נוסחאות לקורס 52324 "הסתברות לסטטיסטיקאים"

פונקציית גמה: $r > 0$

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad \Gamma(r+1) = r\Gamma(r), \Gamma(1) = 1, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$$

פונקציית ביתא: $\alpha, \beta > 0$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \quad \Rightarrow \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

התפלגות בינומית: n מספר טבעי חיובי, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. $B(n, p)$

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \ \ x = 0,1,2, \dots, n$$
$$M_X(s) = (q + pe^s)^n$$
$$E(X) = np, \qquad var(X) = npq$$

התפלגות פואסון: $\mu > 0$. $Pois(\mu)$

$$P_X(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \ \ x = 0,1,2, \dots$$
$$M_X(s) = e^{\mu(e^s-1)}$$
$$E(X) = \mu, \qquad var(X) = \mu$$

התפלגות בינומית-שלילית: r מספר טבעי חיובי, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. $NB(r, p)$

$$P_X(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \ \ x = r, r+1, r+2, \dots$$
$$M_X(s) = \left[\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right]^r$$
$$E(X) = r/p, \qquad var(X) = rq/p^2$$

התפלגות גיאומטרית: $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. $Geo(p) = NB(1, p)$

התפלגות נורמלית: $\mu \in R$, $\sigma^2 > 0$. $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$
$$M_X(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$$
$$E(X) = \mu, \qquad var(X) = \sigma^2$$

התפלגות גמה: $\alpha, \lambda > 0$. $Gamma(\alpha, \lambda)$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \qquad 0 < x < \infty$$
$$M_X(s) = \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha}, s < \lambda$$
$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \qquad E(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)\lambda^r}, r = 1,2,3, \dots,$$

התפלגות מעריכית: $\lambda > 0$. $Exp(\lambda) = \mathrm{Gamma}(1, \lambda)$

התפלגות חי-בריבוע: $d > 0$. $\chi^2_{(d)} = Gamma(\frac{d}{2}, \frac{1}{2})$

התפלגות ביתא: $\alpha, \beta > 0$. $Beta(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \ \ 0 < x < 1$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}, \qquad E(X^r) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+r)}, r = 1,2,3, \dots$$

<u>התפלגות t של סטודנט:</u> $d > 0$. $t_{(d)}$

$$f_T(x) = \frac{\Gamma\big((d+1/2)\big)}{\sqrt{d\pi}\Gamma(d/2)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{d}\right)^{-\frac{d+1}{2}}, -\infty < x < \infty$$

<u>התפלגות F:</u> $d_1, d_2 > 0$. $F_{(d_1,d_2)}$

$$f_F(x) = \frac{1}{B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}} x^{\frac{d_1}{2}-1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2}x\right)^{-\frac{d_1+d_2}{2}}, \qquad 0 < x < \infty$$

<u>התפלגות מולטינומית:</u> n, m מספרים טבעיים חיוביים, $0 < p_i < 1$, $1 \le i \le n$ שסכומם 1.

$$P_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \binom{m}{x_1, x_2, \dots, x_n} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_n^{x_n}, \qquad x_1 + \dots + x_n = m$$

<u>התפלגות דיריכלה:</u> $n \ge 2$ מספר טבעי, $\alpha_i > 0$, $1 \le i \le n$.

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \cdots x_n^{\alpha_n-1}, \qquad x_1 + \dots + x_n = 1$$

<u>התפלגות רב-נורמלית:</u> $\mu \in R^n$ ו- Σ מטריצה $n \times n$ אי-שלילית מוגדרת. $N(\mu, \Sigma)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sqrt{|\det(\Sigma)|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu)}, \quad x \in R^n$$

$$M_X(s) = e^{\mu^t s + \frac{1}{2}s^t \Sigma s}$$

$$E(X) = \mu, \qquad var(X) = \Sigma$$

<u>הצפיפות של הטרנספורמציה הרב-ממדית $Y = g(X)$:</u>

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot \left|\det\big(J_w(y)\big)\right|$$

כאשר $g(x) = g(x_1, \dots x_n) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$, $w = g^{-1}$ וכן $J_w(y)$ הוא היעקוביאן של w.

<u>טרנספורמציה לינארית של רב-נורמלית:</u> אם $Y \sim N(\mu, \Sigma)$ ואם $W = DY + c$ אז $W \sim N(D\mu + c, D\Sigma D^t)$

<u>התפלגות מותנית ברב-נורמלית:</u> אם $Y = \big(Y_{(1)}, Y_{(2)}\big)^t \sim N(\mu, \Sigma)$ אז $Y_{(1)} | \{Y_{(2)} = y_{(2)}\} \sim N\big(\mu_{(1|2)}, \Sigma_{(1|2)}\big)$

$$\mu_{(1|2)} = \mu_{(1)} + \Sigma_{(12)}\Sigma_{(22)}^{-1}(y_{(2)} - \mu_{(2)}), \qquad \Sigma_{(1|2)} = \Sigma_{(11)} - \Sigma_{(12)}\Sigma_{(22)}^{-1}\Sigma_{(21)}$$

<u>שיטת ה-δ:</u> אם g פונקציה חלקה ו- $\bar{X}_n$ ממוצע של n משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות בעלי תוחלת μ ושונות σ^2 אז:

$$\sqrt{n}[g(\bar{X}_n) - g(\mu)] \rightsquigarrow N(0, [g'(\mu)]^2\sigma^2).$$