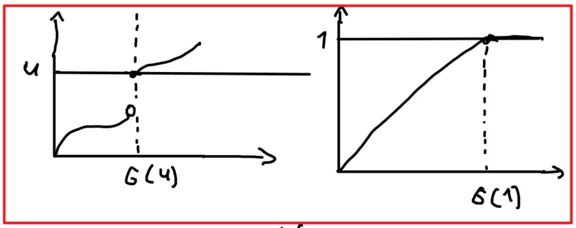

דוגמאות ואינטואיציה

האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה
הסתברות ותהליכים מקריים
מורה הקורס: עופר קלע

הפוך למחצה של פונקצית התפלגות:

נניח כי F היא פונקצית התפלגות. דהיינו, רציפה מימין, לא יורדת ומקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$ כי $0 \le F(x) \le 1$. נגדיר

$$\begin{aligned} F(\infty) &= 1 \\ F(-\infty) &= \lim_{x \downarrow -\infty} F(x) \\ F(\infty-) &= \lim_{x \uparrow \infty} F(x) \end{aligned}$$

כפי שראינו בשיעורים קודמים, יתכן כי $F(-\infty) > 0$ וגם יתכן כי $F(\infty-) < 1$.

לכל $0 \le u \le 1$ נסמן

$$G(u) = \inf\left\{z | z \in \bar{\mathbb{R}}, F(z) \ge u\right\}$$

כאשר האינפימום על קבוצה ריקה מוגדר להיות ∞. ברור כי

$$G(0) = -\infty$$

לעומת זאת אם a הוא כך ש־$F(a) = 1$ ו־$F(x) < 1$ לכל $x < a$ אז $G(1) = a$. שימו לב כי a יכול להיות סופי או ∞ (אם $F(x) < 1$ לכל $x < \infty$) או $-\infty$ (אם $F(x) = 1$ לכל $x > -\infty$ ואז גם עבור $x = -\infty$).

כרגע אנו מתייחסים ל־F כפונקציה שמקיימת תכונות מסויימות. אנו יודע כי כל פונקצית התפלגות של משתנה מקרי (לא בהכרח סופי בהסתברות אחת) מקיימת את התכונות הללו. אנחנו עדיין לא יודעים כי לכל פונקציה כזו קיים משתנה מקרי שזו פונקצית ההתפלגות שלו. אך לא לדאוג, גם זה יגיע.

G נקראת הפונקציה ההפוכה למחצה של F. בכל הסעיפים הבאים $u \in [0,1]$ ו־$x \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. קודם כל ברור כי $G : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$, בעוד ש־$F : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$.

2. מכיוון ש־$F(x) = F(x)$ לכל x אז $x \in \{z | F(z) \ge F(x)\}$ ולכן

$$x \ge \inf\left\{z | z \in \bar{\mathbb{R}}, F(z) \ge F(x)\right\} = G(F(x))$$

מכאן שלכל $x \in \bar{\mathbb{R}}$ (כולל $x = \infty$ ו־$x = -\infty$) מתקיים כי $G(F(x)) \le x$.

3. אם $G(u) < \infty$ (כולל המקרה עבורו $G(u) = -\infty$) אז קיימת תת סדרה z_n של מספרים סופיים שנמצאים ב־$\left\{z | z \in \bar{\mathbb{R}}, F(z) \ge u\right\}$ ששואפת ל־$G(u)$ ובפרט $G(u) \ge z_n$ לכל n (כי $G(u)$ הוא האינפימום). ראינו שזה נכון לכל אינפימום על קבוצת מספרים כלשהי. מהרציפות מימין ומכך ש־$u \ge F(z_n)$ לכל $n \ge 1$ נובע כי

$$F(G(u)) = \lim_{n \to \infty} F(z_n) \ge u$$

ולכן לכל $0 \le u \le 1$ מתקיים כי $F(G(u)) \ge u$.

4. נניח כי $u_1 \le u_2$ אז ברור כי

$$\inf\left\{z|z\in\bar{\mathbb{R}},F(z)\ge u_2\right\}\subset\inf\left\{z|z\in\bar{\mathbb{R}},F(z)\ge u_1\right\}$$

ולכן האינפימום של הקבוצה הימנית קטן או שווה מזה של השמאלית. דהיינו

$$G(u_1)\le G(u_2)$$

לכן G היא פונצקיה לא יורדת.

5. נניח כי $u\le F(x)$ אז מסעיף 2 ומהמונוטוניות של G נובע כי

$$G(u)\le G(F(x))\le x$$

כמו כן, אם נניח כי $G(u)\le x$ אז מסעיף 3 ומהמונוטוניות של F נובע כי

$$u\le F(G(u))\le F(x)$$

דהיינו, קיבלנו כי $u\le F(x)$ אם ורק אם $G(u)\le x$ ולכן מתקיים גם כי $u>F(x)$ אם ורק אם $G(u)>x$.

6. עכשיו נשים לב כי

$$\sup\left\{z|z\in\bar{\mathbb{R}},F(z)<u\right\}=\sup\left\{z|z\in\bar{\mathbb{R}},z<G(u)\right\}=G(u)$$

השוויון האחרון נכון גם אם $G(u)=-\infty$. זאת מכיוון שאז הקבוצה $\left\{z|z\in\bar{\mathbb{R}},z<G(u)\right\}$ היא ריקה ובמקרה זה הסופרמום מוגדר להיות מינוס אינסוף. כאשר $G(u)=\infty$ השוויון גם כן נכון כי הסופרמום על כל המספרים שקטנים מאינסוף הוא אינסוף. מכאן שיש לנו שתי הגדרות שקולות ל־$G(u)$:

$$G(u)=\inf\left\{z|z\in\bar{\mathbb{R}},F(z)\ge u\right\}=\sup\left\{z|z\in\bar{\mathbb{R}},F(z)<u\right\}$$

7. באופן דומה ל־6 נקבל כי

$$\begin{aligned}\sup\{u|G(u)\le x,u\in[0,1]\} &= \sup\{u|u\le F(x),u\in[0,1]\}=F(x)\\ \inf\{u|G(u)>x,u\in[0,1]\} &= \inf\{u|u>F(x),u\in[0,1]\}=F(x)\end{aligned}$$

במשוואה התחתונה, כאשר $F(x)=1$ אז הקבוצה $\{u|u>F(x),u\in[0,1]\}$ היא ריקה ואז האינפימום מוגדר להיות האיבר הגדול ביותר בקטע $[0,1]$ דהיינו, 1 (ולא אינסוף).

8. מכיוון ש־G מונוטונית אז הגבול משמאל של G בנקודה כלשהי u הוא גם הסופרמום על כל הערכים שקטנים מ־u. עכשיו, נסתכל על

$$\begin{aligned}A &= \left\{(v,z)|z\in\bar{\mathbb{R}},F(z)<v,v<u\right\}\\ A_z &= \{v|F(z)<v<u\}\\ A_v &= \left\{z|z\in\bar{\mathbb{R}},F(z)<v\right\}\end{aligned}$$

אז לכל $0 < u \le 1$

$$\begin{aligned}\lim_{v\uparrow u} G(v) &= \sup_{1\le v<u} G(v) = \sup_{1\le v<u}\sup_{z\in A_v} z \\ &= \sup_{(v,z)\in A} z = \sup_{z\in A_u}\sup_{v\in A_z} z\end{aligned}$$

דהיינו שינינו את הסדר שבו אנו מחשבים את הסופרמום. בתחילת הקורס ראינו כי זה מותר. במילים אחרות, תחילה לעשות סופרמם על כל ה־z עבורם $F(z) < v$ ואחר כך על כל ה־v עבורם $u < v$ זה כמו לעשות סופרימום על פני כל ה־(v,z) כך ש־$F(z) < v < u$. אם נחליף את הסדרה, לכל z כך ש־$F(z) < u$ קודם ניקח את הסופרמום על v שנמצא בין $F(z)$ ו־u ולאחר מכן ניקח את הסופרימום על שמקיים $F(z) < u$. עכשיו, לכל z עבורו מתקיים $F(z) < u$ ברור כי

$$\sup_{v\in A_z} z = z$$

מכיוון ש־z אינו תלוי בערך של v. ומכאן קיבלנו כי

$$\sup_{z\in A_u}\sup_{v\in A_z} z = \sup_{z\in A_u} z = G(u)$$

לסיכום

$$\lim_{v\uparrow u} G(v) = G(u)$$

וקיבלנו כי G היא פונקציה רציפה משמאל.

9. הנה יישום מעניין למה שהראינו עד עכשיו. נניח כי $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ וגדיר משתנה מקרי

$$X = \begin{cases} G(U) & U \in [0,1] \\ 0 & U \notin [0,1] \end{cases}$$

אז מסעיף 5 מכך ש־$P(U \notin [0,1]) = 0$ ומכך ש־$F(x) \in [0,1]$ נובע כי

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = P(G(U) \le x) \\ &= P(G(U) \le x, U \in [0,1]) = P(U \le F(x), U \in [0,1]) \\ &= P(U \le F(x)) = F(x) \end{aligned}$$

קיבלנו איפה כי לכל פונקציה F המקיימת את התכונות של פונקציית התפלגות קיים משתנה מקרי X שזו ההתפלגות שלו. כמובן שיש להסביר מדוע קיים מרחב הסתברות ומשתנה מקרי המתפלג אחיד, אך לא ניכנס כאן לכאילו ניואנסים (לא ממש ניואנסים ☺). זה ממילא יתברר קצת יותר מאוחר.

10. עכשיו, נניח כי F רציפה על $\mathbb{R}$ ומתקיים בנוסף כי

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow\infty} F(x) &= 1 \\ \lim_{x\downarrow-\infty} F(x) &= 0 \end{aligned}$$

אז לכל $0 < u < 1$ מתקיים כי $u \in \mathrm{Im}(F)$ ולכן לכל u כזה $F(G(u)) = u$. עכשיו נניח כי X הוא משתנה מקרי בעל התפלגות F. כיצד מתפלג $F(X)$. אם כן, אם $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ אז $Y = G(U)1_{(0,1)}(U)$ מתפלג כמו X ולכן לכל $0 < u < 1$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} P(F(X) \le u) &= P(F(Y) \le u) = P(F(Y) \le u, U \in (0,1)) \\ &= P(F(G(U)) \le u, U \in (0,1)) \\ &= P(U \le u, U \in (0,1)) = P(U \le u) = u \end{aligned}$$

מכיוון ש־$F(X) \in [0,1]$ אז ברור כי לכל $u < 0$ מתקיים כי $P(F(X) \le u) = 0$ ולכל $u > 1$, $P(F(X) \le u) = 1$. מכאן ש־$F(X)$ מתפלג כמו U, דהיינו $\mathrm{U}(0,1)$. אם F אינה רציפה או לא שואפת לאחד או לאפס בגבולות המתאימים התוצאה הזאת אינה נכונה. שימו לב כי אין צורך ש־F תהיה הפיכה, דהיינו יכולים להיות קטעים שבהם F קבועה (לא חד־חד ערכית).

11. הנה יישום נוסף. נאמר כי $F_1 \le_{\mathrm{st}} F_2$ אם לכל $x \in \mathbb{R}$ (מספיק להסתכל על מספרים סופיים) מתקיים כי $F_1(x) \ge F_2(x)$ או באופן שקול, $1 - F_1(x) \le 1 - F_2(x)$. קוראים ליחס הזה "סדר סטוכסטי". אם מדובר במשתנים מקריים אי שליליים המייצגים אורכי חיים של רכיבים כלשהם אז בכל זמן x הסיכוי שרכיב 2 עדיין פועל (אורך החיים שלו גדול מ־x) גדול או שווה מהסיכוי שרכיב 1 עדיין תקין ולכן נעדיף את רכיב 2 על פני רכיב 1. נגדיר את G_1, G_2 את הפונקציות ההפוכות למחצה ביחס ל־F_1, F_2 בהתאמה. נניח כי $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ ונסמן $X_i = G_i(U)1_{[0,1]}(U)$ עבור $i = 1, 2$. אז ההתפלגות של X_i היא F_i (כפי שראינו בסעיף הקודם). מכיוון ש־$F_1(x) \ge F_2(x)$ לכל x, אז לכל $0 \le u \le 1$ מתקיים כי

$$\{z | F_2(z) \ge u\} \subset \{z | F_1(z) \ge u\}$$

ולכן האינפימום על הקבוצה הימנית קטן או שווה מזה של הקבוצה השמאלית. כלומר

$$G_1(u) \le G_2(u)$$

ולכן

$$P(X_1 \le X_2) = P(G_1(U) \le G_2(U), U \in [0,1]) = P(U \in [0,1]) = 1$$

דהיינו קיים מרחב הסתברות עם משתנים מקריים $X_i \sim F_i$ כך ש־$X_1 \le X_2$ בהסתברות אחת. מכאן גם נובע כי אם h היא פונקציה מונוטונית לא יורדת והתוחלות $Eh(X_i)$ מוגדרות אז

$$Eh(X_1) \le Eh(X_2)$$

אך ראינו כי

$$Eh(X_i) \quad = \quad \int_\Omega h(X_i(\omega)) dP(\omega) = \int_{\bar{\mathbb{R}}} h(x) dF_i(x)$$

אם ניקח $h(x) = 1_{(a,\infty)}(x)$ עבור $a \in \mathbb{R}$, אז נשים לב כי h היא פונקציה לא יורדת ומתקיים כי

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} 1_{(a,\infty)}(x) dF_i(x) = 1 - F_i(x)$$

ולכן אם מתקיים כי

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} h(x)dF_1(x) \le \int_{\bar{\mathbb{R}}} h(x)dF_2(x)$$

לכל h לא יורדת עבורה התוחלות מוגדרות אז גם

$$1 - F_1(x) \le 1 - F_2(x)$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. אם כן, קיבלנו כי ההגדרות הבאות הן הגדרות שקולות ליחס סדר סטוכסטי בין שתי התפלגויות F_1, F_2. בבית אתם תיישמו את זה עבור התפלגויות שאתם כבר מכירים.

(א) $1 - F_1(x) \le 1 - F_2(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ (ואז זה בהכרח גם מתקיים עבור $x = \pm\infty$).

(ב) קיים מרחב הסתברות עם משתנים מקריים X_1, X_2 כך ש־$X_i \sim F_i$ עבור $i = 1, 2$ ו־$P(X_1 \le X_2) = 1$.

(ג) לכל פונקציה לא יורדת עבורה התוחלות מוגדרות מתקיים כי

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} h(x)dF_1(x) \le \int_{\bar{\mathbb{R}}} h(x)dF_2(x)$$

נאמר כי $Y \le_{\text{st}} X$ אם ורק אם $F_Y \le_{\text{st}} F_X$. נניח עכשיו כי $X_i \le_{\text{st}} Y_i$, כי $X_1, \dots, X_n$ בלתי תלויים וכי $Y_1, \dots, Y_n$ בלתי תלויים. אז ניקח $U_1, \dots, U_n \sim \mathrm{U}(0, 1)$ ונקבל כי

$$\tilde{X}_i \equiv G_{X_i}(U_i) \le G_{Y_i}(U_i) \equiv \tilde{Y}_i$$

(בהסתברות אחת) כאשר G_{X_i} ו־G_{Y_i} הן הפונקציות ההפוכות למחצה של פונקציות ההתפלגות של X_i ו־Y_i בהתאמה. כמו ראינו קודם, $\tilde{X}_i$ מתפלג כמו X_i ואילו $\tilde{Y}_i$ מתפלג כמו Y_i. עכשיו, מכיוון ש־$U_1, \dots, U_n$ בלתי תלויים, אז $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ בלתי תלויים וכן $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ בלתי תלויים. מכאן שההתפלגות המשותפת של $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ היא כמו ההתפלגות המשותפת של $(X_1, \dots, X_n)$ ובאותו אופן עבור ה־Y־ים. עכשיו, אם $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא פונקציה לא יורדת (בכל המשתנים) אז מתקיים (בהסתברות אחת) כי

$$h(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) \le h(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$$

זאת מכיוון ש־h לא יורדת ו־$\tilde{X}_i \le \tilde{Y}_i$ בהסתברות אחת. אם ניקח תוחלת ונניח כי התוחלות מוגדרות היטב, נקבל כי

$$Eh(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) \le Eh(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$$

מכיוון שווקטור ה־X־ים עם הגל מתפלג כמו זה בלי הגל ואותו הדבר לגבי Y נסיק מכך כי

$$Eh(X_1, \dots, X_n) \le Eh(Y_1, \dots, Y_n)$$

לכל פונקציה לא יורדת h עבורה התוחלות מוגדרות היטב. לבסוף אם $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ לא יורדת ו־$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ לא יורדת אז גם $g(h(x_1, \dots, x_n))$ לא

יורדת בכל המשתנים ולכן המסקנה היא כי לכל g לא יורדת עבורה התוחלות קיימות מתקיים כי

$$Eg(h(X_1,\ldots,X_n)) \le Eg(h(Y_1,\ldots,Y_n))$$

וזה שקול לכך ש־

$$h(X_1,\ldots,X_n) \le_{\mathrm{st}} h(Y_1,\ldots,Y_n)$$

לסיכום, אם $X_1,\ldots,X_n$ בלתי תלויים, $Y_1,\ldots,Y_n$ בלתי תלויים, $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ לא יורדת אז

וגם $X_i \overset{\forall i}{\le} Y_i$

$$h(X_1,\ldots,X_n) \le_{\mathrm{st}} h(Y_1,\ldots,Y_n)$$

ללא הנחת אי התלות זה לא בהכרח נכון.

12. מתי מתקיים כי $F(G(u)) = u$? אם קיים x עבורו $F(x) = u$ אז בפרט $F(x) \ge u$ ולכן $x \ge G(u)$. מכיוון שתמיד מתקיים כי $u \le F(G(u))$ אז מהמונוטוניות של F נובע כי $F(G(u)) \le F(x) = u$ ומכאן ש־$F(G(u)) = u$. קיבלנו איפה כי אם $u \in \mathrm{Im}(F)$ (דהיינו, קיים x עבורו $F(x) = u$) אז $F(G(u)) = u$. אם לעומת זאת $u \notin \mathrm{im}(F)$ אז לא קיים x עבורו $F(x) = u$ ובפרט גם $F(G(u)) \ne u$. מכיוון ש־$u \le F(G(u))$ אז בהכרח חייב להתקיים במקרה זה כי $u < F(G(u))$. לסיכום $u = F(G(u))$ אם ורק אם $u \in \mathrm{Im}(F)$ אחרת מתקיים $u < F(G(u))$.

13. מתי מתקיים כי $G(F(x)) = x$? נניח כי x הוא כך שלכל $y < x$ מתקיים כי $F(y) < F(x)$. אז ברור כי הערך המימלי z עבורו $F(z) \ge F(x)$ הוא בהכרח x. מכאן ש־

$$G(F(x)) = \inf\left\{z | z \in \bar{\mathbb{R}}, F(z) \ge F(x)\right\} = x$$

לחילופין, אם קיים $y < x$ כך ש־$F(y) = F(x)$ אז ברור כי

$$G(F(x)) = \inf\left\{z | z \in \bar{\mathbb{R}}, F(z) \ge F(x)\right\} \le y < x$$

ולכן במקרה זה $G(F(x)) < x$. לסיכום $G(F(x)) = x$ אם ורק אם x היא נקודת עליה משמאל של F אחרת מתקיים $G(F(x)) < x$.

14. אם קיימים $-\infty \le a < b \le \infty$ כך ש־F רציפה ועולה ממש על (a,b) ומתקיים כי

$$\begin{aligned}\lim_{x \downarrow a} F(x) &= 0 \\ \lim_{x \uparrow b} F(x) &= 1\end{aligned}$$

אז

$$F:(a,b) \to (0,1)$$

היא פונקציה רציפה ועולה ממש ולכן חד־חד ערכית ועל ומכאן שיש לה פונקציה הפוכה. כמו כן, במקרה זה לכל $\mathrm{Im}(F) = (0,1)$ וכל הנקודות ב־(a,b) הן נקודות עליה ממש ולכן לכל $u \in (0,1)$ מתקיים כי $F(G(u)) = u$ ולכל $x \in (a,b)$ מתקיים כי $G(F(x)) = x$.

15. אם נרצה שהפונקציה F תהיה הפיכה כפונקציה מ־$[-\infty,\infty]$ ל־$[0,1]$. תנאי הכרחי ומספיק הוא ש־F רציפה ועולה ממש על $\mathbb{R}$ ומקיימת כי

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow-\infty} F(x) &= 0\\ \lim_{x\uparrow\infty} F(x) &= 1\end{aligned}$$

(רציפה מימין במינוס אינסוף ורציפה משמאל באינסוף). במקרה זה גם נקבל $F(G(0))=0$, $F(G(1))=1$ וכן $G(F(\infty))=\infty$ וגם $G(F(-\infty))=-\infty$.

16. נניח עכשיו כי $F \xrightarrow{d} F_n$ ונניח כי G_n ו־G הן הפונקציות ההפוכות למחצה המתאימות. באחד מתרגילי הבית אתם תראו כי תנאי הכרחי ומספיק לכך ש־$F_n \xrightarrow{d} F$ הוא שלכל x סופי (לא רק נקודות רציפות) מתקיים כי

$$F(x-) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x)$$

אנו ניעזר בתנאי הזה כדי להוכיח כי לכל $0<u<1$ מתקיים כי

$$G(u) \le \liminf_{n\to\infty} G_n(u) \le \limsup_{n\to\infty} G_n(u) \le G(u+)$$

ומכאן ש־$G_n(u)\to G(u)$ לכל נקודת רציפות של G. עכשיו לכל פונקציה מונוטונית לכל היות אוסף בן מניה של נקודות אי רציפות. נסמן את האוסף הזה ב־D_G.
אם נגדיר $X_n = G_n(U)1_{(0,1)}(U)$ ו־$X = G(U)1_{(0,1)}(U)$ נקבל כי

$$\{U \notin D_G\} \subset \left\{\exists \lim_{n\to\infty} X_n = X\right\}$$

מכיוון שהסיכוי ש־U שייך לאוסף בן מניה כלשהו הוא אפס (כי הסיכוי שהוא שווה לכל ערך הוא אפס ואיחוד בן מניה של מאורעות שהסתברותם אפס הוא גם מאורע שהסתברותו היא אפס) אז

$$1 = P(U \notin D_G) \le P\left(\exists \lim_{n\to\infty} X_n = X\right)$$

ומכאן ש־

$$X_n \xrightarrow{1} X$$

דהיינו אם $F \xrightarrow{d} F_n$ אז קיים מרחב הסתברות עם משתנים מקריים X_n, X כך ש־$X_n \sim F_n$, $X \sim F$ ו־$X_n \xrightarrow{1} X$.

17. לסעיף הקודם ישנן כמה מסקנות.

(א) אם g היא פונקציה רציפה וחסומה אז גם $g(X) \xrightarrow{1} g(X_n)$ ולכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\int g(x)dF_n(x) = Eg(X_n) \to Eg(X) = \int g(x)dF(x)$$

דהיינו אם $F_n \xrightarrow{d} F$ אז לכל פונקציה רציפה וחסומה g מתקיים

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int g(x)dF_n(x) = \int g(x)dF(x)$$

מתברר שגם ההיפך נכון ומכאן נובע כי התנאי האחרון (שאיפה של תוחלות לכל פונקציה רציפה וחסומה) גורר שאיפה בהתפלגות.

(ב) את כל משפטי הגבול אפשר לתרגם למשפטי גבול לגבי התכנסות בהתפלגות. למשל:

i. משפט ההתכנסות המונוטונית: אם $F_n(0-) = 0$ לכל $n \geq 1$ (התפלגויות של משתנים מקריים אי שליליים) ולכל $n \geq 1$ מתקיים כי $F_n \leq_{\text{st}} F_{n+1}$ אז קיימת פונקצית התפלגות F כך ש-$F_n \xrightarrow{d} F$ ומתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} \int xdF_n(x) = \int xdF(x)$$

או בכלליות יותר גדולה, לכל h לא יורדת ואי שלילית (לכן בורל) מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} \int h(x)dF_n(x) = \int h(x)dF_n(x)$$

ii. הלמה של Fatou: אם $F_n(0-) = 0$ ו-$F_n \xrightarrow{d} F$ אז לכל h בורל ואי שלילית

$$\int h(x)dF(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int h(x)dF_n(x)$$

iii. משפט ההתכנסות הנשלטת: אם $F_n \xrightarrow{d} F$ וקיימת פונקצית התפלגות H כך ש-

$$\int |x|dH(x) < \infty$$

ומתקיים כי

$$F_n(x) - F_n(-x-) \geq H(x)$$

(ההתפלגות של הערך המוחלט קטנה סטוכסטית מ-H) לכל $x \in \mathbb{R}$ אז

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int xdF_n(x) = \int xdF(x)$$

18. הוכחה של 17. ניקח $x \in \mathbb{R}$. אז מכיוון ש-

$$F(x-) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x)$$

אז לכל $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ ו־$\delta > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים כי

$$F(x-\delta) - \epsilon \leq F_n(x) < F(x) + \epsilon$$

ניקח $x = G(u+\epsilon) + \delta$ אז לכל n עבורו $F(x-\delta) - \epsilon \leq F_n(x)$ נקבל

$$G_n(F(x-\delta) - \epsilon) \leq G_n(F_n(x)) \leq x$$

ולכן

$$G_n(F(G(u+\epsilon)) - \epsilon) \leq G(u+\epsilon) + \delta$$

מכיוון ש־$u + \epsilon \leq F(G(u+\epsilon))$ נובע מהמונוטוניות של G_n כי

$$G_n(F(G(u+\epsilon)) - \epsilon) \geq G_n(u + \epsilon - \epsilon) = G_n(u)$$

וקיבלנו כי

$$G_n(u) \leq G(u+\epsilon) + \delta$$

עכשיו, ניקח $x = G(u-\epsilon) - \delta$. אז לכל n עבורו $F_n(x) < F(x) + \epsilon$ מתקיים כי $x < G_n(F(x) + \epsilon)$. לכן

$$G(u-\epsilon) - \delta < G_n(F(G(u-\epsilon) - \delta) + \epsilon)$$

מכיוון ש־$F(G(u-\epsilon) - \delta) < u - \epsilon$ (נובע מאחד מהסעיפים לעיל מכיוון ש־$G(u-\epsilon) - \delta < G(u-\epsilon)$) אז

$$G(u-\epsilon) - \delta < G_n(F(G(u-\epsilon) - \delta) + \epsilon) \leq G_n(u - \epsilon + \epsilon) = G_n(u)$$

ולכן קיים $N \geq 1$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים כי

$$G(u-\epsilon) - \delta \leq G_n(u) \leq G(u+\epsilon) + \delta$$

מכאן נובע כי גם הגבול העליון והתחתון של $G_n(u)$ הם בין שני הגבולות הללו ולכן אם נשאיף δלאפס ולאחר מכן את ϵ לאפס נקבל כי

$$G(u) \leq \liminf_{n\to\infty} G_n(u) \leq \limsup_{n\to\infty} G_n(u) \leq G(u+)$$

ובפרט לכל u שהיא נקודת רציפות של G נקבל כי $G_n(u)$ שואף ל־$G(u)$ כנדרש.
הערה: שימו לב כי צריך שיתקיים כי $G(u+\epsilon)$ ו־$G(u-\epsilon)$ אינם אינסוף או מינוס אינסוף. כמו כן, חשוב של $F(x-\delta) - \epsilon > 0$ וגם $F(x) + \epsilon < 1$. אם F היא התפלגות של משתנה מקרי סופי, אז אפשר לבדוק כי אין בעיה. אם F אינה התפלגות של משתנה מקרי סופי אז צריך קצת יותר להקפיד.