הכללה של משפטי התכנסות למידות סיגמה סופיות

נניח כי a_{ij} הם מספרים אי שליליים ומתקיים לכל $i \geq 1$ ולכל $j \geq 1$ כי

$$a_{ij} \leq a_{i,j+1}$$

אז לכל $i \geq 1$ קיים a_i (סופי או אינסופי) כך ש-

$$\lim_{j\to\infty} a_{ij} = \sup_{j\geq 1} a_{ij} = a_i$$

ובפרט $a_{ij} \leq a_i$ לכל $i, j \geq 1$. לכן (זכרו כי $a_{ij} \geq 0$ לכל i, j), לכל $n \geq 1$ מתקיים כי

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

מכך נובע כי

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \leq \limsup_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

נשאיף את n לאינסוף ונקבל כי

$$\exists \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

זו גרסה בדידה של משפט ההתכנסות המונוטונית. שימו לב כי זה תופס גם כאשר לא מדובר בהסתברויות וכי זה נכון בין אם $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ הוא סופי או אינסופי. שימו גם לב כי a_i יכול להיות סופי או אינסופי ואפילו a_{ij} יכול להיות סופי או אינסופי.

מכך נובעת גם הגרסה השניה של משפט ההתכנסות המונוטונית עבור המקרה הבדיד לפיה אם $a_{ij} \geq 0$ אז

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

זאת מכיוון שלכל $m \geq 1$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \end{aligned}$$

ואם נשים לב כי $b_{im} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ לא יורדת ב-m אז ממה שהראינו לעיל נובע כי

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$$

עכשיו, נניח כי $a_{ij} \geq 0$ אז $\inf_{m\geq j} a_{ij} \leq a_{ij}$ ולכן

$$\sum_{i=1}^{\infty} \inf_{m\geq j} a_{im} \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

מכיוון ש-$\inf_{m\geq j} a_{im}$ היא סדרה אי שלילית לא יורדת ב-m נובע ממשפט ההתכנסות המונוטונית הבדיד כי

$$\exists \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \inf_{m\geq j} a_{im} = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} \inf_{m\geq j} a_{im} = \sum_{i=1}^{\infty} \liminf_{j\to\infty} a_{ij}$$

ומאי השוויון שקדם לשוויון זה נובע כי

$$\sum_{i=1}^{\infty} \liminf_{j\to\infty} a_{ij} \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

זוהי הגרסה הבדידה של הלמה של Fatou. בפרט שימו לב כי כאשר $a_{ij} \to a_i$ לכל i כאשר $j \to \infty$ אז אי השוויון הופך להיות

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

לבסוף, נניח כי $a_{ij} \to a_i$ כאשר $j \to \infty$, כי $|a_{ij}| \leq b_i$ לכל $j \geq 1$ וכי $\sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$. אז מכיוון ש-$\geq b_i - a_{ij}$ ושואף ל-$b_i - a_i$ כאשר $j \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i - \limsup_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i - \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

ולכן

$$\limsup_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

באופן דומה, מכיוון ש-$b_i + a_{ij} \geq 0$ ושואף ל-a_i כאשר $j \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i + \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (b_i + a_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i + a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i + \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

ולכן

$$\liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \geq \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \leq \limsup_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

מכאן ש-

$$\exists \lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

וקבלנו את הגרסה הבדידה של משפט ההתכנסות הנשלטת.

נניח עכשיו כי $(\Omega,\mathcal{F})$ הוא מרחב מדיד. נגדיר את μ להיות מידה על מרחב מדיד זה אם : μ $\mathcal{F}\to[0,\infty]$ ומתקיימים שני תנאים :

1. $\mu(\phi)=0$.
2. $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{F}$ זרים בזוגות אז

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)$$

(סופי או אינסופי).

מידה כזו נקראת "סופית" אם $\mu(\Omega)<\infty$. בפרט מידת הסתברות היא מידה סופית. היא נקראת σ-סופית אם היא סופית או שהיא לא סופית אך קיימים $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{F}$ זרים בזוגות עם $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\Omega$ כך ש-$\mu\left(A_n\right)<\infty$. במקרה זה אפשר בלי הגבלת הכלליות להניח כי $\mu\left(A_n\right)>0$. זאת מכיוון שאם

$$\begin{aligned} N_0 &= \{n|\,\mu\left(A_n\right)=0\} \\ N_+ &= \{n|\,\mu\left(A_n\right)>0\} \end{aligned}$$

אז דבר ראשון מכיוון ש-

$$\infty=\mu(\Omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)=\sum_{n\in N_+}\mu\left(A_n\right)+\sum_{n\in N_0}\underbrace{\mu\left(A_n\right)}_{0}=\sum_{n\in N_+}\mu\left(A_n\right)$$

נובע כי N_+ הוא אוסף אינסופי של אינדכסים (אחרת הסכום מצד ימין היה סופי). כמו כן אפשר לבחור $k\in N_+$ כלשהו ולהחליף את A_k ב-

$$A_k'=A_k\cup\bigcup_{n\in N_=}A_n$$

ולקבל כי

$$\mu\left(A_k'\right)=\mu\left(A_k\right)+\mu\left(\bigcup_{n\in N_=}A_n\right)=\mu\left(A_k\right)+0=\mu\left(A_k\right)>0$$

קבלנו איפה אינסוף מאורעות זרים בזוגות שאיחודם הוא Ω והמידה של כל אחד מהמאורעות היא חיובית (וסופית).

נסמן עכשיו

$$\lambda_n=\mu\left(A_n\right)\qquad P_n(A)=\frac{\mu\left(A\cap A_n\right)}{\mu\left(A_n\right)}$$

לכל $A \in \mathcal{F}$. אז P_n הן מידות הסתברות על $(\Omega, \mathcal{F})$ שמקיימות כי $P_n(A_m)=0$ לכל $m \neq n$ ומכיוון ש-$A \cap A_n \in \mathcal{F}$ זרים בזוגות ואיחודם הוא A נובע כי

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A \cap A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(A)$$

עכשיו נשלב את משפטי הגבול שפיתחנו בכיתה עבור הסתברויות ואת משפטי הגבול הבדידים שפיתחנו כאן. מה נקבל?

נניח כי $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ הוא "משתנה מקרי" על $(\Omega, \mathcal{F})$. בהקשר היותר כללי של מידות מקובל לקרוא לפונצקיה כזו "פונצקיה מדידה" אך ההגדרה היא בדיוק אותה הגדרה כמו ההגדרה של משתנה מקרי. דהיינו, שלכל קבוצה בורל B מתקיים כי $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. עכשיו נסמן בסימונים

$$E_n f = \int_{\Omega} f(\omega) P_n(d\omega) = \int f dP_n$$

עבור התוחלת של f כאשר מרחב ההסתברות שלנו הוא $(\Omega, \mathcal{F}, P_n)$.

נגדיר

$$\mu f = \int_{\Omega} f(\omega) \mu(d\omega) = \int f d\mu \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n f$$

שימו לב כי אם $f = 1_A$ עבור $A \in \mathcal{F}$ אז

$$\lambda_n E_n f = \mu\left(A \cap A_n\right)$$

ולכן

$$\mu 1_A = \mu(A)$$

מכאן גם נובע כי אם $f = \sum_{i=1}^{n} b_i 1_{B_i}$ עבור $B_i \in \mathcal{F}$ אז

$$\mu f = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu\left(B_i\right)$$

ולכן הגיוני להגדיר באופן כללי עבור $f \geq 0$ מדידה

$$\mu f = \sup\left\{\mu g \middle|\, g \in \mathcal{S}_+,\, g \leq f\right\}$$

כפי שהגדרנו עבור הסתברות, נראה כי הגדרה זו שקולה להגדרה

$$\mu f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n f$$

תחילה, נניח כי $B_1, B_2 \subset \bar{\mathbb{R}}$ ונסמן

$$B_1 + B_2 = \left\{x_1 + x_2 \middle|\, x_1 \in B_1,\, x_2 \in B_2\right\} = \left\{x_1 + x_2 \middle|\, (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2\right\}$$

כמו כן לכל קבוצה $B \subset \bar{\mathbb{R}}$ נסמן

$$\sup B = \sup_{x \in B} x$$

אז

$$\begin{aligned}\sup(B_1+B_2) &= \sup_{(x_1,x_2)\in B_1\times B_2}(x_1+x_2)=\sup_{x_1\in B_1}\sup_{x_2\in B_2}(x_1+x_2)\\ &= \sup_{x_1\in B_1}\left(x_1+\sup_{x_2\in B_2}x_2\right)=\sup_{x\in B_1}(x_1+\sup B_2)\\ &= \left(\sup_{x_1\in B_1}x_1\right)+\sup B_2=\sup B_1+\sup B_2\end{aligned}$$

ומכאן שבאינדוקציה מתקיים לכל $B_1,\ldots,B_n\subset\bar{\mathbb{R}}$ כי

$$\sup\sum_{i=1}^n B_i=\sum_{i=1}^n \sup B_i$$

כאשר

$$\sum_{i=1}^n B_i=\left\{\sum_{i=1}^n x_i\middle|\, x_i\in B_i,\, i=1,\ldots,n\right\}$$

עכשיו נניח כי $B_i\subset[0,\infty]$ לכל $i\geq 0$ ונסמן

$$\sum_{i=1}^\infty B_i=\left\{\sum_{i=1}^\infty x_i\middle|\, x_i\in B_i,\, i\geq 1\right\}$$

אז אם ניקח $x_1,x_2,\ldots$ כך ש-$x_i\in B_i$ לכל $i\geq 0$ נקבל כי

$$\sum_{i=1}^\infty x_i\leq\sum_{i=1}^\infty \sup B_i$$

ומכאן ש-

$$\sup\sum_{i=1}^\infty B_i\leq\sum_{i=1}^\infty B_i$$

מצד שני $B_1,\ldots,B_n,\sum_{i=n+1}^\infty B_i$ הוא אוסף סופי של קבוצות ולכן

$$\sup\sum_{i=1}^\infty B_i=\sum_{i=1}^n \sup B_i+\sup\sum_{i=n+1}^\infty B_i\geq\sum_{i=1}^n \sup B_i$$

נשאיף את $n\to\infty$ ונקבל מכיוון ש-$\sup B_i\geq 0$ (כי $B_i\subset[0,\infty]$) כי

$$\sup\sum_{i=1}^\infty B_i\geq\sum_{i=1}^\infty B_i$$

ולכן לכל אוסף בן מניה של תתי קבוצות של $[0,\infty]$ מתקיים כי הסופרמום של הסכום הוא סכום הסופרמומים. בפרט אם ניקח

$$B_i=\{\lambda_i P_i g|\, g\in\mathcal{S}_+,\, g\leq f\}$$

מכיוון ש-

$$\sup B_i = \lambda_i \sup \{P_i g |\, g \in \mathcal{S}_+,\, g \le f\} = \lambda_i E_i f$$

אז

$$\begin{aligned}\sup \{\mu g |\, g \in \mathcal{S}_+,\, g \le f\} &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i g |\, g \in \mathcal{S}_+,\, g \le f \right\} \\ &= \sup \sum_{i=1}^{\infty} B_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sup B_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E_i f\end{aligned}$$

אנו נאמר כי תכונה מסויימת מתקיימת "כמעט בכל מקום" ביחס ל-μ אם אוסף ה-ω עבורם התכונה מתקיימת מוכל (או שווה) במאורע שהמידה שלו היא אפס. כאשר המידה היא הסתברות אז "כמעט בכל מקום ביחס ל-P" שקול ל-"בהסתברות אחת".

נניח איפה כי $f_m : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ מדידות על $(\Omega, \mathcal{F})$, אי שליליות כמעט בכל מקום ביחס ל-μ ומתקיים כי $f_m \le f_{m+1}$ כמעט בכל מקום ביחס ל-μ. באופן דומה למה שעשינו עבור הסתברות קיים f אי שלילי כמעט בכל מקום ביחס ל-μ כך ש-$f_m \to f$ כמעט בכל מקום ביחס ל-μ. ממשפט ההתכנסות המונוטונית שלמדנו בכיתה נובע כי לכל $n \ge 1$ מתקיים כי לכל $n \ge 1$

$$E_n f_m \to E_n f$$

כאשר $m \to \infty$. אם נסמן $a_{nm} = \lambda_n E_n f_m$ ו-$a_n = \lambda_n E_n f$ אז $a_{nm} \ge 0$, $a_{nm} \le a_{n,m+1}$ ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית הבדיד נובע כי

$$\mu f_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mu f$$

קיבלנו איפה את הגרסה הראשונה של משפט ההתכנסות המונוטונית עבור מידות σ-סופיות.

לגבי הגרסה השני, אם f_m מדידות ואי שליליות כמעט בכל מקום ביחס ל-μ אז הן גם אי שליליות כמעט בכל מקום ביחס ל-P_n ולכן

$$E_n \sum_{m=1}^{\infty} f_m = \sum_{m=1}^{\infty} E_n f_m$$

אם ניקח $a_{nm} = \lambda_n E_n f_m$ אז $a_{nm} \ge 0$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \mu f_m$. לכן

$$\mu \sum_{m=1}^{\infty} f_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \mu f_m$$

לגבי הלמה של Fatou נקח f_n מדידות ואי שליליות כמעט בכל מקום ביחס ל-μ (ולכן גם ביחס ל-P_n לכל $n \ge 1$) ונקבל כי

$$E_n \liminf_{m\to\infty} f_m \le \liminf_{m\to\infty} E_n f_m$$

אם נכפיל ב-λ_n ונסכם נקבל כי

$$\mu \liminf_{m\to\infty} f_m = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n \liminf_{m\to\infty} f_m \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \liminf_{m\to\infty} E_n f_m = \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m\to\infty} \lambda_n E_n f_m$$

ומהגרסה הבדידה של הלמה של Fatou נובע כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{m\to\infty}\lambda_n E_n f_m \leq \liminf_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n E_n f_m = \liminf_{m\to\infty}\mu f_m$$

לבסוף נניח כי f_m, f, g מדידות, $f_m \to f$ כמעט בכל מקום ביחס ל-μ, כי $|f_m| \leq g$ כמעט בכל מקום ביחס ל-μ וכי $\mu g < \infty$. אז $f_m \to f$ בהסתברות אחת ביחס ל-P_n ו-$|f_m| \leq g$ בהסתברות אחת ביחס ל-P_n. כמו כן

$$\lambda_n E_n g \leq \sum_{\ell=1}^{\infty}\mu_\ell E_\ell g = \mu g < \infty$$

ולכן $E_n g < \infty$. לכן כל תנאי משפט ההתכנסות הנשלטת עבור מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P_n)$ מתקיימים ולכן

$$\exists \lim_{m\to\infty} E_n f_m = E_n f$$

עכשיו $|E_n f_m| \leq E_n|f_m| \leq E_n g$ ומכאן שאם נסמן $a_{nm} = \lambda_n E_n f_m$, $a_n = E_n f$ ו-$b_n = \lambda_n E_n g$ נקבל כי $a_{nm} \to a_n$, כי $|a_{nm}| \leq b_n$ וכי

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n E_n g = \mu g < \infty$$

ממשפט ההתכנסות הנשלטת הבדידה נובע איפה כי

$$\lim_{m\to\infty}\mu f_m = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mu f$$

אם כן, נסכם. התוצאות הבאות כמובן מכילות גם את משפטי ההתכנסות ההסתברותיים וגם את משפטי ההתכנסות הבדידים. האחרון נובע מכיוון שאם Ω הוא אוסף המספרים הטבעיים (שלמים ואי שליליים), $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ ו-$\mu(\{i\}) = 1$ לכל $i \in \Omega$, אז כל פונקציה מ-Ω ל-$\bar{\mathbb{R}}$ היא מדידה וכן כל פונקציה כזו נותנת לכל מספר טבעי i אזישהו מספר ממשי a_i. כמו כן במקרה זה $\mu f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

נתון מרחב מידה $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ עם מידה μ שהיא σ-סופית. f, פונקציה מ-Ω ל-$\bar{\mathbb{R}}$ תיקרא מדידה אם היא מדידה ביחס ל-$(\Omega, \mathcal{F})$. כב"מ יהיה קיצור ל"כמעט בכל מקום ביחס ל-μ". לבסוף $a_m \to a$ הוא קיצור ל-$a_m \to a$ כאשר $m \to \infty$.

1. משפט ההתכנסות המונוטונית גרסה ראשונה:
נניח לכל $m \geq 1$ כי f_m מדידות, כי $f_m \geq 0$ כב"מ וכי $f_m \leq f_{m+1}$ כב"מ. אז קיימת פונקציה מדידה f כך ש-$f \geq 0$ כב"מ ו-$f_m \to f$ כב"מ כאשר ומתקיים כי $\mu f_m \to \mu f$.

2. משפט ההתכנסות המונוטונית גרסה שניה:
נניח לכל $m \geq 1$ כי f_m מדידות, כי $f_m \geq 0$ כב"מ אז

$$\mu\sum_{m=1}^{\infty} f_m = \sum_{m=1}^{\infty}\mu f_m$$

3. הלמה של Fatou : נניח לכל $m \geq 1$ כי f_m מדידות וכי $0 \leq f_m$ כב"מ. אז

$$\mu \liminf_{m\to\infty} f_m \leq \liminf_{m\to\infty} \mu f_m$$

4. משפט ההתכנסות הנשלטת :
נניח לכל $m \geq 1$ כי f_m, f, g מדידות, $f_m \to f$ כב"מ, $|f_m| \leq g$ כב"מ וכי $\mu g < \infty$. אז

$$\exists \lim_{m\to\infty} \mu f_m = \mu f$$

כתוצאה ממשפט ההתכנסות המונוטונית עבור מידות σ-סופיות, גם משפט טונלי-פוביני תקף כאשר אנו מחליפים את ההסתברויות P_1, P_2 שהופיעו בכיתה ב-μ_1, μ_2, מידות σ-סופיות כלשהן. על זה דיברנו/נדבר בכיתה.