יסודות תורת ההסתברות

אוהד נ. פלדהיים
אורי גוראל גורביץ'

מכון איינשטיין למתמטיקה
האוניברסיטה העברית בירושלים

6 בדצמבר 2018

אי' ינסן:

אם f קמורה קרי $f(\alpha a+\beta b)\le \alpha f(a)+\beta f(b)$ אז: $f[E(X)]\le E[f(X)]$

הוכחה:

נסמן $x_0=E(X)$ מכיוון ש f קמורה מתקיים כי $f(x)\ge f(x_0)+\beta(x-x_0)$

נחשב את התוחלת של $f(x)$ וסיימתי

$$E(f(X))=\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)\cdot P(X=x)\ \ge\ \sum_{x\in\mathbb{R}}\left[f(x_0)-\beta(x-x_0)\right]\underbrace{P(X=x)}_{\text{פונ' התפלגות כן}}$$

$$= f(x_0)-\beta\cdot x_0+\beta\underbrace{\sum x\cdot P(X=x)}_{x_0} = f(x_0)=f\left(E(X)\right)$$

$$\left[P(X\in\mathbb{R}) \iff \sum P(X=x)=1\right]$$

בפרק הקודם ראינו את אי"ש צ'בישב ואי"ש מרקוב וכיצד להכליל אותם על מנת לקבל חסמים הדוקים יותר

צ'בישב: $\mathbb{P}(|x - E(x)| \geq a) \leq \frac{Var(x)}{a^2}$

מרקוב: $\mathbb{P}(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$

פרק 7

מומנטים גבוהים וריכוז מעריכי

...הרמן [רובין] טען שביכולתו להשיג חסם תחתון ביתר קלות. קראתי עליו תגר והוא הוכיח הוכחה בסגנון צ'בישב שהייתה כה פשוטה עד שלא טרחתי לציין את תרומתו. איזו שגיאה! נראה ששאנון הפעיל את משפט הגבול המרכזי באופן שגוי על הזנב המרוחק של ההתפלגות באחד ממאמריו בתורת האינפורמציה. כששגיאתו נחשפה הוא גילה את החסם התחתון של רובין במאמרי והדבר הציל את תוצאותיו...

– הרמן צ'רנוף על חסם צ'רנוף, זכרונות מחברותי עם הרמן רובין, 2004

בפרק הקודם ראינו כיצד באמצעות מעבר מתוחלת לשונות שיפרנו את חסמי הפיזור שעמדו לרשותנו. כתוצאה מכך עלה בידנו להוכיח כי בתנאים מסויימים מתכנס ממוצע ניסויים חוזרים לתוחלת. עם זאת השוואה של חסמי הפיזור שקיבלנו לחסמים שהתקבלו בחישוב ישיר, למשל בדוגמא 4.32, מעידה שבעוד שהיטבנו להעריך את ערכו הטיפוסי של המשתנה, ההסתברות לסטיה משמעותית מערך הייתה לעיתים קרובות נמוכה בהרבה מהחסמים שהציעו לנו אי-שיוויון מרקוב ואי-שיוויון צ'בישב. גישה אחת להכללה ושיפור של אי-שוויונים אלה היא הכללת השונות למושג כללי יותר של **מומנט**.

הגדרה 7.1 (מומנטים פולינומיאלים)**.** יהי X משתנה מקרי. ה**מומנט מסדר** k של X מוגדר בתור

$$m_k(X) = \mathbb{E}\left(X^k\right),$$

כאשר תוחלת זו מוגדרת היטב.

באופן דומה ה**מומנט המרכזי מסדר** k מוגדר על מ"מ בעל תוחלת סופית בתור

$$\mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^k\right).$$

מנקודת ראות זו השונות היא מומנט מרכזי מסדר 2. ההגיון בבחירת המומנט המרכזי נובע מהטענה הבאה.

טענה 7.2 (השונות היא המומנט השני המוסט המינימלי)**.** יהי X משתנה מקרי בעל מומנט שני סופי, אזי

$$\min\left\{\mathbb{E}\left((X-a)^2\right) \;:\; a \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Var}(X).$$

$\gamma\Delta[E(x-E(x)]=0$

הוכחה. נרשום $Y = X - \mathbb{E}(X)$ כך שיתקיים $\mathbb{E}(Y) = 0$. לכל $\Delta \in \mathbb{R}$ נחשב,

$$\mathbb{E}((X - E(X) + \Delta)^2) = \mathbb{E}\left((Y + \Delta)^2\right) \overset{\text{טענה 5.5}}{=} \mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(\Delta^2) + 2\mathbb{E}(Y\Delta)$$
$$\overset{\text{טענה 5.11}}{=} \mathrm{Var}(X) + \Delta^2 + 2\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(\Delta) = \mathrm{Var}(X) + \Delta^2$$

ולכן המינימום מתקבל עבור $\Delta = 0$. ■

קיום מומנטים גבוהים היא דרישה מחמירה ביחס להתפלגות. כשם שלא כל התפלגות בעלת תוחלת ניחנה בשונות סופית, כך גם לא כל פונקציה בעלת מומנט מסדר k ניחנה במומנט מסדר $k+1$.

טענה 7.3. יהי X משתנה מקרי. אם $M_k(X)$ סופי אז גם $M_{k-1}(X)$ סופי.

הוכחה. לפי הגדרה, לכל $k \in \mathbb{N}$ קיומו של $M_k(X) < \infty$ שקול לקיומו של $E(|X|^k)$ נפעיל את אי-שוויון ינסן (טענה 5.10) על הפונקציה הקמורה $f(x) = x^{\frac{k}{k-1}}$ והמשתנה המקרי $|X|^{k-1}$ ונקבל

$$\mathbb{E}(|X^k|) \geq \mathbb{E}(|X^{k-1}|)^{\frac{k}{k-1}}$$

ולכן, אם $M_k(X)$ סופי אז גם $M_{k-1}(X)$ סופי, כנדרש. ■

בעוד שמומנטים גבוהים מרכזיים אינם בהכרח מינימלים בין כל המומנטים המוסטים, עדיין ניתן להשתמש במומנטים אלא בכדי לשפר את ההערכות באי-שוויון צ'בישב כפי שניתן לראות בבעיה הבאה.

✎ **בעיה 7.1.** התאם את הוכחת א"ש צ'בישב (משפט 6.5) והוכח כי לכל X מ"מ אי-שלילי בעל תוחלת סופית ומומנט מסדר k. אזי לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\left(|X - \mathbb{E}(X)|\right)^k\right)}{a^k}.$$

עם זאת, הכללתו החשובה ביותר של א"ש צ'בישב היא דווקא זו המסתמכת על הפונקציה המעריכית. הכללה זו תעמוד במוקד הפרק הבא.

7.1 פונקציה יוצרת מומנטים ואי שוויון צ'רנוף

נפתח בהיכרות עם המושג **פונקציה יוצרת מומנטים** המכונה לעיתים **המומנט המעריכי של** X.

הגדרה 7.4 (פונקציה יוצרת מומנטים)**.** יהי X משתנה מקרי. הפונקציה הממשית $M_X(t)$ הנתונה על-ידי

$$M_X(t) := \mathbb{E}\left(e^{tX}\right),$$

לכל t עבורו תוחלת זו מוגדרת היטב, מכונה ה**פונקציה יוצרת מומנטים (moment generating function)** של X. משתנה מקרי בעל פונקציה יוצרת מומנטים בסביבה כלשהי של הראשית נקרא בעל **מומנט מעריכי**.

$t \in [0,a]$

טענה 7.5 (כפליות פונקציה יוצרת מומנטים)**.** יהיו X ו-Y משתנים מקריים בלתי תלויים ויהי $Z = X + Y$.
אזי

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

הוכחה. לפי טענה 4.34, המשתנים המקריים e^{tX} ו-e^{tY} בלתי תלויים. נשתמש בכפליות משתנים מקריים בלתי-תלויים (טענה 5.11) ונקבל

$$\mathbb{E}(e^{t(x+Y)}) = \mathbb{E}(e^{tX}e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{tX})\mathbb{E}(e^{tY}).$$

■

שימושה החשוב ביותר של פונקציה יוצרת מומנטים, מקורו בשימוש של אי-שיווין מרקוב שהציע הרמן רובין (Herman Rubin) בסביבות 1950 אך נקרא בטעות על שם הרמן צ'רנוף.

משפט 7.6 (אי-שוויון צ'רנוף)**.** יהי X משתנה מקרי בעל מומנט מעריכי. אזי לכל $t > 0$ עבורו $M_X(t)$ מוגדרת ולכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq M_X(t)e^{-ta}$$

הוכחה. נציב בא"ש מרקוב (משפט 5.16) את המ"מ e^{tX} ונקבל

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}} = M_X(t)e^{-ta}.$$

■

נהיר שעבור משתנים מקריים בעלי מומנט מעריכי, אי שיוויון צ'רנוף מציע חסם רב עוצמה על ההסתברות לסטיה משמעותית מהתוחלת. בטרם נראה כי הערכה זו הנה הדוקה עבור משפחה נרחבת של משתנים מקריים, נפתח בחישוב הפונקציה היוצרת מומנטים של מספר משתנים מקריים מוכרים.

דוגמא 7.7 (פונקציה יוצרת מומנטים של משתנים מקריים מוכרים)**.**

(א) פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ **ברנולי** $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ היא

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = pe^t + 1 - p$$

(1)

(ב) פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ **בינומי** $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ היא

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} e^{nt} p^n (1-p)^{N-n} = (pe^t + 1 - p)^n$$

(ג) פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ **פואסוני** $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ היא

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

(ד) פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ **גיאומטרי** $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ היא

$X \sim ber(p)$

ערך	סיכוי
0	1-p
1	p

$$ber(x) = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases}$$

$$M_x(t) = p \cdot e^{1 \cdot t} + (1-p) \cdot e^{0 \cdot t} = pe^t + 1-p$$

(ג) הוכחה עבור $X \sim Bin(n,p)$ לפונקציה מומנט בינומי

נזכר כי

אם $\{X_i\}_{i \in [n]}$ משתני ברנולי p ב"ת אז $\sum_{i \in [n]} X_i \sim Bin(n,p)$

$$X \overset{!}{=} y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

משני
ברנולי
עם
סיכויים

$$E(e^{tx}) = E\left(e^{t \cdot \sum x_i}\right) = (pe^t + 1-p)^n$$

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^n p(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} pe^t(e^t - pe^t)^{n-1} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

והיא מוגדרת רק עבור $t < -\ln(1-p)$.

✎ **בעיה 7.2** (פונקציה יוצרת מומנטים של התפלגות בינומית שלילית). לחשב את הפונקציה יוצרת מומנטים של Y עבור $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ כאשר $X_i \sim \mathrm{Geo}(p)$ בלתי-תלויים.

עתה נסתייע בחשבונות אלו ונראה כיצד להוכיח באמצעות אי-שיוויון צ'רנוף ריכוז של ממשתנה מקרי סביב תוחלתו.

דוגמא 7.8 (כדורים בתאים). מחלקים באקראי n כדורים ל-n תאים באופן אחיד ובלתי-תלוי. נחסם מלמעלה את העומס בתא העמוס ביותר. (להוכחה כי חסם זה הנו הדוק אסימפטוטית - ר' הפניה).

תשובה: נחשב לפי חסם האיחוד

e^{k}
גול

$$\mathbb{P}\left(\max_{i\in[n]} S_i < k\right) \le 1 - \sum_{i\in n} \mathbb{P}(S_i \ge k) \overset{\text{סימטריה}}{=} 1 - n\mathbb{P}(S_1 \ge k)$$

נסמן ב-X_i משתנה אינדיקטור למאורע שהכדור ה-i נפל בתא הראשון. אלו משתני ברנולי בלתי-תלויים ולכן,לפי טענה 4.44 מתקיים $S_1 \sim \mathrm{Bin}(n, 1/n)$. נשתמש בחישוב מדוגמא 7.7ב ונקבל כי

$$M_{S_1}(t) = \left(1 + \frac{e^t - 1}{n}\right)^n \le \exp\left(\frac{e^t - 1}{n} n\right) = \exp\left(e^t - 1\right).$$

$(1+x)^n < e^x$

נפעיל את אי-שיוויון צ'רנוף ונקבל כל לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(S_1 \ge a) \le e^{-ta} M_{S_1}(t) \le \exp\left(e^t - 1 - ta\right).$$

נגזור לפי t, נשווה לאפס ונקבל כי $t = \log a$ ממזער את החסם כך שמתקבלת ההערכה

$$\mathbb{P}(S_1 \ge a) \le \exp\left(a - a\log(a) - 1\right) < \exp\left(-a(\log(a) - 1)\right).$$

בכדי להשתמש בחסם האיחוד, נבקש a עבורו $\exp\left(-a(\log(a)-1)\right) = o(n^{-1})$. באופן שקול, נדרוש שיתקיים $a(\log(a)-1) - \log(n) \to \infty$. נחשב ונמצא כי עבור $a = c\log(n)/\log\log(n)$ כאשר $c > 1$ נקבל

$$\begin{aligned} a(\log(a)-1) - \log(n) &= \frac{c\log(n)}{\log\log(n)}\Big(\log\log(n) + \log(c) - \log\log\log(n) - 1\Big) - \log(n) \\ &= \log(n)\left(c - 1 - \frac{c(\log\log\log(n) + 1 - \log(c))}{\log\log(n)}\right) \to \infty \end{aligned}$$

כמבוקש.

בפרק הבא נכליל את החסם למשפחה רחבה יותר של משתנים מקריים ונמחיש את תועלתו במספר דוגמאות כמותיות.

באופן שקול

$$\frac{\frac{1}{n}}{e^{[-a\ln(a)-1]}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$$\frac{e^{[-a\ln(a)-1]}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

7.2 אי שיוויון הופדינג

את המסקנות מאי-שוויון צ'רנוף למשתנה מקרי בינומי שפגשנו בדוגמא ??, הכליל בשנת 1963 המתמטיקאי הפיני וסילי הופדינג (Wassily Hoeffding) לסכום של משתנים מקריים בלתי-תלויים וחסומים. נתחיל בהצגת הלמה של הופדינג העוסקת בחסימת הפונקציה היוצרת מומנטים של משתנה מקרי חסום.

טענה 7.9 (הלמה של הופדינג). יהי X משתנה מקרי המקיים $|X| \leq 1$ וכן $\mathbb{E}(X) = 0$. אזי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

הוכחה. נקבע את t. הפונקציה e^{tx}, כפונקציה של x היא פונקציה בעלת נגזרת שניה חיובית ולכן קמורה. בפרט, אם נסמן ב-$L(x)$ את הפונקציה המתארת את הישר שעובר דרך הנקודות $(-1, e^{-1})$ ו-$(1, e^t)$ אז לכל $x \in [-1, 1]$ מתקיים

$$e^{tx} \leq L(x).$$

משוואת הישר L היא

$$L(x) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + x\frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

ממונוטוניות התוחלת והליניאריות שלה (טענה 5.5) נקבל

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathbb{E}(L(X)) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \mathbb{E}(X)\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

התוחלת = 0

כעת נותר לבדוק שלכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{t^2/2}.$$

נשווה בין טורי טיילור של שני הצדדים ונקבל

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n + (-t)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{(2m)!} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{2^m m!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(t^2/2)^m}{m!} = e^{t^2/2}$$

כנדרש. ■

משפט 7.10 (אי-שוויון הופדינג). יהיו $\{X_i\}_{i\in[N]}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים ובעלי תוחלת אפס, המקיימים $|X_i| \leq 1$ לכל $i \in [N]$. אזי לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i\in[N]} X_i \geq a\right) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2N}\right).$$

$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t).$

הוכחה. נסמן $X = \sum_{i\in[N]} X_i$.

$$M_X(t) \overset{\text{טענה } 7.5}{=} \prod_{i\in[N]} M_{X_i}(t) \overset{\text{טענה } 7.9}{\leq} \prod_{i\in[N]} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{Nt^2}{2}\right).$$

מכאן שלפי אי-שיוויון צ'רנוף (משפט 7.6) לכל $t > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \exp\left(\frac{Nt^2}{2} - ta\right).$$

בכדי למצא t שימזער את החסם נגזור את המעריך ונשווה לאפס

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Nt^2}{2} - ta\right) = Nt - a = 0$$

נבחר אפוא $t = a/N$ ונקבל

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \exp\left(\frac{n(a/N)^2}{2} - (a/N)a\right) = \exp\left(-\frac{a^2}{2N}\right),$$

כנדרש. ■

כעת ניווכח בשיפור שמציג חסם זה ביחס לבעיות שעסקנו בהן בפרקים הקודמים. נפתח בבעיה המוצגת בדוגמא 6.7.

דוגמא 7.11 (ריכוז התפלגות בינומית).

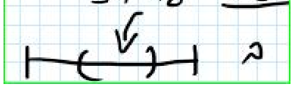
מיליון מטבעות הוגנים מוטלים. חסום את הסיכוי שכמות המטבעות שתוצאתם עץ תהייה בין $495{,}000$ ל-$505{,}000$.

תשובה: נסמן ב-X_i מ"מ המקבל את הערך 1 אם המטבע ה-i הראה תוצאה של עץ ו-$1-$ אחרת. כמו כן נסמן $X = \sum_{i=1}^{10^6}(X_i)$. אנו מעוניינים לחסום את ההסתברות ש-$|X|$ קטן מ-10^4. נשים לב כי X_i עומדים בתנאי א"ש הופדינג, משפט 7.10. נפעיל את האי-שוויון ונקבל כי המאורע שאנו מעוניינים בו מקיים

מקרה משלים

לא זרות

ג



$$\mathbb{P}(-10^4 \leq X \leq 10^4) \boxed{=} 1 - \mathbb{P}(X \geq 10^4) - \mathbb{P}(-X \geq 10^4) \geq 1 - 2\exp\left(-\frac{10^8}{2\cdot 10^6}\right)$$
$$= 1 - 2\exp(-50) \approx 1 - 10^{-22}.$$

7.3* ממומנטים לפונקציה יוצרת מומנטים

השם פונקציה יוצרת מומנטים מקורו בתכונה הבאה:

טענה 7.12. יהי X משתנה מקרי בדיד עבורו M_X מוגדרת היטב בסביבות 0. אז מתקיים

$$M_X^{(k)}(0) = m_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$$

כלומר הנגזרת מסדר k של הפונקציה יוצרת מומנטים היא המומנט מסדר k של המ"מ.

הוכחה. לפי הנחתנו $M_X(s)$ מוגדרת בקטע $(-t_0, t_0)$ עבור $t_0 > 0$ כלשהו. מפני ש-e^{xt} מונוטונית עולה ב-t עבור x חיובי ומונוטונית יורדת עבור x שלילי, הרי שלכל $|t| < t_0$ מתקיים

$$M_X(t) < \mathbb{E}(e^{xt}) + \mathbb{E}(e^{-xt}) = M_X(t_0) + M_X(-t_0).$$

נסמן חסם זה ב-$a = M_X(t_0) + M_X(-t_0)$. נזכר כי לכל t מתקיים

$$e^{|t|} < e^{-t} + e^t$$

ומכאן שמתקיים לכל $|t| < t_0$,

$$\sum_{x \in \text{Supp}(X)} e^{|tx|}\mathbb{P}(X = x) \leq \sum_{x \in \text{Supp}(X)} e^{tx}\mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \in \text{Supp}(X)} e^{-tx}\mathbb{P}(X = x) < 2a$$

נרשום

$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{x \in \text{Supp}(X)} e^{tx}\, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in \text{Supp}(X)} \mathbb{P}(X = x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!}$$

נשתמש בעובדה ש$\sum_{x \in \text{Supp}(X)} e^{|tx|}\mathbb{P}(X = x)$ סופי בכדי להסיק כי הסכום באגף ימין מתכנס בהחלט. לכן נוכל לשנות סדר סכימה ולקבל

$$\mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in \text{Supp}(X)} \mathbb{P}(X = x)\frac{x^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^n)}{n!} t^n$$

זהו טור חזקות המתכנס בהחלט לכל $|t| < t_0$, ולכן בתוך רדיוס ההתכנסות ניתן להחליף נגזרת וסכום. כעת נגזור את הטור ונקבל את המבוקש. ■

בעיות הרחבה והעשרה

✎ **בעיה 7.3.** עבור מ"מ X הנתמך על $\mathbb{N}_0$ נגדיר את ה**פונקציה יוצרת הסתברות** של X בתור

$$G_X(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \mathbb{P}(x = i).$$

(א) הראה כי $G_X(e^x)$ היא הפונקציה יוצרת מומנטים של X, והסבר כיצד לחשב מומנטים של X מ-$f_X(x)$.

(ב) הוכח כי אם Y בלתי-תלוי ב-X ובעל תומך ב-$\mathbb{N}_0$, ו-$a \in \mathbb{Z}$ אז מתקיים $G_{X+Y} \equiv G_X G_Y$ וכן $G_{aX}(x) = G_X(x^a)$

(ג) יהיו $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים הנתמכים על $\mathbb{N}_0$ ושווי התפלגות ויהי Y מ"מ בלתי-תלוי בכולם הנתמך על $\mathbb{N}_0$ הראה כי מתקיים

$$G_{\sum_{i=1}^{Y} X_i}(x) = G_Y(G_X(x)).$$

(נשים לב שבשלב זה, אין אנו מכירים מרחב הסתברות שבו קיימים אינסוף משתנים מקריים לא-קבועים ובלתי-תלויים, מצב זה יתוקן בפרק הפניה).

(ד) מספר המכוניות שחולפות בצומת בדקה מתפלג פואסונית עם שכיחות 1. בכל מכונית מספר הנוסעים מתפלג אחיד על $[4]$ באופן בלתי-תלוי. יש לחשב את הפונקציה יוצרת הסתברות של מספר האנשים שחולפים בצומת בדקה. (התפלגות כזו נקראת התפלגות פואסון מורכבת).

✎ **בעיה 7.4.** נתונים $X_1, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, שווי התפלגות כאשר $X_1 \sim \mathrm{Geo}(p)$. יש להראות כי

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i \geq \frac{(1+\delta)m}{p}\right) \leq \exp\left(-m\delta^2/8\right).$$

✎ **בעיה 7.5 (*).** להשתמש באי-שיוויון הופדינג ובחסם האיחוד בכדי להראות שבהינתן $A_1, \ldots, A_m$ תת-קבוצות של המספרים $1, \ldots, N$, ניתן למצא קבוצה B כך שלכל $i \in [m]$ מתקיים

$$|A_i \cap B| - |A_i \cap B^c| \leq \sqrt{2n \ln(2m)}.$$

הדרכה: יש להראות כי עבור בחירה מקרית ואחידה של B, הסתברותו של המאורע המשלים קטנה מ-1.