הסתברות 1 ־ תרגול 7

22 בנובמבר 2018

1 תוחלת

1.1 הגדרה

הגדרה 1.1 יהי X מ"מ בדיד על מרחב הסתברות (Ω, P). התוחלת של X מוגדרת

$$E\left(X\right)=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)P\left(\left\{\omega\right\}\right)=\sum_{s\in Supp\left(X\right)}s\cdot p_{X}\left(s\right)$$

הערה: התוחלת מוגדרת רק במקרה שהטור הנ"ל מתכנס בהחלט. אחרת, למשתנה המקרי אין תוחלת.

1.2 דוגמאות

1. משתנים מקריים סטנדרטיים:
   (א) עבור $X\sim Uni(n)$, $E(X)=\frac{n+1}{2}$.
   (ב) עבור $X\sim Ber(p)$, $E(X)=p$.
   (ג) עבור $X\sim Geo(p)$, $E(X)=1/p$ (אם סיכוי ההצלחה הוא $\frac{1}{6}$ אז נצליח בממוצע תוך 6 פעמים)
   (ד) עבור $X\sim Bin(n,q)$, $E(X)=nq$ (הממוצע הוא מספר הנסיונות כפול הסיכוי להצלחה בכל נסיון).
   (ה) עבור $X\sim Po(\lambda)$, $E(X)=\lambda$. זה נובע מהאופן שבו מקבלים משתנה פואסוני כגבול של $X_n\sim Bin(n,\lambda/n)$ (לכל הסדרה תוחלת λ). כמובן שגם ניתן לחשב ישירות.
2. הטלת קוביה הוגנת ־
   (א) תוצאת ההטלה היא משתנה מקרי $X\sim Uni\left(6\right)$ ולכן $E\left(X\right)=\frac{6+1}{2}=3.5$.
   (ב) המשתנה שמקבל 1 אם יצא מספר זוגי ו־0 אחרת הוא הפונקציה המציינת $Y=1_{\{2,4,6\}}$ וזהו משתנה ברנולי $Y\sim Ber\left(1/2\right)$ ומכאן ש־ $E\left(Y\right)=1/2$.
   (ג) אם מטילים N פעמים את הקוביה, אז מספר הפעמים שמתקבלת תוצאה זוגית הוא משתנה מקרי $X\sim Bin\left(N,\frac{1}{2}\right)$.ולכן ־ $E\left(X\right)=\frac{N}{2}$

1.3 טענה - נוסחת הזנב :

יהי X משתנה מקרי המקבל ערכים ב-$\mathbb{N}$, אזי

$$E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X\geq n\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geq n)$ לעבור על כל ההסתברויות $n+1$ $n+2$

אז נקבל עוד $\sum_{k=n}^{\infty}P(X=k)$

הוכחה

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X\geq n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P\left(X=k\right)=$$

לכל $k\in N$

הביטוי $P(X=k)$ מופיע

k פעמים

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P\left(X=k\right)=E\left(X\right)$$

כאשר התשמשנו בכך שניתן להחליף סדר סכימה בטור של נסכמים אי-שליליים ובכך שבסכום הכפולות כל גורם מהצורה $P(X=m)$ מופיעה m פעמים.

1.4 תרגיל

חשבו בעזרת נוסחת הזנב את התוחלת של משתנה מקרי גאומטרי.

פיתרון

יהי $X\sim Geo\left(p\right)$. ראינו בתרגול קודם ש-

$$P\left(X\geq n\right)=\left(1-p\right)^{n-1}$$

לכן,

$$E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X\geq n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-p\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(1-p\right)}=\frac{1}{p}$$

1.5 טענה - ליניאריות התוחלת

יהיו X,Y משתנים מקריים בדידים בעלי תוחלת סופית המוגדרים באותו מרחב הסתברות, ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. מתקיים:

$$E\left(aX+bY\right)=aE\left(X\right)+bE\left(Y\right)$$

.

באופן יותר כללי, אם $\left(X_i\right)_{i=1}^{N}$ משתנים מקריים כנ"ל ו־$\left(a_i\right)_{i=1}^{N}$ מספרים ממשיים אזי:

$$E\left(\sum_{i=1}^{N}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{N}a_iE\left(X_i\right)$$

דוגמה: n כדורים נזרקים ל־m תאים, בהסתברות $\frac{1}{m}$ למאורע "הכדור ה־i יכנס לסל ה־k". כמו כן, מאורע זה בלתי תלוי במאורע "הכדור ה־j יכנס לסל ה־l", לכל $i\neq j$. יהי Y מספר התאים הריקים. נחשב את התוחלת של Y: אם Y_i הוא מ"מ שנותן ערך 1 אם התא ה־i ריק, ו־0 אחרת, אז $Y_i\sim ber(\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n})$, ולכן:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{m}Y_i)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}(Y_i)\\ &= m\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n}\end{aligned}$$

שימו לב שהמ"מ Y_i אינם ב"ת.

2 תוחלת תחת התניה

הגדרה 2.1 יהי X מ"מ בדיד על מרחב הסתברות (Ω,P). יהי $\Omega\subseteq A$ מאורע בעל הסתברות חיובית. התוחלת של X בהינתן A היא:

$$E\left(X|A\right)=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)P_A\left(\{\omega\}\right)=\sum_{s\in Supp(X)}sP\left(X=s|A\right)$$

כיווץ התפלגות על

2.1 נוסחת התוחלת השלמה

יהי X מ"מ בדיד בעל תוחלת סופית על מרחב הסתברות (Ω,P) ותהי $\left(A_n\right)_{n=1}^{\infty}$ חלוקה של Ω. מתקיים:

$$E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(X|A_{n}\right)P\left(A_{n}\right)$$

כאשר הנסכמים באגף ימין שווים 0 במקרה ש־ $P\left(A_{n}\right)=0$.

שימו לב, $E\left(X|A_{n}\right)$ היא התוחלת של המ"מ המותנה $\left(X|A_{n}\right)$ כלומר

$$E(X|A_{n})=\sum_{s\in Supp(X)}sP_{A_{n}}(X=s)=\sum_{s\in Supp(X)}s(X=s|A_{n})$$

2.2 תרגיל

מטילים קוביה שוב ושוב עד שמתקבלת התוצאה "6". מה התוחלת של סכום התוצאות שהתקבלו?

פיתרון

נסמן ב־ Y את מספר הזריקות עד שהתקבל "6", נסמן ב־X את סכום התוצאות ונסמן ב־ X_i את תוצאת ההטלה ה־ i. נחשב את התפלגות המ"מ $\left(X_{i}|Y=n\right)$ עבור $1\leq i\leq n-1$: יהי $k\in\{1,2,3,4,5\}$,

(1)

$$P\left(X_{i}=k|Y=n\right)=\frac{P\left(X_{i}=k,Y=n\right)}{P\left(Y=n\right)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}=\frac{1}{5}$$

נוס' ההסתברות השלמה

קיבלנו ש־$\left(X_{i}|Y=n\right)\sim U\left([5]\right)$.

ניעזר בכך כדי לחשב:

$$E\left(X\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(X|Y=n\right)P\left(Y=n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_{i}|Y=n\right)P\left(Y=n\right)=$$

(2)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_{i}|Y=n\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\left(n-1\right)+6\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}}+3\cdot6=21$$

(1) הטלה i: שווה ל-k
הטלה האחרונה n יכולה להיות 6
לכן כל ההטלות האחרות
הן $n-2$

(ג)

כאשר בחישוב השלישי לפני אחרון נעזרנו בכך ש

$$E\left(X_i|Y=n\right)=\begin{cases}3 & i<n \\ 6 & i=n\end{cases}$$

$n-1$ הטלות

הטלה באחרונה

הטור האחרון השתמשנו בכך שזיהינו אותו כתוחלת של משתנה מקרי גאומטרי עם פרמטר $\frac{1}{6}$.

2.3 תרגיל

זוג תיירים מנסים להגיע לירושלים. הם נוסעים במכונית ומגיעים לצומת ממנו יוצאים שלושה כבישים. אם יסעו בכביש הראשון הם יגיעו לירושלים לאחר 30 דקות נסיעה. אם יסעו בכביש השני הם יחזרו לצומת לאחר 50 דקות נסיעה. אם יסעו בכביש השלישי הם יחזרו לצומת לאחר 70 דקות נסיעה. התיירים מבולבלים ועייפים, ולכן בכל פעם שהם חוזרים לצומת הם בוחרים באיזה כביש לנסוע באקראי באופן אחיד. מהי תוחלת זמן הנסיעה שלהם עד שיגיעו לירושלים?

פיתרון

נסמן ב־ X את זמן הנסיעה של התיירים עד ההגעה לירושלים, וב־ Y את הכביש אותו הם בוחרים בפעם הראשונה שהם מגיעים לצומת. נוכל להשתמש בטענה הנ"ל כדי לקבל:

$$E\left(X\right)=E\left(X|Y=1\right)P\left(Y=1\right)+E\left(X|Y=2\right)P\left(Y=2\right)+E\left(X|Y=3\right)P\left(Y=3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[E\left(X|Y=1\right)+E\left(X|Y=2\right)+E\left(X|Y=3\right)\right]$$

מהנתונים בשאלה נוכל לקבל:

$$\begin{aligned}E\left(X|Y=1\right)&=30\\E\left(X|Y=2\right)&=50+E\left(X\right)\\E\left(X|Y=3\right)&=70+E\left(X\right)\end{aligned}$$

נציב במשוואה שקיבלנו קודם עבור $E\left(X\right)$:

$$\begin{aligned}E\left(X\right)&=\frac{1}{3}\left[30+50+E\left(X\right)+70+E\left(X\right)\right]\\&=\frac{1}{3}\left[150+2E\left(X\right)\right]=50+\frac{2}{3}E\left(X\right)\end{aligned}$$

בסך הכל קיבלנו $E(X) = 150$, כלומר שעתיים וחצי נסיעה.

הערה: שימו לב שצריך להוכיח שהתוחלת $E(X)$ היא סופית, כדי שנוכל להעביר אותה אגף בשוויון האחרון. זה נובע מכך שאם נגדיר את Y להיות מספר הפעמים שהתיירים עברו בצומת, אז $Y \sim Geo\left(\frac{1}{3}\right)$, ו־ $X \le 70Y$. מכאן שמתקיים

$$E(X) \le E(70Y) = 70 \cdot 3 = 210$$

3 אי־שוויון מרקוב

3.1 משפט (א"ש מרקוב)

יהי X משתנה מקרי אי־שלילי. אזי לכל $a > 0$ מתקיים

$$P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a}$$

ההוכחה ממש פשוטה ומתבססת על ההערכה (הגסה) הבאה (בכיתה ראיתם הוכחה טיפה שונה)

$$aP(X \ge a) = \sum_{s \in Supp(X) \cap [a,\infty]} ap_X(s) \le \sum_{s \in Supp(X) \cap [a,\infty]} sp_X(s) \le E(X)$$

3.2 תרגיל

מטילים מטבע שנופל על ראש בהסתברות p 20 פעמים. חסמו את ההסתברות שהרצף "HH" התקבל פחות מפעמיים.

פיתרון

חישוב מקרה משלים

תהי $\omega \in \{H,T\}^{20}$ סדרת התוצאות. נסמן ב־ X את מספר הפעמים שהרצף "HH" הופיע, ונגדיר $X_i = 1_{\{\omega_i = \omega_{i+1} = H\}}$. מתקיים $X_i \sim Ber\left(p^2\right)$ ולכן:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{19} X_i\right) = \sum_{i=1}^{19} E(X_i) = 19p^2$$

מכיוון ש־ $X \le 19$, נוכל להשתמש בא"ש מרקוב כדי להעריך:

$$P(X \le 1) = P(19 - X \ge 18) \le \frac{E(19 - X)}{18} = \frac{19\left(1 - p^2\right)}{18}$$