

# יסודות תורת ההסתברות

אוהד נ. פלדהיים  
אורי גוראל גורביץ'

מכון איינשטיין למתמטיקה  
האוניברסיטה העברית בירושלים  
© כל הזכויות שמורות לכותבים

3 בינואר 2019

תכונות של  $\mathbb{Z}$  ו  $\mathbb{Z}_n$  בה' אלה  
 פונק' בתפלות  $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_n$

$$x = y: R \rightarrow \mathcal{U}$$

we have the following lemma:

[illegible]

Derivata w stosunku do  $\left[ \begin{matrix} \text{wartość} & \text{wzrost} & \text{wzrost} & \text{wzrost} \end{matrix} \right]^T$   $P_y = P_x$  e. wartość  $x = y$  pkt (2)  
 gdzie wartość  $x$

$x \stackrel{\text{let}}{=} y$  ist  $x = y$  ist: symmetrisch

בדיוק ב'  $\exists x \exists y$  בהקדמה הנוצרת  $\sim R \Rightarrow \sim$  של  $R$  הן כפולות בעיקר את  
הן הבהירות והן הבהירות  $\sim R \Rightarrow \sim$

$n$	$p$	$x(w)$	$y(w)$
0	$\frac{1}{3}$	$w$	$w \bmod 3$
1	$\frac{2}{3}$		
2	$\frac{2}{3}$		
3	0		

## פרק 10

## סדרות של התפלגויות

כמעט שאינני מכיר דבר-מה אשר מותיר רושם כה עז על הדמיון כמו תבנית הסדר הקוסמי המתבטאת באמצעות חוק שכיחות הסטיות. החוק היה זוכה להאנשה על ידי היוונים אילו הכירוהו. הוא מושל בשלווה ובצניעות מושלמת בלב התוהו הפראי ביותר. ככל שרב האספסוף, ניכרת יותר האנארכיה, כך נשעית שליטתו מושלמת. זהו החוק העליון שבשיגעון.

— סר פרנסיס גלטון על משפט הגבול המרכזי, "תורשה טבעית", 1889

במובן מסויים של התכנסות משתנים מקריים נתקלנו בפרק 3, בדוגמא 3.42. שם רצינו להראות שהתפלגות מספר המטבעות המוטלים לפני תוצאה ראשונה של עץ (או סיום הטלת כל המטבעות), כאשר מטילים  $N$  מטבעות, מתכנסת להתפלגותו של משתנה גיאומטרי. קשרים דומים שימשו אותנו לניסוח הקשר בין התפלגות בינומית לפואסונית (בעיה 3.27) ולניסוח החוק החלש של המספרים הגדולים (משפט 5.8). בפרק זה נגדיר מושג זה של התכנסות המכונה **התכנסות התפלגויות** או **התכנסות בהתפלגות** ונחקור תכונות אוניברסליות שלו.

## 10.1 התכנסות התפלגויות

את מושג ההתכנסות עבור התפלגויות נגדיר במונחים של פונקציות התפלגות מצטברות.

**הגדרה 10.1** (התכנסות בהתפלגות למשתנה מקרי בדיד). תהי  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  סדרת משתנים מקריים, לא בהכרח על אותו מרחב הסתברות, ויהי  $X$  משתנה מקרי. נאמר כי  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  מתכנסת **בהתפלגות** (in distribution) ל- $X$ , ונסמן  $X_n \xrightarrow{d} X$  אם לכל  $a$  שהיא **נקודת רציפות** של  $F_X$  מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) = F_X(a).$$

התכנסות בהתפלגות היא תכונה חלשה יותר מ-"התכנסות של ההסתברות ש- $X_n$  נמצאת ב- $I$  לכל קטע ב-

“R. בכדי להבין את המוטיבציה להגדרה המורכבת והחלשה יותר, נסתכל על הדוגמא הבאה.

**דוגמא 10.2.** תהי  $X_n \stackrel{\text{a.s.}}{=} c_n$  סדרת משתנים מקריים קבועים, כאשר  $c_n \rightarrow 0$  ויהי  $X \stackrel{\text{a.s.}}{=} 0$ . פונקציית ההתפלגות

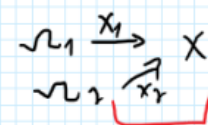
$$c_n = \frac{1}{n} \quad \text{L'JL}$$

$$F_{X_n}(a) = 1 \mid (a \geq \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(a) = 1 \mid (a > 0)$$

קצת אינטואיציה על דיו' בסיסיות:

יש לי מ"מ עם גבולות מאותו מרחב מנדס קרי:

הכל מתקן מסוים מתקין ע:



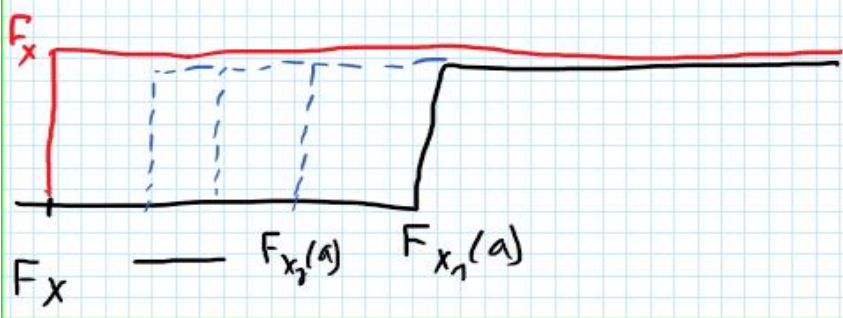
במקין

בהתפלגות יש נטייה של התפלגות כל שורה במחלקה מתבטאת נ"מ מתבטאת בהסתברות  $\frac{1}{n}$

הדוג' כאן במשך המידע מרוץ מוכרע בקושה המציבה של  $a$  נ"מ יציבות של  $F_X$

אותה דרישה נ"מ באיכות  
שכונות יציבה נ"מ כלומר  
לדוגמא הד' צדדים שווים

ויזואליזציה:



המצטברות של הסדרה הן

$$F_{X_n}(a) = \begin{cases} 0 & a < c_n \\ 1 & a \geq c_n \end{cases}$$

**ואומנם**  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) = F_X(a)$  בכל נקודה מלבד 0, נקודת האי-רציפות היחידה של  $F_X$ . ניתן לומר

שהגדרה המורכבת שבחרנו נועדה לאפשר גם להתכנסות כזו להיקרא התכנסות בהתפלגות, ואכן לפי הגדרה זו  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

### דוגמא 10.3 (דוגמאות פשוטות להתכנסות בהתפלגות).

(א) אם  $X, X_n$  כולם משתנים מקריים שווי-התפלגות, אז  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

(ב) אם  $\mathbb{P}(X = c) = 1$  ו-  $\mathbb{P}(X_n = c_n) = 1$ , אז  $X_n \xrightarrow{d} X$  אם ורק אם  $c_n \rightarrow c$ .

(ג) אם  $X_n \sim U([-1/n, 1/n])$  אז  $X_n \xrightarrow{d} 0$ . כך גם לגבי  $X_n \sim U([0, 1/n])$  ו-  $X_n \sim U([1/n, 2/n])$ . נשים לב

שבדוגמאות אלה הערכים של  $F_{X_n}(0) = 1$  שונים ולא חייבים להתכנס ל-  $F_X(0) = 1$ . כיוון ש-0 היא נקודת

אי-רציפות של  $F_X$  הדבר עולה בקנה אחד עם הגדרת התכנסות בהתפלגות.

כעת נראה כיצד ההתפלגויות הרציפות בהחלט שלמדנו להכיר בפרק 9, מתקבלות כגבול של התפלגויות

בדירות. בכך נצדיק את השימושים שהצגנו עבור התפלגויות אלו.

### דוגמא 10.4

(א)  $X \sim U([0, 1])$ ,  $X_n \sim U(\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\})$ . כל  $a$  היא נקודת רציפות של  $F_X$ . עבור  $a > 1$  או  $a < 0$

ההתכנסות טריויאלית ואילו עבור  $0 < a < 1$  מתקיים  $a = \mathbb{P}(X \leq a) = \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = \mathbb{P}(X_n \leq a)$ , ולכן

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

(ב)  $X \sim \text{Po}(1)$ ,  $X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{n})$ . לכל  $k \in \mathbb{N}_0$  נחשב את הגבול:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1}}{k!} = \mathbb{P}(X = k).$$

קבוצת נקודות הרציפות של  $F_X$  היא  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ . אם נקח  $a \in (k, k+1)$  עבור  $k$  טבעי, אז

$$F_{X_n}(a) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X_n = j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X = j) = F_X(a),$$

ולכן  $X_n \xrightarrow{d} X$ . בדוגמה זו  $F_{X_n}(a) \rightarrow F_X(a)$  גם בנקודות האי-רציפות של  $F_X$ .

(ג)  $X \sim U([0, 1])$ ,  $X_n \sim U(\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\})$ . כל  $a$  היא נקודת רציפות של  $F_X$ . עבור  $a > 1$  או  $a < 0$

ההתכנסות טריויאלית. עבור  $0 < a < 1$  מתקיים  $a = \mathbb{P}(X \leq a) = \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = \mathbb{P}(X_n \leq a)$  ולכן יש

התכנסות בהתפלגות.

(ד) אם  $X_n \sim \text{Geo}(\frac{1}{n})$  ו-  $X \sim \text{Exp}(1)$  אזי  $X_n \xrightarrow{d} X$ . נקח  $a > 0$ .

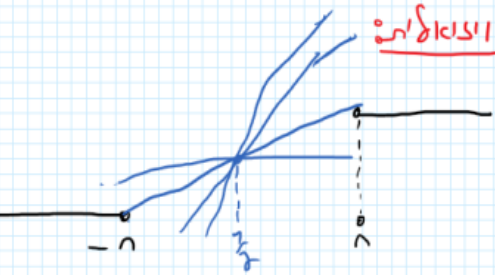
$$\mathbb{P}(Y_n \leq a) = \sum_{k=1}^{\lfloor na \rfloor} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{n} = \frac{1 - (1 - \frac{1}{n})^{na+1}}{1 - (1 - \frac{1}{n})} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-a} = F_X(a).$$

נפקדת יחידה מרשימת דוגמאות זו היא ההתפלגות הנורמלית. ההתכנסות להתפלגות זו מבוארת בפרק הבא.



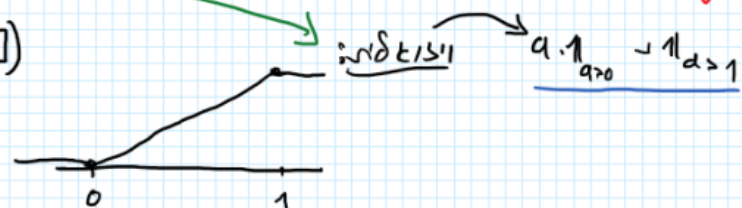
ההיכל צבא צמח נחמיה חסד ורחמים

$F_x(a)$  כוונתו מציאת נקודת החיתוך של  $y$  עם  $x$  ו-1-2

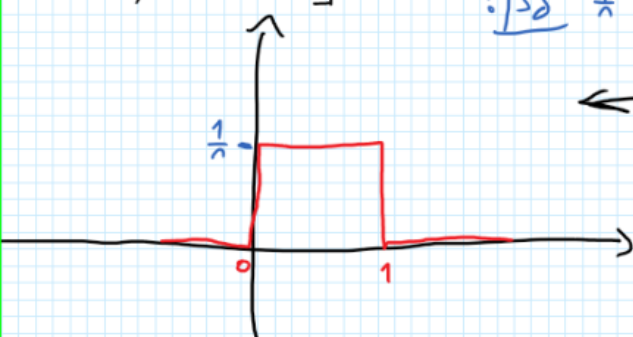
$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & t = -n \\ \frac{t+n}{2n} & t \in [-n, n] \\ 1 & t \geq n \end{cases}$$

$$F_{x_n}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{11[-n, n]}{x_n} dt = \frac{x}{x_n} \Big|_{-n}^t = \frac{t+n}{x_n}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{x_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t - n}{x_n} = \frac{t}{2} \quad \text{f.s.}$$

שב"ן ל  $F_X(a)$  ב נותן קבוע  $\frac{1}{2}$  כל הנתון בתפוצה שב"ן ל  $F_X(a)$  ב נותן  $\delta$  מסוים

$$F_{X_n}(a) = P(X_n \leq a) = \sum_{m \leq a} P(X_n = m) = \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$
$$x_n \sim \text{Unif}([0,1])$$


כונן הדיסק  
מכשיר יי'  $F_2(u)$



שני סוגים של פונקציות:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ו-  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

בן קק אבצא ארגאליציר עבנר עזר  
אקע בירן את מתמנה הויזאקלר הקומות

הערה חשובה

$$(1 - \frac{1}{n})^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$





## 10.2 משפט הגבול המרכזי

אחת התוצאות המרשימות ביותר של תורת ההסתברות, אשר תהילתה מובאת בציטוט שבתחילת הפרק, היא **משפט הגבול המרכזי**. משפט זה קובע כי כאשר מספר גדול של גורמים בלתי-תלויים בעלי שונות נסכמים, אזי לאחר נרמול בסטיית התקן של הסכום - סטייתו מהתוחלת שואפת תמיד להתפלגות נורמלית. זו דוגמא לתופעה של אוניברסליות, כלומר מצב שבו תנאי ההתחלת המתמטיים אינם משפיעים על התוצאה. תוצאות כאלו זוכות לעיתים קרובות לשימושים רבים בכל תחומי המדע.

גרסא בסיסית של המשפט הייתה ידועה כבר לאברהם דה-מואבר ב-1733, והוא הורחב לתנאים מקלים יותר ויותר, כאשר גרסאותיו המודרניות מאפשרות גם סכימה של משתנים בעלי תלויות ובלבד שהללו תהיינה **חלשות דינו**. כאן נביא את גרסתו הקלאסית והמוכרת ביותר של המשפט.

**משפט 10.5** (משפט הגבול המרכזי). תהי  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי התפלגות,

בעלי תוחלת 0 ושונות 1. אזי

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} Z$$

כאשר  $Z$  הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

באופן שקול, לכל  $a \in \mathbb{R}$  מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \leq a\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx.$$

גרסא כמותית של המשפט הוכחה על ידי אנדרו ברי (Andrew Berry) וקרל-גוסטב אסין (Carl-Gustav Esseen).

**משפט 10.6** (משפט ברי-אסין). תהי  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי התפלגות, בעלי

תוחלת 0, שונות 1 ומומנט מוחלט שלישי  $\rho = \mathbb{E}[|X_1^3|] < \infty$ . אזי לכל  $a \in \mathbb{R}$  מתקיים

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \leq a\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx \right| \leq \frac{\rho}{\sqrt{n}}.$$

**דוגמא 10.7**. תהי  $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$  סדרת משתנים מקריים בינומים ויהי  $X \sim N(0, 1)$ . נראה כי  $\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}} \xrightarrow{d} X$ .

**תשובה:** יהיו  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  משתנים בלתי-תלויים ושווי התפלגות כך שמתקיים  $Y_i \sim \text{Ber}(p)$ . נשים לב כי מתקיים  $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  ולכן

$$\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}} = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \mathbb{E}(Y_i)}{\sqrt{\text{Var}(Y_i)}}$$

הזיוף כאן מראה איך עזרנו במה שבניצוקא יצרנו למטה  
 דנסתמו במהלך הזמן במהלך

דנסתמו = 1

$$\text{Var}(z_i) = \text{Var}\left(\frac{y_i - E(y_i)}{\sqrt{\text{Var}(y_i)}}\right) = \frac{\text{Var}(y_i) - 0}{\text{Var}(y_i)} = 1 //$$

↓

$\sigma = \sqrt{\text{Var}(y_i)}$  נוס

$\text{Var}\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{\text{Var}(x)}{\sigma^2} = \frac{\text{Var}(y_i)}{\text{Var}(y_i)} = 1 //$

הזיוף אינו במהלך הזמן  
 אלא במהלך הזמן



נסמן  $Z_i = \frac{Y_i - \mathbb{E}(Y_i)}{\sqrt{\text{Var}(Y_i)}}$  משתנים מקריים בלתי-תלויים בעלי תוחלת 0 ושונות 1 ונקבל כי לפי משפט הגבול המרכזי

$$\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow{d} X,$$

כנדרש.

### 10.3 התכנסות בהתפלגות והתכנסות בהסתברות

**משפט 10.8** (התכנסות בהסתברות גוררת התכנסות בהתפלגות). תהי סדרת משתנים מקריים ויהי  $X$  משתנה מקרי, כולם על אותו מרחב הסתברות. אם  $X_n \xrightarrow{p} X$  אז  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

הוכחה. תהי  $a$  נקודת רציפות של  $F_X$ , ויהי  $\epsilon > 0$ .

$$\mathbb{P}(X_n \leq a) = \mathbb{P}(X_n \leq a, X \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq a, X > a + \epsilon)$$

$$\leq \mathbb{P}(X \leq a + \epsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$$

ולכן  $F_{X_n}(a) \leq F_X(a + \epsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$  בצורה דומה

$$\mathbb{P}(X \leq a - \epsilon) = \mathbb{P}(X \leq a - \epsilon, X_n \leq a) + \mathbb{P}(X \leq a - \epsilon, X_n > a) \leq \mathbb{P}(X_n \leq a) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$$

ולכן  $F_X(a - \epsilon) \leq F_{X_n}(a) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$  קיבלנו

$$F_X(a - \epsilon) - \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon) \leq F_{X_n}(a) \leq F_X(a + \epsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)$$

נשאיף את  $n$  לאינסוף ונקבל מהגדרת ההתכנסות בהסתברות כי לכל  $\epsilon > 0$  מתקיים

$$F_X(a - \epsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) \leq F_X(a + \epsilon).$$

ומכך ש- $a$  נקודת רציפות נקבל  $F_X(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a) \leq F_X(a)$ .

**ההיפך אינו נכון.** למשל, אם  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  הם משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שאינם קבועים, אז  $X_n \xrightarrow{d} X$ , כאשר  $X$  משתנה מקרי נוסף בעל אותה התפלגות, אך  $X_n \not\xrightarrow{p} X$ . עם זאת, מתקיים המשפט הבא.

**משפט 10.9** (התכנסות בהתפלגות לקבוע גוררת התכנסות בהסתברות). תהי סדרת משתנים מקריים, יהי  $X$  משתנה מקרי ויהי  $c \in \mathbb{R}$ . אם  $X_n \xrightarrow{d} c$  אז  $X_n \xrightarrow{p} c$ .

הוכחה. תהי  $F_c$  פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי הקבוע  $c$ . לכל  $\epsilon > 0$  מתקיים  $F_c(c + \epsilon) = 1$  ו- $F_c(c - \epsilon) = 0$ . אם  $X_n \xrightarrow{d} c$  אז  $F_{X_n}(c - \epsilon) \rightarrow 0$  ו- $F_{X_n}(c + \epsilon) \rightarrow 1$  ולכן

$$\mathbb{P}(|X_n - c| \leq \epsilon) \geq F_{X_n}(c + \epsilon) - F_{X_n}(c - \epsilon) \rightarrow 1,$$

כנדרש.

$$P(X_n \leq a, X < a - \epsilon) \subseteq P(X \leq a - \epsilon) \quad (i) \quad \underline{\text{עליון גבול}} \quad (1)$$

$$P(\underbrace{X_n \leq a}_A, \underbrace{X > a + \epsilon}_B) \subseteq P(\underbrace{|X_n - X| > \epsilon}_B) \quad (ii)$$

A C B



הכל

ה

מכלול

## 10.4 \*משמעותה של התכנסות התפלגויות

הדרישה בהגדרה של התכנסות בהתפלגות של סדרת משתנים מתייחסת רק להתכנסות של  $F_{X_n}$  בנקודות רציפות. ראינו בדוגמא 10.2 שזוהי דרישה משמעותית. ראשית נציג הגדרה חלופית להתכנסות בהתפלגות שאינה מערבת סוגיות רציפות של  $F_{X_n}$ .

**טענה 10.10.** תהי  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  סדרת משתנים מקריים.  $X_n$  מתכנסת בהתפלגות ל- $X$  אם ורק אם לכל  $\epsilon > 0$  ולכל  $r \in \mathbb{R}$  מתקיים:

$$F_X(r - \epsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(r) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(r) \leq F_X(r + \epsilon)$$

הוכחה. קל לראות כי בנקודות רציפות של  $F_X$  הטענה שקולה לכך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(r) = F_X(r)$ , ולכן התנאי בטענה 10.10 חזק יותר מאשר התנאי בהגדרה 10.1. בכיוון ההפוך, עלינו להראות כי אם  $X_n \xrightarrow{d} X$ , אז בכל נקודת אי-רציפות  $r$  מתקיים תנאי הטענה. נשים לב כי  $F_X(t)$  הנה פונקציה מונוטונית עולה ולכן יש לה מספר בן-מניה של נקודות אי-רציפות (ר' טענה 0.4). יהי  $\epsilon > 0$ . כיוון שמספר נקודות אי-רציפות הנו בן מניה, קיימות נקודות  $b - \epsilon \leq b_- \leq b \leq b_+ \leq b + \epsilon$  שהן נקודות רציפות של  $F_X$ . לכן מתקיים לפי תכונת ההתכנסות בהתפלגות

$$F_X(b - \epsilon) \leq F_X(b_-) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(b_-) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(b) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(b) \leq F_X(b + \epsilon),$$

כנדרש.

■

**בעיה 10.1.** להכליל את טענה 10.10 ולהראות כי התכנסות  $X_n$  מתכנסת בהתפלגות ל- $X$  אם ורק אם לכל  $\epsilon > 0$  ולכל  $[a, b]$  קיים  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$  מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in (a + \epsilon, b - \epsilon)) \leq \mathbb{P}(X_n \in (a, b)) \leq \mathbb{P}(X \in (a - \epsilon, b + \epsilon)).$$

נציג ללא הוכחה את הטענה הבאה המסכמת את מהותה של התכנסות בהתפלגות.

**טענה 10.11.** תהי  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  סדרת משתנים מקריים ויהי  $X$  משתנה מקרי. אזי  $X_n \xrightarrow{d} X$  אם ורק אם לכל  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה  $\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$ .

**בעיה 10.2.** להוכיח את טענה 10.10 עבור משתנים מקריים רציפים בהחלט.

## בעיות הרחבה והעשרה

**בעיה 10.3.** יהיו  $X_n \sim \text{Unif}[0, 1]$  ונסמן  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$  וכן  $Z_n = Y_n - \lfloor Y_n \rfloor$ . יש להראות כי  $Z_n \xrightarrow{d} Z$  עבור  $Z \sim \text{Unif}[0, 1]$ .

**בעיה 10.4.** לחשב את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}.$$

רמז: לכל  $n$  הביטוי הוא הסתברותו של מאורע הקשור למשתנה מקרי מסוים. ניתן להשתמש במשפט הגבול המרכזי בכדי לחשב את הגבול.

