(a) \le F_X(a+\epsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$. בצורה דומה

$$\mathbb{P}(X \le a-\epsilon) = \mathbb{P}(X \le a-\epsilon, X_n \le a) + \mathbb{P}(X \le a-\epsilon, X_n > a) \le \mathbb{P}(X_n \le a) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$$

ולכן $F_X(a-\epsilon) \le F_{X_n}(a) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$. קיבלנו

$$F_X(a-\epsilon) - \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon) \le F_{X_n}(a) \le F_X(a+\epsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$$

נשאיף את n לאינסוף ונקבל מהגדרת ההתכנסות בהסתברות כי לכל $\epsilon > 0$ מתקיים

$$F_X(a-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(a) \le \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(a) \le F_X(a+\epsilon).$$

ומכך ש-a נקודת רציפות נקבל $F_X(a) \le \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(a) \le F_X(a)$. ∎

ההיפך אינו נכון. למשל, אם $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שאינם קבועים, אז $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$, כאשר X משתנה מקרי נוסף בעל אותה התפלגות, אך $X_n \overset{\mathrm{p}}{\not\to} X$. עם זאת, מתקיים המשפט הבא.

משפט 10.9 (התכנסות בהתפלגות לקבוע גוררת התכנסות בהסתברות). תהי X_n סדרת משתנים מקריים, יהי X משתנה מקרי ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$ אז $X_n \xrightarrow{\mathrm{p}} c$.

הוכחה. תהי F_c פונקצית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי הקבוע c. לכל $\epsilon > 0$ מתקיים $F_c(c-\epsilon) = 0$ ו-$F_c(c+\epsilon) = 1$. אם $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$ אז $F_{X_n}(c-\epsilon) \to 0$ ו-$F_{X_n}(c+\epsilon) \to 1$ ולכן

$$\mathbb{P}(|X_n - c| \le \epsilon) \ge F_{X_n}(c+\epsilon) - F_{X_n}(c-\epsilon) \to 1,$$

כנדרש. ∎

1) הערה על הוכחה:

(i) $P(X_n \le a,\ X \le a+\epsilon) \le P(X \le a+\epsilon)$

(ii) $P(\underbrace{X_n \le a,\ X > a+\epsilon}_{A}) \le P(\underbrace{|X_n - X| > \epsilon}_{B})$

$A \subseteq B$

$\downarrow$

הכלה
של
מאורעות

*10.4 משמעותה של התכנסות התפלגויות

הדרישה בהגדרה של התכנסות בהתפלגות של סדרת משתנים מתייחסת רק להתכנסות של F_{X_n} בנקודות רציפות. ראינו בדוגמא 10.2 שזוהי דרישה משמעותית. ראשית נציג הגדרה חילופית להתכנסות בהתפלגות שאינה מערבת סוגיות רציפות של F_{X_n}.

טענה 10.10. תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים. X_n מתכנסת בהתפלגות ל-X אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ ולכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$F_X(r-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(r) \le \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(r) \le F_X(r+\epsilon)$$

הוכחה. קל לראות כי בנקודות רציפות של F_X הטענה שקולה לכך ש-$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(r) = F_X(r)$, ולכן התנאי בטענה 10.10 חזק יותר מאשר התנאי בהגדרה 10.1. בכיוון ההפוך, עלינו להראות כי אם $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$, אז בכל נקודת אי-רציפות r מתקיים תנאי הטענה. נשים לב כי $F_X(t)$ הנה פונקציה מונוטונית עולה ולכן יש לה מספר בן-מניה של נקודות אי-רציפות (ר' טענה 0.4). יהי $\epsilon > 0$. כיוון שמספר נקודות אי-הרציפות הנו בן מניה, קיימות נקודות $b-\epsilon \le b_- \le b \le b_+ \le b+\epsilon$ שהן נקודות רציפות של F_X. לכן מתקיים לפי תכונת ההתכנסות בהתפלגות

$$F_X(b-\epsilon) \le F_X(b_-) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(b_-) \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(b) \le \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(b) \le F_X(b+\epsilon),$$

כנדרש.

■

✎ **בעיה 10.1.** להכליל את טענה 10.10 ולהראות כי התכנסות X_n מתכנסת בהתפלגות ל-X אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ ולכל $[a,b]$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in (a+\epsilon, b-\epsilon)) \le \mathbb{P}(X_n \in (a,b)) \le \mathbb{P}(X \in (a-\epsilon, b+\epsilon)).$$

נציג ללא הוכחה את הטענה הבאה המסכמת את מהותה של התכנסות בהתפלגות.

טענה 10.11. תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים ויהי X משתנה מקרי. אזי $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ אם ורק אם לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(X)$.

✎ **בעיה 10.2.** להוכיח את טענה 10.10 עבור משתנים מקריים רציפים בהחלט.

בעיות הרחבה והעשרה

✎ **בעיה 10.3.** יהיו $X_n \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ ונסמן $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ וכן $Z_n = Y_n - \lfloor Y_n \rfloor$. יש להראות כי $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$ עבור $Z \sim \mathrm{Unif}[0,1]$.

✎ **בעיה 10.4.** לחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}.$$

רמז: לכל n הביטוי הוא הסתברותו של מאורע הקשור למשתנה מקרי מסוים. ניתן להשתמש במשפט הגבול המרכזי בכדי לחשב את הגבול.