יסודות תורת ההסתברות

אוהד נ. פלדהיים
אורי גוראל גורביץ'

מכון איינשטיין למתמטיקה

האוניברסיטה העברית בירושלים

31 בדצמבר 2018

על מנת לבטל כי $\sum P(x)=\infty$

כש X הוא רציף בהחלט אז לכל אחד אני רוצה כי $P(X=s)=0$

יש לי אינסוף מספרים בין $[0,1]$

אני רוצה לתת סיכוי אפס לאפשרות לשלוף מס' מסוים

פרק 9

משתנים מקריים רציפים בהחלט

"אם היה עלי לתאר, במילה אחת, את כוכב הצפון אשר סביבו סובב רקיע המתמטיקה, את הרעיון המרכזי אשר מושל כרוח נעלמה בכל גוף הידע של התורה המתמטית, הייתי בוחר ב**רציפות** כפי שהיא מתמבטאת בהגדרת המרחב שלנו, ואומר - זהו - זה!"

–ג'יימס ג'וזף סילבסטר, נאום לאיגוד המתמטי הבריטי, 1869

עד כה לא הרחבנו את הדיבור על משתנים מקריים מעל מרחבי הסתברות כלליים. בפרק זה נכיר משפחה של משתנים מקריים אשר הנה בה בעת הנגישה ביותר והחשובה ביותר בין כל משפחות המשתנים המקריים שאינם בדידים – **משפחת המשתנים המקריים הרציפים בהחלט**. משתנים אלו מאופיינים בקיומה של פונקציית צפיפות המתארת את "הסבירות ליחידת שטח" שהמשתנה מקבל ערך באיזור מסויים. בפרק זה נכליל את הטכניקות ששימשו אותנו לטיפול במשתנים מקריים בדידים למשתנים ממשפחה זו ונכיר מספר התפלגויות רציפות בהחלט בעלות חשיבות מיוחדת.

הגדרה 9.1 (משתנה מקרי רציף בהחלט)**.** יהיה X משתנה מקרי על מרחב הסתברות. נאמר ש-X **רציף בהחלט** אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ כך שלכל $-\infty \le a \le b \le \infty$ מתקיים,

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

הפונקציה f נקראת **הצפיפות של** X.

פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף בהחלט אינה יחידה, שכן שינוי של מספר בן-מניה של ערכי $f(x)$ לא ישפיע על האינטגרל. עם זאת, שתי פונקציות צפיפות של אותו משתנה מקרי מזדהות כמעט בכל $\mathbb{R}$. את התפלגותו של משתנה מקרי רציף בהחלט נוכל לתאר גם באמצעות פונקציית התפלגות מצטברת.

אבחנה 9.2 (פונקציית הסתברות מצטברת)**.** יהיה X משתנה רציף בהחלט על מרחב הסתברות. אזי

$$F_X(s) = \mathbb{P}(X \le s) = \int_{-\infty}^{s} f(x)dx.$$

נשים לב כי פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי רציף בהחלט הנה רציפה ועולה במובן החלש

מעצם הגדרתה, שכן כל אינטגרל של פונקציה ממשית וחיובית מקיים תכונות אלה. לפי משפט ניוטון-לייבניץ (משפט 0.5), ניתן לבחור פונקציית צפיפות של משתנה מקרי כך שהצפיפות תהיה נגזרת פונקציית ההתפלגות המצטברת בכל מקום בו פונקציה זו גזירה.

חישוב הסתברויות עבור מאורעות הנוגעים למשתנה מקרי רציף בהחלט נעשה באמצעות אינטגרל על פונקציית הצפיפות.

טענה 9.3 (חישוב הסתברויות - קטעים). יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל צפיפות f_X. אזי לכל קטע $[a,b]$ ב-$\mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)dx.$$

בפרט לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

הוכחה. נשים לב שמתוך תכונות האינטגרל (טענה 0.6), פונקציית ההתפלגות המצטברת היא רציפה ולכן לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \le a) - \mathbb{P}(X < a) \overset{\substack{\text{משפט}\\1.20}}{=} F(a) - \lim_{a \to a'-} F_X(x) = F(a) - F(a) = 0.$$

כעת נחשב לפי פונקציית ההתפלגות המצטברת

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in [-\infty, b]) - \mathbb{P}(X \in [-\infty, a]) + \mathbb{P}(X = a) = F(b) - F(a) + 0 = \int_a^b f_X(x)dx$$

כנדרש. ■

דוגמא 9.4 (חישוב הסתברות וצפיפות). נתון משתנה מקרי X בעל צפיפות $f_X(x) = \frac{x+1}{2}\mathbb{1}([-1,1])(x)$. נחשב את הסתברות המאורע $\mathbb{P}(X \ge 1/2)$ ומצא את צפיפות של $Y = 5X$ ושל $Z = X^2$.

$f_X(x) = \frac{x+1}{2} \cdot \underbrace{\mathbb{1}([-1,1])(x)}_{\text{כמו ״אינדיק״}}$

תשובה: ראשית נבחין שמדובר אומנם בפונקציית צפיפות, שכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{2}dx = \left(\frac{x^2+2x}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1.$$

נחשב לפי טענה 9.3,

$$\mathbb{P}(X \ge 1/2) = \int_{1/2}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{1/2}^{1} \frac{x+1}{2}dx = \left(\frac{x^2+2x}{4}\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{7}{16}$$

לחישוב צפיפותו של Y, נחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת F_Y. ניתן דעתנו לכך שעבור $y < -5$ מתקיים $\mathbb{P}(Y \le y) = 0$ ואילו עבור $y > 5$ מתקיים $\mathbb{P}(Y \le y) = 1$. עבור $y \in [-5,5]$ נחשב

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(5X \le y) = \mathbb{P}(X \le y/5) \\ &= F_X(y/5) = \int_{-\infty}^{y/5} f_X(x)dx = \int_{-1}^{y/5} \frac{x+1}{2}dx = \left(\frac{x^2+2x}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{y/5} \\ &= \frac{y^2+10y}{100} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

בגלל הגבל ב $\mathbb{1}[-1,1](x)$

נגזור ונקבל $f_Y = (y/50+1/10)\mathbb{1}_{[-5,5]}(x)$. כעת נחשב את צפיפותו של Z, שוב ע"י חישוב תחילה של פונקצית ההתפלגות המצטברת שלו. עבור $z < 0$ מתקיים $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0$ ואילו עבור $z > 1$ מתקיים $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1$.
עבור $z \in [0,1]$ נחשב

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(X^2 \leq z) = \mathbb{P}(X \in [-\sqrt{z}, \sqrt{z}]) = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f_X(x)dx = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{x+1}{2}dx$$
$$= \left(\frac{x^2+2x}{4}\right)\Bigg|_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} = \sqrt{z}$$

נגזור ונקבל כי הצפיפות של Z היא $f_Z(x) = \frac{\mathbb{1}([0,1])}{2\sqrt{z}}$.

כפי שדוגמא 9.4 המחישה, ניתן בקלות יחסית למצוא את השינוי בצפיפות שנגרם מהפעלה של פונקציה מונוטונית על משתנה מקרי בעל צפיפותו ידועה. ננסח אבחנה זו כטענה.

טענה 9.5. יהי X משתנה מקרי בעל צפיפות f_X ותהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית ממש וגזירה. אז $Y = g(X)$ הוא משתנה מקרי בעל צפיפות ולכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$$

כאשר $x = g^{-1}(y)$.

הוכחה. נוכיח עבור המקרה של g עולה. המקרה של g יורדת מוכח בצורה דומה. נראה שהפונקציה המוצעת בתור צפיפות של Y אכן מקיימת את ההגדרה. נשים לב כי כיוון ש-g מונוטונית עולה מתקיים

$$g'(x) = g'(g^{-1}(y)) \geq 0$$

לכל $y \in \mathbb{R}$. נשים לב כי לפי נוסחא לנגזרת פונקציה הופכית (טענה 0.4) מתקיים:

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{g^{-1}(y)}.$$

ולכן

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = f_X(g^{-1}(y))\,(g^{-1})'(y).$$

נציב ונחשב בעזרת החלפת משתנה עבור נקודה a המקיימת $g(a) = b$:

$$\begin{bmatrix} u & = & g^{-1}(y) \\ du & = & (g^{-1})'(y)dy \end{bmatrix}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{b} f_X(g^{-1}(y))\,(g^{-1})'(y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{a} f_X(u)\,du = \mathbb{P}\big(X \leq a\big) = \mathbb{P}(Y \leq b).$$

אין בחלקים

וקיבלנו כי $f_Y(y)$ היא אכן פונקציית צפיפות של Y, כנדרש.

מטרת הטענה: היא לחשב את פונק' הצפיפות
כשאני יכול לעבור מצפיפות של משתנים בקלות
בלי לעבור דרך אינטגרלים

הערה: כאשר g מונ' למקוטעין אחלק את הפונק' שלי לחלקים
ואקבל

$$f_y(x) = \sum_{i=1} \frac{f_x(s_i)}{|g'(s_i)|}$$

הערה: בהפעלת פונקציה כללית g, לא בהכרח מונטונית, על משתנה מקרי בעל צפיפות X, ניתן לחשב את הצפיפות של $g(X)$ ע"י חלוקה לתחומי מונוטוניות של g וסכימת הצפיפויות המתקבלות מתחומים אלה. דבר זה נעשה בחלק השני של דוגמא 9.4 כאשר חישבנו את הצפיפות של X^2 – למעשה סכמנו את הצפיפות המתקבלת מהפעלת $x \mapsto x^2$ בתחום $(-\infty, 0)$ ובתחום $(0, \infty)$, כאשר בדוגמא הספציפית שלנו התרומות היו שוות בשל הסימטריה של X^2 סביב ראשית הצירים.

✎ **בעיה 9.1.** להוכיח את טענה 9.5 למקרה של פונקציה מונוטונית יורדת.

9.0.1 פונקציית האחוזון של משתנה מקרי רציף בהחלט.

בשימושים סטטיסטים רבים, נעשה שימוש בפונקציה המכונה **פונקציית האחוזון (quantile)**. פונקציה זו מתארת לכל מספר $p \in [0, 1]$, את הערך המינימלי כך שבסיכוי לפחות p מתקיים המאורע $\{X \le p\}$.

הגדרה 9.6 (אחוזון של משתנה מקרי)**.** יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל צפיפות $f(x)$. נגדיר את **האחוזון** של X כפונקציה $Q : [0, 1] \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ הנתונה על ידי

$$Q_X(t) = \inf(F_X^{-1}(t))$$

האחוזון המתאים ל-$Q_X(1/2)$ מכונה **החציון** של X והוא משמש כאומד נוסף להתנהגותו הטיפוסית של המשתנה המקרי.

✎ **בעיה 9.2.** להראות כי כאשר הפונקציה $F_X(t)$ הפיכה, מתקיים $Q_X(t) = F^{-1}(t)$.

הבחירה להשתמש inf בהגדרת האחוזון הנה שרירותית. הגדרה מקבילה המשתמשת ב-sup תניב אובייקט מתמטי בעל אותן תכונות ואותם שימושים. ההבדל נובע מכך שכאשר ישנו טווח ערכים $I = [a, b]$ כך שההסתברות ש-X קטן מכל ערך ב-I היא p (ולכן ההסתברות ש-$X \in I$ היא אפס), עלינו לבחור באופן שרירותי איזה איבר בטווח יהיה האחוזון ה-p של X. בהגדרה המקובלת אנו בוחרים את הערך הקטן ביותר.

9.0.2 תוחלת של משתנה מקרי רציף

לבטא את תוחלתו של משתנה מקרי רציף בהחלט באמצעות פונקציית הצפיפות באופן אנלוגי לנוסחת התוחלת עבור משתנה מקרי בדיד.

הגדרה 9.7 (תוחלת משתנה מקרי רציף בהחלט)**.** יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל פונקציית צפיפות $f_X(x)$. אזי

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

בכל מקרה בו אינטגרל זה מתכנס בהחלט. אחרת אין ל-X תוחלת.

כפי שעשינו עבור משתנה מקרי גיאומטרי, נוכל לפתח נוסחה לתוחלת משתנה מקרי רציף בהחלט במושגים של פונקציית התפלגות מצטברת.

טענה 9.8. לכל משתנה מקרי רציף X מתקיים

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(x)) - \int_{-\infty}^0 F(x)$$

הוכחה. נחשב באמצעות משפט פוביני (טענה 0.7):

$$\int_0^\infty (1 - F_X(x)) = \int_0^\infty \int_t^\infty f(x)dxdt \overset{\text{פוביני}}{=} \int_t^\infty f(x)dx \int_0^x dt = \int_0^\infty xf(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^0 F_X(x) = \int_0^\infty \int_t^\infty f(-x)dxdt \overset{\text{פוביני}}{=} \int_t^\infty f(-x)dx \int_0^x dt = \int_0^\infty xf(-x)dx \quad \begin{bmatrix} y = -x \\ dy = -dx \end{bmatrix}$$

$$= \int_{-\infty}^0 yf(y)dx$$

קיבלנו אפוא ש-

$$\int_{-\infty}^\infty xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 yf(y)dx + \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty (1 - F(x)) - \int_{-\infty}^0 F(x),$$

כנדרש. ■

לצורך חישוב תוחלת של פונקציות של משתנים מקריים רציפים נציג ללא הוכחה טענה מקבילה לטענה 4.10.

טענה 9.9 (תוחלת פונקציה של משתנה מקרי)**.** יהי X משתנה מקרי בעל צפיפות f_X ותהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה.

אז $Y = g(X)$ הוא משתנה מקרי המקיים

$$\mathbb{E}\big(Y\big) = \int_{-\infty}^\infty g(x) f_X(x)dx$$

אם ורק אם האינטגרל מתכנס בהחלט.

נשים לב שלא דרשנו בטענה זו כי המשתנה Y יהיה רציף, ואומנם הטענה נכונה באופן כללי. על סמך טענה 9.9 נוכל לחשב מומנטים של משתנים מקריים רציפים בהחלט. כך למשל שונות של משתנה מקרי רציף X תתקבל מן החשבון

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{-\infty}^\infty x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^\infty xf_X(x)dx\right)^2.$$

התוחלת והשונות של משתנים מקריים רציפים מוסיפות לקיים תכונות התוחלת והשונות שהראינו בטענות 4.5 ו-5.3.

טענה 9.10 (תכונות התוחלת)**.** יהיו X, Y משתנים מקריים רציפים בהחלט על אותו מרחב הסתברות, המקיימים $\mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(X) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. אזי

(א) **חיוביות:** אם $X \overset{\text{a.s.}}{\geq} 0$ אז $\mathbb{E}(X) \geq 0$. ואם $X \overset{\text{a.s.}}{>} 0$ אז $(X) > 0$

(ב) **ליניאריות:** $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$.

(ג) **מונוטוניות:** אם $\mathbb{P}(X \geq Y) = 1$ אז $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

טענה 9.11 (תכונות השונות). יהי X משתנה מקרי בעל שונות סופית, ויהי $a \in \mathbb{R}$. אזי

(א) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ ושוויון מתקיים רק אם X קבוע.

(ב) $\mathrm{Var}(X+a) = \mathrm{Var}(X)$.

(ג) $\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$ (ולכן $\sigma(aX) = |a| \cdot \sigma(X)$).

(ד) אם Y משתנה מקרי בעל שונות סופית **בלתי-תלוי** ב-X אז $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

✎ **בעיה 9.3.** להשתמש בתכונות האינטגרל ולהוכיח את טענות 9.10 ו-5.3.

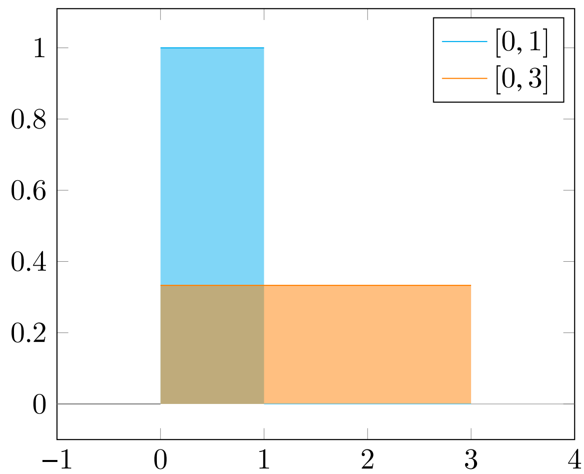
9.1 התפלגויות רציפות חשובות

בפרק זה נכיר את שלוש ההתפלגויות הרציפים החשובות ביותר, אשר תלווינה אותנו לאורך הפרק. בהצגת כל התפלגות נציג פונקציית התפלגות מצטברת, תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים. הקורא עשוי למצא תועלת בהשוואת חישובי התוחלת השונות והפונקציה יוצרת מומנטים עבור פונקציות אלו, לחישובים עבור התפלגויות בדידות מקבילות בפרק 3.4.

9.1.1 התפלגות אחידה

הגדרה 9.12 (התפלגות אחידה). יהי $[a,b] \subset \mathbb{R}$ קטע. נאמר שלמ"מ מקרי X **התפלגות אחידה על** $[a,b]$ ונכתוב $X \sim \mathrm{Unif}([a,b])$, אם צפיפותו היא

$$f_X(x) = \frac{\mathbb{I}([a,b])(x)}{b-a}.$$



צפיפות התפלגות אחידה עבור שני קטעים ב$\mathbb{R}$.

ניתן לתת כמה דוגמאות להתפלגות אחידה מחיי היום-יום:

(א) הזמן בין הגעתנו לצומת מרומזר בין-עירוני לזמן חילוף הרמזור הבא מתפלג בקירוב אחיד

(ב) הזווית שבה יפול סביבון מתפלגת אחיד על $[0, 2\pi]$.

(ג) בבחירת אדם מקרי באוכלוסיה, אחוז האנשים הגבוהים ממנו מתפלג אחיד על $[0, 1]$

אבחנה 9.13 (תכונות התפלגות אחידה)**.** יהי X מ"מ $X \sim \mathrm{Unif}([a, b])$. אזי מתקיים

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases} \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

כמו כן לכל $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\alpha X + \beta \sim \mathrm{Unif}([\alpha a + \beta, \alpha b + \beta])$.

הוכחה.

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathbb{1}([a, b])ds}{b-a} = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_a^b \frac{x^2dx}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$$
$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt}) = \int_a^b \frac{e^{tx}dx}{b-a} = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.$$

ולפי טענה 9.5 מתקיים

$$f(\alpha X + \beta) = \begin{cases} 0 & t < \alpha a + \beta \\ \frac{1}{\alpha}\frac{1}{b-a} & \alpha a + \beta \leq t \leq \alpha b + \beta \\ 0 & t > \alpha b + \beta \end{cases}$$

■

טענה 9.14 (אחוזון של התפלגות רציפה בהחלט מתפלג אחיד על $[0, 1]$)**.** יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל צפיפות $f_X(x)$, פונקציית התפלגות מצטברת $F_X(x)$ ופונקציית אחוזון $Q_X(x)$. כמו כן, יהי $Y \sim \mathrm{Unif}([0, 1])$ אזי

(א) $F_X(X) \overset{\mathrm{d}}{=} Y$

(ב) $Q_X(Y) \overset{\mathrm{d}}{=} X$

הוכחה. פי שראינו, F_X רציפה מפני ש-X רציף בהחלט ולכן $F(\inf(F_X^{-1}(t)) = t$. נחשב לכל $0 \leq \alpha \leq 1$, כי $\mathbb{P}(F_X(X) \leq \alpha) = \mathbb{P}(X \leq \inf(F_X^{-1}(\alpha)))$. מכך נסיק כי

$$\mathbb{P}(F_X(X) \leq \alpha) = \mathbb{P}(X \leq \inf(F_X^{-1}(\alpha))) = F_X(\inf(F_X^{-1}(\alpha))) = \alpha.$$

נסיק מטענה 7.11 כי $F_X(X) \sim \mathrm{Unif}([0,1])$, כנדרש.

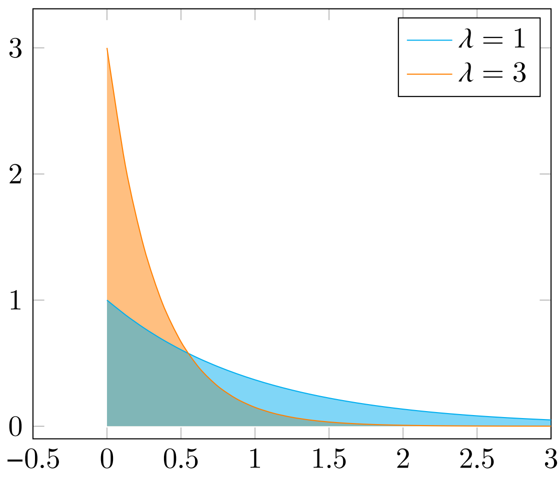
■

הערה: לפונקציית האחוזון חשיבות רבה בסימולציה של משתנים מקריים שכן היא מבטיחה לנו שאם ביכולתנו לחשב את Q_X ולהגריל U, משתנה מקרי אחיד על $[0,1]$ אז נוכל להגריל משתנה מקרי שווה התפלגות ל-X באמצעות חישוב $Q_X(U)$. למעשה ניתן להשתמש ברעיון זה בכדי להראות שניתן לממש כל משתנה מקרי רציף בהחלט כמשתנה מקרי על מרחב הסתברות תקני.

9.1.2 התפלגות מעריכית

הגדרה 9.15 (התפלגות מעריכית)**.** נאמר שלמ"מ מקרי X **התפלגות מעריכית עם פרמטר** λ ונכתוב $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, אם צפיפותו היא

$$f_X(x) = \mathbb{1}([0,\infty))(x)\lambda e^{-\lambda x}.$$



צפיפות התפלגות מעריכית עבור שני פרמטרים שונים.

ההתפלגות המעריכית היא מקבילתה הרציפה של ההתפלגות הגיאומטרית. היא מתארת היטב את **הזמן שחולף עד להתרחשות בתנאי חוסר זיכרון** אך גם התפלגויות פיסיקליות נוספות. דוגמאות למשתנים מקריים אקספוננציאליים הנן:

(א) **הזמן עד לכניסת לקוח לחנות.**

(ב) **הזמן בין לידות של תינוקות במדינה.**

(ג) **הזמן עד להתפרקותו של אטום אורניום.**

(ד) הגובה של מולקולה מקרית באטמוספירה.

(ה) האנרגיה הקינטית של אטום מקרי בגז אידאלי (התפלגות בולצמן).

אבחנה 9.16. יהי $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. אזי

$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda \qquad F_X(t) = \max(1 - e^{-\lambda t}, 0)$$

$$\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2 \qquad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{עבור } t < \lambda$$

כמו כן לכל $\alpha > 0$ מתקיים $\alpha X \sim \mathrm{Exp}(\lambda/\alpha)$.

הוכחה.

$$F_X(t) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda s} ds = \max(1 - e^{-\lambda t}, 0).$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \lambda s e^{-\lambda s} ds = \lim_{s\to\infty} \left[-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^s = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_0^\infty \lambda s^2 e^{-\lambda s} ds - \frac{1}{\lambda^2} \qquad \begin{bmatrix} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g(x) = e^{-\lambda x} & g'(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \left([-x^2 e^{-\lambda x}]|_0^s + 2\int_0^r x e^{-kx} dx \right)$$

$$= \lim_{s\to\infty} \left[-x^2 e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda}\right]_{x=0}^s - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

כמו כן, עבור $t < \lambda$ מתקיים,

$$M_X(t) = \int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)s} ds = \lim_{s\to\infty} \left[\frac{\lambda}{\lambda - t} e^{(t-\lambda)x}\right]_{x=0}^s = \frac{\lambda}{\lambda - t},$$

וכן $F_{\alpha X}(t) = F_X(\frac{t}{\alpha}) = \max(1 - e^{-\lambda t/\alpha}, 0)$. ■

נציג כעת תכונת חוסר זיכרון רציפה של משתנה מקרי מעריכי, המעידה על חוסר זיכרון לכשלון בכל פרק זמן ממשי. תכונה זה מקבילה לתכונה הבדידה של משתנה מקרי גיאומטרי.

אבחנה 9.17 (חוסר זיכרון). יהי $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. אזי המשתנה המקרי $Y = (X - x_0 \mid X > x_0)$ מקיים $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

הוכחה. נחשב

$$\overline{F}_Y(t) = \mathbb{P}(X - x_0 > t \mid X > x_0) = \frac{F_X(t + x_0)}{F_X(x_0)} = \frac{e^{\lambda(t+x_0)}}{e^{\lambda x_0}} = e^{-\lambda t}$$

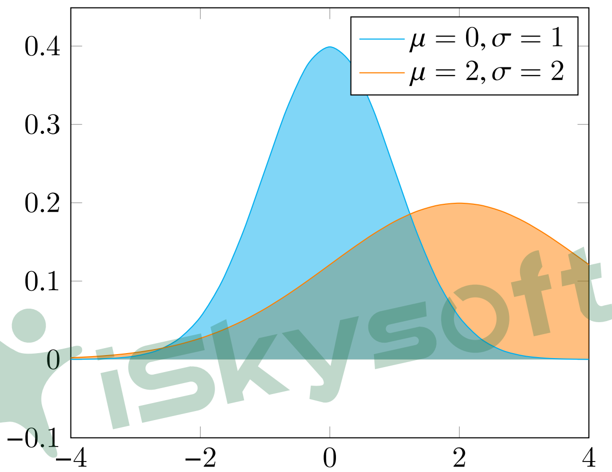
זו פונקציית התפלגות שיורית של משתנה מעריכי עם פרמטר λ והיא קובעת את התפלגותו לפי טענה 7.11 . ■

9.1.3 התפלגות נורמלית

הגדרה 9.18 (התפלגות נורמלית).נאמר שלמ"מ מקרי X **התפלגות נורמלית עם תוחלת** μ **ושונות** σ^2 ונכתוב $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, אם צפיפותו היא

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

אם $\mu = 0$ ו-$\sigma = 1$ נאמר ש- X **נורמלי סטנדרטי**.



צפיפות התפלגות נורמלית עבור שני זוגות פרמטרים שונים.

ההתפלגות הנורמלית דומה בצורתה להתפלגות בינומית עבור מספר רב של ניסויים והיא מתארת משתנים מקריים אשר נקבעים כסכום של מספר רב של גורמים שהנן בלתי תלויים בקירוב. דוגמאות למשתנים מקריים המתפלגים בקירוב נורמלית הנן :

(א) גובהו של אדם מקרי באוכלוסיה.

(ב) משך דקה בשעונים אנלוגים שונים

(ג) כמות הגשם במ"מ שירדה בשנה מסויימת

(ד) כמות הנפט שבאר נפט שואבת ביום מסויים

לפונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות נורמלית סטנדרטית אין נוסחא סגורה. על כן נקבעה ההגדרה הבאה.

הגדרה 9.19 (פונקציית התפלגות מצטברת של התפלגות נורמלית)**.**נסמן מעתה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי $X \sim N(0,1)$ ב-

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

אבחנה 9.20. [תכונות משתנה נורמלי] יהי $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אזי

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad F_X(t) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \qquad M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

וכן לכל $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\alpha X + \beta \sim N(\frac{\mu+\beta}{\alpha}, \alpha^2\sigma^2)$.

הוכחה. ראשית נציין כי מדובר בפונקציית צפיפות מוגדרת היטב, כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, עובדה אנליטית זו אינה מובנת מאליה והיא מכונה אינטגרל אוילר-פואסון. הוכחתה, החורגת מתחום העניין של קורס זה מובאת להלן בהערה. ראשית נוכיח שלמשתנה נורמלי סטנדרטי יש אומנם תוחלת 0 ושונות 1, כי העתקה ליניארית של מ"מ נורמלי היא נורמלית וכי אם $Y \sim N(0,1)$ ונגדיר $X = \sigma Y + \mu$ אז $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. הנוסחא לתוחלת משתנה כללי תנבע אז מליניאריות התוחלת (טענה 4.5), הנוסחא לשונות מתכונות השונות (טענה 5.3), והנוסחא לפונקציית התפלגות מצטברת – מהגדרה 9.19.

בכדי לוודא שהתוחלת מוגדרת היטב, נחשב ונקבל

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|Y|) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |s| e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s e^{-\frac{s^2}{2}} ds \qquad \begin{bmatrix} t = s^2/2 \\ dt = sds \end{bmatrix} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} dt = \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

כעת מכיוון שצפיפות Y היא פונקציה אי-זוגית, כלומר $f_Y(t) = f_Y(-t)$, נקבל כי $\min(Y,0) \overset{d}{=} -\max(Y,0)$. ולכן

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\min(Y,0)) + \mathbb{E}(\max(Y,0)) = 0.$$

בכדי להראות כי שונות Y היא 1, נחשב

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \begin{bmatrix} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} & g'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} xe^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1\end{aligned}$$

עוד ניווכח כי, לפי טענה 9.5,

$$f_{\alpha X+\beta}(y) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(\frac{x-\beta}{\alpha}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\beta-\mu)^2}{\alpha^2\sigma^2}}$$

ולכן צפיפות $\alpha X+\beta$ היא נורמלית. לסיום ההוכחה נחשב את $M_X(t)$.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{Xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx && \begin{bmatrix} s=(x-\mu)/\sigma \\ ds=\frac{1}{\sigma}dx \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma st}e^{\frac{-s^2}{2}}\,ds = \frac{e^{\mu t+\sigma^2t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}+\sigma ts-\frac{\sigma^2}{2}}\,ds \\ &= \frac{e^{\mu t+\sigma^2t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(s-\sigma t)^2}\,ds && \begin{bmatrix} u=s-\sigma t \\ du=ds \end{bmatrix} \\ &= e^{\mu t+\sigma^2t^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du = e^{\mu t+\sigma^2t^2/2}. \end{aligned}$$

■

הערה: החישוב $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$, מכונה האינטגרל הגאוסי או אינטגרל אוילר-פואסון. שיטת החישוב פותחה על ידי דה-מואבר, והחישוב עצמו חושב לראשונה על ידי לפלאס ב-1774 אך זכה להתפרסם ב-1809 על ידי גאוס שפיתח אותו באופן בלתי-תלוי. כאן נביא שיטה לחשב אינטגרל זה באמצעות העברת הבעיה למישור ושימוש בקואורדינטות קוטביות. נסמן $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$. אזי:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy && \begin{bmatrix} x=r\cos\theta, y=r\sin\theta \\ dx\,dy=r\,dr\,d\theta \end{bmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta && \begin{bmatrix} u=r^2, \\ du=2r\,dr \end{bmatrix} \\ &= 2\pi\cdot\int_0^{\infty} e^{-u}\frac{1}{2}du=\pi. \end{aligned}$$

9.2* התפלגות משותפת של מספר משתנים מקריים רציפים

הגדרה 9.21 (צפיפות משותפת של שני משתנים מקריים)**.** נאמר כי לשני משתנים מקריים X,Y מעל מרחב ההסתברות משותף $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ יש צפיפות משותפת אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $f_{X,Y}(x,y):\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ המקיימת לכל קבוצה מהטיפוס $A=(-\infty,a]\times(-\infty,b]$,

$$\mathbb{P}_{X,Y}(A)=\mathbb{P}\big(X\le a, Y\le b\big)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

הפונקציה $f_{X,Y}(x,y)$ נקראת **צפיפות משותפת** של X ו-Y.

את תפקידה של פונקציית ההתפלגות המצטברת עבור זוג משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת תמלא הפונקציה הבאה

$$F_{X,Y}(a,b)=\mathbb{P}\big(X\le a, Y\le b\big)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

נשים לב שאם נגזור לפי x ואז לפי y, נקבל כי הנגזרת
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$
שווה ל-$f_{X,Y}$ מלבד בקבוצה בעלת מידה אפס.

על מנת לחשב את הסתברותם של מאורעות המערבים את X ו-Y, יש צורך לחשב את האינטגרל של הצפיפות על התחום המתאים ב-$\mathbb{R}^2$. ניתן לעשות זאת באופן דומה להגדרת אינטגרל רימן על $\mathbb{R}$. אנו נסמן אינטגרל זה באופן הבא:
$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y)d(x,y).$$
ניתן לחשוב על אינטגרל זה בתור הנפח מתחת לפונקציה f ומעל התחום A. באופן כללי אנו נתעניין בפונקציות אינטגרביליות, על תחומים ב$\mathbb{R}^2$. כדי לחשב אינטגרל של פונקציה כזו, נשתמש בגרסא כללית של משפט פוביני 0.8.

דוגמא 9.22 (חישוב הסתברויות למשתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת)**.** נתונים משתנים מקריים X ו-Y בעלי צפיפות משותפת $f_{XY}(x,y) = (x+y)\mathbb{I}([0,1])(x)\mathbb{I}([0,1])(y)$. נחשב את הסתברות המאורע $\mathbb{P}(X \geq 1/2, Y \geq 1/2)$ ואת הסתברות המאורע $\mathbb{P}(X+Y \leq 1)$.

תשובה: ראשית נבחין שמדובר אומנם בפונקציית צפיפות, שכן
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d(x,y) = \iint_{[0,1]^2} (x+y)d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)dy\right)dx = \int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^1 (x+\frac{1}{2})dx = \frac{x^2+x}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} = 1.$$
נחשב לפי טענה 0.8,
$$\mathbb{P}(X \geq 1/2, Y \geq 1/2) = \iint_{[1/2,\infty)\times[1/2,\infty)} f(x,y)d(x,y) = \int_{1/2}^{\infty}\left(\int_{1/2}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy\right)dx$$
$$= \int_{1/2}^{1}\left(\int_{1/2}^{1}(x+y)dy\right)dx = \int_{1/2}^{1}(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_{y=1/2}^{y=1} dx$$
$$= \int_{1/2}^{1}(x+\frac{1}{2})-(\frac{x}{2}+\frac{1}{8})dx = \int_{1/2}^{1}\frac{x}{2}+\frac{3}{8}$$
$$= \frac{x^2}{4}+\frac{3x}{8}\Big|_{x=1/2}^{x=1} = (\frac{1}{4}+\frac{3}{8})-(\frac{1}{16}+\frac{3}{16}) = \frac{3}{8}.$$
אם נסמן ב-A את הקבוצה $\{(x,y)|0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\}$ הרי שבעזרת טענה 0.8 שוב נקבל
$$\mathbb{P}(X+Y \leq 1) = \iint_A (x+y)d(x,y) = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x+y)dy\right)dx = \int_0^1 (xy+\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx$$
$$= \int_0^1 (x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2})dx = \int_0^1 \frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}dx = \frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

אבחנה 9.23. יהיו X, Y משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ אז X ו-Y רציפים בהחלט ומתקיים כי
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$
הן צפיפויות של X ו-Y בהתאמה. התפלגויותיהם של X ו-Y נקראות **ההתפלגויות השוליות של X ו-Y**.

✎ **בעיה 9.4.** להוכיח את אבחנה 9.23.

דוגמא 9.24 (חישוב התפלגות שולית למשתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת)**.** נתונים משתנים מקריים X ו-Y בעלי צפיפות משותפת $f_{XY}(x,y) = (x+y)\mathbb{1}([0,1]^2)(x,y)$. חשב את התפלגות X.

תשובה: לפי אבחנה 9.23 עבור $0 \le x \le 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2}.$$

עבור ערכי x אחרים, $f_X(x) = 0$.

כעת נציג קריטריון טבעי לאי-תלות של משתנים רציפים בהחלט, מקביל לאבחנה 3.32.

אבחנה 9.25. יהיו X, Y משתנים מקריים רציפים בהחלט בעלי צפיפויות f_X ו-f_Y בהתאמה. אזי X ו-Y בלתי-תלויים אם ורק אם קיימת להם צפיפות משותפת המקיימת

$$f_{X,Y} = f_X f_Y.$$

הוכחה. בכיוון אחד נניח כי $f_{X,Y} = f_X f_Y$ ונקבל לפי הגדרה 9.21 כי לכל $A, B \subset \mathbb{R}$ מדידות

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int_A \int_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_A \int_B f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy \\ &= \int_A f_X(x)\,dx \int_B f_Y(y)\,dy = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)\end{aligned}$$

ולכן, לפי הגדרה 7.15, X ו-Y בלתי-תלויים. בכיוון השני נניח ש-X ו-Y בלתי-תלויים ונקבל לפי אותה משוואה עצמה כי הפונקציה $f_{X,Y} = f_X f_Y$ היא צפיפות משותפת שלהם. ■

דוגמא 9.26 (אי תלות של משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת)**.** נתונים משתנים מקריים X ו-Y בעלי צפיפות משותפת $f_{XY}(x,y) = (x+y)\mathbb{1}([0,1]^2)(x,y)$. האם X ו-Y בלתי תלויים?

תשובה: בדוגמא 9.24, חישבנו וקיבלנו כי צפיפות X היא $f_X(x) = \frac{2x+1}{2}\mathbb{1}([0,1])(x)$. בצורה דומה, צפיפות Y היא $f_Y(y) = \frac{2y+1}{2}\mathbb{1}([0,1])(y)$ לכן

$$f_{X,Y} = (x+y)\mathbb{1}([0,1]^2)(x,y) \neq (x+1/2)(y+1/2)\mathbb{1}([0,1]^2)(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

כעת ניתן לבדוק שהפונקציות $f_X(x)f_Y(y)$ ו-$f_{X,Y}$ אינן שוות בכל התחום $x, y < 1/8$, לכן לא יתכן ש-$f_X(x)f_Y(y)$ היא צפיפות משותפת של X ו-Y והמשתנים המקריים הללו תלויים לפי אבחנה 9.25.

דוגמא 9.27 (שימוש באי-תלות של משתנים מקריים)**.** נתונים משתנים מקריים X ו-Y בלתי תלויים המתפלגים מעריכית עם פרמטר 1. נחשב את התפלגות $Z = \min(X, Y)$.

תשובה: הצפיפות המשותפת של X ו-Y היא $f_{X,Y}(x,y)=e^{-x-y}$ עבור x ו-y אי שליליים ואפס אחרת.

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\mathbb{P}(Z\le z)=1-\mathbb{P}(Z>z)=1-\mathbb{P}(X>z,Y>z)=1-\mathbb{P}(X>z)\mathbb{P}(Y>z)\\&=1-\int_z^\infty e^{-x}dx\int_z^\infty e^{-y}dy=1-e^{-2z}.\end{aligned}$$

נגזור ונקבל

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=2e^{-2z}.$$

מכך נסיק כי התפלגות Z היא מעריכית עם פרמטר 2.

באופן כללי חישוב צפיפותו של משתנה המתואר כפונקציה רציפה של שני משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת עשויה להיות משימה מורכבת. ברצף הטענות הבא ננסה להמחיש כיצד לבצע זאת עבור סכום של משתנים.

טענה 9.28. [צפיפות משותפת של סכום] יהיו X ו-Y משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת ויהי סכומם $Z=X+Y$. אזי ל-X ו-Z צפיפות משותפת הנתונה על ידי

$$f_{X,Z}(x,z)=f_{X,Y}(x,z-x).$$

הוכחה.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\le a,Z\le b)&=\mathbb{P}(X\le a,X+Y\le b)\\&=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b-x}f_{X,Y}(x,y)dydx=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b}f_{X,Y}(x,z-x)dzdx\end{aligned}$$

כנדרש. ■

מטענה זו נוכל להסיק נוסחה לחישוב צפיפותו של סכום משתנים מקריים בלתי-תלויים המכלילה נוסחה מקבילה למשתנים הנתמכים על $\mathbb{Z}$ אשרפיתחנו בבעיה 3.14.

אבחנה 9.29. [נוסחת הקונבולוציה] יהיו X ו-Y משתנים רציפים בהחלט ובלתי-תלויים, אז המשתנה המקרי $Z=X+Y$ הנו רציף בהחלט וצפיפותו היא

$$f_Z(z)=\int_{x\in\mathbb{R}}f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

הוכחה. לפי טענה 9.28 הצפיפות המשותפת של X ו-Z שווה ל-

$$f_{X,Z}(x,z)=f_{X,Y}(x,z-x)=f_X(x)f_Y(z-x).$$

לכן הצפיפות השולית של Z היא

$$f_Z(z)=\int_{x\in\mathbb{R}}f_X(x)f_Y(z-x)dx,$$

כנדרש. ■

דוגמא 9.30 (סכום משתנים מקריים מעריכיים)**.** נתונים משתנים X ו-Y בלתי תלויים המתפלגים מעריכית עם פרמטר 1. נחשב את התפלגותו של $Z = X + Y$.

תשובה: נחשב לפי אבחנה 9.40 עבור $z \geq 0$,

$$f_Z(z) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^z e^{-x} e^{x-z} dx = \int_0^z e^{-z} dx = z e^{-z}.$$

ועבור $z \leq 0$ הצפיפות מתאפסת.

כפי שציינו וכפי שנראה בפרק הבא, ההתפלגות הנורמלית מתקבלת לעיתים קרובות כגבול מנורמל של סכום של משתנים מקריים ב"ת. צעד ראשון בדרך לאבחנה זו הוא שימור ההתפלגות הנורמלית תחת סכום, עובדה שנוכיח כעת באמצעות נוסחת הקונבולוציה.

טענה 9.31. [סכום נורמלים הוא נורמלי] יהי X ו-Y משתנים מקריים נורמלים בלתי תלויים בעלי תוחלות μ_X, μ_Y ושונויות σ_X, σ_Y, אזי $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

הוכחה. יהיו $Z_0, Z_1 \sim N(0,1)$ בלתי-תלויים. מאבחנה 9.19 אנו למדים כי

$$(X, Y) \overset{d}{=} (\mu_X + \sigma_X Z_0, \mu_Y + \sigma_Y Z_1).$$

להוכחת הטענה נראה כי $\frac{Z_0+Z_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ ונסיק מתכונות התוחלת והשונות (טענות 9.10 ו-5.3) את נכונות הטענה.

כעת נחשב לפי נוסחת הקונבולוציה (אבחנה 9.29),

$$\begin{aligned}
f_{Z_0+Z_1}(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(z-x)^2 + x^2}{2}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xz + z^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{z^2/4} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(x - \frac{z}{2}\right)^2\right) dx \qquad \begin{bmatrix} \frac{t}{\sqrt{2}} & = & x - \frac{z}{2} \\ \frac{dt}{\sqrt{2}} & = & dx \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{z^2/4} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{z^2/4}
\end{aligned}$$

נשתמש בטענה 9.5 ונקבל

$$f_{\frac{Z_0+Z_1}{\sqrt{2}}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2},$$

כנדרש. ■

את הנוסחא לתוחלת של פונקציה של מ"מ (טענה 9.9) נוכל להכליל גם עבור פונקציה של מספר משתנים.

טענה 9.32 (תוחלת של פונקציה של וקטור מקרי)**.** יהיו X, Y משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ ותהי $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה.

אז $Z = g(X, Y)$ הוא משתנה מקרי המקיים

$$\mathbb{E}(Z) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) d(x, y)$$

אם ורק אם האינטגרל מתכנס.

טענה זו תאפשר לנו לחשב את השונות המשותפת של שני משתנים מקריים.

9.3* צפיפות מותנית

נשווה בנפשנו את תיאור הניסוי הבא בגרסא בדידה ובגרסא רציפה:

גרסא בדידה: מספר השנים עד לשריפת יער בקליפורניה מתפלג גיאומטרית עם סיכוי הצלחה של $1/2$. נסמן משתנה זה ב-X'. משעה שמתחוללת השריפה, היא נמשכת פרק זמן של Y' שעות אשר מתפלג בינומית עם $2X$ נסיונות וסיכוי הצלחה $1/2$. חשב את התפלגות משך השריפה.

גרסא רציפה: הזמן בשנים עד לשריפת יער בקליפורניה מתפלג מעריכית עם פרמטר $1/2$. נסמן משתנה זה ב-X. משעה שמתחוללת השריפה, היא נמשכת פרק זמן של Y שעות שמתפלג נורמלית עם תוחלת של X וסטיית תקן של $X/4$. חשב את התפלגות משך השריפה.

קל לראות שהשאלות הללו דומות מאוד וההבדל העיקרי ביניהן הוא ההבדל בין התייחסות לזמן כמשתנה רציף או כמשתנה הנמדד ביחידות בדידות. במענה לשאלה הנוגעת לניסוי בגרסתו הבדידה – איננו נתקלים בכל קושי במענה לשאלה כזו באמצעות נוסחאת ההסתברות השלמה. נוכל לרשום

$$\mathbb{P}(Y = a) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = a \mid X = x).$$

ואולם, את הניסוי השני איננו יכולים לתאר בכלים אלא, מפני שהמאורע $X = x$ הנו מאורע בעל הסתברות 0 לכל x ולכן לא ניתן להתנות בו. לבעיה זו יש פתרון בדמות מושג ה**צפיפות מותנית**.

9.3.1 צפיפות מותנית

הגדרה 9.33 (צפיפות מותנית)**.** יהיו X, Y מ"מ רציפים בהחלט בעלי התפלגות משותפת. נסמן את **הצפיפות של X בהינתן Y** על ידי

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

עבור כל $y \in \mathbb{R}$ בו $f_Y(y)$ רציפה אשר מקיים $f_Y(y) \neq 0$.

מהגדרה זו ניתן לראות כי כל פונקציית צפיפות מותנית מגדירה התפלגות משותפת.

דוגמא 9.34 (צפיפות מותנית)**.** נתון (X,Y) וקטור מקרי רציף בהחלט בעל צפיפות

$$f_{X,Y}(x,y) = (x+y)\mathbb{1}([0,1]^2)(x,y).$$

מה הצפיפות המותנית של X בהנתן Y?

תשובה: חישבנו וקיבלנו כי צפיפות Y היא $f_Y(y) = \frac{2y+1}{2}\mathbb{1}([0,1])(y)$. לפי הגדרה, הצפיפות המותנית של X בהנתן Y היא

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2(x+y)}{2y+1}$$

עבור $0 \leq y \leq 1$. עבור ערכים אחרים של y הצפיפות המותנית אינה מוגדרת.

טענה 9.35. [הגדרת צפיפות משותפת באמצעות צפיפות מותנית] תהי $g(x,y) : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ פונקציה אי-שלילית, אינטגרבילית המקיימת לכל $y \in \mathbb{R}$ את התכונה $\int_{x\in\mathbb{R}} g(x,y)dx = 1$ ותהי $\mathcal{D}$ התפלגות רציפה בהחלט בעלת צפיפות f. אזי קיימים X ו-Y כך ש-$Y \sim \mathcal{D}$ ול-X ול-Y' צפיפות משותפת המקיימת

$$f_{X|Y=y}(x) = g(x,y)$$

הוכחה. נסתכל על הצפיפות

$$f_{X,Y} = f(y)g(x,y)$$

נשים לב כי

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} g(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy = 1.$$

ולכן לפי טענה **??** זו צפיפות משותפת של זוג משתנים מקריים. כעת לפי חישוב התפלגות שולית

$$f'_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y'}(x,y)dx = f(y)\int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx = f(y).$$

ולפי הגדרת צפיפות מותנית

$$f_{X|Y'=y}(x) = \frac{f_{X,Y'}(x,y)}{f_{Y'}(y)} = \frac{f(y)g(x,y)}{f_{Y'}(y)} = g(x,y).$$

■

דוגמא 9.36 (צפיפות מותנית)**.** יהי X משתנה מקרי המתפלג אחיד בקטע $[0,1]$. יהי Y משתנה מקרי שבהנתן ש-$X = x$ מתפלג אחיד בקטע $[0,x]$. חשב את הצפיפות המשותפת של X ו-Y.

תשובה: הצפיפות המותנית של Y בהנתן X היא

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x}\mathbb{1}([0,x])(y).$$

לכן הצפיפות המשותפת של X ו-Y היא

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}(\{(x,y) \ : \ 0 \le y \le x \le 1\})(x,y).$$

באמצעות הצפיפות המותנית נוכל להכליל את נוסחת ההסתברות השלמה (טענה 2.7) ואת כלל בייס (טענה 2.11).

טענה 9.37. [נוסחת הסתברות שלמה רציפה] לכל X, Y בעלי צפיפות משותפת מתקיים

$$f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f_Y(y)f_{X|Y=y}(x)dy$$

כאשר נפרש את הביטוי באינטגרל כשווה לאפס אם $f_Y(y) = 0$.

הוכחה. נרשום את הנוסחא ל-$f_X(x)$ כהתפלגות שולית ונציב את הגדרת הצפיפות המותנית

$$f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{y\in\mathbb{R}} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y)dy = \int_{y\in\mathbb{R}} f_Y(y)f_{X|Y=y}(x)dy$$

■

דוגמא 9.38 (צפיפות מותנית). יהי X משתנה מקרי המתפלג אחיד בקטע $[0,1]$. יהי Y משתנה מקרי שבהנתן ש-$X = x$ מתפלג אחיד בקטע $[0,x]$. חשב את הצפיפות של Y.

תשובה: לפי טענה 9.37 נקבל כי לכל $0 < y \le 1$

$$f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_X(x)f_{Y|X=x}(y)dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\mathbb{1}([0,x])(y)dx = \int_y^1 \frac{1}{x}dx = \log(x)\Big|_{x=y}^{x=1} = -\log(y).$$

אבחנה 9.39. [כלל בייס רציף] לכל X, Y בעלי צפיפות משותפת מתקיים

$$f_{X|Y=y}(x)f_Y(y) = f_{Y|X=x}(y)f_X(x)$$

כאשר נתייחס לאגף שאינו מוגדר מפאת אי קיומה של צפיפות מותנית כשווה ל-0.

כפי שעשינו עבור משתנים מקריים בדידים, נוכל לרשום קריטריון לאי-תלות בשפה של צפיפות מותנית.

אבחנה 9.40. [תנאי לאי-תלות] מ"מ X ו-Y רציפים בהחלט הנם בלתי תלויים אם ורק אם

$$f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$$

לכל y עבורו $f_Y(y) \neq 0$.

הוכחה. העובדה ש-X ו-Y ב"ת שקולה, לפי טענה 9.25, לקיום פונקציית צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = f_{X|Y=y}(x)f_Y(y)$$

נצמצם ונקבל $f_X(x) = f_{X|Y=y}(x)$ כנדרש. ■

בעיות הרחבה והעשרה

✎ **בעיה 9.5.** יהי Y משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר λ, כיצד מתפלג $\lfloor Y \rfloor$?

✎ **בעיה 9.6.** יהיו X, Y נורמלים סטנדרטים בלתי-תלויים. יש להוכיח כי $\sqrt{X^2+Y^2} \sim \exp(1)$.

✎ **בעיה 9.7.** יהיו $X, Y \sim \exp(1)$ משתנים מקריים מעריכיים ויהי Z משתנה אחיד על $[0,1]$ יש להוכיח כי $Z(X+Y)\overset{\mathrm{d}}{X}$.

✎ **בעיה 9.8.** יהיו $X, Y, Z \sim \mathrm{Unif}([0,1])$ משתנים מקריים אחידים בלתי-תלויים. יש להוכיח כי $(XY)^Z \sim \mathrm{Unif}([0,1])$

✎ **בעיה 9.9 (*).** יהי Z משתנה מקרי פואסוני סטנדרטי (כלומר עם $\lambda = 1$), יהיו $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים מקריים אחידים על $[0,1]$, בלתי תלויים ב-Z וזה בזה ויהי W משתנה מעריכי סטנדרטי מותנה במאורע $W \le 1$. הוכח כי $W \overset{d}{=} \min(X_1, \ldots, X_Z)$.