טענה: לכל $0<\lambda<1$ ולכל $x,y\geq 0$ מתקיים כי

$$g(x,y)=\lambda x+(1-\lambda)y-x^{\lambda}y^{1-\lambda}\geq 0$$

כאשר שוויון מתקיים אם ורק אם $x=y$.

הוכחה:

אם $x=0$ או $y=0$ הטענה היא מיידית מכיוון ש־$x^{\lambda}y^{1-\lambda}=0$ ובמקרה זה מקבלים שוויון רק כאשר $x=y=0$. נניח איפה כי $x,y>0$. נחלק את אי השוויון ב־y, נגדיר $z=x/y$ ונקבל כי יש להראות כי

$$h(z)=g(z,1=\lambda z+1-\lambda-z^{\lambda}\geq 0$$

וכי שוויון מתקבל אם ורק אם $z=1$. עכשיו,

$$h'(z)=\lambda-\lambda z^{\lambda-1}=\lambda z^{\lambda-1}(z^{1-\lambda}-1)$$

מכאן ש־$h'(z)$ שלילית אם ורק אם $z<1$ וחיובית אם ורק אם $z>1$. לכן הפונצקיה יורדת ממש על $[0,1]$ ועולה ממש על $[1,\infty)$. מכאן ש־$z=1$ היא נקודת המינימום היחידה ולכן $h(z)\geq h(1)=0$ עם שוויון אם ורק אם $z=1$.

נניח כי U,V הוא זוג משתנים מקריים אי שליליים המקיימים $EU=EV=1$. אז $g(U,V)=0$ אם ורק אם $U=V$ ו־$g(U,V)>0$ אם ורק אם $U\neq V$. מכאן ש אם $P(U=V)<1$ אז

$$P(g(U,V)>0)>0$$

וזה שקול ל־

$$Eg(U,V)=\lambda EU+(1-\lambda)EV-EU^{\lambda}V^{1-\lambda}=1-EU^{\lambda}V^{1-\lambda}>0$$

כמו כן, אם $P(U=V)=1$ אז

$$Eg(U,V)=1-EU^{\lambda}V^{1-\lambda}=0$$

מכאן נובע כי

$$EU^{\lambda}V^{1-\lambda}\leq 1$$

עם שוויון אם ורק אם $P(U=V)=1$.

עבור משתנה מקרי X ו־$1<p<\infty$ נסמן $\|X\|_p=(E|X|^p)^{1/p}$. נניח כי $q=\frac{p}{p-1}>1$ הוא כך ש־$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. נניח כי $0<\|X\|_p,\|Y\|_q<\infty$. אם נציב

$$U=\frac{|X|^p}{E|X|^p},\ V=\frac{|Y|^q}{E|Y|^q},\ \lambda=\frac{1}{p},\ 1-\lambda=\frac{1}{q}$$

נקבל כי

$$E\frac{|X||Y|}{\|X\|_p\|Y\|_q}\leq 1$$

א"ש הולדר $E[XY] \le \|X\|_p \cdot \|Y\|_q$ כאשר $\begin{cases} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \\ p,q \ge 1 \end{cases}$ וגם $\begin{cases} \|X\|_p \stackrel{def}{=} (E|X|^p)^{1/p} \\ \|Y\|_p \stackrel{def}{=} (E|Y|^q)^{1/q} \end{cases}$

דהיינו

$$E|XY| \le \|X\|_p \|Y\|_q$$

עם שוויון אם ורק אם

$$P\left(\frac{|X|^p}{\|X\|_p^p} = \frac{|Y|^q}{\|Y\|_q^q}\right) = 1$$

אם $E|X| < \infty$, אז מכיוון ש-$E|X| = EX^+ + EX^-$ ו-$EX = EX^+ - EX^-$, נובע כי $EX = E|X|$ אם ורק אם $EX^- = 0$, דהיינו $P(X \ge 0) = 1$, ו-$EX = -E|X|$ אם ורק אם $EX^+ = 0$, דהיינו $P(X \le 0) = 1$. לכן $|EXY| \le E|XY|$ עם שוויון אם ורק אם $P(XY \ge 0) = 1$ או $P(XY \le 0) = 1$.

מכאן נובע אי שוויון Hölderלפיו

$$|EXY| \le \|X\|_p \|Y\|_q$$

עם שוויון אם ורק אם בהסתברות אחת מתקיים כי

$$\begin{aligned} \left(\frac{Y^+}{\|Y\|_q}\right)^q &= \left(\frac{X^+}{\|X\|_p}\right)^p \\ \left(\frac{Y^-}{\|Y\|_q}\right)^q &= \left(\frac{X^-}{\|X\|_p}\right)^p \end{aligned}$$

או בהסתברות אחת

$$\begin{aligned} \left(\frac{Y^+}{\|Y\|_q}\right)^q &= \left(\frac{X^-}{\|X\|_p}\right)^p \\ \left(\frac{Y^-}{\|Y\|_q}\right)^q &= \left(\frac{X^+}{\|X\|_p}\right)^p \end{aligned}$$

מכיוון ש-$p/q = p - 1$, ניתן לרשום זאת גם כך

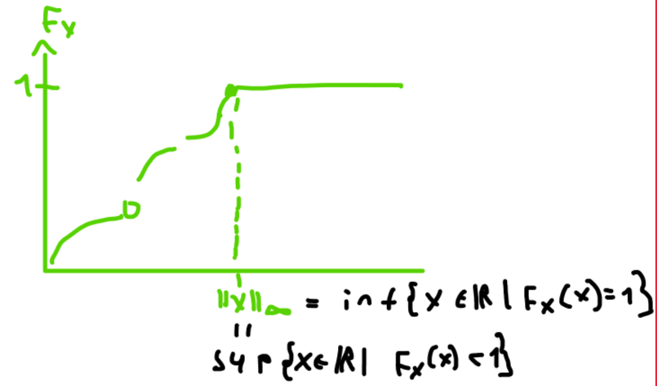
$$\begin{aligned} \frac{Y^+}{\|Y\|_q} &= \left(\frac{X^+}{\|X\|_p}\right)^{p-1} \\ \frac{Y^-}{\|Y\|_q} &= \left(\frac{X^-}{\|X\|_p}\right)^{p-1} \end{aligned}$$

ואת המקרה השני כך

$$\begin{aligned} \frac{Y^+}{\|Y\|_q} &= \left(\frac{X^-}{\|X\|_p}\right)^{p-1} \\ \frac{Y^-}{\|Y\|_q} &= \left(\frac{X^+}{\|X\|_p}\right)^{p-1} \end{aligned}$$

נשים לב כי כאשר $p = 2$ מקבלים כי או שבהסתברות אחת

$$\frac{Y}{\|Y\|_2} = \frac{X}{\|X\|_2}$$



או שבהסתברות אחת

$$\frac{Y}{\|Y\|_2} = -\frac{X}{\|X\|_2}$$

כפי שאנחנו כבר יודעים מאי שוויון Cauchy-Schwartz.
אם $\|X\|_p = 0$ ו$\|Y\|_q < \infty$ או $\|Y\|_q = 0$ ו-$\|X\|_p < \infty$ אז אי שוויון Hölder מתקיים עם שוויון. כמו כן, אם $\|X\|_p = \infty$ ו-$\|Y\|_q > 0$ או $\|X\|_p > 0$ ו-$\|Y\|_q = \infty$ אז אי השוויון מתקיים באופן טריוויאלי.

עבור משתנה מקרי X נסמן

$$\|X\|_\infty = \sup\{x|P(|X| \le x) < 1\} = \inf\{x|P(|X| \le x) = 1\}$$

בפרט, אם $\|X\|_\infty < \infty$ אז $P(|X| \le \|X\|_\infty) = 1$ ולכל $x < \|X\|_\infty$ מתקיים כי $P(|X| \le x) < 1$. נניח כי $\|X\|_\infty < \infty$ וכי $\|Y\|_1 < \infty$. אז בהסתברות אחת $|XY| = |X||Y| \le \|X\|_\infty|Y|$ ומכאן ש-

$$E|XY| \le \|X\|_\infty\|Y\|_1$$

ולכן גם

$$|EXY| \le \|X\|_\infty\|Y\|_1$$

במקרה זה שוויון מתקיים אם ורק אם

$$P(X < \|X\|_\infty, Y > 0) = P(X > -\|X\|_\infty, Y < 0) = 0$$

או

$$P(X > -\|X\|_\infty, Y > 0) = P(X < \|X\|_\infty, Y < 0) = 0$$

הערה: שימו לב כי אי השוויון מתקיים באופן טריוויאלי אם $\|X\|_\infty = \infty$ ו-$\|Y\|_1 > 0$ או $\|X\|_\infty > 0$ ו-$\|Y\|_1 = \infty$ או אם אחד מהם הוא אפס והשני סופי.

טענה: נניח כי $1 \le a < b < \infty$. נראה כי

$$\|Z\|_a \le \|Z\|_b$$

מכאן ינבע כי אם $E|Z|^b < \infty$ אז $E|Z|^a < \infty$ לכל $1 \le a \le b$.

הוכחה: ניקח $X = |Z|^a$, $Y = 1$ ו-$p = \frac{b}{a} > 1$ ואז $q = b/(b-a)$. אם נציב באי שוויון Hölder נקבל כי מכיוון ש-$\||Z|^a\|_{b/a}^{b/a} = E(|Z|^a)^{b/a} = E|Z|^b = \|Z\|_b^b$

$$\|Z\|_a^a = E|Z|^a \cdot 1 \le \||Z|^a\|_{b/a}\|1\|_{b/(b-a)} = \left(\|Z\|_b^b\right)^{a/b} = \|Z\|_b^a$$

אז אם נעלה את שני האגפים בחזקת $1/a$ נקבל את התוצאה המבוקשה.
מכיוון ש-$|Z| \le \|Z\|_\infty$ בהסתברות אחת אז גם $|Z|^p \le \|Z\|_\infty^p$ בהסתברות אחת ולכן גם $\|Z\|_p^p = E|Z|^p = \|Z\|_\infty^p$ לכל $1 \le p < \infty$ ומכאן ש-

$$\|Z\|_p \le \|Z\|_\infty$$

עכשיו, עבור $1 \le p < \infty$ נסתכל על הפונקציה $g(\lambda) = \lambda^p + (1-\lambda)^p$ על הקטע $[0,1]$. ברור כי $g(0) = g(1) = 1$. אם נגזור נקבל

$$g'(\lambda) = p(\lambda^{p-1} - (1-\lambda)^{p-1}) = p\lambda^{p-1}\left(1 - \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^{p-1}\right)$$

ברור כי צד ימין שלילי כאשר $\frac{1}{\lambda} - 1 > 1$ דהיינו, עבור $\lambda \in [0, 1/2)$ וחיובי עבור $\lambda \in (1/2, 1]$. לכן $g(\lambda) \ge g(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{2^{p-1}}$ עם שוויון אם ורק אם $\lambda = 1/2$. אם עבור x, y מסויימים נציב $\lambda = \frac{|x|}{|x|+|y|}$ נקבל כי

$$\frac{1}{2^{p-1}} \le \left(\frac{|x|}{|x|+|y|}\right)^p + \left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right)^p$$

ומכיוון ש־$|x+y| \le |x| + |y|$ נקבל כי

$$|x+y|^p \le (|x|+|y|)^p \le 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$$

בפרט מכך נובע כי

$$E|X+Y|^p \le 2^{p-1}(E|X|^p + E|Y|^p)$$

ולכן, אם $E|X|^p, E|Y|^p$ שניהם סופיים, אז גם $E|X+Y|^p$ סופי. עבור $p = \infty$ ברור כי בהסתברות אחת

$$|X+Y| \le |X| + |Y| \le \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$$

לכן

$$\|X+Y\|_\infty = \inf\{x | P(|X+Y| \le x) = 1\} \le \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$$

ומכאן שאם $\|X\|_\infty, \|Y\|_\infty < \infty$ אז גם $\|X+Y\|_\infty < \infty$.
ברור גם כי אם $\|X\|_p < \infty$ אז גם $\|cX\|_p = |c|\|X\|_p < \infty$ לכל c ממשי. מכל זאת נובע כי אם $\|X\|_p, \|Y\|_p$ סופיים, אז לכל a, b ממשיים גם $\|aX + bY\|_p < \infty$. מכאן שאוסף המשתנים המקריים עבורם $\|X\|_p < \infty$ סגור תחת קומבינציות לינאריות ולכן הוא מהווה מרחב וקטורי (לכל $1 \le p \le \infty$).
אי שוויון Minkowski:

$$\|X+Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p$$

הוכחה: עבור $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_p^p = E|X+Y|^p &= E|X+Y||X+Y|^{p-1} = E|X+Y||X+Y|^{p/q} \\ &\le E|X||X+Y|^{p/q} + E|Y||X+Y|^{p/q}\end{aligned}$$

מאי שוויון Hölder נובע כי

$$\begin{aligned}E|X||X+Y|^{p/q} &\le \|X\|_p \||X+Y|^{p/q}\|_q = \|X\|_p (\|X+Y\|_p^{p/q} = \|X\|_p \|X+Y\|_p^{p-1} \\ E|Y||X+Y|^{p/q} &\le \|Y\|_p \|X+Y\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

ולכן

$$\|X+Y\|_p^p \le (\|X\|_p + \|Y\|_p)\|X+Y\|_p^{p-1}$$

ומכאן נובעת התוצאה (עבור $1 < p < \infty$). עכשיו, אם $\|X||_1, \|Y\|_1 < \infty$ אז גם $\|X+Y\|_1 < \infty$ ומכיוון ש־$|X+Y| \le |X| + |Y|$ ברור כי

$$\|X+Y\|_1 \le \|X\|_1 + \|Y_1\|$$

לבסוף, אם $\|X\|_\infty, \|Y\|_\infty < \infty$ אז כפי שכבר ראינו גם $\|X+Y\|_\infty < \infty$ ומתקיים כי

$$\|X+Y\|_\infty \le \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$$

אם נסכן, גילינו כי לכל $1 \le p \le \infty$ מתקיים כי $\|cX\|_p = |c|\|X\|_p$ וכי

$$\|X+Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p$$

מכאן ש־$\|\cdot\|_p$ היא נורמה שמוגדרת על משתנים מקריים.

עכשיו, נאמר כי $X_n \xrightarrow{L^p} X$ אם $\|X_n\|_p < \infty$ לכל $n \ge 1$ ומתקיים כי $\|X_n - X\|_p \to 0$. תחילה נשים לב כי

$$\|X\|_p = \|X - X_n + X_n\|_p \le \|X - X_n\|_p + \|X_n\|_p$$

מכיוון ש־$\|X_n - X\|_p \to 0$ אז בפרט קיים n עבורו $\|X_n - X\|_p < \infty$ ומכיוון ש־$\|X_n\|_p < \infty$ לכל $n \ge 1$ נובע כי $\|X\|_p < \infty$ גם כן.

עכשיו נשים לב כי

$$P(|X_n - X| \ge \epsilon) = P(|X_n - X|^p \ge \epsilon^p) \le \frac{E|X_n - X|^p}{\epsilon^p} = \left(\frac{\|X_n - X\|_p}{\epsilon}\right)^p$$

ולכן אם $X_n \xrightarrow{L^p} X$ אז גם $X_n \xrightarrow{p} X$.

אם כן, ראינו כי שאיפה ב־L^p או שאיפה בהסתברות אחת גוררות שאיפה בהסתברות. שאיפה בהסתברות לא בהכרח גוררת שאיפה ב־L^p. כמו כן, שאיפה בהסתברות אחת אינה בהכרח גוררת שאיפה ב־L^p וגם לא להיפך. דוגמאות לכך תראו בתרגיל בית.