תרגול מודלים ב

נניח כי $X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} F$

ונניח בפונקציונל $T(F)=\int \psi\, dF$

שאלה: חשב מהי נגזרת גאטו עבור פונקציונל לינארי $\dot{T}(G-F)=?$

פתרון:

ניקח משפחה G_t עבור $t\in[0,1]$ כך ש $\|G_t-G\|_\infty\to 0$

$$\Updownarrow$$

$$G_t\to G$$

$$\frac{T\left[F+t(G_t-F)\right]-T(F)}{t}=\int_{\mathbb{R}}\psi\, d[G_t-F]\ \underset{t\to0}{\overset{?}{\longrightarrow}}\ \int\psi\, d(G-F)$$

נראה את ?:

להוכיח בהמשך והגדרה ← **למה:** אם ψ פונק׳ חסומה ורציפה אז

$\cancel{\int d[G_t-F]\xrightarrow{t\to0}}$

$$\int\psi\, d[G_t-F]\xrightarrow{t\to0}\int\psi\, d[G-F]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\int\psi\, d[G_t]\xrightarrow{t\to0}\int\psi\, dG}$$

בתזכורת פונק׳ פשוטה:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbb{1}_{A_j}\right)$$

הוכחה: עבור $\delta>0$ קיים ψ_δ **פשוטה:** כלומר

כך ש $\|\psi-\psi_\delta\|_\infty<\delta$

נשים לב כי יש פונק׳ כזו מכיוון ש ψ **חסומה**!

$$\cancel{\int\psi\, d[G_t-F]\overset{\Delta}{\le}\int|\psi-\psi_\delta|\, d[G_t-F]+\int\psi_\delta\, d[G_t-F]}$$

כעת נקבל

$$\int\psi\, d[G_t-G]\overset{\Delta}{\le}\underbrace{\int|\psi-\psi_\delta|\, d[G_t-G]}_{\le 2\delta}+\underbrace{\int|\psi_\delta|\, d[G_t-G]}_{(*)}$$

$\int|\psi-\psi_\delta|\,dG_t+\int|\psi-\psi_\delta|\,dG$ כי [illegible]

$$\int \psi_\delta \, d[G_\epsilon - G] \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$$

כאן
הבחירה
עוצמתית קריטית

כי קורה שוויון:

$$\int \psi_\delta \, d[G_\epsilon - G] = \underbrace{\sum_{i=1}^{\hat{?}} \psi(x_i)}_{\text{סכום סופי}} \cdot \underbrace{[G_\epsilon - G]}_{\|G_\epsilon - G\|_\infty \xrightarrow{\epsilon\to\infty} 0} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$$

וקיבלנו כי: $\int \psi \, dG_\epsilon \to \int \psi \, dG$

ומכאן הכל $\boxtimes$

ג) נשים לב כי עבור Ψ <u>לא</u> חסומה נגזרת הפונקציונל לא בהכרח מוגדרת עבור פונקציונל <u>לינארי</u> ← בניגוד לשינוי ההגדרה

<u>דוגמא:</u> $\Psi(x)=x$ ונגדיר את $G_\epsilon = (1-\epsilon)G + \epsilon\Delta_{a(\epsilon)}$

כאשר $\Delta_x = 1\!\!1_{\{y \geq x\}}$

~~$\|G_\epsilon - G\|_\infty$~~

נשים לב כי $\|G_\epsilon - G\|_\infty \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$

$$\|G_\epsilon - G\|_\infty = \|\cancel{G} - \epsilon G + \epsilon\Delta_x - \cancel{G}\|_\infty = \epsilon \cdot \|\Delta_x - G\|_\infty \leq \epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$$

$$\int \psi \, d[G_\epsilon] = (1-\epsilon)\int \psi \, d[G] + \epsilon \int \psi \, d[\Delta_x]$$

$$= \underbrace{(1-\epsilon)\int \psi \, dG}_{\approx} + \underbrace{\epsilon\,\Psi[a(\epsilon)]}_{= \epsilon \cdot a(\epsilon)}$$

ואם נבחר את $a(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}$ נקבל כי לא מתכנס כאשר $\epsilon \to 0$

3) **דוגמא:**

אם F רציפה אז $F(q)=p$ $\qquad F^{-1}(p) \overset{def}{=} q_p(F) = \min\{x\in\mathbb{R} \mid F(x)\geq p\}$ (*)

אחוזון

נניח G_ϵ רציפה $\forall\epsilon$ כך ש $\|G_\epsilon - G\|_\infty \to 0$ ו G רציפה

נשתמש בנגזרת אחרת עבור פונקציונל של אחוזון:

נסמן ב q_ϵ את האחוזון של $F+\epsilon[G_\epsilon - F]$

כלומר

$$(**)\quad (1-\epsilon)F(q_\epsilon)+\epsilon G_\epsilon(q_\epsilon)=p$$

נחסר את (*)-(**) ונקבל:

$$-\begin{cases} F(q) = p \\ (1-\epsilon)F(q_\epsilon)+\epsilon G_\epsilon(q_\epsilon) = p \end{cases}$$

$$F(q_\epsilon)-F(q) - \epsilon\left[F(q_\epsilon)-G(q_\epsilon)\right] = 0$$

$\Updownarrow$ בסימנים אחרים

$$\int_q^{q_\epsilon} f\,dx = F(q_\epsilon)-F(q) = \epsilon\underbrace{\left[F(q_\epsilon)-G(q_\epsilon)\right]}_{\epsilon\cdot(\text{ביניהן פער בין } 1 \text{ ל-}0)}$$

לכן אם ~~[illegible]~~ f_x חיובית נקבל כי

$$\int_q^{q_\epsilon} f\,dx \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$$

לכן נסיק כי $q_\epsilon \to q$

כלומר נקבל שקיים בשאיפה לקודקוד ונקבל

$$\frac{q_\epsilon - q}{\epsilon} \cdot \frac{1}{q_\epsilon - q} \cdot \int_q^{q_\epsilon} f\,dx = \underbrace{F(q_\epsilon) - G_\epsilon(q_\epsilon)}$$

$$(**) \xrightarrow{\epsilon \to 0} F(q) - G(q)$$

$$(**) \quad |G_\epsilon(q_\epsilon) - G(q)| \le \underbrace{|G_\epsilon(q_\epsilon) - G(q_\epsilon)|}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{|G(q_\epsilon) - G(q)|}_{\downarrow\, 0}$$

$\|G_\epsilon - G\|_\infty \to 0$ כי   (G רציפה)

מכאן נקבל ש:

$$\boxed{\frac{q_\epsilon - q}{\epsilon}} \cdot \underbrace{\frac{1}{q_\epsilon - q}\int_q^{q_\epsilon} f\,dx}_{\xrightarrow{\epsilon \to 0} f(q)} = \underbrace{F(q_\epsilon) - G_\epsilon(q_\epsilon)}_{\xrightarrow{\epsilon \to 0} F(q) - G(q)}$$

(Δ)

$$\left[\lim_{q_\epsilon \to 0} \frac{F(q_\epsilon) - F(q)}{q_\epsilon - q} = f(q)\right] \text{כי}$$

(Δ) בגלל תכונת המכפלה של גבולות רציפים (בגבול 0?) נקבל כי

$$\dot{T}(G-F) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{q_\epsilon - q}{\epsilon} = \frac{F(q) - G(q)}{f(q)}$$

3) רובסטיות:

אם F רציפה אז $F(q)=p$

$$F^{-1}(p) \overset{def}{=} q_p(F) = \min\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\} \quad (*)$$

אינפימום

ניקח G_ϵ רציפים $\forall$ כך ש $\|G_\epsilon - G\|_\infty \to 0$ ו G רציפים

נשתמש את גזירת אקמר עבור פונקציונל לגבי אומדן:

נסמן כ q_ϵ את האומדן של $F+\epsilon[G_\epsilon - F]$

כלומר

$$(**) \quad (1-\epsilon)F(q_\epsilon) + \epsilon G_\epsilon(q_\epsilon) = p$$

נחסר את $(*)-(**)$ ונקבל:

$$-\begin{cases} F(q_*) = p \\ (1-\epsilon)F(q_\epsilon) + \epsilon G_\epsilon(q_\epsilon) = p \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F(q_\epsilon) - F(q) - \epsilon[F(q_\epsilon) - G(q_\epsilon)] = 0$$

$\Updownarrow$ בהגדרת אינטגרל

$$\int_q^{q_\epsilon} f\,dx = F(q_\epsilon) - F(q) = \epsilon\underbrace{[F(q_\epsilon) - G(q_\epsilon)]}_{\epsilon \cdot (\text{כי הן פונ' בין 1 ל-0})}$$

לכן אם ~~[illegible]~~ f_x חיובית נקבל כי

$$\int_q^{q_\epsilon} f\,dx \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

לכן נסיק כי $q_\epsilon \longrightarrow q$

מה עושים כשאין ידוע סייג לאומדן:

נשתמש בפונקציית רגישות

$$\cancel{V_F = \ldots}$$

$$IF_F(x) = \dot{T}_F(\Delta_x - F) = \frac{F(q) - \mathbb{1}_{\{q>x\}}}{f(q)}$$

$$V_F = \int IF_F^2(x)\, dF = \frac{1}{[f(q)]^2} \int \left[F(q) - \mathbb{1}_{\{q>x\}}\right]^2 dF$$

$$= \frac{1}{[f(q)]^2} \int F(q)^2 - 2\cdot F(q)\cdot \mathbb{1}_{\{q>x\}} + \mathbb{1}_{\{q>x\}}\, dF$$

$$= \frac{1}{f(q)^2}\left[F(q)^2 - 2F(q)\cdot F(q) + F(q)\right]$$

$$= \frac{F(q)\left[1-F(q)\right]}{F(q)^2} = \frac{p(1-p)}{\left[f F^{-1}(p)\right]^2}$$

[illegible]

$$T(\hat{F}_n) = X_{(\lceil np \rceil)} \qquad X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$$

([illegible]) [illegible]

[illegible]

$$X_{(\lceil np \rceil)} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)} \cdot \frac{1}{\hat{f}_n(X_{(\lceil np \rceil)})} z_{1-\alpha/2}$$