עכשיו נדבר טיפה על תכונות של מחלק משותף מירבי.

נאמר כי m מחלק את n אם קיים k שלם ואי שלילי כך ש-$n = km$. אנו נסמן זאת על ידי $m|n$.

המחלק המשותף המירבי של שני מספרים שלמים a, b הוא המספר הגדול ביותר d שמקיים כי $d|m$ וגם $d|n$. עכשיו, לכל שני מספרים שלמים a, b כך ש-$a > 0$ ו-$b \geq 0$ אפשר להגדיר

$$\begin{aligned} q &= \lfloor b/a \rfloor \\ r &= b - qa \end{aligned}$$

כאשר $\lfloor x \rfloor$ הוא המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל-x. לכן, לכל x מתקיים כי

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

ומכאן ש-

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

לכן

$$b/a - 1 < q \leq b/a$$

ולכן

$$b - a < qa \leq b$$

ומכאן ש-

$$0 \leq b - qa < a$$

לכן קיימים מספרים שלמים $q \geq 0$ ו-$r \geq 0$ יחידים עבורם $b = qa + r$ כאשר $0 \leq r < a$ נקרא ה"שארית" ו-q נקרא ה"מנה". נסתכל עכשיו על התהליך הבא

$$\begin{aligned} b &= q_0 a + r_0 \; 0 \leq r_0 < a \\ a &= q_1 r_0 + r_1 \; 0 \leq r_1 < r_0 \\ r_0 &= q_2 r_1 + r_2 \; 0 \leq r_2 < r_1 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

האם התהליך הזה יכול להימשך עד אין קץ? שימו לב כי $a > r_0 > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$. לכן לאחר מספר סופי של צעדים נקבל לראשונה כי $r_n > 0$ ו$r_{n+1} = 0$. דהיינו

$$a > r_0 > \ldots > r_n > r_{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned} r_0 &= b - q_0 a \\ r_1 &= a - q_1 r_0 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ r_{n-1} &= r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2} \\ r_n &= r_{n-2} - q_n r_{n-1} \\ 0 &= r_{n-1} - q_{n+1} r_n \end{aligned}$$

מכאן נובעים שני דברים.

1. שימו לב כי r_0 הוא קומבינציה לינארית של a, b (עם מקדמים שלמים). r_1 הוא קומבינציה לינארית של a, r_0 ומכיוון ש-r_0 הוא קומבינציה לינארית של a, b אז גם r_1 הוא קומבינציה לינארית של a, b. כך אפשר להמשיך באינדוקציה. אם r_{n-2}, r_{n-1} הם קומבינציות לינארית של a, b אז גם $r_n = r_{n-1} - q_n r_{n-1}$ הוא קומבינציה לינארית של a, b. אם כן בהכרח קיימים α, β שלמים (לא בהכרח אי שליליים) כך ש-

$$\alpha a + \beta b = r_n$$

2. r_n מחלק את r_{n-1} מכיוון ש-$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$. לכן $\gcd(r_{n-1}, r_n) = r_n$. זאת מכיוון ש-r_n מחלק גם את r_n וגם את r_{n-1} ואף מחלק משותף לא יכול להיות גדול ממש מ-r_n. מכיוון ש-$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$ אז כל מספר שמחלק שניים מהמספרים r_{n-2}, r_{n-1}, r_n מחלק גם את השלישי ולכן

$$\gcd(r_{n-1}, r_n) = \gcd(r_{n-2}, r_{n-1}, r_n) = \gcd(r_{n-2}, r_{n-1})$$

באופן דומה נקבל כי

$$r_n = \gcd(r_{n-1}, r_n) = \gcd(r_{n-2}, r_{n-1}) = \ldots = \gcd(r_1, r_0) = \gcd(r_0, a) = \gcd(a, b)$$

הגענו איפה למסקנה הבאה :

טענה : a, b הם מספרים שלמים ואי שליליים עם $a > 0$. אז קיימים מספרים שלמים α, β כך ש-

$$\gcd(a, b) = \alpha a + \beta b$$

דוגמה :

$$\gcd(5,7) = 1 = 3 \cdot 7 + (-4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7$$

לכן הקומבינציה הלינארית הזו אינה יחידה. אם נפעיל את האלגוריתם כאן נקבל

$$\begin{aligned} 7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 1 &= 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

במקרה זה

$$\begin{aligned} b &= 7 \\ a &= 5 \\ r_0 &= 2 \\ r_1 &= 1 \\ r_2 &= 0 \end{aligned}$$

עכשיו

$$\begin{aligned} 2 &= 7-1\cdot 5 \\ 1 &= 5-2\cdot 2=5-2\cdot(7-1\cdot 5)=3\cdot 5+(-2)\cdot 7 \end{aligned}$$

נשים לב כי אם $a<b$ ומתחילים מ-

$$a=0\cdot b+a$$

אז בשלב הבא מקבלים

$$b=qa+r$$

ולכן כדי לחסוך צעד אחד כדאי תמיד להתחיל מהמספר הגדול ביותר מבין השניים ולחלק אותו (עם שארית אפשרית) במספר הקטן יותר.

טענה:

לכל $n\geq 1$ נסמן

$$d_n=\gcd\left(a_1,\ldots,a_n\right)$$

אז

$$d_n=\gcd\left(d_{n-1},a_n\right)$$

וקיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ שלמים כך ש-

$$d_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i$$

הוכחה:

נניח באינדוקציה כי זה מתקיים עבור $n-1$. בפרט

$$d_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i a_i$$

מכיוון ש-$d_n|a_i$ לכל i אז בפרט d_n מחלק גם את a_n וגם את d_{n-1} (כי d_{n-1} קומבינציה לינארית של $a_1,\ldots,a_{n-1}$. לכן d_n הוא לכל היותר המספר הגדול ביותר שמחלק את a_n ואת d_{n-1} ומכאן ש-

$$d_n\leq\gcd\left(d_{n-1},a_n\right)$$

מצד שני, d_{n-1} מחלק את $a_1,\ldots,a_{n-1}$ ולכן כל מספר שמחלק את d_{n-1} מחלק גם את $a_1,\ldots,a_{n-1}$. זאת מכיוון שאם $d_{n-1}=qk$ אז

$$a_i=q_i d_{n-1}=q_i qk$$

ולכן k מחלק את a_i. מכיוון ש-$\gcd\left(d_{n-1},a_n\right)$ מחלק את d_{n-1}, אז הוא מחלק את $a_1,\ldots,a_{n-1}$. כמו כן הוא גם מחלק את a_n ומכאן ש-$\gcd\left(d_{n-1},a_n\right)$ מחלק את $a_1,\ldots,a_n$ ולכן הוא קטן או שווה מהמספר הגדול ביותר בעל תכונה זו ולכן

$$d_n\geq\gcd\left(d_{n-1},a_n\right)$$

ביחד עם אי השוויון ההפוך שהוכחנו קודם נובע כי

$$d_n = \gcd(d_{n-1}, a_n)$$

עכשיו מהטענה הקודמת נובע כי קיימים α, β כך ש-

$$\begin{aligned} d_n &= \alpha d_{n-1} + \beta a_n = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_i \right) + \beta a_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha \beta_i a_i + \beta a_n \end{aligned}$$

וזו קומבינציה לינארית של $a_1, \ldots, a_n$.

טענה:

לכל סדרה אינסופית של מספרים שלמים ואי שליילים קיים n סופי כך ש-

$$\gcd(a_1, a_2, \ldots) = \gcd(a_1, \ldots, a_n)$$

ומכאן גם שקיימים n ושלמים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך ש-

$$\gcd(a_1, a_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

הוכחה:

$$a_1 = \gcd(a_1) \geq \gcd(a_1, a_2) \geq \gcd(a_1, a_2, a_3) \geq \ldots$$

זו סדרה לא יורדת של מספרים הגדולים או שווים לאחד. לכן מספר הפעמים שיכול להיות אי שוויון חזק הוא סופי (לכל היותר $a_1 - 1$). לאחר מכן כל אי השווינים הם שוויונים והמחלק המשותף המירבי שמתקבל לאחר הפעם האחרונה שמתקיים אי שוויון חזק כזה מחלק את a_i לכל i. זאת מכיוון ש-

$$d_n = \gcd(a_1, \ldots, a_n) = \gcd(a_1, \ldots, a_{n+k})$$

ומכאן ש-d_n מחלק את $a_1, a_2, \ldots, a_{n+k}$ לכל $k \geq 0$ ולכן את כל אחד מהמספרים. הוא כמובן הגדול ביותר בעל התכונה הזאת מכיוון שאם היה אחד יותר גדול ממנו אז הוא גם היה אחד יותר גדול שמחלק את $a_1, \ldots, a_n$ בניגוד לכך ש-d_n הגדול ביותר שמחלק את n המספרים הראשונים.

משפט:

לכל אוסף של מספרים אי שליליים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ נסמן

$$d = \gcd(a_1, a_2, \ldots)$$

אז קיים $M \geq 1$ כך שלכל $m \geq M$ קיימים $c_1^m, \ldots, c_n^m$ שלמים ואי שליליים כך ש-

$$md = \sum_{i=1}^{n} c_i^m a_i$$

כלומר, ממקום מסויים והילך, כל מכפלה של d היא קומבינציה אי שלילית של $a_1, \ldots, a_n$. בניגוד לטענה הקודמת, כאן המקדמים יכולים להשתנות מ-m אחד למישנהו.

הוכחה :
מהטעונה הקודמת אנו יודעים כי קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש-

$$d = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

נסמן

$$\begin{aligned} A^+ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^+ a_i \\ A^- &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^- a_i \end{aligned}$$

אם $A^- = 0$ אז אין מה להוכיח כי במקרה זה פשוט ניקח $c_i^m = m\alpha_i$ ונקבל את התוצאה המבוקשת. נניח איפה כי $A^- > 0$. מכיוון ש-

$$1 \le d = A^+ - A^-$$

אז בהכרח מתקיים כי

$$A^+ = d + A^- > 0$$

גם כן.
כמו כן מכיוון ש-A^- ו-A^+ הם קומבינציה לינארית של a_i אז ברור כי d מחלק את שניהם. ניקח איפה

$$M = \left(A^-/d\right)^2$$

לכל $M \ge m$ קיימים q, r יחידים כך ש-

$$m - \left(A^-/d\right)^2 = \left(A^-/d\right) q + r$$

כאשר

$$0 \le r < \frac{A^-}{d}$$

לכן (נזכור כי $d = A^+ - A^-$ ולכן $1 = A^+/d - A^-/d$)

$$\begin{aligned} m &= \left(A^-/d\right)^2 + \left(A^-/d\right) q + r \\ &= \left(A^-/d\right)^2 + \left(A^-/d\right) q + r\left(A^+/d - A^-/d\right) \\ &= \frac{rA^+}{d} + \left(\frac{A^-}{d} + q - r\right)\frac{A^-}{d} \end{aligned}$$

עם נכפיל ב-d נקבל כי

$$\begin{aligned} md &= rA^+ + \left(\frac{A^-}{d} - r + q\right) A^- \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(r\alpha_i^+ + \left(\frac{A^-}{d} - r + q\right)\alpha_i^-\right) a_i \end{aligned}$$

מכיוון ש-$0 \le r < A^-/d$ נובע כי $r \ge 0$ וגם $\frac{A^-}{d} - r + q > 0$ ובפרט נובע מכך כי לכל $i = 1, \ldots, n$

$$r\alpha_i^+ + \left(\frac{A^-}{d} - r + q\right)\alpha_i^- \ge 0$$

ומכאן ש-md הוא קומבינציה אי שלילים של $a_1, \ldots, a_n$.

דוגמה:

$$1 = \gcd(5,7) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$$

במקרה זה $A^+ = 15$ ו-$A^- = 14$. לכן לכל $m \ge 14^2 = 196$ קיימים $c_1^m, c_2^m \ge 0$ שלמים כך ש-

$$m = c_1^m \cdot 5 + c_2^m \cdot 7$$

זה לא בהכרח אומר ש-196 הוא המספר הקטן ביותר בעל התכונה הזאת. למעשה כל מספר שגדול או שווה ל-24 ניתן להצגה כקומבינציה אי שלילית של 5 ו-7. לצורך כך, מספיק שנבדוק זאת עבור $24, 25, 26, 27, 28$. זאת מכיוון שכל מספר שגדול מ-28 ניתן להצגה

$$a + 5 * n$$

כאשר $a \in \{24, 25, 26, 27, 28\}$ ו-$n \ge 1$. אם כן

$$\begin{aligned} 24 &= 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\ 25 &= 5 \cdot 5 + 0 \cdot 7 \\ 26 &= 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \\ 27 &= 4 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \\ 28 &= 0 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \end{aligned}$$

חוץ מזה המספרים שניתן להציג כקומבינציה אי שלילית של 5 ו-7 הם

$$0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22$$

כך שלמעשה המספרים היחידים עבורם זה לא ניתן הם

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23$$

בהוכחה לא חיפשנו את המספר הקטן ביותר אלא רק איזשהו מספר עבורו זה קורה.

לבסוף, נשים לב כי תמיד קיים n כך ש-

$$d = \gcd(a_1, a_2, \ldots) = \gcd(a_1, \ldots, a_n)$$

ולכן עבור סדרה אינסופית עם מחלק משותף מירבי תמיד קיים $n \ge 1$ ו-$M \ge 1$ כך שלכל $m \ge M$ קיימים $c_1^m, \ldots, c_n^m$ כך ש-

$$d = \sum_{i=1}^{n} c_i^m a_i$$

כיצד כל זה קשור לענייננו?

נניח כי

$$d_i = \gcd\{n | p_{ii}^n > 0\}$$

לכן קיים אוסף סופי $a_1, \ldots, a_n$ כך ש-$p_{ii}^{a_i} > 0$ וקיים $M \geq 1$ כך שלכל $M \geq m$ קיימים $c_1^m, \ldots, c_n^m \geq 0$ כך ש-

$$md_i = \sum_{k=1}^{n} c_k^m a_k$$

ולכן

$$p_{ii}^{md_i} \geq p_{ii}^{c_1^m a_1} \cdots p_{ii}^{c_n^m a_n} \geq (p_{ii}^{a_1})^{c_1^m} \cdots (p_{ii}^{a_n})^{c_n^m} > 0$$

זאת מכיוון שכאשר $p_{ii}^a > 0$ אז עבור $k \geq 1$

$$p_{ii}^{ka} \geq \underbrace{p_{ii}^a \cdots p_{ii}^a}_{k} > 0$$

ועבור $k = 0$

$$p_{ii}^{0a} = 1 = (p_{ii}^a)^0 > 0$$

קבלנו איפה את התוצאה הבאה

טענה:

לכל i קיים M_i כך שלכל $m \geq M_i$ מתקיים כי

$$p_{ii}^{md_i} > 0$$

ולכל i, j עם $j \to i$ קיימים n_{ij} ו-M_j כך שלכל $m \geq M_j$ מתקיים כי

$$p_{ii}^{n_{ij}+md_i} > 0$$

החלק השני נובע מכך שקיים n_{ij} כך ש-$p_{ij}^{n_{ij}} > 0$ ולכן

$$p_{ii}^{n_{ij}+md_i} \geq p_{ii}^{n_{ij}} p_{ii}^{md_i} > 0$$

מסקנה:

עבור שרשרת מרקוב בלתי פריקה ואי מחזורית לכל i, j קיים $N_{ij} \ (= n_{ij} + M_j)$ כך שלכל $m \geq N_{ij}$ מתקיים כי

$$p_{ij}^m > 0$$

בפרט אם מרחב המצבים הוא סופי אז ניקח

$$N = \max_{ij} N_{ij}$$

ונקבל כי לכל $m \geq N$ מתקיים כי

$$p_{ij}^m > 0$$

לכל i, j. כלומר, כל הרכיבים של המטריצה P^m הם חיוביים ממש. אם מרחב המצבים אינו סופי, זה לא בהכרח נכון.

טענה:

נגדיר

$$\delta_i = \gcd \left\{ n | f_{ii}^n > 0 \right\}$$

אז $\delta_i = d_i$.

הוכחה:

לכל n עבורו $f_{ii}^n > 0$ מתקיים גם כי $p_{ii}^n > 0$ (מכיוון ש-$f_{ii}^n \leq p_{ii}^n$). לכן d_i מחלק את כל המספרים $n \geq 1$ (אם יש) עבורם $f_{ii}^n > 0$ ולכן הוא קטן או שווה מהגדול ביותר בעל תכונה זו. דהיינו, $d_i \leq \delta_i$.

כדי להראות את הכיוון השני, נניח באינדוקצי כי δ_i מחלק את את כל המספרים $0 \leq k \leq n-1$ עבורם $p_{ii}^k > 0$. נראה כי הוא גם מחלק את כל המספרים $0 \leq k \leq n$ עבורם $p_{ii}^k > 0$. מכאן ינבע כי δ_i מחלק את כל המספרים k עבורם $p_{ii}^k > 0$ ומכאן ינבע כי $\delta_i \leq d_i$ כי d_i הוא הגדול ביותר בעל תכונה זו. מכיוון שגם $d_i \geq \delta_i$ מתקיים שוויון. ובכן, אם $p_{ii}^n = 0$ אז אין מה להוכיח מכיוון שבמקרה זה

$$\left\{ k | 0 \leq k \leq n, \, p_{ii}^k > 0 \right\} = \left\{ k | 0 \leq k \leq n-1, \, p_{ii}^k > 0 \right\}$$

אחרת צריך להראות כי δ_i מחלק גם את n. ובכן,

$$p_{ii}^n = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k}$$

מכיוון ש-$p_{ii}^n > 0$ אז קיים $1 \leq k \leq n$ כך ש-$f_{ii}^k p_{ii}^{n-k} > 0$. לכן $f_{ii}^k > 0$ וגם p_{ii}^{n-k}. מהגדרת δ_i נובע כי δ_i מחלק את k. כמו כן, מכיוון ש-$0 \leq n-k \leq n-1$ ו-$p_{ii}^{n-k} > 0$ נובע מהנחת האינדוקציה כי δ_i מחלק גם את $n-k$. לכן הוא מחלק את $k + n - k = n$ והסתיימה ההוכחה.

משפט:

נסתכל על מערכת המשוואות

$$u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k}$$

ונניח כי $a_k \geq 0$ לכל $k \geq 0$ עם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. כמו כן נניח כי

$$\gcd \left\{ k | \, k \geq 0 \, a_k > 0 \right\} = 1$$

וכי

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$$

אז למערכת זו יש פתרון המקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

כאשר $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n$.

שימו לב כי מכיוון ש-$\gcd\{k|a_k > 0\} = 1$ אז לא יתכן כי $a_0 = 1$ כי אז $\gcd\{0\} = \infty$ ולא 1. לכן קיים $i \geq 1$ עבורו $a_i > 0$ ולכן $\mu > 0$.

לפני ההוכחה נראה כיצד זה עוזר לנו.

נזכור כי

$$p_{ii}^n = \delta_{n0} + \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k}$$

לכן אם נבחר

$$\begin{aligned} a_n &= f_{ii}^n \\ \mu &= \sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}^k = E_i \tau_i \\ b_n &= \delta_{n0} \\ u_n &= p_{ii}^n \end{aligned}$$

נקבל כי אם i הוא מצב נשנה אז תנאי המשפט מתקיימים ולכן

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^n = \begin{cases} \frac{1}{E_i\tau_i} & E_i\tau_i < \infty \\ 0 & E_i\tau_i = \infty \end{cases}$$

אם השרשרת היא בלתי פריקה ונשנית, אז $f_{ij} = 1$ לכל i, j ואז

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^k p_{jj}^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}^k p_{jj}^{n-k} 1_{\{0\leq k\leq n\}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^k \underbrace{\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{n-k}}_{\frac{1}{E_j\tau_j}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} 1_{\{0\leq k\leq n\}}}_{1} \\ &= \begin{cases} \frac{f_{ij}}{E_j\tau_j} = \frac{1}{E_j\tau_j} & E_j\tau_j < \infty \\ 0 & E_j\tau_j = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

נזכור כי $\pi_j = \frac{1}{E_j\tau_j}$ היא גם ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת. לכן קבלנו את המשפט הבא.

משפט:

בהנתן שרשרת מרקוב בלתי פריקה, נשנית חיובית ואי מחזורית אז לכל i

$$\exists \lim_{n\to\infty} p_{ij} = \pi_j$$

כאשר $\pi_j = \frac{1}{E_j\tau_j}$ הוא הפתרון היחיד של המערכת

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_i \pi_i p_{ij} \; \forall j \\ \sum_j \pi_j &= 1 \\ \pi_j &\geq 0 \; \forall j \end{aligned}$$

כאשר j הוא מצב נשנה אך מחזורי, אז

$$p_{jj}^{nd_j} = \sum_{\ell=0}^{nd_j} f_{jj}^{\ell} p_{jj}^{nd_j-k} = \sum_{k=0}^{n} f_{jj}^{kd_j} p_{jj}^{(n-k)d_j}$$

כאשר

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{jj}^{kd_j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{jj}^{\ell} = 1$$

כמו כן

$$\gcd \left\{ n | \, f_{jj}^{nd_j} > 0 \right\} = 1$$

במקרה זה

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k f^{nd_j} = \frac{1}{d_j} \sum_{k=0}^{\infty} (kd_j) \, f_{jj}^{nd_j} = \frac{1}{d_j} \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell f_{jj}^{\ell} = \frac{E_j\tau_j}{d_j}$$

ונקבל כי

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{nd_j} = \begin{cases} \frac{d_j}{E_j\tau_j} & E_j\tau_j < \infty \\ 0 & E_j\tau_j = \infty \end{cases}$$

במקרה שהשרשרת נשנית אפסית אז $p_{jj}^{k} = 0$ אם k אינו כפולה של d_j ו- $p_{jj}^{nd_j}$ שואף לאפס. לכן במקרה זה

$$\exists \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{n} = 0$$

ובאופן דומה למה שהראינו קודם, מתקיים כי לכל i (גם אם השרשרת אינה בלתי פריקה) מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = f_{ij} \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{n} = 0$$

מכאן שכאשר השרשרת חולפת או נשנית אפסית, מתקיים כי לכל i

$$\exists \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = 0$$

גם ללא אי פריקות או אי מחזוריות.

לפני הוכחת המשפט המרכזי, (שנקרא גם משפט ההתחדשות הבדיד) נציין כי לכל שרשרת בלתי פריקה מתקיים כי לכל התפלגות התחלתית

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1_{\{X_k=j\}}\xrightarrow{1}\begin{cases}\pi_j & \text{נשנית חיובית}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

בפרט ממשפט ההתכנסות הנשלטת (לוקחים תוחלת ומכניסים לתוך הסכום) נובע מכך כי לכל i

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{k}\to\begin{cases}\pi_j & \text{נשנית חיובית}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

בין אם השרשרת אי מחזורית ובין אם לאו. אילו שיקחו את הקורס "הסתברות ישומית" יוכלו בקלות להסיק את זה כתרגיל פשוט ממשהוא הרבה יותר כללי.

ראינו כי יש שלושה מושגים שונים: **התפלגות סטציונרית** (שאם מתחילים ממנה אז התהליך הוא סטציונרי), **התפלגות גבולית** (כאשר הסיכוי להיות במצב מסויים בזמן n שואף לגבול) **והתפלגות ארגודית** (כאשר פרופורצית הזמן שאנו שוהים במצב מסויים שואפת לגבול בהסתברות 1). עבור שרשרת מרקוב בלתי פריקה, אי מחזורית ונשנית חיובית כל המושגים הללו נותנים את אותו הדבר.

ועכשיו, להוכחת המשפט.

נחלק את זה למספר שלבים.

1. נניח לכל אורך הדרך כי $b_n\geq 0$ לכל $n\geq 0$. בסוף נראה מה עושים כאשר זה לא מתקיים.
תחילה נשים לב כי מכיוון ש-$a_0<1$ אז

$$u_n=b_n+\sum_{k=0}^{n}a_ku_{n-k}$$

שקול ל-

$$u_n\left(1-a_0\right)=b_n+\sum_{k=1}^{n}a_ku_{n-k}$$

ולכן

$$u_n=\frac{b_n+\sum_{k=1}^{n}a_ku_{n-k}}{1-a_0}$$

כלומר, u_n הוא קומבינציה לינארית אי שלילית של $u_0,\ldots,u_{n-1}$ ומכיוון ש-

$$u_0\left(1-a_0\right)=b_0$$

אז

$$u_0=\frac{b_0}{1-a_0}$$

והסדרה u_n נקבעת באופן יחיד והיא אי שלילית. נניח באינדוקציה כי

$$u_k\leq\frac{\sum_{i=0}^{k}b_i}{1-a_0}$$

לכל $0 \le k \le n-1$. אז

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{b_n + \sum_{k=1}^n a_k u_{n-k}}{1-a_0} \le \frac{b_n + \sum_{k=1}^n a_k \frac{\sum_{i=0}^{n-k} b_i}{1-a_0}}{1-a_0} \\ &\le \frac{b_n + \sum_{k=1}^n a_k \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i}{1-a_0}}{1-a_0} \le \frac{b_n + \sum_{k=1}^\infty a_k \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i}{1-a_0}}{1-a_0} \\ &= \frac{b_n + (1-a_0)\frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i}{1-a_0}}{1-a_0} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i}{1-a_0} \end{aligned}$$

ובפרט נובע כי לכל $n \ge 0$

$$u_n \le \frac{\sum_{n=0}^\infty b_n}{1-a_0}$$

כלומר $\{u_n | n \ge 0\}$ היא סדרה אי שלילית וחסומה.

2. מכיוון ש-$\{u_n | n \ge 0\}$ היא סדרה חסומה, אז יש לה תת סדרה מתכנסת. דהיינו קיים λ ו-n_k כך ש-

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} u_n \equiv \lambda$$

ניקח עכשיו i עבורו $a_i > 0$. אז עבור k כך ש-$n_k \ge i$

$$u_{n_k} = b_{n_k} + a_i u_{n_k - i} + \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{n_k} a_j u_{n_k-j}$$

נראה כי גם $u_{n_k-i} \to \lambda$. קודם כל, ברור כי

$$\limsup_{k\to\infty} u_{n_k-i} \le \limsup_{n\to\infty} u_n = \lambda$$

לכן אם $\lambda = 0$ אז זה מובן מאליו. עכשיו אם נסמן

$$B = \frac{\sum_{n=0}^\infty b_n}{1-a_0}$$

את החסם שחישבנו עבור u_n נקבל כי אם $i < N < n_k$ אז

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{n_k} a_j u_{n_k-j} &\le \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{N} a_j u_{n_k-j} + \sum_{j=N+1}^{n_k} a_j u_{n_k-j} \\ &\le \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{N} a_j u_{n_k-j} + B\sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \end{aligned}$$

לכן

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{n_k} a_j u_{n_k-j} \le \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{N} a_j \limsup_{n\to\infty} u_{n_k-j} + B\sum_{j=N+1}^{\infty} a_j$$

אך

$$\limsup_{k\to\infty} u_{n_k-j} \leq \limsup_{k\to\infty} u_{n_k-j} \leq \limsup_{n\to\infty} u_n = \lambda$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n_k} a_j u_{n_k-j} &\leq \lambda \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{N} a_j + B \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \\
&= \lambda \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{\infty} a_j + (B-\lambda) \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \\
&= \lambda (1-a_i) + (B-\lambda) \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j
\end{aligned}$$

ומכאן גם ש-

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n_k} a_j u_{n_k-j} \leq \lambda (1-a_i) + (B-\lambda) \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j$$

מכיוון ש-$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ נובע כי $b_n \to 0$ ולכן גם $b_{n_k} \to 0$. אם כן

$$u_{n_k-i} \geq \frac{1}{a_i} \left(u_{n_k} - b_{n_k} - \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n_k} a_j u_{n_k-j} \right)$$

אם ניקח את ה-$\liminf$ בשני האגפים נקבל (מכיוון ש-$u_{n_k} \to \lambda$)

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} u_{n_k-i} &\geq \frac{1}{a_i} \left(\lambda - 0 - \lambda (1-a_i) - (B-\lambda) \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \right) \\
&= \lambda - \frac{B-\lambda}{a_i} \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j
\end{aligned}$$

לכל $N > i$. נשאיף עכשיו את N לאינסוף ונקבל כי

$$\liminf_{k\to\infty} u_{n_k-i} \geq \lambda$$

ומכיוון ש-

$$\limsup_{k\to\infty} u_{n_k-i} \leq \lambda$$

קיבלנו כי

$$\exists \lim_{k\to\infty} u_{n_k-i} = \lambda$$

באופן דומה אפשר להראות כי אם $a_j > 0$ אז גם

$$\exists \lim_{k\to\infty} u_{n_k-i-j} = \lambda$$

ובאינדוקציה אם $a_{i_1}, \ldots, a_{i_\ell} > 0$ אז

$$\exists \lim_{k\to\infty} u_{n_k-i_1-\ldots-i_\ell} = \lambda$$

נזכור כי קיימים $n \geq 0$ ו-M כך שלכל $m \geq M$ ניתן להציג כל כפולה של המחזור (1 במקרה זה) כקומבינציה אי שלילית של n אינדכסים i עבורם $a_i > 0$. מכאן נובע כי לכל $m \geq M$ מתקיים כי

$$\exists \lim_{k\to\infty} u_{n_k-m} = \lambda$$

3. עכשיו, נסתכל שוב על

$$u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k}$$

נגדיר

$$r_i = \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j$$

ונשים לב כי

$$r_0 = 1 - a_0$$

אז

$$\begin{aligned} u_n &= b_n + a_0 u_n + \sum_{k=1}^{n} (r_{k-1} - r_k) u_{n-k} \\ \sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} &= b_n + \sum_{k=1}^{n} r_{k-1} u_{n-k} \\ \sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} &= b_n + \sum_{\ell=0}^{n-1} r_\ell u_{n-1-\ell} \end{aligned}$$

דהיינו

$$\sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} r_k u_{n-1-k} = b_n$$

ואם נסכם נקבל כי צד שמאל הוא טור טלסקופי ונקבל כי

$$\sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} - r_0 u_0 = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

עכשיו

$$r_0 u_0 = (1-a_0)\frac{b_0}{1-a_0} = b_0$$

ולכן

$$\sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

ומכאן ש-

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

ולכן גם לכל תת סדרה הגבול הוא $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. עכשיו, לכל $n_k \geq M+N$ מתקיים כי

$$\sum_{m=0}^{N} r_m u_{n_k-M-m} \leq \sum_{m=0}^{n_k-M} r_m u_{n_k-M-m} = \sum_{m=0}^{n_k-M} b_m$$

ומכיוון ש-$u_{n_k-M-m} \to \lambda$ לכל $m \geq 0$ נובע כי אם ניקח גבול נקבל כי

$$\lambda \sum_{m=0}^{N} r_m \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

ולכן

$$\lambda \leq \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{m=0}^{N} r_m}$$

עכשיו, נשים לב כי

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{j-1} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j = \mu$$

לכן אם $\mu = \infty$ אז

$$\lambda \leq \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{m=0}^{N} r_m} = 0$$

ואז

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = 0$$

מכיוון ש-u_n היא סדרה אי שלילית, נובע כי קיים הגבול ושווה לאפס כאשר $\mu = \infty$ ההוכחה נגמרת כאן. נניח איפה כי $\mu < \infty$. במקרה זה קבלנו כי

$$\lambda \leq \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{m=0}^{N} r_m} \leq \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\mu}$$

4. באופן דומה למה שהראינו קודם נגדיר

$$\nu = \liminf_{n\to\infty} u_n$$

וניקח תת סדרה עבורה

$$u_{n_k} \to \nu$$

בעזרת אותה הוכחה בדיוק נובע כי קיים $M \geq 0$ כך שלכל $m \geq M$ מתקיים כי

$$u_{n_k - m} \to \nu$$

ואז לכל $n_k \geq M + N$ יתקיים כי

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n_k - M} b_m &= \sum_{m=0}^{n_k - M} r_m u_{n_k - M - m} \leq \sum_{m=0}^{N} r_m u_{n_k - M - m} + B \sum_{m=N+1}^{n_k} r_m \\ &\leq \sum_{m=0}^{N} r_m u_{n_k - M - m} + B \sum_{m=N+1}^{\infty} r_m \end{aligned}$$

כאשר B הוא החסם של u_n. אם נשאיף $k \to \infty$ נקבל אם כן כי

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} b_m &\leq \nu \sum_{m=0}^{N} r_m + B \sum_{m=N+1}^{\infty} r_m \\ &= \nu \sum_{m=0}^{\infty} r_m + (B - \nu)) \sum_{m=N+1}^{\infty} r_m \\ &= \nu\mu + (B - \nu) \sum_{m=N+1}^{\infty} r_m \end{aligned}$$

וזה מתקיים לכל $N \geq 0$. מכיוון שזנב של טור מתכנס שואף לאפס (כאן אנו משתמשים בעובדה ש-$\mu < \infty$) נשאיף את $N \to \infty$ ונקבל כי

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\mu} \leq \nu = \liminf_{n\to\infty} u_n \leq \limsup_{n\to\infty} u_n = \lambda \leq \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\mu}$$

ולכן כאשר $\mu < \infty$,

$$\exists \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\mu}$$

5. מה קורה כאשר b_n אינם בהכרח אי שליליים? במקרה זה ניקח

$$u_n^{\pm} = b_n^{\pm} + \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k}^{\pm}$$

כאשר $b_n^+ = b_n \vee 0$ ו-$b_n^- = -b_n \wedge 0$ ו-$u_n^\pm$ הם הפתרונות של המשוואות המתאימים. אז מכיוון ש-$\sum_{n=0}^\infty |b_n| < \infty$ אז $\sum_{n=0}^\infty b_n^\pm < \infty$ ולכן

$$\exists \lim_{n\to\infty} u_n^\pm = \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^\infty b_k^\pm}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

ואם ניקח $u_n = u_n^+ - u_n^-$ נקבל כי זה הפתרון היחיד למשוואה המקורית ומתקיים כי

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n\to\infty} u_n &= \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^\infty b_k^+}{\mu} - \frac{\sum_{k=0}^\infty b_k^-}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^\infty b_k}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

6. עכשיו הכללה קטנטנה. נניח כי $b(\cdot)$ היא פונקציה כלשהי (אפשר להניח בורל, אך זה לא ממש חשוב) ו-X הוא משתנה מקרי עבורו קיים $d > 0$

$$P\left(X \in \{nd | n \geq 0\}\right) = 1$$

אם d הוא המספר הגדול ביותר שיש לו את התכונה הזו, אז אם ניקח

$$a_i = P\left(X = id\right)$$

נקבל כי a_i מקיים את תנאי המשפט. במקרה, עבור $0 \leq c < d$ נסתכל על

$$\begin{aligned} A(t) &= b(t) + \int_{[0,t]} A(t-s)dF(s) \\ &= b(t) + \sum_{i=0}^{\lfloor t/d \rfloor} A(t-di)a_i \end{aligned}$$

ובפרט עבור $0 \leq c < d$ ו- $t = c + nd$ נקבל כי

$$A(c+nd) = b(c+nd) + \sum_{i=0}^{n} A(c+(n-i)d)a_i$$

מכך נובע כי אם

$$\sum_{n=0}^\infty |b(c+nd)| < \infty$$

אז

$$\exists \lim A(c+nd) = \frac{\sum_{k=0}^\infty b(c+nd)}{\sum_{k=0}^\infty k a_k}$$

כאשר הגבול הוא אפס כאשר המכנה הוא אינסוף. עכשיו נשים לב כי

$$\sum_{k=0}^{\infty} ka_k = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = kd) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X/d = k) = E(X/d) = \frac{EX}{d}$$

לכן אם נסמן $\mu = EX$ נקבל כי

$$\exists \lim_{n\to\infty} A(c + nd) = \begin{cases} \frac{d\sum_{n=0}^{\infty} b(c+nd)}{\mu} & \mu < \infty \\ 0 & \mu = 0 \end{cases}$$

זאת הצורה של משפט ההתחדשות הבדיד.

טענה : בהנתן שרשרת מרקוב בלתי פריקה אז תמיד קיים הגבול של

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^k}{\sum_{k=0}^{n} p_{\ell m}^k}$$

כאשר השרשרת חולפת הגבול הוא

$$\frac{\delta_{ij} + \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}}}{\delta_{\ell m} + \frac{f_{\ell m}}{1-f_{mm}}}$$

כאשר השרשרת נשנית הגבול הוא

$$\frac{\mu_j}{\mu_m} = E_m \sum_{n=0}^{\tau_m - 1} 1_{\{X_n = j\}}$$

כאשר μ הוא הווקטור החיובי היחיד עד כדי מכפלה בקבוע המקיים לכל j כי

$$\mu_j = \sum_i \mu_i p_{ij}$$

הוכחה :
עבור המקרה החולף נזכר כי

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^k = \delta_{ij} + f_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^k$$

(שנכון גם כאשר השרשרת אינה חולפת) וכי

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^k = \frac{1}{1 - f_{ii}}$$

עבור המקרה הנשנה, נזכר כי

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^k = \infty$$

וכי $f_{ij}=1$ לכל i,j. אם כן כאשר $i\neq j$ נרשום

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{n} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} f_{ij}^{\ell} p_{jj}^{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} f_{ij}^{\ell} \sum_{k=\ell}^{n} p_{jj}^{k-\ell} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ m=k-\ell}}{=} \sum_{\ell=0}^{n} f_{ij}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell} p_{jj}^{m} = \sum_{\ell=0}^{n} f_{ij}^{\ell} \left(\sum_{m=0}^{n} p_{jj}^{m} - \sum_{m=n-\ell+1}^{n} p_{jj}^{m} \right)\end{aligned}$$

לכן

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{n}}{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{n}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{ij}^{\ell} \left(1 - \frac{\sum_{m=n-\ell+1}^{n} p_{jj}^{m}}{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{k}}\right) 1_{\{\ell\leq n\}}$$

עכשיו

$$\frac{\sum_{m=n-\ell+1}^{n} p_{jj}^{m}}{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{k}} \leq \frac{\ell}{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{k}}$$

וצד ימין שואף לאפס מכיוון ש-$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{k}=\infty$ לכן

$$\left(1 - \frac{\sum_{m=n-\ell+1}^{n} p_{jj}^{m}}{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{k}}\right) 1_{\{\ell\leq n\}}$$

חסום (בין אפס ואחד) ושואף ל-1. לכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{ij}^{\ell} \left(1 - \frac{\sum_{m=n-\ell+1}^{n} p_{jj}^{m}}{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{k}}\right) 1_{\{\ell\leq n\}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{ij}^{\ell}\cdot 1 = f_{ij} = 1$$

וקיבלנו כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{n}}{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{n}} = 1$$

מכאן נובע כי לכל i,ℓ,j

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{n}}{\sum_{k=0}^{n} p_{\ell j}^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{n}}{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} p_{jj}^{n}}{\sum_{k=0}^{n} p_{\ell j}^{n}} = 1\cdot 1 = 1$$

עכשיו, נגדיר

$$q_{ij} = \frac{\mu_j}{\mu_i} p_{ji}$$

אז לכל $n\geq 2$ ולכל $i_1,\ldots,i_{n-1}$ מתקיים כי

$$\begin{aligned}&q_{ii_1} q_{i_1 i_2} q_{i_2 i_3} \cdots q_{i_{n-2} i_{n-1}} q_{i_{n-1} j} \\ &= \frac{\mu_{i_1}}{\mu_i} p_{i_1 i} \frac{\mu_{i_2}}{\mu_{i_1}} p_{i_2 i_1} \frac{\mu_{i_3}}{\mu_{i_2}} p_{i_3 i_2} \cdots \frac{\mu_{i_{n-1}}}{\mu_{i_{n-2}}} p_{i_{n-1} i_{n-2}} \frac{\mu_j}{\mu_{i_{n-1}}} p_{j i_{n-1}} \\ &= \frac{\mu_j}{\mu_i} p_{j i_{n-1}} p_{i_{n-1} i_{n-2}} \cdots p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1} p_{i_1 i}\end{aligned}$$

ולכן אם נסכם על $i_1, \ldots, i_{n-1}$ נקבל כי

$$q_{ij}^n = \frac{\mu_j}{\mu_i} p_{ji}^n$$

ובפרט $q_{jj}^n = p_{jj}^n$. שרשרת המרקוב עם מטריצת המעברים Q נקראת השרשרת ההפוכה בזמן (הסבר נוסף בהמשך) ונשים כי מכיוון שהשרשרת שהתחלנו ממנה היא בלתי פריקה אז לכל i, j קיים n כך ש-$p_{ji}^n > 0$ ולכן גם $q_{ij}^n > 0$ ומכאן שהשרשרת ההפוכה בזמן גם כן בלתי פריקה. כמו כן היא גם נשנית מכיוון ש-

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{jj}^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^n = \infty$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n q_{ij}^n}{\sum_{k=0}^n q_{\ell j}^n} = 1$$

ומכיוון ש-

$$\frac{\mu_m}{\mu_j} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n p_{ij}^k}{\sum_{k=0}^n p_{im}^k} = \frac{\frac{\mu_i}{\mu_j} \sum_{k=0}^n p_{ij}^k}{\frac{\mu_i}{\mu_m} \sum_{k=0}^n p_{im}^k} = \frac{\sum_{k=0}^n q_{ji}^n}{\sum_{k=0}^n q_{mi}^n} \to 1$$

קבלנו איפה כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n p_{ij}^k}{\sum_{k=0}^n p_{im}^k} = \frac{\mu_j}{\mu_m}$$

לבסוף, לכל i, j, ℓ, m

$$\frac{\sum_{k=0}^n p_{ij}^k}{\sum_{k=0}^n p_{\ell m}^k} = \frac{\sum_{k=0}^n p_{ij}^k}{\sum_{k=0}^n p_{im}^k} \cdot \frac{\sum_{k=0}^n p_{im}^k}{\sum_{k=0}^n p_{\ell m}^k} \to \frac{\mu_j}{\mu_m} \cdot 1 = \frac{\mu_j}{\mu_m}$$

וסיימנו את ההוכחה.

לגבי המושג "שרשרת הפוכה בזמן" זיכרו כי אם $X_0, \ldots, X_n$ היא שרשרת מרקוב אז גם $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0$ היא שרשרת מרקוב (מכיוון שבשני המקרים עבר ועתיד בלתי תלויים בהנתן ההווה). בפרט מטריצת המעברים של השרשרת ההפוכה בזמן היא

$$\begin{aligned} q_{ij}(k) &= P\left(X_{k-1} = j | X_k = i\right) = \frac{P\left(X_{k-1} = j\right) P\left(X_k = i | X_{k-1} = j\right)}{P\left(X_k = i\right)} \\ &= \frac{P\left(X_{k-1} = j\right) p_{ji}(k-1)}{P\left(X_k = i\right)} \end{aligned}$$

אפילו אם השרשרת הומוגנית בזמן, השרשרת ההפוכה בזמן אינה בהכרח הומוגנית בזמן. אך אם השרשרת היא בלתי פריקה ונשנית חיובית ואנו מתחילים אותה בהתפלגות הסטציונרית שלה אז נקבל כי

$$q_{ij}(k) = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

ומכאן שהשרשרת ההפוכה בזמן היא גם הומוגנית בזמן. כאשר השרשרת אינה נשנית חיובית אך נשנית אפסית, גם אז

$$q_{ij} = \frac{\mu_j p_{ji}}{\mu_i}$$

היא מטריצת מעברים של שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן וגם במקרה זה נקרא לשרשרת עם מטריצת המעברים הזו השרשרת ההפוכה בזמן למרות שאין התפלגות סטציונרית.

נשים לב כי אם q_{ij} היא מטריצת מעברים כלשהי וקיימים μ_i חיוביים שמקיימים

$$\mu_i q_{ij} = \mu_j p_{ji}$$

אז אם נסכם על j נקבל כי

$$\mu_i = \sum_j \mu_j p_{ji}$$

ואם נסכם על i נקבל כי

$$\sum_i \mu_i q_{ij} = \mu_j$$

ולכן כאשר השרשרת קדימה בזמן היא בלתי פריקה ונשנית, אז גם השרשרת אחורה בזמן היא בלתי פריקה ונשנית עם אותו פתרון למערכת הרלוותית (שנקבע עד כדי מכפלה בקבוע). מכאן ש-μ_j/μ_i מייצג את תוחלת מספר הביקורים ב-j בין שני ביקורים עוקבים ב-i גם עבור השרשרת קדימה בזמן וגם עבור השרשרת אחורה בזמן.

כאשר

$$q_{ij} = p_{ij}$$

אנו נקרא לשרשרת "הפיכה בזמן" (time reversibl). דהיינו, שרשרת מרקוב נשנית היא הפיכה בזמן אם ורק אם קיימים קבועים חיוביים μ_i המקיימים

$$\mu_i p_{ij} = \mu_j p_{ji}$$

אז בהכרח אילו הקבועים שמקיימים

$$\sum_i \mu_i p_{ij} = \mu_j$$

ואם השרשרת נשנית חיובית אז ניתן לנרמל אותם ולקבל כי

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

כאשר π הוא הווקטור הסטציונרי.

משפט: (Kolmogorov)

שרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית היא הפיכה בזמן אם ורק אם לכל $n \geq 1$ ולכל $i_1, \ldots, i_n$ מתקיים כי

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i} = p_{ii_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_2 i_1} p_{i_1 i}$$

כיוון אחד נובע מההוכחה של טענה קודמת כשהראינו כי

$$q_{ii_1},\ldots,q_{i_{n-1}j}=\frac{\mu_j}{\mu_i}p_{ji_{n-1}}\cdots p_{i_1i}$$

בפרט זה נכון גם אם ניקח n במקום $n-1$ ונציב $j=i$. כאשר השרשרת הפיכה בזמן

$$q_{ii_1},\ldots,q_{i_ni}=p_{ii_1}\cdots p_{i_ni}$$

ומכיוון ש- $\mu_i/\mu_i=1$ הראינו את הכיוון שאם השרשרת הפיכה בזמן אז התנאי של קולמוגורוב מתקיים.

נניח אם כן כי התנאי של קולמוגורוב מתקיים. בפרט ניקח $i_n=j$ ונסכם על $i_1,\ldots,i_{n-1}$. נקבל כי

$$p_{ij}^np_{ji}=p_{ij}p_{ji}^n$$

ששקול ל-

$$p_{ij}p_{ji}^n=p_{ij}^np_{ji}$$

ולכן

$$\frac{\sum_{k=0}^n p_{ji}^k}{\sum_{k=0}^n p_{ii}^k}p_{ij}=\frac{\sum_{k=0}^n p_{ij}^k}{\sum_{k=0}^n p_{ii}^k}p_{ji}$$

לפי מה שהראינו קודם

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^n p_{ji}^k}{\sum_{k=0}^n p_{ii}^k} &= 1\\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^n p_{ij}^k}{\sum_{k=0}^n p_{ii}^k} &= \frac{\mu_j}{\mu_i}\end{aligned}$$

ולכן אם נשאיף $n\to\infty$ נקל כי

$$p_{ij}=\frac{\mu_j}{\mu_i}p_{ij}$$

כלומר

$$\mu_ip_{ij}=\mu_jp_{ji}$$

ולכן השרשרת הפיכה בזמן.

עכשיו נסתכל על שני מקרים שעבורם ברור כי השרשרת הפיכה בזמן. במקרה הראשון זה ינבע מהתנאי של קולמוגורוב ובמקרה השני זה ינבע מההגדרה.

אם כן המקרה הראשון הוא כאשר לכל i,j מתקיים כי או ש- $p_{ij}=p_{ji}=0$ או ש- $p_{ij},p_{ji}>0$. זה תנאי הכרחי מכיוון שאם אחד מהם הוא אפס והשני הוא לא אז לא יתכן כי $\mu_ip_{ij}=\mu_jp_{ji}$ מכיוון ש- $\mu_i,\mu_j>0$. בנוסף נניח כי הגרף שמתקבל אם נחבר קשת בין הקדקדים i,j כאשר $p_{ij},p_{ji}>0$ ולא נחבר קשת כאשר $p_{ij}=p_{ji}=0$ הוא עץ (קשיר). דהיינו, על פני גרף זה ניתן להגיע מכל קדקוד לכל קדקוד (וגם לחזור) ואין בגרף זה מעגלים. במקרה זה כל מסלול שמוביל מ-i

וחזרה ל-i עובר על כל קשת מספר זוגי של פעמים (שיכול להיות גם אפס). פעם בכיוון הלוך ופעם בכיוון חזור. לא יתכן שנעבור מספר אי זוגי של פעמים כי אז המשמעות תהיה שיש דרך אלטרנטיבית לחזור ל-i, כלומר, בגרף יש מעגל. לכן לכל ℓ, m $p_{\ell m}$ יופיע בדיוק אותו מספר הפעמים ש-$p_{m\ell}$ יופיע ולכן אם נשנה את הכיוון זה לא ישנה את המכפלה של כולם. מכאן נובע כי

טענה: כל שרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית עם גרף מעברים מצורה של עץ היא הפיכה בזמן.

דוגמה: מהלך מקרי על המספרים השלמים האי שליליים עם $p_i > 0$לכל $i \geq 0$ ו-$q_i > 0$ לכל $i \geq 1$ המקיים כי

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i = \infty$$

כאשר

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} & i \geq 1 \end{cases}$$

נניח כי מרחב המצבים הוא סופי וכי $w_{ij} \geq 0$ הם מספרים המקיימים $w_{ij} = w_{ji}$ ונניח כי לכל $i \neq j$ קיימים n ו-$i_1, \ldots, i_{n-1}$ כך ש-

$$w_{ii_1}, \ldots, w_{i_{n-1}j} > 0$$

(כדי שהשרשרת תהיה בלתי פריקה) נניח כי

$$p_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_m w_{im}}$$

דהיינו, יש לנו גרף עם קשתות בין הקדקודים ומשקלות $w_{ij} = w_{ji}$ על הקשתות. מכיוון שכך, אפשר להתייחס לגרף זה כגרף לא מכוון. הסיכוי לעבור מ-i ל-j הוא פרופורציונלי למשקל שעל הקשת שמחברת בין i ו-j. אם נסמן

$$\pi_j = \frac{\sum_i w_{ij}}{\sum_\ell \sum_m w_{\ell m}}$$

אז קל לבדוק כי מהסימטריה נובע כי

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

ולכן זוהי שרשרת הפיכה בזמן ו-π_j היא בהכרח ההתפלגות הסטציונרית שלה. כאשר מרחב המצבים אינו סופי אז יש לדרוש כי $\sum_j w_{ij} < \infty$ לכל i כדי ש-p_{ij} תהיה מוגדרת. במקרה זה יש לדרוש כי השרשרת נשנית ואז ניקח

$$\mu_j = \sum_i w_{ij}$$

ונקבל כי

$$\mu_i p_{ij} = \mu_j p_{ji}$$