1/6/22

תרגול 10

FW - father wavelet

MW - mother wavelet

איך לבנות wavelet?

צריך למצוא FW φ רק ש:

(i) הפונקציות $\varphi_{0k}(x)=\varphi(x-k)$ הן אורתונורמליות

(ii) $V_j \subset V_{j+1}$ לכל $j\geq 0$

(iii) האיחוד $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ צפוף ב- $L^2(\mathbb{R})$

(iv) תתי המרחבים $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$ מקיימים את התנאי

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

MW כלשהו

(v) ל- ψ יש תכונות מתמטיות נסטטיסטיות

הלמות הבאות עוזרות בפועל למצוא ψ,φ שיקיימו את התנאים.

למה 3.1:

יהי $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ הפונקציות (φ_{0k}) אורתונורמליות אמ"מ טרנספורם פורייה של φ מקיים

$$\sum_k |\hat{\varphi}(\lambda + 2\pi k)|^2 = 1$$

למה 3.2:

נניח ש- (i) מתקיים א"ז $V_j \subset V_{j+1}$ אמ"מ קיימת פונק' עם מחזור 2π, $m_0 \in L^2([0,2\pi])$ רק ש-

$$\hat{\varphi}(\lambda) = m_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

למה 3.3: בסיס wavelet שמקיימים את הרצוי i, ii, iii, iv

יהי φ FW שמייצר MRA של $L^2(\mathbb{R})$

ויהי m_0 הפתרון מהמשוואה של למה 3.2 א"ז

$$\hat{\psi}(\lambda) = m_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\lambda}{2}\right),\quad m_1(\lambda) = \overline{m_0(\lambda+\pi)}\cdot e^{-i\lambda}$$

שאלה 6 Shannons wavelet

לפי תוצאה בעיבוד אותות, מתקיים כי אם f שטרנספורם פוריה שלה $\hat{f}(\lambda)$ מתאפס מחוץ לאינטרוול $[-\pi,\pi]$ מושגרת ע"י המספרים שלמים וערכיה

$$f(x)=\sum_{k} f(k)\frac{\sin(\pi(x-k))}{\pi\cdot(x-k)},\quad x\in\mathbb{R}$$

המטרה בשאלה זו היא להראות שהפונקציה $\varphi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ היא FW

1. הראו כי $\varphi(x)$ הוא טרנספורם פוריה ההפוך של $1\{|\lambda|\le\pi\}$ כלומר

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} 1_{\{|\lambda|\le\pi\}}e^{i\lambda x}\,d\lambda \Rightarrow \hat{\varphi}(\lambda)=1\{|\lambda|\le\pi\}$$

פתרון:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{ix}\left(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi ix}\left(\cos(x\pi)+i\sin(\pi x)-\cos(-\pi x)-i\sin(-\pi x)\right)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

2. הראו כי $\{\varphi_k\}$ הם אורתונורמליים על $\mathbb{R}$

פתרון:

נשתמש בלמה 3.1

$$\hat{\varphi}(\lambda)=1\{|\lambda|\le\pi\}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}(\lambda+2\pi k)|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}1\{|\lambda+2\pi k|\le\pi\}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}1_{\{-\pi-2\pi k\le\lambda\le\pi-2\pi k\}}$$

נשים לב שהקבוצות הבאות זרות

$$A_k=[-\pi(1+2k),\pi(1+2k)]$$

(אפשר להראות באינדוקציה) ולכן עבור λ נתון רק אינדיקטור אחד נדלק ולכן הסכום שווה 1

3. הראו כי $V_j \subset V_{j+1}$

$$\hat{\varphi}(\xi) = 1_{\{|\xi| \le \pi\}} \Rightarrow \hat{\varphi}(\xi/2) = 1_{\{|\xi| \le 2\pi\}}$$

נרצה m_0 שיקיים

$$1_{\{|\xi| \le \pi\}} = m_0(\xi/2) \cdot 1_{\{|\xi| \le 2\pi\}}$$

לכן נדרוש

$$m_0(\xi/2) = 1_{\{|\xi| \le \pi\}}$$

$$\Downarrow$$

$$m_0(\xi) = 1_{\{|\xi| \le \frac{\pi}{2}\}}, \quad \xi \in [-\pi, \pi]$$

אז נרחיב לכל $\xi \in \mathbb{R}$

$$m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{\{|\xi + 2\pi k| \le \pi/2\}}$$

בא שיש אינדיקטור אז האינטגרל סופי ולכן $m_0 \in L^2([0,2\pi])$

4. הראו כי $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ צפוף ב- $L^2(\mathbb{R})$

(ולכן ניתן להסיק כי $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ הוא MRA הנוצר ע"י FW. $\left(\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi(x)}\right)$

פתרון

נרצה להראות שניתן לקרב כל פונקציה $f \in L^2(\mathbb{R})$ ע"י סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n\ge 1} \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$

רמז: אפשר להשתמש בשיוויון:

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

נסמן:

$$\hat{f}_n(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot 1_{\{|\xi| \le n\}}$$

מתקיים כי $\hat{f}_n \in \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ (הוכחה בפתרון של פבל)

$$\|f - f_n\|_2 = \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_2 = \|\hat{f} - \hat{f} 1_{\{|\cdot| \le n\}}\| = \|\hat{f} 1_{\{|\cdot| > n\}}\|$$

הערה: נותר להסביר מדוע $\hat{f}_n \in \bigcup_j V_j$

5. מצאו את ה- MW עבור בסיס Shannon בעזרת למה 3.3

פתרון: נמצא את $\hat{\psi}(\xi)$ בעזרת הלמה ואחר כך נחשב את ψ

עבור: $\hat{\varphi}(\xi) = 1_{\{|\xi| \leq \pi\}}$

$$m_0(\xi) = \sum_k 1_{\{|\xi + 2\pi k| < \frac{\pi}{2}\}}$$

$$\hat{\psi} = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)} e^{-i\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{array}}$$

$$= e^{-\frac{i\xi}{2}} \sum_k \underbrace{1_{\{|\frac{\xi}{2}+\pi+2\pi k| \leq \frac{\pi}{2}\}}}_{-\pi(4k+3) \leq \xi < \pi(-4k-1)} \cdot \underbrace{1_{\{|\xi| \leq 2\pi\}}}_{-2\pi < \xi < 2\pi} =$$

$$-\pi(4k+3) \leq \xi < \pi(-4k-1) \cap -2\pi < \xi < 2\pi$$

האינדקסים היחידים שלא מתאפסים הם עבור $k=0$, $k=-1$

$k=0: [-3\pi, -\pi]$ $\quad k=-1: [\pi, 3\pi]$

$$= e^{-\frac{i\xi}{2}}\left(1_{\{-2\pi < \xi < -\pi\}} + 1_{\{\pi < \xi < 2\pi\}}\right)$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi$$

שאלה 7

הראו כי Daubechies wavelets עבור $N=1$ מתלכד עם בסיס Harr

פתרון:

משפחה של wavelets נוצרת ע"י $m_0(\xi)$

שמקיימים $|m_0(\xi)|^2 = C_N \int_{\xi}^{\pi} (\sin(x))^{2N-1} dx$

כאשר C_N נבחר רק e^{ξ} $m_0(0)=1$

$$\Rightarrow |m_0(\xi)|^2 = c_1\int_\xi^\pi \sin(x)\,dx = -c_1\left(\cos(\pi) - \cos(\xi)\right) =$$

$$= c_1\left(1+\cos(\xi)\right)$$

$$1 = |m_0(0)|^2 = c_1\left(1+\cos(0)\right) \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

לכן

$$\frac{1}{2}\left(1+\cos(\xi)\right) = \frac{1}{4}\left(2+2\cos(\xi)\right) = \frac{1}{4}\left(2+e^{i\xi}+e^{-i\xi}\right) =$$

זהות ש $2\cos(\xi)$

$$= \left(\frac{1+e^{i\xi}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right) = \left|\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right|^2$$

$z\in\mathbb{C}$ - מרוכב

$$|z|^2 = \bar{z}\cdot z$$

ראינו בכיתה שניתן לשחזר את $\hat{\varphi}$ באופן הבא

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

$$\prod_{j=1}^{N} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \prod_{j=1}^{n}\frac{1+e^{-i\frac{\xi}{2^j}}}{2} = 2^{-n}\prod_{j=1}^{n} 1+e^{-i\frac{\xi}{2^j}} =$$

נכפיל ונחלק ב- $\left(1-e^{-i\frac{\xi}{2^j}}\right)$

$$= 2^{-n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-e^{-i\frac{\xi}{2^{j-1}}}}{1-e^{-i\frac{\xi}{2^j}}} = 2^{-n}\cdot\frac{1-e^{-i\xi}}{1-e^{-i\frac{\xi}{2^n}}} =$$

סכום של טור טלסקופי

$1-e^{-i\xi}$ ← האיבר הראשון

$1-e^{-i\frac{\xi}{2^n}}$ ← האיבר האחרון

$$\frac{1-e^{-i\xi}}{\left(1-e^{-i\xi 2^{-n}}\right)/2^{-n}}$$

$$\frac{1-e^{-i\xi 2^{-n}}}{2^{-n}} = \frac{e^0 - e^{-i\xi 2^{-n}}}{2^{-n}} \longrightarrow -f'(0)$$

$$h = 2^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$f(x) = e^{-i\xi x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}$$