שרשרות מרקוב

בהנתן פילטרציה $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n | n \geq 0\}$, נאמר כי $\{X_n | n \geq 0\}$ הוא שרשרת מרקוב אם מתקיימים התנאים הבאים.

1. קיים $\mathfrak{X}$ קבוצה סופית או בת מניה שנקראת "מרחב המצבים" כך ש-$P(X_n \in \mathfrak{X}) = 1$ לכל $n \geq 0$.
2. $X_n \in \mathcal{F}_n$ לכל $n \geq 0$.
3. $P(X_{n+1} = j | \mathcal{F}_n) = P(X_{n+1} = j | X_n)$ כאשר אנו מגדירים הסתברות מותנה באופן הבא

$$\begin{aligned} P(A|\mathcal{G}) &\equiv E(1_A|\mathcal{G}) \\ P(A|X) &\equiv P(A|\sigma(X)) \end{aligned}$$

זאת אומרת שבהנתן ההסטוריה $\mathcal{F}_n$ מספיק לנו לדעת מהו המצב שאנו נמצאים בו היום כדי להעריך מה יקרה מחר. מעכשיו כשנכתוב $\sum_j$ נתכוון ל-$\sum_{j \in \mathfrak{X}}$.

נזכור כי $Y \in \sigma(X)$ אם ורק אם קיימת פונצקית בורל g כך ש-$Y = g(X)$ ולכן קיימת פונצקית בורל של X_n שנסמנה ב-$p_{X_n j}(n)$ עבורה

$$P(X_{n+1} = j | \mathcal{F}_n) = p_{X_n j}(n)$$

מכיוון ש-$1_{\{X_{n+1}=j\}} \geq 0$ אז התוחלת המותנה היא אי שלילית בהסתברות אחת ולכן

$$p_{X_n j}(n) \overset{1}{\geq} 0$$

כמו כן $\sum_j 1_{\{X_n=j\}} = 1_{\{X_n \in \mathfrak{X}\}} = 1$ בהסתברות אחת ולכן מתקיים בהסתברות אחת כי

$$1 \overset{1}{=} E\left(\sum_j 1_{\{X_{n+1}=j\}} | \mathcal{F}_n\right) \overset{1}{=} \sum_j E\left(1_{\{X_{n+1}=j\}} | \mathcal{F}_n\right) \overset{1}{=} \sum_j p_{X_n j}(n)$$

מכאן שאם ניקח

$$\begin{aligned} A_n &= \{X_n \in \mathfrak{X}\} \bigcap \left(\bigcap_j \{p_{X_n j}(n) \geq 0\}\right) \bigcap \left\{\sum_j p_{X_n j}(n) = 1\right\} \\ A &= \bigcap_{n \geq 0} A_n \end{aligned}$$

נקבל כי $P(A) = 1$ כי חיתוך של מאורעות בעלי הסתברות 1 הוא מאורע בעל הסתברות 1. נסמן

$$X_n(A) = \{X_n(\omega) | \omega \in A\}$$

ונקבל כי אם $i \in X_n(A)$ אז קיים $\omega \in A$ עבורו $X_n(\omega) = i$ ולכן

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &\geq 0 \\ \sum_j p_{ij}(n) &= 1 \end{aligned}$$

אם $i \notin X_n(A)$ אז אפשר להגדיר את $p_{ij}(n)$ באופן שרירותי שיקיים את שתי התכונות הללו בלי לקלקל את ההנחות על שרשרות מרקוב. זאת מכיוון שהסיכוי שנקבל ω שאינו ב-A הוא אפס.

אם כן המסקנה היא שתכונת המרקוביות בעצם שקולה לכך שלכל $n \geq 0$ קיימת מטריצה $P(n) = (p_{ij}(n))$ כך ש-

$$P\left\{X_{n+1} = j|\mathcal{F}_n\right\} \stackrel{1}{=} \sum_i p_{ij}(n) 1_{\{X_n = i\}}$$

נסמן

$$\pi_i = P\left(X_0 = i\right)$$

ואז

$$\sum_i \pi_i = P\left(X_0 \in \mathfrak{X}\right) = 1$$

עכשיו, נשים לב כי מכיוון ש-$\prod_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k = i_k\}} \in \mathcal{F}_{n-1}$ ומכיוון ש-$1_{\{X_{n-1}=i_{n-1}\}} 1_{\{X_{n-1}=i\}} = 0$ לכל $i \neq i_{n-1}$ נקבל

$$\begin{aligned}
P\left(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right) &= E\left(\prod_{k=0}^{n} 1_{\{X_k = i_k\}}\right) = EE\left(\prod_{k=0}^{n} 1_{\{X_k = i_k\}} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) \\
&= E\left(\prod_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k = i_k\}} E\left(1_{\{X_n = i_n\}} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) \\
&= E\left(\prod_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k = i_k\}} \left(\sum_i p_{ii_n}(n-1) 1_{\{X_{n-1} = i\}}\right)\right) \\
&= E\left(\left(\prod_{k=0}^{n-2} 1_{\{X_k = i_k\}}\right) 1_{\{X_{n-1} = i_{n-1}\}} \left(\sum_i p_{ii_n}(n-1) 1_{\{X_{n-1} = i\}}\right)\right) \\
&= E\left(\prod_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k = i_k\}} p_{i_{n-1} i_n}(n-1)\right) \\
&= P\left(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) p_{i_{n-1} i_n}(n-1)
\end{aligned}$$

ולכן באינדוקציה נובע כי

$$P\left(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right) = \pi_{i_0} p_{i_0 i_1}(1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(n-1)$$

בדיוק באותו אופן נובע גם כי

$$P\left(X_{n+1} = i_{n+1}, \ldots, = X_{n+k} = i_{n+k} | \mathcal{F}_n\right) \stackrel{1}{=} p_{X_n i_{n+1}}(n) p_{i_{n+1} i_{n+2}}(n+1) \cdots p_{i_{n+k-1}, i_{n+k}}(n+k-1)$$

בפרט מכיוון שצד ימין הוא פונקציה של X_n אז נובע כי

$$P\left(X_{n+1} = i_{n+1}, \ldots, = X_{n+k} = i_{n+k} | \mathcal{F}_n\right) \stackrel{1}{=} P\left(X_{n+1} = i_{n+1}, \ldots, = X_{n+k} = i_{n+k} | X_n\right)$$

זאת מכיוון שבאופן כללי אם $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ ו-$E\left(X|\mathcal{G}_2\right) \in \mathcal{G}_1$ אז בהכרח

$$E\left(X|\mathcal{G}_1\right) \stackrel{1}{=} E\left(X|\mathcal{G}_2\right)$$

מכיוון שלכל $A \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ מתקיים כי $E\left(X|\mathcal{G}_2\right) \in \mathcal{G}_1$ וגם

$$EE\left(X|\mathcal{G}_2\right)1_A = EX1_A$$

במקרה שלנו $\mathcal{G}_1 = \sigma\left(X_n\right)$ ו-$\mathcal{G}_2 = \mathcal{F}_n$.

אם נסכם על פני $(i_{n+1},\ldots,i_{n+k})$ על פני קבוצה מסויימת נקבל כי לכל $B \in \sigma\left(X_{n+1},\ldots,X_{n+k}\right)$ מתקיים כי

$$P\left(B|\mathcal{F}_n\right) = P\left(B|X_n\right)$$

ולכן אם ניקח $A \in \sigma\left(X_0,\ldots,X_{n-1}\right)$ נקבל מכיוון ש-$A \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$

$$P\left(A \cap B|\mathcal{F}_n\right) = 1_A P\left(B|\mathcal{F}_n\right) = 1_A P\left(B|X_n\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned} P\left(A \cap B|X_n\right) &= E\left(P\left(A \cap B|\mathcal{F}_n\right)|X_n\right) = E\left(1_A P\left(B|X_n\right)|X_n\right) \\ &= E\left(1_A|X_n\right) P\left(B|X_n\right) = P\left(A|X_n\right) P\left(B|X_n\right) \end{aligned}$$

כלומר, בהנתן ההווה, עבר ועתיד בלתי תלויים. אפשר להכליל תוצאה זו לכל $A \in \sigma\left(X_{n+1},X_{n+2},\ldots\right)$ ולא רק לעתיד ממימד סופי. כמו כן, כל מה שעשינו הוא אם ורק אם ולכן הגדרה שקולה של שרשרת מרקוב היא גם ההגדרה הזאת. לכן אם $X_0,\ldots,X_n$ היא שרשרת מרקוב (קדימה בזמן) אז גם $X_n,X_{n-1},\ldots,X_0$ היא שרשרת מרקוב. אפשר להראות זאת גם באופן ישיר יותר.

עכשיו אם נסתכל על

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+2}=j|\mathcal{F}_n\right) &\stackrel{1}{=} P\left(X_{n+2}=j|X_n\right) \stackrel{1}{=} \sum_k P\left(X_{n+2}=j,X_{n+1}=k|X_n\right) \\ &\stackrel{1}{=} \sum_k p_{X_nk}(n)p_{kj}(n+1) = \sum_i \left(\sum_k p_{ik}(n)p_{kj}(n+1\right) 1_{\{X_n=i\}} \end{aligned}$$

ולכן אם נסתכל על מכפלת המטריצות $P(n)P(n+1)$ אז האיבר ה-ij מיצג את הסיכוי לעבור מ-i (בזמן n) ל-j בשני צעדים. באותו אופן כדי לחשב את הסיכוי שנעבור מ-i בזמן n ל-j בזמן $n+\ell$ נתון על ידי האיבר ה-ij של המטריצה

$$P(n)P(n+1)\cdots P(n+\ell-1)$$

שימו לב כי המטריצות יכולות להיות כאן אינסופיות אך זה אינו ממש משנה את הרעיון המרכזי.

שרשרת מרקוב נקראת "הומוגנית בזמן" אם ניתן לבחורת את המטריצות שלא תהיינה תלויות ב-n דהיינו קיימת מטריצה $P=(p_{ij})$ (יתכן וממימד אינסופי) המקיימת

מעבר מכיתה לכיתה ללא תלות בזמן

$$\begin{aligned} p_{ij} &\geq 0\,\forall i,j \\ \sum_j p_{ij} &= 1\,\forall i \end{aligned}$$

(b) מתקיים כי $p_{ij}^n = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} p_{i,i_1} \cdot \ldots\ldots \cdot p_{i_{n-1},j}$ הדרך להגיע מ-$i \to j$ ב-n צעדים עוברת דרך זה שעברתי $i \to i_1 \to i_2 \to \ldots i_{n-1} \to j$!

נסמן ב-$P_i(\cdot)$ את ההסתברות שמתקבלת כאשר בהסתברות אחת מתחילים את השרשרת במצב i.
אז

$$P_i\left(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j\right) = p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}$$

ואז אם נסכם על $i_1, \ldots, i_{n-1}$ נקבל כי

$$P_i\left(X_n = j\right) = p_{ij}^n$$

כאשר p_{ij}^n מסמן את האיבר ה-ij של המטריצה P^n המתקבלת מ-P על ידי מכפלה מטריצות.
בפרט, מכיוון ש-

$$P^{n+m} = P^n P^m$$

אז

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_k p_{ik}^n p_{kj}^m$$

שימו לב כי מכך נובע גם כי

$$p_{ij}^{n+m} \geq p_{ik}^n p_{kj}^m$$

ובאופן דומה

$$p_{ij}^{n_1 + \ldots + n_\ell} \geq p_{ii_1}^{n_1} p_{i_1 i_2}^{n_2} \cdots p_{i_{\ell-1} j}^{n_\ell}$$

לכל $\ell \geq 2$ ו-$i, i_1, \ldots, i_{\ell-1}, j$.
נגדיר $P^0 = I$, דהיינו $p_{ii}^0 = 1$ לכל i ו-$p_{ij}^0 = 0$ לכל $j \neq i$. זאת גם מכיוון שאנו רוצים כי $P^0 P^n = P^n P^0 = P^n$ וגם מכיוון ש-

$$P_i\left(X_0 = j\right) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

אנו נאמר כי j נגיש מ-i ונסמן $i \to j$ אם קיים $n \geq 0$ כך ש-$p_{ij}^n > 0$.
בפרט, $i \to i$ לכל i מכיוון ש-$p_{ii}^0 = 1 > 0$. כמו כן, נשים לב כי אם $i \to k \to j$ אז קיים n כך ש-$p_{ik}^n > 0$ וקיים m כך ש-$p_{kj}^m > 0$ ואז מקבלים כי

$$p_{ij}^{n+m} \geq p_{ik}^n p_{kj}^m > 0$$

ולכן גם $i \to j$.
מכיוון ש-

$$p_{ij}^n = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} p_{ii_1} \cdots p_{i_{n-1} j}$$

אז צד שמאל חיובי אם ורק אם קיימים $i_1, \ldots, i_{n-1}$ כך ש-$p_{ii_1}, p_{i_1 i_2}, \ldots, p_{i_{n-1} j}$ כולם חיוביים
ולכן $i \to j$ אם ורק אם $j = i$ או שקיים מסלול של מצבים שמתחיל ב-i ונגמר ב-j ולאורכו

כל הסתברויות המעברים חיוביות. זה שקול לכך שנבנה גרף עם נקודות שמייצגות את המצבים השונים. יש קשת מכוונת מ-i ל-j אם $p_{ij} > 0$ (באותו אופן יש קשת בכיוון ההפוך אם $p_{ji} > 0$ אבל יכול גם להיות כי $p_{ij} > 0$ ו-$p_{ji} = 0$. אז כאשר $i \neq j$ אז $i \to j$ אם ורק אם יש מסלול מכוון לאורך הגרף שמתחיל ב-i ונגמר ב-j. אם יש שני מצבים לאורך המסלול ששווים אחד לשני, אז אפשר למחוק את כל המסלול שמחבר ביניהם ולקבל מסלול קצר יותר. למשל אם

$$p_{13}p_{35}p_{52}p_{24}p_{45}p_{57} > 0$$

אז אפשר לזרוק את $p_{52}p_{24}p_{45}$ ולהישאר עם המסלול

$$p_{13}p_{35}p_{57}$$

שהוא מסלול קצר יותר. לכל מסלול אפשר לעשות את זה ולקבל באופן כזה מסלול שבו כל האיברים שונים זה מזה. מכאן נובע כי אם אוסף המצבים הוא סופי ויש K מצבים, אז אם קיים מסלול בין i ל-j ו-$i \neq j$ אז מספר הקשתות שמשתתפות במסלול כזה הוא לכל היותר $K-1$ ולכן אם $i \to j$ אז קיים $1 \leq n \leq K-1$ כך ש-$p_{ij}^{n} > 0$.

כדי למצוא את כל המצבים שנגישים מ-i בשרשרת מרקוב עם מספר סופי של מצבים, נבצע את האלגוריתם הבא:

1. $A = B = \{i\}$ (איתחול).
2. $B = \bigcup_{j \in B} \{k | \, k \notin A, \, p_{jk} > 0\}$.
3. אם $B \neq \emptyset$ הציבו $A = A \cup B$ וחזרו ל-2. אחרת המשיכו.
4. עצרו, A הוא אוסף המצבים המבוקש.

באותו אופן אפשר למצוא את כל המצבים ש-j נגיש מהם. פשוט משתמשים באותו אלגוריתם בדיוק רק שבמקום p_{jk} בשלב 2 כותבים p_{kj}. מכאן שיש לנו דרך פשוטה למצוא את $\{j | i \to j\}$ וכן את $\{j | j \to i\}$.

נאמר כי i, j מתקשרים ונסמן $j \leftrightarrow i$ אם $i \to j$ וגם $j \to i$. דהיינו אם קיימים n, m כך ש-$p_{ij}^{n} > 0$ ו-$p_{ji}^{m} > 0$. זה שקול לכך שיש מסלול של מצבים שמתחיל ב-i ונגמר ב-j ומסלול שמתחיל ב-j ונגמר ב-i כאשר ההסתברויות לאורך כל אחד מהמסלולים הללו הן חיוביות.

יחס הקשירות מקיימת את התכונות הבאות:

- רפלקסיביות: $i \leftrightarrow i$.
- סימטריות: $j \leftrightarrow i$ אם ורק אם $i \leftrightarrow j$.
- טרנזיטיביות: $k \leftrightarrow i$ וגם $j \leftrightarrow k$ גורר כי $i \leftrightarrow j$.

יחס כזה נקרא "יחס שקילות". אם ניקח

$$A_i = \{k | i \leftrightarrow k\}$$

אז $j \leftrightarrow i$ אם ורק אם $A_i = A_j$ ו-$j \not\leftrightarrow i$ אם ורק אם $A_i \cap A_j = \emptyset$. זאת מכיוון שאם $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ אז קיים k כך ש-$k \leftrightarrow i$ וגם $k \leftrightarrow j$. מהסימטריות נובע כי $j \leftrightarrow k$ ומהטרנזיטיביות נובע כי $j \leftrightarrow i$ ולכן כל מצב שמתקשר עם i מתקשר עם j ולהיפך, כלומר, $A_i = A_j$. אם $A_i \cap A_j = \emptyset$ אז בפרט לא יתכן כי $j \leftrightarrow i$ כי אז i, j נמצאים שניהם ב-A_i וגם ב-A_j. מכאן שאוסף המצבים מתחלק למחלקות שקילות באופן כזה שבכל מחלקה כל שני מצבים מתקשרים ושני מצבים ממחלקות שונות אינם מתקשרים.

כאשר קיימת רק מחלקה אחת (ואז היא בהכרח סגורה), כלומר כל מצב מתקשר עם כל מצב אחר, אנו נאמר כי השרשרת "בלתי פריקה". באנגלית: irreducible.

נקרא למחלקה C "סגורה" אם לכל $i \in C$ מתקיים כי

$$\sum_{j\in C} p_{ij} = 1$$

לכן אם נכנסים למחלקה סגורה (או מתחילים ממנה) אז לא ניתן לצאת יותר אף פעם כי יש מעברים רק בתוך המחלקה. מחלקה שאינה סגורה נקראת "פתוחה". ממחלקה פתוחה אחת אפשר לעבור למחלקה פתוחה או סגורה אחרת אך אי אפשר לחזור. לכן בכל שרשרת מרקוב עם מרחב מצבים בדיד אפשר לסדר את המצבים מחדש (ואת מטריצת המעברים בהתאם) כך שהמחלקות הסגורות יתחילו בהתחלה ולאחר מכאן באופן מדורג מחלקות פתוחות (עם יש) כך שממחלקה פתוחה אחת אי אפשר לעבור למחלקה פתוחה שמופיעה אחריה.

דוגמה: נניח כי המצבים הם $1, 2, 3$ ומטריצת המעברים היא

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

מתברר כי במקרה זה $\{3\}$, $\{2\}$, $\{1\}$ הן מחלקות הקשירות השונות וסדור מחדש של המטריצה נותן

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

שימו לב כי אפשר לעבור מ-$\{1\}$ל-$\{2\}$ אך לא חזרה, כמו כן אפשר לעבור מ-$\{2\}$ ל-$\{3\}$ אך לא חזרה. לכן שתי המחלקות $\{1\}$ ו-$\{2\}$ הן פתוחות. המחלקה $\{3\}$ סגורה.

אם $p_{ii} = 1$ אז i נקרא מצב "סופג" והמחלקה שהוא שייך אליה חייבת להיות $\{i\}$ והיא בהכרח מחלקה סגורה.

הגדרה:

המחלק המשותף המירבי gcd של אוסף של מספרים שלמים הוא המספר הגדול ביותר שמחלק את כולם ללא שארית. למשל $6, 12, 48$ מתחלקים ללא שארית במספרים $1, 2, 3, 6$. המספר הגדול ביותר מבין הארבעה האחרונים הוא 6 ולכן זהו המחלק המשותף המירבי. דהיינו

$$\gcd(6, 12, 48) = 6$$

נסתכל על $n, n+1$ אם d מחלק את שניהם ללא שארית אז הוא גם מחלק את ההפרש ביניהם ללא שארית. מכיוון שההפרש הוא 1 והמחלק המשותף המירבי של כל אוסף מספרים לא יכול להיות קטן מאחד (כי אחד מחלק כל מספר שלם ללא שארית) נובע כי המספר היחיד שיכול לחלק את 1 הוא 1 ולכן בהכרח $d = 1$. מכאן שלכל n

$$\gcd(n, n+1) = 1$$

נשים לב כי אם $a_1, \ldots, a_n$ הוא אוסף מספרים שלמים, אז כל מספר שמחלק אותם בפרט גם מחלק את $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ולכן הוא קטן או שווה מהמספר הגדול ביותר שמחלק את $a_1, \ldots, a_{n-1}$. לכן

$$\gcd(a_1, \ldots, a_{n-1}) \geq \gcd(a_1, \ldots, a_n)$$

לכן כם מתקיים כי

$$a_1 = \gcd(a_1) \geq \gcd(a_1, a_2) \geq \ldots \geq \gcd(a_1, \ldots, a_{n-1}) \geq \gcd(a_1, \ldots, a_n)$$

אם יש לנו אינסוף מספרים אז מספר הפעמים שיכול להיות אי שוויון ממש הוא לכל היותר $a_1 - 1$ מכיוון שכל gcd חסום מלמטה על ידי 1. מכאן שלכל סדרה אינסופית של מספרים שלמים יהיה קיים n עבורו

$$\gcd(a_1, a_2, \ldots) = \gcd(a_1, \ldots, a_n)$$

שימו לב כי כל מספר שלם חיובי מחלק את המספר 0 ולכן אפשר להגדיר $\gcd(0) = \infty$ אך לפעמים מגדירים $\gcd(0) = 0$. למעשה אפשר לקחת כל דבר שאינו מספר חיובי וסופי כהגדרה של $\gcd(0)$. אם חלק מה-a_i הם אפס אז אפשר לזרוק אותם ולהשאיר רק את המספרים שאינם אפס לצורך חישוב ה-gcd.

לבסוף נשים לב כי המחלק המשותף המירבי קטן או שווה מהמספר החיובי הקטן ביותר שנמצא באוסף המספרים. זאת מכיוון שאם נחלק מספר חיובי מסויים במספר שגדול ממש ממנו נקבל שהמנה קטנה מאחד וגדולה מאפס ולכן לא יכולה להיות מספר שלם.

המחזור של מצב i מוגדר באופן הבא

$$d_i = \gcd\left(n \middle| p_{ii}^n > 0\right)$$

אם $p_{ii}^n = 0$ לכל $n \geq 1$ אז נסמן $d_i = \infty$ (או כל סימון אחר שמתחשק לנו חוץ מאחד מהמספרים השלמים החיוביים והסופיים).

טענה:

מחזור היא תכונה מחלקתית. דהיינו אם $j \leftrightarrow i$ אז $d_i = d_j$.

הוכחה:

אם $i = j$ אז אין מה להוכיח לכן נניח כי $i \neq j$. נניח כי n, m הם כך ש-$p_{ij}^n > 0$ ו-$p_{ji}^m > 0$ אז

$$\begin{aligned} p_{ii}^{n+m} &\geq p_{ij}^n p_{ji}^m > 0 \\ p_{jj}^{n+m} &\geq p_{ji}^m p_{ij}^n > 0 \end{aligned}$$

ולכן לא יתכן כי $p_{ii}^n = 0$ או $p_{jj}^n = 0$ לכל $n \geq 1$ ומכאן ש-d_i, d_j סופיים. עכשיו, נניח כי $p_{ii}^k > 0$. אז

$$\begin{aligned} p_{jj}^{n+2k+m} &= p_{ji}^m p_{ii}^k p_{ii}^k p_{ij}^n > 0 \\ p_{jj}^{n+k+m} &= p_{ji}^m p_{ii}^k p_{ij}^n > 0 \end{aligned}$$

לכן $n + 2k + m$ וגם $n + k + m$ מתחלקים ב-d_j ללא שארית. זאת מכיוון ש-d_j מחלק כל n עבורו $p_{jj}^n > 0$. הוא בעצם הגדול ביותר שיש לו את התכונה הזאת. לכן גם

$$k = (n + 2k + m) - (n + k + m)$$

מתחלק ב-d_j ללא שארית (d_j מחלק את k). מכאן ש-d_j מחלק את k לכל k עבורו $p_{ii}^k > 0$. מכיוון ש-d_i הוא המספר השלם הגדול ביותר שמקיים זאת נובע כי

$$d_j \leq d_i$$

באופן זהה, רק שמחליפים בין i ו-j וכן n ו-m נובע גם כי

$$d_j \geq d_i$$

ולכן מתקיים שוויון.

דוגמה

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ \frac{1}{2} & & & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{array}$$

במקרה זה $p_{88}^1 = p_{88} = 1/2 > 0$ ולכן $n = 1$ הוא אחד מהמספרים עבורם $p_{ii}^n > 0$. המחלק המשותף המירבי הוא לפחות אחד (אלא אם כן מופיע רק אפס ואז הוא אינסוף) והוא לא יכול להיות יותר גדול מאף מספר שמופיע ברשימה. במקרה זה 1 הוא מספר כזה ולכן המחקל המשותף המירבי של כל רשימת מספרים שאחד מהם הוא 1 חייב להיות 1. מכאן ש-$d_8 = 1$.

עכשיו נשים לב כי

$$p_{11} = p_{11}^2 = \ldots = p_{11}^7 = 0$$

p_{11}^9 הגעתי ל8 אחרי 7 צעדים בצעד ה8 נשארתי במקום ובצעד הבא הגעתי ל1 לכן זה $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

כי $p_{11}^8 = 1/2$ ו-$p_{11}^9 = 1/4$. לכן

$$1 \leq \gcd\left\{k | p_{ii}^k > 0\right\} \leq \gcd(8, 9) = 1$$

ומכאן ש-$d_1 = 1$. אך מצד שני שימו לב כי

$$p_{12}p_{23} \cdots p_{78}p_{81}>0$$

ומכאן נובע כי כל מצב נגיש מכל מצב ולכן כל המצבים מתקשרים (השרשרת בלתי פריקה).. מכיוון ש-$d_8 = 1$ נובע מכך כי $d_i = 1$ לכל i ולא היה צורך להוכיח בנפרד כי $d_1 = 1$.

מצב שהמחזור שלו שווה לאחד נקרא "אי מחזורי" ואחרת הוא נקרא "מחזורי עם מחזור d_i".

מחלקה שבה יש מצב אי מחזורי (ואז כל המצבים הם אי מחזוריים) נקראת מחלקה אי מחזורית. אחרת, היא נקראת מחזורית עם מחזור מסויים d. באותו אופן, שרשרת מרקוב בלתי פריקה היא אי מחזורית אם אחד מהמצבים (ואז כולם) הוא אי מחזורי ואחרת היא נקראת מחזורית עם מחזור מסויים d.

נגדיר

$$\tau_i = \inf\{n | n \geq 1, X_n = i\}$$

מצב i נקרא "נשנה" (recurrent) אם מתקיים כי $P_i(\tau_i < \infty) = 1$. אחרת הוא נקרא "חולף" (transient).

מצב נשנה נקרא נשנה חיובית (positive recurrent) אם $E_i\tau_i < \infty$ והוא נקרא נשנה אפסית (null recurrent) אם $E_i\tau_i = \infty$.

אנו נראה בהמשך כי כמו במקרה שה המחזור, כל התכונות הללו (נשנה, חולף, נשנה חיובית ונשנה אפסית) הן כולן תכונות מחלקתיות. ולכן אפשר לדבר על מחלקה נשנית, מחלקה חולפת, מחלקה נשנית חיובית, מחלקה נשנית אפסית. כאשר השרשרת בלתי פריקה אז אפשר לדבר על שרשרת מרקוב בלתי פריקה וחולפת/נשנית/נשנית חיובית/נשנית אפסית.