,

1 משתנים מקריים בדידים

1.1 משתנה גאומטרי $X \sim Geo(p)$

X מ״מ מקרי נתמך על השלמים כלומר הטווח של X הוא $\mathbb{N}$

טענה 1.1 פונק הסתברות נק: $p_n(X) = \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$

טענה 1.2 פונק הסתברות מצטברת: $F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - (1-p)^n$

טענה 1.3 תוחלת של משתנה גאומטרי: $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = \frac{1}{p}$

טענה 1.4 שונות של משתנה גאומטרי: $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

טענה 1.5 פונק יוצרת מומנטים של התפלגות גאומטרית

.1

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^n(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} pe^t(e^t - pe^t)^{n-1} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

1.2 התפלגות ברנולי $X \sim Ber(p)$

טענה 1.6 פונ הסתברות נק:

נאמר שמ"מ X מתפלג על פי התפלגות ברנולי עם סיכוי הצלחה p ונכתוב

$$p_X(0) = 1 - p \quad p_X(1) = P$$

נכתוב $X \backsim Ber(p)$
הטווח של ברנולי הוא $\{0, 1\}$

טענה 1.7 תוחלת על מ״מ ברנולי $\mathbb{E}(X) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$

טענה 1.8 שונות של מ״מ ברנולי $Var(X) = p(1-p)$

טענה 1.9 פוק יוצרת מומנטים של מ״מ **ברנולי** $X \sim Ber(p)$ היא

$$\mathbb{E}(e^{tx}) = pe^t + 1 - p$$

1.3 התפלגות אחידה $X \sim Unif([n])$

טענה 1.10 פונק הסתברות נק :

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$מרחב הסתברות נאמר שX מ"מ המוגדר על Ωמתפלג אחיד אם קיים n
כך שהטווח שלו הוא קבוצה בת nאיברים. ששמה הקבוצה S וכן פונק ההתפלגות הנק שלו מקיימת
לכל $s \in S$בטווח

$$p_X(s) = \frac{1}{n}$$

s מייצג כאן יחידון קרי $\{s\} \in S$
ונסמן $X \sim U(\{1, \ldots, n\})$

טענה 1.11 תוחלת של התפלגות יחידה $\mathbb{E}(X) = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2}$

טענה 1.12 שונות של התפלגות יחידה $Var(X) = \sum_{n \in [\mathbb{N}]} n^2 \cdot \mathbb{P}(X = n) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}$

טענה 1.13 פונק התפלגות מצטברת $F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i) = \frac{k}{n}$
כאשר n זה הגודל של Ω

טענה 1.14 פונק יוצרת מומנטים של התפלגות אחידה

1.4 התפלגות בינומית$X \sim Bin(n, p)$

טענה 1.15 פונק התפלגות נק

הגדרה:

נאמר ש מ"מ X מתפלג לפי התפלגות בינומית על N ניסיונות עם סיכוי הצלחה p
ונכתוב $X \sim Bin(N, p)$ אם לכל $n \in \{0, \ldots, N\}$ מתקיים $p_x(n) = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} p^n(1-p)^{N-n}$
כאן מתוארת פונק התפלגות נק
הערות

1. אם $N = 1$ נקבל התפלגות ברנולי עם סיכוי הצלחה p
2. נשים לב כי פונק התפלגות בינומית נראת כך:

$$\mathbb{P}(X \in \{0 \ldots N\}) = \sum_{n=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} p^n(1-p)^{N-n} = (p + (1-p))^N = 1$$

טענה 1.16 תוחלת של משתנה בינומי $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^n(1-p)^{N-n} = Np$

טענה 1.17 פונ מצטברת של משתנה בינומי :

טענה 1.18 שונות של משתנה בינומי $Var(X) = \sum_{n=1}^{N} Var(Y_n) = Np(1-p)$

טענה 1.19 פונק יוצרת מומנטים של התפלגות בינומית

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} e^{nt} p^n (1-p)^{N-n} = (pe^t + 1 - p)^n$$

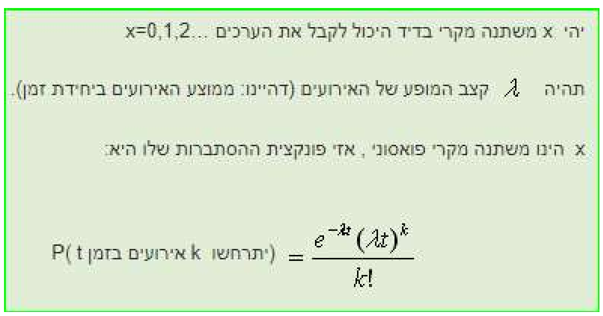
1.5 התפלגות פואסונית $X \sim Po(\lambda)$

טענה 1.20 פונק הסתברות נק

נאמר שמ"מ Xמתפלג פואסון לפי התפלגות פואסון עם שכיחות λונכתוב $X \sim Po(\lambda)$ אם לכל $n \in \mathbb{N}_0$ מתקיים כי

$$p_X(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

טענה 1.21 נשים לב כי


יהי x משתנה מקרי בדיד היכול לקבל את הערכים ...x=0,1,2

תהיה λ קצב המופע של האירועים (דהיינו: ממוצע האירועים ביחידת זמן).

x הינו משתנה מקרי פואסוני , אזי פונקצית ההסתברות שלו היא:

$$P(\text{יתרחשו } k \text{ אירועים בזמן } t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

איור 1:

טענה 1.22 פונק התפלגות מצטברת:

טענה 1.23 תוחלת: $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda$

טענה 1.24 שונות : $Var(X) = \lambda$

טענה 1.25 פוק יוצרת מומנטים של התפלגות פואסון

$$\mathbb{E}(e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

2 משתנים מקריים רציפים

2.1 התפלגות אחידה

הגדרה 2.1 התפלגות אחידה

יהא $[a,b] \subset \mathbb{R}$ קטעץ נאמר שלמ"מ X התפלגות אחידה על $[a,b]$ ונכתוב$X \sim Unif([a,b])$ אם צפיפותו היא

$$f_X(x) = \frac{1([a,b])(x)}{b-a}$$

טענה 2.2 תכונות של התפלגות אחידה

יהי X מ"מ $X \sim Unif([a,b])$ אזי מתקיים

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t \le b \\ 1 & t > b \end{cases} \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2.2 התפלגות מעריכית

הגדרה 2.3 התפלגות מעריכית

נאמר למ"מ X יש התפלגות מעריכית עם פרמטר λ ונכתוב $X \sim Exp(\lambda)$
אם צפיפותו היא

$$f_X(x) = 1([0,\infty))(x)\lambda e^{-\lambda x}$$

טענה 2.4 תכונות של התפלגות מעריכית

$$F_X(t) = max(1 - e^{-\lambda t}, 0) \qquad \mathbb{E}(X) = 1/\lambda$$

$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ עבור $t < \lambda$ $\qquad Var(X) = 1/\lambda^2$

2.3 התפלגות נורמלית

הגדרה 2.5 התפלגות נורמלית

נאמר שמ"מ X מתפלג נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2 ונכתוב $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
אם צפיפותו היא

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

אם $\mu = 0$ ו $\sigma = 1$ נאמר שX נומרלי סטנדרטי
התפלגות נורמלית דומה להתפלגות בימונית עבור מספר רב של ניסויים והיא מתארת
מ"מ אשר נקבעים כסכום של מספר רב של גורמים ב"ת בקירוב !
נסמן את פונק ההתפלגות המצטברת של $X \sim N(0,1)$
ב $\phi(x) = P(X \le x)$

טענה 2.6 יהי $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אזי

$$F_X(t) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \qquad E(X) = \mu$$

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \qquad Var(x) = \sigma^2$$

כן לכל $\beta \in \mathbb{R}$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים $\alpha X + \beta \sim N(\frac{\mu+\beta}{\alpha}, \alpha^2\sigma^2)$
תרגול12
הרצאה 9

הערה 2.7 מתקיים כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ לא צריך לדעת למה

3 סימונים

איור 2:

הגדרה	סימון
$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lvert f(n)\rvert}{g(n)} < \infty$	$f(n) = O(g(n))$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\lvert f(n)\rvert}{g(n)} = 0$	$f(n) = o(g(n))$
$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lvert f(n)\rvert}{g(n)} > 0$	$f(n) = \Omega(g(n))$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\lvert f(n)\rvert}{g(n)} = \infty$	$f(n) = \omega(g(n))$
$f = O(g)$ וגם $f = \Omega(g)$	$f(n) = \Theta(g(n))$