# הסתברות 1 ־ תרגול 10

20 בדצמבר 2018

## התכנסות של סדרות מאורעות

תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות . נגדיר

$$\{A_n \text{a.e.}\} = \liminf_n A_n := \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\geq n} A_m$$
$$= \{\text{points which belong to all but finitely many } A_n\}$$

הגבול מסוים

$$\{A_n \text{i.o.}\} = \limsup_n A_n := \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{m\geq n} A_m$$
$$= \{\text{points which belong to infinitely many } A_n\}$$

נשים לב כי

$$\{A_i \text{ i.o.}\}^c = \{A_i^c \text{ a.e.}\}$$

גם לא קשה לראות ש $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.
כפי שאתם בוודאי מצפים, קיים קשר בין גבולות עליונים/תחתונים של קבוצות לגבולות עליונים/תחתונים של מספרים:
לכל $n$ נגדיר את $\chi_{A_n}$ ־ הפונקציה המציינת של הקבוצה $A_n$. מתקיים (תרגיל בית)

$$\liminf_n \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_n A_n}$$

## הלמה הראשונה של בורל־קנטלי

עד כה נתנו הגדרות תורת קבוצתיות. נראה כעת כיצד הגבולות הללו משחקים תפקיד בתורת ההסתברות. ככלל הטענה שמהו מתקיים כ.ת. או אינסוף פעמים היא טענה הסתברותית מובהקת. אנו נראה שזה גם משחק תפקיד מרכזי כאשר דנים בהתכנסויות של משתנים מקריים.

**טענה 0.1** תהי $A_i$ סדרת מאורעות. אם $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ אז $P(A_i \text{ i.o.}) = 0$.

**הערה:** אם $P(A_i \text{ i.o.}) = 0$ אז $A_i$ מתקיים לכל היותר מספר סופי של פעמים. לכן הגיוני לצפות שההסתברויות $P(A_n)$ ישאפו לאפס. זה דוקא ממש לא מספיק, אנו דורשים גם קצב התכנסות מספיק חזק כך שטור ההסתברויות יתכנס. במקרה שהטור יתבדר הטענה תתהפך על פיה (אם נניח שהמאורעות ב"ת).

$$2^n \cdot \frac{1}{2^n+1} + (-1)\frac{2^n}{2^n+1} = \frac{2^n}{2^n+1} - \frac{2^n}{2^n+1} = 0 //$$

**דוגמא 1:**

בדוגמא זו נראה סדרה של משחקים שבכל אחד מהם תוחלת הרווח היא אפס אך בכל זאת ניתן לצפות לרווח חיובי מהמשחק.
נניח במשחק ה $n$ מפסידים $2^n$ ש"ח בהסתברות $\frac{1}{2^n+1}$ ומרוויחים שקל אחד בהסתברות $\frac{2^n}{2^n+1}$. בדיקה פשוטה מראה שההתפלגות מוגדרת היטב ותוחלת הרווח היא אפס. ובכל זאת, אם ניקח לכל $n$ את המאורע $A_n$ ־ של הפסד במשחק ה $n$ . נקבל

$$\sum P(A_n) = \sum_n \frac{1}{2^n+1} < \infty$$

ולכן מהלמה הראשונה של בורל קנטלי $P(A_n \text{ i.o. })$=0 ולכן בהסתברות 1 נפסיד לכל היותר מספר סופי של פעמים. ומכאן שנרוויח $\infty$ שקלים. אין כאן סתירה לכך שתוחלת כל משחק היא 0, כי לינאריות התוחלת נכונה (עבור סכום אינסופי) רק תחת הנחות שלא מתקיימות במקרה זה.
מסקנה מעשית: אם טור ההסתברויות להפסד מתכנס מספיק מהר כדאי להתחיל להמר.
(אבל זה כנראה אף פעם לא קורה )

## הלמה השנייה של בורל־קנטלי

**טענה 0.2** יהיו $A_i$ סדרת מאורעות **ב"ת**. אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ אזי $P(A_n \text{ i.o.})$=1.

הערות:

- קיבלנו משתי הלמות שעבור $A_i$ **ב"ת** יתכנו רק 2 אפשרויות. כלומר $P(A_n \text{ i.o.})\in \{0,1\}$. זה נקרא לעיתים חוק האפס־אחת של קולמוגורוב. בדוגמאות רבות $A_n$ תלויים בפרמטר נוסף (למשל $P(A_n) = \frac{1}{n^\alpha}$ ) וכאשר עוברים ערך קריטי של הפרמטר ההסתברות קופצת מ 0 ל 1.
- אתגרים בהפעלת הלמות:
  - בחירה נכונה של הקבוצות $A_n$ בהתאם לבעיה.
  - איך להתמודד עם מאורעות שאינם ב"ת.
  - הערכות זנב (כלומר לראות מתי טורים מסוימים מתכנסים או מתבדרים)



**דוגמא 2**

נתבונן בסדרה אינסופית של הטלות מטבע (לא הוגן) ב"ת $X_n \sim Ber(p_n)$ ונניח כי $p_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ ל $\alpha > 0$. נסמן ב $A$ את המאורע בו כל ההטלות יוצאות עץ. נוכיח כי

$$P(A) > 0 \iff \alpha > 1$$

$X_n \sim ber(p_n)$

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{עץ} \\ 0 & \text{פלי} \end{cases}$$

$P(\text{עץ}) = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

$P(\text{פלי}) = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

כל ההטלות עץ $= A$

כל ההטלות פלי $= A^c$

$A \Rightarrow B$

$P(A) > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

לא $A$ $\Leftarrow$ לא $B$

כס $P(A) \leq 0 \Leftarrow \alpha \leq 1$

$P(A) = 0$

$A_n$ מייצג סדרת הטלות שיצא לי פלי

מה כלל המאורע $A$ ?

**הוכחה:**

ראשית, נסמן ב

$$A_n = \{X_n = 0\}, \quad P(A_n) = 1 - p_n = \frac{1}{(1+n)^{\alpha}}$$

את המאורע של כשלון בשלב ה $n$.

נניח כי $\alpha \leq 1$. אזי

$$\sum P(A_n) = \infty$$

ולכן ($A_n$ ב"ת) מהלמה השנייה של בורל קנטלי $P(\limsup_n A_n) = P(\{A_n \text{ i.o.}\}) = 1$

יצא פלי

ולכן בהסתברות 1 נכשל אינסוף פעמים ובפרט $P(A) = 0$.

לכיוון השני, נניח כי $a > 1$ , אזי

$$\sum P(A_n) < \infty$$

ולכן מהלמה הראשונה של בורל קנטלי $P(A_n \text{ i.o.}){=}0$. ומאחר ו $\{A_n\, i.o.\}^c = \{A_n^c\, a.e\}$ נסיק ש

$$P(\{A_n^c\, a.e.\} = 1$$

כלומר בהסתברות 1 נצליח בכל ההטלות פרט למספר סופי. אבל זה עדיין לא מספיק . אנחנו רוצים להראות שבהסתברות חיובית כל ההטלות מצליחות (ולא רק כולם פרט למספר סופי).

ראשית, נוכיח את הלמה השימושית הבאה:

**למה 0.3** נניח כי $P(\{B_n \text{ a.e.}\}){=}1$ אזי קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $P(\cap_{n \geq N_0} B_n) > 1/2$ (כלומר בהסתברות גדולה מחצי כל הניסויים החל מ $N_0$ מצליחים).

**הוכחה:** ע"פ הגדרה

$$1 = P(\{B_n \text{ a.e.}\}){=}\text{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m \geq n} A_m){=}\text{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n)$$

כאשר $C_n = \cap_{m \geq n} A_m$ . נשים לב כי המאורעות $C_n$ עולים (כי חותכים פחות קבוצות) ולכן מרציפות המידה

$$1 = \lim_n P(C_n)$$

בפרט, מהגדרת הגבול החל מ $N_0$ מסוים $P(C_n) > 1/2$ כנדרש. ■

כעת נוכל לסיים את ההוכחה. מהלמה קיים $N_0$ כך ש $P\left(\cap_{n \geq N_0} A_n^c\right) > \frac{1}{2}$. בנוסף, מאחר וההטלות ב"ת

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\cap_{n \geq N_0} A_n^c \cap \left(\cap_{n < N_0} A_n^c\right)\right) \\ &= P\left(\cap_{n \geq N_0} A_n^c\right) \cdot P\left(\cap_{n < N_0} A_n^c\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \Pi_{n=1}^{N_0} p_n > 0 \end{aligned}$$

כנדרש.

רציפות של פונק' הסתברות

של מאורעות עולים

$P(D_n \; i.o) = 0$

לכל אחד קיים m שקיים את $D_n$

היות והרצף הבא הסתברותו $\underline{\underline{0}}$ ? יש טעו'

סופי של אנסיים כשלון בזוגות

## דוגמא 2 - המשך

נגדיר את המאורע $D_n$- בהטלה ה $n$ נכשלים והכשלון הבא בתור הוא בהפרש זוגי. נוכיח כי אם $a \le 1/2$

$$P(\{D_n \, i.o.\}) = 1$$

**הוכחה:**

ראשית, נעיר כי אם $\alpha > 1$ אז ראינו ש $\sum_n P(A_n) < \infty$ ולכן מקבלים 0 רק במספר סופי של הטלות. ובפרט $P(\{D_n \, i.o.\}) = 0$.

נניח כי $\alpha \le 1/2$ נרצה להיעזר בלמה של בורל קנטלי אבל הבעיה היא שהמאורעות $D_n$ אינם ב"ת. בנוסף, קשה לאפיין אותם ולחשב את הסתברותם. ניעזר בטריק שכדאי לזכור:

$$W_n = \{\underset{\text{כשלון}}{X_{3n} = 0}, \underset{\text{הצלחה}}{X_{3n+1} = 0}, \underset{\text{כשלון}}{X_{3n+2} = 0}\}$$

ניצור סדרה של מאורעות $W_n$ כך ש :

1. $\sum_n P(W_n) = \infty$
2. $W_n$ ב"ת.
3. $\{W_n \, i.o.\} \subset \{D_n \, i.o.\}$ כלומר התרחשות אינסופית של המאורעות החדשים גוררת את זו של הקודמים.

אכן אם נמצא סדרה כזו נקבל את הטענה מהלמה השנייה של בורל קנטלי וממונוטוניות פונקציית ההסתברות.

נגדיר אם כן את $W_n$ להיות המאורע המציין רצף של 010 המתחיל במקום ה $3n$. אזי $W_n$ ב"ת כי הם מתייחסים להטלות שונות. בנוסף מאחר ש $W_n$ מציין רצף מהסוג המבוקש (אפסים בהפרש זוגי) נסיק שגם תנאי 3 מתקיים. נותר להוכיח את תנאי 1 :

$$\begin{aligned} P(W_{3n}) &= (1 - p_{3n})(1 - p_{3n+2})p_{3n+1} \\ &= \frac{1}{(3n+1)^\alpha}\frac{1}{(3n+3)^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(3n+2)^\alpha}\right) \ge C\frac{1}{(3n+3)^{2\alpha}} \end{aligned}$$

ולכן ממבחן השוואה לטורים ומכך ש $\alpha \le 1/2$ מתקיים $\sum P(W_{3n}) = \infty$.

## דוגמא 3

יהי $X_i \sim Bin(i, 1/2)$ ויהיו $A_i = \{X_i > 2E(X_i)\}$ אזי $P(\{A_n \, i.o.\}) = 0$.

נראה זאת:

נשים לב $X_i \sim \sum_{k=1}^{i} Y_k$ כאשר $Y_k \sim Ber(1/2)$ ב"ת.ניעזר בא"ש הופדינג, ניקח לכך $Z_k = \frac{1/2 - Y_k}{3/2}$ ו $S_i = \sum_{k=1}^{i} Z_k$ אזי

$$S_i = \sum_{k=1}^{i}\frac{Y_k - 1/2}{3/2} = \frac{2}{3}X_i - \frac{i}{3}$$

ומכאן ($E(X_i) = i/2$)

$$P(A_i) = P(X_i > i) = P(S_i > \frac{2i}{3} - \frac{i}{3}) \le \exp(-\frac{i^2}{18i}) = e^{-i/18}$$

ומכאן ש $\sum_i P(A_i) < \infty$ ומהלמה הראשונה נסיק את הנדרש.