5-6.4.22

תרגול #5 מודלים ב

אומדי גרעין:

דיברנו על הצורה הכללית הצפיפות של n נק' בג' שה' ע'

$$\hat{p}_n(x)=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)$$

כאשר K גרעין אי-שלילי עם $\int_{\mathbb{R}}K(x)dx=1$.

חסמנו את סיכון ה-MSE של אומד זה, ולצורך כך הגדרנו: מחלקת הולדר.

מחלקת הולדר: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית. נאמר כי $f\in\Sigma_0(\beta,L)$ עם $\beta,L>0$ אם

יש לה $l=\max\{k\in\mathbb{Z}_+: k<\beta\}$ נגזרות, והנגזרת ה-l רציפה הולדר:

$$|f^{(l)}(y)-f^{(l)}(x)|\le L|x-y|^{\beta-l}\quad,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

* השתמשנו בהנחה זו כדי לחסום את סיכון ה-M.SE ולמצוא h_n^* שממזער את הסיכון.
* באופן דומה ובעזרת הנחה נוספת (מחלקת ניקולסקי, אי שוויון מינקובסקי המוכלל) מצאנו חסם ל-MISE.
* בנוסף, דיברנו על בניית גרעינים מסדר l ואז רק שניתן לשחרר את ההנחה על חיוביות $\hat{p}_n$ (כלומר על חיוביות K) כאשר מסדרים, על החסם ל-MSE.

<u>בניית גרעין מסדר l:</u>

ניקח משפחה של פולינומים φ_n עם $\deg(\varphi_n)=n$, אורתונורמליים ביחס לפונקציית משקל אי שלילית $\mu(\cdot)$,

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi_m(u)\varphi_n(u)\mu(u)du=\mathbb{1}_{\{m=n\}}$$

ואז מגדירים את הגרעין:

$$K(u)=\sum_{m=0}^{l}\varphi_m(0)\varphi_m(u)\mu(u)$$

מתקיים כי $\int_{\mathbb{R}}K(u)du=1$ ו-K מדרגה l.

שאלה ב:

תהי N משפחת כל ההתפלגויות הנורמליות.

$$N=\left\{\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right):\mu\in\mathbb{R},\sigma\in\mathbb{R}_+\right\}$$

צפיפות נורמלית-סטנדרטית.

(1) הראו כי $N\cap\Sigma(\beta,L)\neq\emptyset$ עבור כל $\beta,L>0$ כלשהם.

פתרון:

עבור כל $\beta,L>0$ כלשהם, צריך להראות שיש צפיפות נורמלית ששייכת למחלקת הולדר $\Sigma(\beta,L)$.

נניח כי $\mu=0$ (קבוע שרק מזיז את הצפיפות על הציר ולא משנה את הצורה).

הנגזרת ה-k: נחשב את הנגזרת של הצפיפות עבור ערך כלשהו של σ.

מתקיים
$$\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{\sigma}\varphi(x/\sigma)=\frac{1}{\sigma^{k+1}}\varphi^{(k)}(x/\sigma)$$

מהצורה של הצפיפות הנורמלית-סטנדרטית, מתקיים
$$\varphi^{(k)}(t)=P_k(t)e^{-t^2/2}$$

פולינום מדרגה k סופית - אפשר להוכיח באינדוקציה.

ואז נחסום את הנגזרת (ההפרש), נקבל

$$|\varphi^{(k)}(x)-\varphi^{(k)}(y)|\le|\varphi^{(k)}(x)|+|\varphi^{(k)}(y)|\le 2\|\varphi^{(k)}\|_\infty=:2\rho_k<\infty$$

מצד שני,

$$|\varphi^{(k)}(x)-\varphi^{(k)}(y)|=\left|\int_y^x\varphi^{(k+1)}(u)du\right|\le\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty|x-y|=\rho_{k+1}|x-y|$$

לכן, עבור $l=\max\{k\in\mathbb{Z}_+:k<\beta\}$, (נזכור מסמנים את הנגזרות של ההתפלגות הנורמלית $p(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi(x/\sigma)$:

$$|p^{(l)}(x)-p^{(l)}(y)|=\frac{1}{\sigma^{l+1}}|\varphi^{(l)}(x/\sigma)-\varphi^{(l)}(y/\sigma)|\le\frac{1}{\sigma^{l+1}}2\rho_l\wedge\rho_{l+1}\left|\frac{x}{\sigma}-\frac{y}{\sigma}\right|=2\frac{\rho_l}{\sigma^{l+1}}\wedge\frac{\rho_{l+1}}{\sigma^{l+2}}|x-y|$$
$$=c_1|x-y|\wedge c_2$$
$$=c_2\left(\frac{c_1}{c_2}|x-y|\wedge 1\right)$$

נתמקד בביטוי המינימלי. נזכור ש- $0<\beta-l<1$:

* אם $\frac{c_1}{c_2}|x-y|\le 1$ אז $\frac{c_1}{c_2}|x-y|\le\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\beta-l}|x-y|^{\beta-l}$
* אם $1\le\frac{c_1}{c_2}|x-y|$, מהמונוטוניות המסקנה $1\le\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\beta-l}|x-y|^{\beta-l}$ ([illegible])

לכן, נמשיך את החסם.

$$|p^{(\ell)}(x)-p^{(\ell)}(y)| \le 2\frac{\rho_\ell}{\sigma^{\ell+1}} \wedge \frac{\rho_{\ell+1}}{\sigma^{\ell+2}}|x-y| = C_2 \wedge C_1|x-y| \le C_2\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\beta-\ell}|x-y|^{\beta-\ell}$$

לפי ההגדרה
למקרים וכאלו
בבחירת σ.

כיון ש־$\beta-\ell$
חיובי, וכן
שהביטוי יהיה נכון.
כאן נכנסת
בחירת σ.

$$= \frac{2\rho_\ell}{\sigma^{\ell+1}}\left(\frac{\rho_{\ell+1}}{\sigma^{\ell+2}}\cdot\frac{\sigma^{\ell+1}}{2\rho_\ell}\right)^{\beta-\ell}|x-y|^{\beta-\ell}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sigma^{\beta+1}}\,2\rho_\ell\left(\frac{\rho_{\ell+1}}{2\rho_\ell}\right)^{\beta-\ell}}_{=:K(\ell)}|x-y|^{\beta-\ell}$$

לכן, מאחר ו־β, L חיוביים, ניתן לבחור σ כך ש־

$$|p^{(\ell)}(x)-p^{(\ell)}(y)| \le L|x-y|^{\beta-\ell}$$ ולכן $p\in\Sigma(\beta,L)$, כנדרש. ■

(ד) הראו כי $\mathcal{N}\setminus\Sigma(\beta,L)\neq\emptyset$ עבור $\beta,L>0$.

פתרון:

הרעיון הוא למצוא את צפיפות נורמלית שלא ניתן לחסום את הנגזרת שלה באופן הדרוש.

שאלה 4:

הסבירו מדוע אומד הגרעין לא יכול להיות עקיב באופן אחיד על פני קבוצה שמכילה את כל הנקודות עם קפיצות אי-רציפות.

רמז: הסתכלו על רכיב ההטיה.

פתרון:

נזכור שראינו כי רכיב ההטיה היא מהצורה

ודאי שההטיה מתאפסת בגבול אם האומד עקבי.

$$\mathbb{E}_p \hat{p}(x_0) - p(x_0) = \int_{\mathbb{R}} K(v)\big(p(x_0 - vh) - p(x_0)\big)\, dv$$

נניח כי p היא צפיפות חסומה, רציפה מימין עם קפיצה ב-x_0 (לא צפיפות של שפחה).

אז מתקיים

$$\lim_{h \downarrow 0} p(x_0 - vh) - p(x_0) = \big(p(x_0-) - p(x_0)\big)\mathbb{1}_{\{v>0\}} =: \delta\, \mathbb{1}_{\{v>0\}}$$

$$\delta \neq 0$$

רציף משמאל

אם הגבול מימין כלומר $v<0$ אז נקבל $p(x_0)$ והגבול משמאל.

עכשיו, כיוון שהנחנו ש-p חסומה, ניתן להחליף גבול עם אינטגרל (התכנסות חסומה) ונקבל

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} K(v)\big(p(x_0 - vh) - p(x_0)\big)\, dv = \int_{\mathbb{R}} K(v)\, \delta\, \mathbb{1}_{\{v>0\}}\, dv$$

$$= \delta \int_{\mathbb{R}_+} K(v)\, dv$$

אם האומד עקיב עבור p כזאת, הגבול ~~צריך~~ אמור להתאפס, כלומר

$$\int_{\mathbb{R}_+} K(v)\, dv = 0$$

אבל כיוון ש-$\int_{\mathbb{R}} K(v)\, dv = 1$, ~~בהכרח~~ בהכרח $\int_{\mathbb{R}_-} K(v)\, dv = 1$.

אבל אז, אם נסתכל על צפיפות $p(-x)$, צפיפות רציפה משמאל, האומד לא יהיה עקיב שם.

* אם h לא מתכנס ל-0 כאשר $n \to \infty$, ההטיה לא מתאפסת אפילו עבור צפיפויות רציפות. לכן מספיק להראות שהטענה שכן לא מתאפסת, אפילו כאשר $h \to 0$.

נראה לי מטופש ?

שאלה 6:

ניתן להגדיר אומד לנגזרת ה-s של $p\in\Sigma_1(\beta,L)$, $s<\beta$ באופן הבא:

$$\hat{p}_n^{(s)}(x)=\frac{1}{n h^{s+1}}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{X_i-x}{h}\right)$$

$h>0$ הוא רוחב הפס ו- $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גרעין חסום עם תומך $[-1,1]$ המקיים עבור

$$l=\min\{k\in\mathbb{Z}_+ : k<\beta\}$$

$$\int u^j K(u)\,du=0 \qquad ; \; j=0,1,\dots,s-1,s+1,\dots,l$$

$$\int u^s K(u)\,du=s!$$

(1) הוכיחו כי באומד אחיד על פני $\Sigma_1(\beta,L)$, ההטיה של $\hat{p}_n^{(s)}(x_0)$ חסומה ע"י $C_2 h^{\beta-s}$ ושונותו חסומה ע"י C_1/nh^{2s+1} כאשר C_1,C_2 קבועים חיוביים ו- $x_0\in\mathbb{R}$ נקודה נתונה.

פתרון:

נתחיל בשונות (יותר קל):

$$\mathrm{Var}_p\left(\hat{p}_n^{(s)}(x_0)\right)=\mathrm{Var}_p\left(\frac{1}{h^{s+1}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{X_i-x_0}{h}\right)\right)=\frac{1}{(h^{s+1})^2}\cdot\frac{1}{n}\mathrm{Var}_p\left(K\left(\frac{X_1-x_0}{h}\right)\right)$$

$$\le\frac{1}{h^{2s+2}}\cdot\frac{1}{n}\mathbb{E}_p K^2\left(\frac{X_1-x_0}{h}\right)=\frac{1}{h^{2s+2}}\cdot\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}}K^2\left(\frac{u-x_0}{h}\right)p(u)\,du$$

h מתבטל.

$$v:=\frac{u-x_0}{h} \qquad u=vh+x_0$$
$$dv=\frac{1}{h}du$$

$$=\frac{1}{h^{2s+1}}\cdot\frac{1}{n}\int K^2(v)\,p(x_0+vh)\,dv\le\frac{1}{nh^{2s+1}}\cdot\|p\|_\infty\underbrace{\int K^2(v)\,dv}_{\|K\|_2^2}=C_1\cdot\frac{1}{nh^{2s+1}}$$

//

נעבור להטיה:

$$\mathbb{E}_p\,\hat{p}_n^{(s)}(x_0)-p^{(s)}(x_0)=\mathbb{E}_p\frac{1}{h^{s+1}}K\left(\frac{X_1-x_0}{h}\right)-p^{(s)}(x_0)=\frac{1}{h^{s+1}}\int K\left(\frac{u-x_0}{h}\right)p(u)\,du-p^{(s)}(x_0)$$

אותה החלפת משתנים, רק
כאן h מצטמצם.

$$=\frac{1}{h^s}\int K(v)\,p(x_0+vh)\,dv-p^{(s)}(x_0)$$

$$p(x_0+vh) = p(x_0) + p^{(1)}(x_0)\,vh + \dots + \frac{1}{\ell!}p^{(\ell)}(x_0)(vh)^\ell + \frac{p^{(\ell)}(x_0+\xi vh)\cdot(hv)^\ell}{\ell!} - \frac{p^{(\ell)}(x_0)}{\ell!}(hv)^\ell$$

$$|\xi|\le 1$$

והנחנו שכל כל הזוגיים, ~~אפס~~ הפולינומים הרלוונטיים ב-v מתאפסים. מה יקרה לגבי של הנגזרת ה-s?

$$\frac{1}{h^s}\int K(v)\,\frac{p^{(s)}(x_0)}{s!}\,v^s h^s\,dv = \frac{1}{s!}p^{(s)}(x_0)\underbrace{\int K(v)\,v^s\,dv}_{s!} = p^{(s)}(x_0)$$

ולכן מקבלים עד [illegible] שלנו מתאפסים.

דהיינו:

$$\left|\mathbb{E}_p\,\hat{p}_n^{(s)}(x_0) - p^{(s)}(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h^s}\int K(v)\left(\frac{p^{(\ell)}(x_0+\xi vh)(hv)^\ell}{\ell!} - \frac{p^{(\ell)}(x_0)}{\ell!}(hv)^\ell\right)dv\right|$$

$$\le \frac{1}{\ell!}\frac{1}{h^s}\int |K(v)|\cdot|vh|^\ell\cdot\left|p^{(\ell)}(x_0+\xi vh) - p^{(\ell)}(x_0)\right|dv$$

$p\in\Sigma(\beta,L)$, $|\xi|\le 1$

$$\le \frac{1}{\ell!}\cdot\frac{1}{h^s}\int |K(v)|\cdot|vh|^\ell\cdot L\cdot|vh|^{\beta-\ell}\,dv$$

$$= \frac{1}{\ell!}h^{\beta-s}L\int|K(v)|\cdot|v|^\beta\,dv =: C_2\cdot h^{\beta-s}$$

//

(2) הוכיחו כי המקסימום של ה-MSE של $\hat{p}_n^{(s)}(x_0)$ מעל $\Sigma(\beta,L)$ הוא מסדר $O\left(n^{-\frac{2(\beta-s)}{2\beta+1}}\right)$ כאשר $n\to\infty$, אם רוחב הפס $h=h_n$ נבחר באופן אופטימלי.

פתרון:

נשים לב שהחסמים, שמצאנו בסעיף הקודם לא תלויים בבחירת p, למעט היותה ב-$p\in\Sigma(\beta,L)$. לכן:

$$\sup_{p\in\Sigma(\beta,L)}\mathbb{E}_p\left(\hat{p}_n^{(s)}(x_0) - p(x_0)\right)^2 \le C_1\cdot\frac{1}{nh^{2s+1}} + C_2^2 h^{2(\beta-s)}$$

ניתן לגזור את h שממזער את הביטוי:

$$\frac{C_1}{n}\cdot\frac{-(2s+1)h^{2s}}{(h^{2s+1})^2} + C_2^2\cdot 2(\beta-s)h^{2(\beta-s)-1} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow h^{2\beta+1} = \frac{C_1}{C_2^2}\cdot\frac{2s+1}{2(\beta-s)}\cdot\frac{1}{n} \Rightarrow h_n^* = \left(\frac{C_1}{C_2^2}\cdot\frac{2s+1}{2(\beta-s)}\right)^{\frac{1}{2\beta+1}}\cdot n^{-\frac{1}{2\beta+1}}$$

לכן, אם נחליף בחסם את h ב-h_n^*, נקבל:

$$\sup_{p\in\Sigma(\beta,L)}\mathbb{E}_p\left(\hat{p}_n^{(s)}(x_0) - p(x_0)\right)^2 \le C n^{-\frac{2(\beta-s)}{2\beta+1}}$$

//

(3) יהי (φ_n) בסיס לג'נדר על $[-1,1]$ הוכח כי הגרעין

$$K(u)=\sum_{m=0}^{l}\varphi_m^{(s)}(0)\varphi_m(u)\mathbb{1}_{\{|u|\le 1\}}$$

מקיים את התנאים של הגרעין בשאלה.

פתרון:

$$\int u^j K(u)\,du=0 \qquad \forall\, j=0,1,\dots,s-1,s+1,\dots,l$$

$$\int u^s K(u)\,du=s!$$

(להראות)

כעת, כיוון ש-φ_i הוא בסיס אורתונורמלי שלם ב-$L[-1,1]$, הפונקציות u^j מקיימות

$$u^j=\sum_{i=1}^{j}\underbrace{b_{ji}}_{\text{מקדמים.}}\varphi_i(u)$$

אפשר להציג כל u^j כצ"ל של פולינומי לג'נדר הראשונים.

לכן, עבור $j=0,\dots,l$:

$$\int u^j K(u)\,du=\int\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{j}b_{ji}\varphi_i(u)\right]}_{u^j}\underbrace{\left[\sum_{m=0}^{l}\varphi_m^{(s)}(0)\varphi_m(u)\mathbb{1}_{\{|u|\le 1\}}\right]}_{K(u)}du$$

$$=\sum_{m=0}^{l}\varphi_m^{(s)}(0)\sum_{i=1}^{j}b_{ji}\underbrace{\int_{-1}^{1}\varphi_i(u)\varphi_m(u)\,du}_{=\mathbb{1}_{\{i=m\}}}$$

כי $m>j$ כבר
לא נקבל $m=i$ בשום
ולכן הסכימה רק עד j.

$$=\sum_{m=0}^{j}\varphi_m^{(s)}(0)\,b_{jm}=\sum_{m=0}^{j}\left(\frac{d^s}{du^s}\varphi_m(u)\cdot b_{jm}\right)_{u=0}$$

$$=\frac{d^s}{du^s}\underbrace{\left(\sum_{m=0}^{j}\varphi_m(u)\,b_{jm}\right)_{u=0}}_{\text{כפי שכתוב בהתחלה.}}=\left(\frac{d^s}{du^s}u^j\right)_{u=0}$$

אם $j<s$ אז כל הנגזרת מתאפסת עוד לפני שמציבים $u=0$.

אם $j>s$ הנגזרת מתאפסת כאשר נציב $u=0$.

אם $j=s$ אז $\frac{d^s}{du^s}u^s=s!$ וסיימנו!