האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה
הסתברות ותהליכים מקריים
מורה הקורס: עופר קלע

בהנתן מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ נניח כי $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ סדרה לא יורדת של תתי σ-שדות של $\mathcal{F}$. נסמן $\mathcal{F}_\infty$ להיות ה-σ-שדה הקטן ביותר שמכיל את $\mathcal{F}_n$ לכל $n \geq 1$ (סופי), דהיינו

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$$

ברור כי $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\infty$. המשפחה $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_n | n \geq 1\}$ נקראת "פילטרציה" והיא מהווה מודל להסטוריה, דהיינו ככל שהזמן n גדל יש יותר מאורעות אותן אנו יכולים בודאות לזהות אם הם קרו או לא. דוגמא נפוצה של פילטרציה כזו היא עם $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ ועבור $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma\left(\left\{X_i^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 1 \leq i \leq n\right\}\right) \\ &= \left\{(X_1, \ldots, X_n)^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right\} \end{aligned}$$

(למטה נראה מדוע מתקיים השוויון השני) פילטרציה זו נקראת הפילטרציה שנוצרת על ידי סדרת המשתנים המקריים.
אם נתון תהליך $X_1, X_2, \ldots$ המקיים כי $X_n \in \mathcal{F}_n$ לכל $n \geq 1$ אז נאמר כי התהליך מותאם לפילטרציה (adapted)

טענה:
$X_1, X_2, \ldots$ מותאמת ל-$\mathbf{F}$ ו-X_{n+1} ו-$\mathcal{F}_n$ בלתי תלויים לכל $n \geq 0$, אז המשתנים המקריים $X_1, X_2, \ldots$ הם בלתי תלויים. לחילופין, אם הם בלתי תלויים, אז תנאי זה מתקיים עבור הפילטרציה שנוצרת על ידי משתנים אילה.

הוכחה:
אם הסדרה מותאמת ו-X_{n+1} ו-$\mathcal{F}_n$ בלתי תלויים לכל $n \geq 0$ (ולכן X_nו-$\mathcal{F}_{n-1}$בלתי תלויים לכל $n \geq 1$) אז ניקח f_i פונקציות בורל אי שליליות ונקבל כי

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\left(X_i\right) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) &\stackrel{1}{=} E\left(\underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\left(X_i\right)\right)}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} f\left(X_n\right) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &\stackrel{1}{=} \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\left(X_i\right)\right) E\left(f_n\left(X_n\right) | \mathcal{F}_{n-1}\right) \end{aligned}$$

מכיוון ש-X_n ו-$\mathcal{F}_{n-1}$ בלתי תלויים אז גם $f_n\left(X_n\right)$ ו-$\mathcal{F}_{n-1}$ בלתי תלויים ולכן

$$E\left(f_n\left(X_n\right) | \mathcal{F}_{n-1}\right) \stackrel{1}{=} E f_n\left(X_n\right)$$

וקיבלנו כי

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\left(X_i\right) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) \stackrel{1}{=} \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\left(X_i\right)\right) E f_n\left(X_n\right)$$

ניקח תוחלת בשני האגפים ונקבל כי

$$E\prod_{i=1}^{n}f_i\left(X_i\right)=E\prod_{i=1}^{n-1}f_i\left(X_i\right)Ef_n\left(X_n\right)$$

זה לא אינטואטיבי אבל החידוש כאן הוא שבגלל האינדוקציה **בלבד** אפשר להבטיח את המעבר האחרון.

ולכן באינדוקציה נובע כי

$$E\prod_{i=1}^{n}f_i\left(X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}Ef_i\left(X_i\right)$$

מכיוון שזה נכון לכל $n\geq 1$ ולכל $f_1,f_2,\dots,f_n$ בורל אי שליליות, זה שקול לכך ש-$X_1X_2,\dots$ בלתי תלויים.

בכיוון ההפוך, אם $X_1,X_2,\dots$ בלתי תלויים, לכל $B_1,\dots,B_{n+1}$ קבוצות בורל מתקיים כי

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1}X_i^{-1}\left(B_i\right)\right)=\prod_{i=1}^{n+1}P\left(X_i^{-1}\left(B_i\right)\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}X_i^{-1}\left(B_i\right)\right)P\left(X_{n+1}^{-1}\left(B_{n+1}\right)\right)$$

זה שקול לכך ש-

$$\begin{aligned}&P\left(\left(X_1,\dots,X_n\right)^{-1}\left(B_1\times\cdots\times B_n\right)\cap X_{n+1}^{-1}\left(B_{n+1}\right)\right)\\&\qquad=P\left(\left(X_1,\dots,X_n\right)^{-1}\left(B_1\times\cdots\times B_n\right)\right)P\left(X_{n+1}^{-1}\left(B_{n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

אוסף הקבוצות

$$\left\{B|B\subset\mathbb{R}^n,\ \left(X_1,\dots,X_n\right)^{-1}\left(B\right)\in\mathcal{F}\right\}$$

הוא סיגמה שדה שמכיל את כל הקבוצות מהצורה

$$B_1\times\cdots\times B_n$$

ולכן גם מכיל את ה-σ-שדה הקטן ביותר שמכיל את הקבוצות הללו, דהיינו, את

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

כלומר את אוסף כל קבוצות הבורל ה-n-מימדיות. באותו אופן גם אוסף הקובוצת $B\subset\mathbb{R}^n$ שמקיים

$$\begin{aligned}&P\left(\left(X_1,\dots,X_n\right)^{-1}\left(B\right)\cap X_{n+1}^{-1}\left(B_{n+1}\right)\right)\\&\qquad=P\left(\left(X_1,\dots,X_n\right)^{-1}\left(B\right)\right)P\left(X_{n+1}^{-1}\left(B_{n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

הוא גם σ-שדה שמאותה סיבה מכיל את $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

מכיוון ש-

$$\sigma\left(X_1,\dots,X_n\right)=\left\{\left(X_1,\dots,X_n\right)^{-1}\left(B\right)\middle|B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}$$

אז קיבלנו איפה כי לכל $A \in \sigma(X_1,\ldots,X_n)$ ולכל $B \in \sigma(X_{n+1})$ מתקיים כי

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

ולכן $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$ ו-X_{n+1} בלתי תלויים. כמו כן, אם ניקח

$$B=\mathbb{R}^{n-1}\times B_n$$

נקבל כי

$$X_n^{-1}(B_n)=(X_1,\ldots,X_n)^{-1}(B)\in\sigma(X_1,\ldots,X_n)$$

ולכן $X_1,X_2,\ldots$ היא סדרה מותאמת.
$\tau:\Omega\to\mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ הוא אוסף המספרים השלמים האי שליליים) נקרא זמן עצירה ביחס לפילטרציה $\mathbf{F}$ אם לכל $n\ge 0$ מתקיים כי

$$\{\tau\le n\}\in\mathcal{F}_n$$

דהיינו, המאורע שעצרנו עד זמן n ידוע בודאות עד בזמן n. מכיוון ש-$\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}$ לכל $n\ge 1$ זה גם אומר כי τ הוא משתנה מקרי.
טענה:
התנאים הבאים שקולים עבור τ:

1. $\{\tau\le n\}\in\mathcal{F}_n$ לכל $n\ge 0$.
2. $\{\tau> n\}\in\mathcal{F}_n$ לכל $n\ge 0$.
3. $\{\tau= n\}\in\mathcal{F}_n$ לכל $n\ge 0$.

הוכחה:
$2\Leftrightarrow 1$ נובע מכך ש-$\{\tau\le n\}\in\mathcal{F}_n$ אם ורק אם $\{\tau>n\}\in\mathcal{F}_n$ ($\mathcal{F}_n$ הוא σ=שדה).
$3\Rightarrow 1$ נובע מ-$\{\tau=n\}=\{\tau\le n\}\setminus\{\tau\le n-1\}$ לכל $n\ge 1$ ומכך ש-$\{\tau\le n-1\}\in\mathcal{F}_{n-1}\subset\mathcal{F}_n$. הפרש של שני מאורעות ב-$\mathcal{F}_n$ הוא גם מאורע ב-$\mathcal{F}_n$.
$1\Rightarrow 3$ נובע מ-$\{\tau\le n\}=\bigcup_{k=0}^n\{\tau=k\}$. לכל $0\le k\le n$ מתקיים כי $\{\tau=k\}\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n$ ולכן גם האיחוד נימצא ב-$\mathcal{F}_n$.

נשים לב כי אם $\tau(\omega)=m$ לכל $\omega\in\Omega$ (משתנה מקרי קבוע) אז $\{\tau\le n\}$ הוא Ω אם $n\ge m$ ו-ϕ אם $n<m$. לכן כל זמן קבוע הוא גם זמן עצירה ואפילו מקיים כי $\{\tau\le n\}\in\mathcal{F}_0$ לכל $n\ge 0$.
כמו כן

$$\{\tau<\infty\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{\tau=n\}\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_\infty$$

ולכן גם

$$\{\tau=\infty\}\in\mathcal{F}_\infty$$

טענה:
נניח כי τ_1,τ_2 הם זמני עצירה. אז גם הזמנים הבאים הם זמני עצירה:

1. $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$
2. $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$
3. $\tau = \tau_1 + \tau_2$

הוכחה:

1. $\{\tau > n\} = \{\tau_1 > n\} \cap \{\tau_2 > n\}$ ולכן זה נובע מתנאי 2 בטענה הקודמת.
2. $\{\tau \le n\} = \{\tau_1 \le n\} \cap \{\tau_2 \le n\}$ ולכן זה נובע מתנאי 1 בטענה הקודמת.
3. $\{\tau = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau_1 = k\} \cap \{\tau_2 = n-k\}$. מכיוון ש-$k \le n$ וכם $n-k \le n$, אז כל הקבוצות המעורבות מצד ימין נמצאות ב-$\mathcal{F}_n$ ולכן גם $\{\tau = n\}$. מכאן שתנאי 3 בטענה הקודמת מתקיים.

מקרה פרטי שמאוד שימושי הוא כאשר τ_2 הוא מספר קבוע, דהיינו, לכל $0 \ge m$ מתקיים כי $\tau_1 \wedge m$, $\tau_1 \vee m$ ו-$\tau_1 + m$ הם זמני עצירה. הראשון הוא זמן עצירה חסום (על ידי m).
שימו לב כי אם $\tau(\omega) = m$ לכל ω אז

$$\{\omega | \tau(\omega) = m\} = \Omega \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_m$$

ואם $n \neq m$ אז

$$\{\omega | \tau(\omega) = n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0 \subset F_n$$

ומכאן שכל זמן קבוע הוא זמן עצירה.

(הכללה של הלמה של Wald):
בהנתן פילטרציה **F**, נניח כי $X_1, X_2, \ldots$ מותאם לפילטרציה זו וכי לכל $n \ge 0$ מתקיים כי X_{n+1} בלתי תלוי ב-$\mathcal{F}_n$ (בפרט, כפי שציינו קודם, המשתנים המקריים בלתי תלויים). נניח כי τ הוא זמן עצירה ביחס ל-**F**. אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

1. $X_n \ge 0$ בהסתברות אחת.
2. $E\sum_{k=1}^{\tau} EX_k^+ < \infty$ או $E\sum_{k=1}^{\tau} EX^- < \infty$

אז

$$E\sum_{k=1}^{\tau} X_k = E\sum_{k=1}^{\tau} EX_k$$

כאשר סכום ריק (כאשר $\tau = 0$) מוגדר להיות אפס.
מקרה פרטי של תוצאה זו הוא כאשר $X_n \ge 0$ ומתקיים כי $EX_n = EX_1$ לכל $n \ge 1$ (לא תלוי ב-n). במקרה זה נקבל כי

$$E\sum_{k=1}^{\tau} X_k = E\tau \cdot EX_1$$

כאשר X אינו בהכרח אי שלילי ו-$EX_n^+ = EX_1^+$ וגם $EX_n^- = EX_1^-$ לכל $n \ge 1$, אז תנאי 2 יתקיים אם ורק אחד משני הערכים EX_1^+, EX_1^- הוא סופי וגם $E\tau < \infty$.

נשים לב כי אם המשתנים המקריים הם שווי התפלגות אז $EX_n^+ = EX_1^+$ וגם $EX_n^- = EX_1^-$ לכל $n \geq 1$ באופן אוטומטי.

דוגמה:

נניח כי $\tau, X_1, X_2, \ldots$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים ו-$X_1, X_2, \ldots$ הם שווי התפלגות. נסמן

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \sigma(\tau) \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(\tau, X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

אז סדרת המשתנים המקריים מותאמת לפילטרציה ומתקיים כי X_{n+1} בלתי תלוי ב-$\mathcal{F}_n$. לכן אם $X_1 \geq 0$ בהסתברות אחת (ללא שום תנאי נוסף) או שאחד מהתוחלות EX_1^+ ו-EX_1^- היא סופית וגם $E\tau < \infty$ אז

$$E\sum_{k=1}^{\tau} X_k = E\tau \cdot EX_1$$

את המקרה הזה אפשר להוכיח בקלות על ידי התניה באופן הבא

$$E\left[\sum_{k=1}^{\tau} X_k | \tau = n\right] = E\sum_{k=1}^{n} X_k = n \cdot EX_1$$

כלומר

$$E\left[\sum_{k=1}^{\tau} X_k | \tau\right] = \tau \cdot EX_1$$

ואז לקחת שוב פעם תוחלת. במקרה הזה אפשר גם לחשב את השונות (דבר שאינו אפשרי במקרה הכללי). בתור תרגיל, הראו כי, אם בנוסף ידוע כי $E\tau < \infty$ וגם $EX_1^2 < \infty$, אז

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{\tau} X_i\right) = E\tau \cdot \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(\tau) \cdot (EX_1)^2$$

באופן יותר כללי, אם $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ הם זוגות בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $EX_1^2, EY_1^2 < \infty$ ובנוסף הם בלתי תלויים ב-τ אז הראו כי

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{\tau} X_i, \sum_{k=1}^{\tau} Y_i\right) = E\tau \cdot \mathrm{Cov}(X_1, Y_1) + \mathrm{Var}(\tau) EX_1 EY_1$$

הוכחת הלמה של Wald: למעשה, כל המבנה של פילטרציות אינו ממש נחוץ כאן. התנאי הכי חשוב שבעטיו התוצאות הללו מתקיימות הוא שהמשתנים המקריים X_n ו-$1_{\{\tau \leq n-1\}}$-$1_{\{\tau \geq n\}} = 1 - 1_{\{\tau \leq n-1\}}$ בלתי מתואמים, דהיינו, ש-

$$EX_n 1_{\{\tau \geq n\}} = EX_n E1_{\{\tau \geq n\}}$$

נניח כי $X_n \geq 0$ בהסתברות אחת. אז גם $X_n 1_{\{\tau \geq n\}} \geq 0$ בהסתברות אחת וממשפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי

$$E\sum_{k=1}^{\infty} X_k 1_{\{\tau \geq k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} EX_k 1_{\{\tau \geq k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} EX_k \cdot E1_{\{\tau \geq k\}} = E\sum_{k=1}^{\infty} (EX_k) 1_{\{\tau \geq k\}}$$

משפט ההתכנסות המונו'

אי תלות

עכשיו, לכל $\tau \geq k$ מתקיים כי $X_k 1_{\{\tau\geq k\}} = X_k$ וכן $(EX_k)1_{\{\tau\geq k\}} = EX_k$. כמו כן, לכל $k > \tau$, $X_k 1_{\{\tau\geq k\}} = 0$ וכן $(EX_k)1_{\{\tau\geq k\}} = 0$. לכן

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} X_n 1_{\{\tau\geq n\}} &= \sum_{k=1}^{\tau} X_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} (EX_k) 1_{\{\tau\geq k\}} &= \sum_{k=1}^{\tau} EX_k\end{aligned}$$

ולכן אם ניקח תוחלת נקבל את התוצאה המבוקשת.
אם X_n אינם אי שליליים אך X_n^+ ו-$1_{\{\tau\geq n\}}$ בלתי מתואמים וגם X_n^- ו-$1_{\{\tau\geq n\}}$ בלתי מתואמים אז מהתוצאה עבור משתנים אי שליליים נובע כי

$$\begin{aligned}E\sum_{k=1}^{\tau} X_k^+ &= E\sum_{k=1}^{\tau} EX_k^+ \\ E\sum_{k=1}^{\tau} X_k^- &= E\sum_{k=1}^{\tau} EX_k^-\end{aligned}$$

אם אחד מן הביטויים סופי, אז גם מה שבתוך התוחלת סופי בהסתברות אחת ואז

$$\begin{aligned}E\sum_{k=1}^{\tau} X_k &= E\sum_{k=1}^{\tau}(X_k^+ - X_k^-) = E\sum_{k=1}^{\tau} X_k^+ - E\sum_{k=1}^{\tau} X_k^- \\ &= E\sum_{k=1}^{\tau} EX_k^+ - E\sum_{k=1}^{\tau} EX_k^- = E\sum_{k=1}^{\tau}(EX_k^+ - EX_k^-) \\ &= E\sum_{k=1}^{\tau} EX_k\end{aligned}$$

אם כן, מדוע ההנחות שהנחנו גוררות ש-X_n ו-$1_{\{\tau\leq n-1\}}$ בלתי מתואמים לכל $n \geq 1$? זה כמו לאמר כי X_{n+1} ו-$1_{\{\tau\leq n\}}$ בלתי מתואמים לכל $n \geq 0$. מכיוון ש-X_{n+1} בלתי תלוי ב-$\mathcal{F}_n$ ו-$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, אז גם X_{n+1} ו-$1_{\{\tau\leq n\}}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים (מדוע?). לכן הם גם בלתי מתואמים.

מרטינגיילים:
אנו נאמר כי $\{X_n | n \geq 0\}$ הוא מרטינגייל ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$ אם מתקיים לכל $n \geq 0$ כי $E|X_n| < \infty$ וכי $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ בהתסברות אחת.
נאמר כי התהליך הוא תת-מרטינגייל (submartingale) אם הוא מתואם עם $E|X_n| < \infty$ ומתקיים כי

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$$

והוא על-מרטינגייל (supermartingale) אם הוא מתואם עם $E|X_n| < \infty$ ומתקיים כי

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$$

עבור מרטינגייל לא היה צורך לומר כי הוא מתואם מכיוון שמהגדרת התוחלת המותנה X_n חייב להיות מותאם.

למעשה מספיק היה להגדיר תת-מרטינגייל ובאמצעותו את כל שאר ההגדרות. דהיינו, $\{X_n|n \geq 0\}$ הוא על-מרטינגייל אם $\{-X_n|n \geq 0\}$ הוא תת-מרטינגייל והוא מרטינגייל אם הוא גם תת-מרטינגייל וגם על-מרטינגייל.

מהגדרות אילה מיד נובע כי במקרה של תת-מרטינגייל, אם g היא פונצקיה קמורה ולא יורדת עם $E|g(X_n)| < \infty$ לכל $n \geq 0$, אז

$$g(X_n) \leq g\left(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right) \leq E\left[g(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right]$$

ולכן $\{g(X_n)|n \geq 0\}$ הוא תת-מרטינגייל. באותו אופן, במקרה של על-מרטינגייל, אם g לא יורדת, קעורה עם $|Eg(X_n)| < \infty$ לכל $n \geq 0$, אז

$$g(X_n) \geq g\left(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right) \geq E\left[g(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right]$$

ואז גם $\{g(X_n)|n \geq 0\}$ הוא על-מרטינגייל. כאשר מדובר במרטינגייל אין צורך בדרישה ש-g היא לא יורדת. אם היא קמורה אז $g(X_n)$ הוא תת-מרטינגייל ואם היא קעורה אז נקבל על-מרטינגייל. זאת מכיוון ש-

$$g(X_n) = g\left(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right)$$

דוגמאות לפונציה קמורה ולא יורדת היא $g(x) = x^+$. דוגמה לפונצקיה קעורה ולא יורדת היא $g(x) = -x^- = (-x)^+$.

טענה:

כל תת-מרטינגייל הוא סכום של מרטינגייל ותהליך מותאם ולא יורד בעל תוחלת סופית. לחילופין, כל סכום כזה שבו לשני התהליכים יש תוחלת סופית הוא תת-מרטינגייל.

הוכחה:

בהנתן תת-מרטינגייל נגדיר

$$\begin{aligned} M_n &= X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]\right) \\ S_n &= X_n - M_n = X_n - \sum_{k=0}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} \left(EX_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}\right) \end{aligned}$$

עכשיו נשים לב כי

$$M_{n+1} = M_n + X_{n+1} - E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

וכי M_n ו-$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ הן $\mathcal{F}_n$-מדידות. לכן

$$E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[M_n + X_{n+1} - E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_n] = M_n + E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$$

עכשיו

$$S_{n+1} = S_n + E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n \geq S_n$$

כאשר אי השוויון האחרון נובע מכך ש-$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ (תת-מרטינגייל) ולכן S_n לא יורד.
נשאר רק להראות כי $E|M_n| < \infty$ לכל $n \geq 0$. זה נובע מכך ש-

$$|M_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |X_k| + \sum_{k=1}^{n} |E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]| \leq \sum_{k=0}^{n} |X_k| + \sum_{k=1}^{n} E[|X_k||\mathcal{F}_{k-1}]$$

ולכן

$$E|M_n| \leq \sum_{k=0}^{n} E|X_k| + \sum_{k=1}^{n} EE[|X_k||\mathcal{F}_{k=1}] = \sum_{k=0}^{n} E|X_k| + \sum_{k=1}^{n} E|X_k|$$

והביטוי האחרון הוא סופי מכיוון ש-$E|X_n|$ סופי לכל $n \geq 0$. באותו אופן מראים כי $E|S_n| < \infty$. שימו לב כי $M_0 = X_0$ וכי $S_0 = 0$, אך זה אינו חשוב. למעשה היינו יכולים להחליט ש-$S_0 = X_0$ ו-$M_0 = 0$. אין לכך משמעות לגבי התוצאה.

נניח עכשיו כי $X_n = M_n + S_n$ כאשר M_n הוא מרטינגייל ו-S_n הוא תהליך מותאם ולא יורד עם $E|S_n| < \infty$. אז מכיוון שאם $Y \geq X$ בהסתברות אחת אז גם $E[Y|\mathcal{G}] \geq E[X|\mathcal{G}]$ עבור σ-שדה $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ כלשהו ו-X, Y המקיימים $EY^+ < \infty$ או $EX^- < \infty$ אז בהסתברות אחת

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq E[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$$

(השוויון האחרון מכיוון ש-S_n היא $\mathcal{F}_n$-מדידה). כמו כן, מכיוון ש-M_n הוא מרטינגייל אז $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ ולכן

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] + E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq M_n + S_n = X_n$$

במקרה על-מרטינגייל התוצאה היא דומה, דהיינו, ניתן להציג כל על-מרטינגייל כהפרש של מרטינגייל ותהליך לא יורד, או באופן שקול כסכום של מרטינגייל ותהליך לא עולה.

עכשיו, עבור מרטינגייל (ובאופן דומה עבור תת ועל מרטינגייל כאשר במקום שוויון יש אי שוויון) נניח באינדוקציה כי עבור $n \geq m$

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$$

ברור כי זה מתקיים עבור $n = m$. עכשיו, מכיוון ש-$\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$ נובע כי

$$E[E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_m] = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_m]$$

מצד שני, מכיוון ש-$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$, אז

$$E[E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_m] = E[X_n|\mathcal{F}_m]$$

ולפי הנחת האינדוקציה צד ימין שווה ל-X_m (בהסתברות אחת). מכאן שלכל $m \geq 0$ ולכל $n \geq m$ מתקיים כי

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$$

ואם ניקח תוחלת תקבל כי

$$EX_n = EX_m$$

ובפרט $EX_n = EX_0$ לכל $n \geq 0$.

מעניין אם תוצאה זו נכונה אם נחליף את n בזמן עצירה τ.

טענה:

נניח כי $\{X_n|n \geq 0\}$ הוא תהליך מותאם ובעל תוחלת סופית. אז הוא מרטינגייל אם ורק אם(!)

דרך נוספת להציג מרטינגל/על מרטינגל/תת מרטינגל:

- אם X_m הוא מטרינגל אז בעזרת אינדוקציה אם $n \geq m$ אז $E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$ לכן כאן נקבל כי $EX_n = EX_m$
- אם X_m הוא תת מטרינגל אז בעזרת אינדוקציה אם $n \geq m$ אז $E[X_n|\mathcal{F}_m] \overset{1}{\geq} X_m$ לכן כאן נקבל כי $EX_n \geq EX_m$
- אם X_m הוא על מטרינגל אז בעזרת אינדוקציה אם $n \geq m$ אז $E[X_n|\mathcal{F}_m] \overset{1}{\leq} X_m$ לכן כאן נקבל כי $EX_n \leq EX_m$

לכל זמן עצירה חסום τ מתקיים כי $EX_\tau = EX_0$.
הוכחה: נניח כי התהליך הוא מרטינגייל וכי $\tau \le n$(בהסתברות אחת). אז

$$EX_\tau = E\sum_{k=0}^{n} X_k 1_{\{\tau=k\}} = \sum_{k=0}^{n} EX_k 1_{\{\tau=k\}}$$

עכשיו $X_k = E[X_n|\mathcal{F}_k]$ ומכיוון ש-$\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ אז

$$EX_k 1_{\{\tau=k\}} = EE[X_n|\mathcal{F}_k]1_{\{\tau=k\}} = EX_n 1_{\{\tau=k\}}$$

השוויון הימני פשוט משתמש בהגדרה של תוחלת מותנה. אם נציב אז נקבל כי

$$EX_\tau = \sum_{k=0}^{n} EX_k 1_{\{\tau=k\}} = \sum_{k=0}^{n} EX_n 1_{\{\tau=k\}} = EX_n\left(\sum_{k=0}^{n} 1_{\{\tau=k\}}\right) = EX_n 1_{\{\tau\le n\}}$$

מכיוון ש-$\tau \le n$ בהסתברות אחת אז $EX_n 1_{\{\tau\le n\}} = EX_n$ וקבלנו כי

$$EX_\tau = EX_n$$

אך ראינו קודם כי $EX_n = EX_0$ לכל $n \ge 0$ ולכן $EX_\tau = EX_0$.
נניח עכשיו כי $X_n \in \mathcal{F}_n$, כי $E|X_n| < \infty$ וכי לכל זמן עצירה חסום מתקיים כי $EX_\tau = EX_0$.
עבור $A \in \mathcal{F}_n$ נגדיר

$$\tau = n + 1_A$$

אז לכל $k \ge 0$ מתקיים כי

$$\{\tau = k\} = \begin{cases} A^c & k = n \\ A & k = n+1 \\ \phi & k \ne n, n+1 \end{cases}$$

כאשר $k = n$ אז $A^c \in \mathcal{F}_n$ כי $A \in \mathcal{F}_n$. כאשר $k = n+1$ אז $A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ וכאשר $k \ne n, n+1$ אז $\phi \in \mathcal{F}_k$. כמו כן, ברור כי $\tau \le n+1$ ומכאן ש-τ הוא זמן עצירה חסום. עכשיו, הקבוע n הוא זמן עצירה חסום ולכן $EX_n = EX_0$ ומכאן

$$EX_n 1_{A^c} + EX_n 1_A = EX_n = EX_0 = EX_\tau = EX_n 1_{A^c} + EX_{n+1} 1_A$$

וקיבלנו כי לכל $A \in \mathcal{F}_n$

$$EX_n 1_A = EX_{n+1} 1_A$$

מכיוון ש-$X_n \in \mathcal{F}_n$ נובע מההגדרה של תוחלת מותנה כי $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ בהסתברות אחת ומכאן ש-$\{X_n | n \ge 0\}$ הוא מרטינגייל.
מסקנה: נניח כי $X_n \in \mathcal{F}_n$ לכל $n \ge 0$ ו-$E|X_n| < \infty$. אז $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ בהסתברות אחת אם ורק אם $EX_\tau = EX_0$ לכל זמן עצירה חסום.
באופן דומה אפשר להראות כי X_n הוא תת-מרטינגייל אם ורק אם לכל שני זמני עצירה חסומים τ_1, τ_2 המקיימים $\tau_1 \le \tau_2$ מתקיים כי $EX_{\tau_1} \le EX_{\tau_2}$ (עבור על-מרטינגייל השוויון הוא הפוך).
אחת התוצאות המיידיות היא כי אם X_n הוא מרטינגייל ו-τ הוא זמן עצירה (לא בהכרח חסום)

אז גם $EX_{\tau\wedge n}$ הוא מרטינגייל. זאת מכיוון שלכל זמן עצירה חסום τ' גם $\tau \wedge \tau'$ הוא זמן עצירה חסום ולכן מתקיים כי $EX_0 = EX_{\tau\wedge\tau'}$. הסיבה ש-$X_{\tau\wedge n}$ הוא מותאם לפילטרציה היא כי

כי $0 \le k \le n$ אז $1_{\{\tau\wedge n=k\}} = 1_{\{\tau=k\}} + 1_{\{\tau\ge n\}}$

$$X_{\tau\wedge n} = \sum_{k=0}^{n} X_k 1_{\{\tau=k\}} + X_n 1_{\{\tau>n\}}$$

$X_{\tau\wedge n} = \sum_{k\in Supp(\tau\wedge n)} X_k \cdot 1_{\{\tau\wedge n=k\}} =$

וכל מה שכתוב מצד ימין נמצא ב-$\mathcal{F}_n$.

הגדרה : בהנתן זמן עצירה τ נסמן

$$\mathcal{F}_\tau = \{A | A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \ge 0\}$$

נראה שזה σ שדה

באותו אופן כמו שהראינו עבור ההגדרות של זמן עצירה זה שקול לכל אחד משני התנאים הבאים

$$\mathcal{F}_\tau = \{A | A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \ge 0\}$$

$$\mathcal{F}_\tau = \{A | A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \ge 0\}$$

מכיוון ש-

$$A^c \cap \{\tau \le n\} = \{\tau \le n\} \setminus A \cap \{\tau \le n\}$$

וכי

$$\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \cap \{\tau \le n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \cap \{\tau \le n\}$$

נובע כי $\mathcal{F}_\tau$ סגורה תחת משלימים ותחת איחודים בני מניה ומכיוון שהיא אינה ריקה (מכילה את Ω למשל) נובע כי $\mathcal{F}_\tau$ הוא σ-שדה. אם נגדיר

$$A_n = A \cap \{\tau = n\}$$

נקבל כי לכל $n \ne m$ מתקיים כי

$$A_m \cap \{\tau = n\} = \phi$$

ועבור $m = n$ נקבל כי

$$A_n \cap \{\tau = n\} = A \cap \{\tau = n\}$$

מכאן שאם $A \in \mathcal{F}_\tau$ אז $A_n \in \mathcal{F}_n$ ומתקיים כי

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \cap \{\tau = n\} = A \cap \{\tau < \infty\}$$

מכיוון ש-$A \in \mathcal{F}_\infty$ וגם $\{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$ אז גם $A_\infty = A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$. מכאן שלכל $A \in \mathcal{F}_\infty$ מתקיים כי $A \in \mathcal{F}_\tau$ אם ורק אם קיימים $A_n \in \mathcal{F}_n$ לכל $n \ge 0$ (סופי) כך ש-

$$A = \bigcup_{0\le n\le\infty} A_n \cap \{\tau = n\}$$

הדבר הראשון שקל לראות הוא כי $\{\tau \le m\} \in \mathcal{F}_\tau$ לכל $m \ge 0$. זאת מכיוון ש-

$$\{\tau \le m\} \cap \{\tau \le n\} = \{\tau \le m \wedge n\} \in \mathcal{F}_{n\wedge m} \subset \mathcal{F}_n$$

כי $\tau_1 \le n \Longrightarrow \tau_2 \le n$ לכן $\{\tau_2 \le n\} \subset \{\tau_1 \le n\}$

מכדן נובע כי τ היא $\mathcal{F}_\tau$ מדידה. נניח עכשיו כי X_n הוא מרטינגייל ו-$\tau_2 \le \tau_1$ הם שני זמני עצירה. מה ניתן לומר על היחס בין $\mathcal{F}_{\tau_1}$ ו-$\mathcal{F}_{\tau_2}$? נשים לב כי

$$\{\tau_1 \le n\} \cap \{\tau_2 \le n\} = \{\tau_2 \le n\}$$

אם $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ אז מכיוון ש-$A \cap \{\tau_1 \le n\} \in \mathcal{F}_n$ ו-$\{\tau_2 \le n\} \in \mathcal{F}_n$ נובע כי גם

$$A \cap \{\tau_1 \le n\} \cap \{\tau_2 \le n\} \in \mathcal{F}_n$$

ולכן גם

$$A \cap \{\tau_2 \le n\} \in \mathcal{F}_n$$

ולכן $A \in \mathcal{F}_{\tau_2}$. דהיינו, קיבלו כי

$$\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$$

לכל שני זמני עצירה המקיימים $\tau_1 \le \tau_2$. נניח עכשיו כי שני זמני עצירה אילו הם חסומים על ידי n. ניקח את τלהיות אחד מהם. אז לכל קבוצת בורל

$$X_\tau^{-1}(B) = \{\omega | X_{\tau(\omega)}(\omega) \in B\} = \bigcup_{k=0}^{n} X_k^{-1}(B) \cap \{\tau = k\}$$

אם נסמן $A_k = X_k^{-1}(B)$ עבור $0 \le k \le n$ ו-$A_k = \phi$ עבור $k > n$, אז $A_k \in \mathcal{F}_k$ לכל $k \ge 0$ ולכן

$$X_\tau^{-1}(B) = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_\tau$$

לכן X_τ היא $\mathcal{F}_\tau$ מדידה. ראינו כבר קודם כי לכל זמן עצירה חסום מתקיים כי $E|X_\tau| < \infty$ ומכיוון ש-X_{τ_i} עבור $i = 1, 2$ הם מתואמים ל-$\mathcal{F}_{\tau_i}$ עבור $i = 1, 2$ ומתקיים כי

$$EX_0 = EX_{\tau_1} = EX_{\tau_2}$$

אז נובע כי גם הזוג (X_{τ_1}, X_{τ_2}) הוא מרטינגייל, דהיינו, חייב להתקיים כי

$$E[X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = X_{\tau_1}$$

ובאופן יותר כללי, בהנתן סדרה לא יורדת של זמני עצירה חסומים τ_n (החסמים יכולים להשתנות מאחד לשני), אז X_{τ_n} הוא מרטינגייל ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_{\tau_n} | n \ge 0\}$. בפרט אנו יודעים עכשיו למשל כי עבור זמן עצירה כלשהו τ התהליך $X_{\tau\wedge n}$ הוא מרטינגיל גם ביחס ל-$\{\mathcal{F}_n | n \ge 0\}$ וגם ביחס ל-$\{\mathcal{F}_{\tau\wedge n} | n \ge 0\}$.
עם אותן הוכחות, אותה תוצאה מתקיימת עבור תת ועל מרטינגיילים רק עם אי שוויונים.
דוגמאות לשימושים:

תת מטרינגל מקיים כי לכל $\tau_1 \le \tau_2$ זמני עצירה מתקיים כי $EX_{\tau_1} \le EX_{\tau_2}$ כאן $\tau_2 = n$

נניח כי X_n הוא תת-מרטינגייל אי שלילי ו-τ הוא זמן עצירה החסום על ידי n. אז לכל $\epsilon > 0$ מתקיים כי

$$P(X_\tau \ge \epsilon) \le \frac{EX_\tau}{\epsilon} \le \frac{EX_n}{\epsilon}$$

בפרט אם ניקח

$$\nu = \inf\{k | X_k \ge \epsilon\}$$

ונגדיר $\tau = \nu \wedge n$. במקרה זה נשים לב כי אם $\nu \le n$ אז גם $\epsilon \le X_\tau = X_\nu$ וכן $\max(X_0, \ldots, X_n) \ge$. לעומת זאת, אם $\nu > n$ אז $X_n < \epsilon$ ולכן גם $X_\tau < \epsilon$. במקרה זה מתקיים גם כי $X_k < \epsilon$ לכל $0 \le k \le n$ ומכאן ש-$\max(X_0, \ldots, X_n) < \epsilon$. קיבלנו איפה כי

$$\{\max(X_0, \ldots, X_n) \ge \epsilon\} = \{X_\tau \ge \epsilon\}$$

ולכן לכל $n \ge 0$ מתקיים כי

$$P(\max(X_0, \ldots, X_n) \ge \epsilon) \le \frac{EX_n}{\epsilon}$$

בפרט, אם X_n הוא מרטינגייל בעל תוחלת אפס ו-$E|X_n| < \infty$ לכל n אז $|X_n|$ הוא תת-מרטינגייל אי שלילי ולכן

$$P(\max(|X_0|, \ldots, |X_n|) \ge \epsilon) \le \frac{E|X_n|}{\epsilon}$$

ובאופן דומה, אם $EX_n^2 < \infty$ לכל $n \ge 0$ אז X_n^2 הוא תת מרטינגייל אי שלילי ולכן

$$P(\max(|X_0|, \ldots, |X_n|) \ge \epsilon) = P(\max(X_0^2, \ldots, X_n^2) \ge \epsilon^2) \le \frac{EX_n^2}{\epsilon^2}$$

למשל אם Y_i הם משתנים מקריים בלתי תלויים עם תוחלת אפס ושונות σ^2, $S_0 = 0$ ו-$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ לכל $n \ge 1$, אז S_n הוא מרטינגייל עם $ES_n^2 = \mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$ ומתקיים אי שוויון שנקרא אי השוויון המירבי של קולמוגורוב:

$$P\left(\max_{0 \le k \le n} |S_k| \ge \epsilon\right) \le \frac{n\sigma^2}{\epsilon}$$

בפרט אם נסמן $M_n = \max_{0 \le k \le n} |S_k|$ נקבל כי

$$P\left(\frac{M_n}{n} \ge \epsilon\right) = P(M_n \ge n\epsilon) \le \frac{n\sigma^2}{n^2\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

ולכן $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{p} 0$ בהסתברות. זה קצת יותר מלאמר כי $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} 0$ בהסתברות מכיוון ש-$|S_n| \le M_n$. דוגמאות מעשיות יותר: בכל הדוגמאות הללו $X_0, Y_1, Y_2, \ldots$ הם בלתי תלויים, ל-X_0 תוחלת סופית, $S_0 = 0$ ו-$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ לכל $n \ge 1$. כמו כן $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. נניח כי $E|Y_n| < \infty$ ו-$EY_n = \mu$ לכל $n \ge 1$. אז $X_n = X_0 + S_n - n\mu$ הוא מרטינגייל ביחס ל-**F**.

2. נניח כי $EY_n^2 < \infty$, $EY_n = \mu$, $\text{Var}(Y_n) = \sigma^2$. אז $X_n = X_0 + (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$ הוא מרטינגייל ביחס ל-$\mathbf{F}$.

3. נניח כי $Y_n \geq 0$ (בהסתברות אחת) עם $EY_n = 1$. אז $X_n = X_0 Y_1 \cdots Y_n$ הוא מרטינגייל ביחס ל-$\mathbf{F}$. למשל כאשר

$$Y_n = \frac{f_1(Z_n)}{f_0(Z_n)}$$

כאשר $Z_1, Z_2, \ldots$ וכאשר f_0, f_1 הן צפיפויות עבורן מתקיים שלכל x המקיים $f_0(x) = 0$ מתקיים גם כי $f_1(x) = 0$ (דהיינו המידה שנוצרת על ידי f_1 רציפה בהחלט ביחס לזו שנוצרת על ידי f_0, בפרט אם הן חיוביות או אפס על אותן קבוצות מספרים). אז תחת H_0 (הצפיפות f_0 היא נכונה) אנו יודעים כי $f_0(Z_n) > 0$ בהסתברות אחת (כפי שראינו בשבוע שעבר) ולכן,

$$\begin{aligned} EY_n &= E\frac{f_1(Z_n)}{f_0(Z_n)} 1_{\{f_0(Z_n)>0\}} = \int_{\{x|f_0(x)>0\}} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} f_0(x)dx \\ &= \int_{\{x|f_0(x)>0\}} f_1(x)dx = 1 - \int_{\{x|f_0(x)=0\}} f_1(x)dx \end{aligned}$$

עכשיו $\{x|f_0(x) = 0\} \subset \{x|f_1(x) = 0\}$ ולכן

$$\int_{\{x|f_0(x)=0\}} f_1(x)dx \leq \int_{\{x|f_1(x)=0\}} f_1(x)dx = 0$$

ומכאן ש-$EY_n = 1$ ולכן

$$X_n = \frac{f_1(Z_1) \cdots f_1(Z_n)}{f_0(Z_1) \cdots f_0(Z_n)}$$

הוא מרטינגייל.

4. נניח כי Y_n מקבלי אם הערכים $-1, 0, 1$ בהסתברויות q, r, p כאשר $p, q > 0$. עבור m, שלם, נסמן

$$\tau_a = \inf\{n|S_n = m\}$$

נסתכל על

$$\tau = \tau_{-a} \wedge \tau_b$$

אם $p \neq q$ אז $EY_1 = p - q \neq 0 \xrightarrow{1} \frac{S_n}{n}$ ולכן S_n שואף בהתסברות אחת לאינסוף או למינוס איסוף בהתאם לסימן של $p - q$. מכך נובע כי τ סופי בהתסתברות אחת (אחרת S_n יהיה בקטע $[-a, b]$ לתמיד במקום לשאוף לפלוס או מינוס אינסוף). עכשיו

$$E\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} q + \left(\frac{q}{p}\right)^0 r + \left(\frac{q}{p}\right)^1 p = p + r + q = 1$$

ולכן

$$X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^{Y_k}$$

(מכפלה ריקה מוגדרת להיות שווה לאחד) הוא מרטינגייל עם $X_0 = 1$. לכן

$$EX_{\tau \wedge n} = 1$$

מכיוון ש-

$$-a \leq X_{\tau \wedge n} \leq b$$

נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת (במקרה זה, החסומה) כי

$$\lim_{n \to \infty} EX_{\tau \wedge n} = E \lim_{n \to \infty} X_{\tau \wedge n} = EX_\tau$$

זאת מכיוון ש-$\tau < \infty$ בהסתברות אחת ולכן, לכל $n \geq \tau$ מתקיים כי $X_{\tau \wedge n} = X_\tau$ ומכאן שגם בגבול (שבהכרח קיים בהסתברות אחת). מכיוון ש-$EX_{\tau \wedge n} = 1$ לכל $n \geq 0$ נובע כי גם $EX_\tau = 1$. מכיוון ש-S_τ מקבל רק את הערך b בהסתברות מסויימת p_b ואז את הערך $-a$ בהסתברות המשלימה, נקבל כי

$$1 = \left(\frac{q}{p}\right)^{-a} (1 - p_b) + \left(\frac{q}{p}\right)^{b} p_b$$

ואם נעביר אגפים נקבל כי

$$p_b = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{b} - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

שימו לב כי מטעמי סימטריה (בדקו כי זה נכון באופן אלגברי):

$$p_{-a} = 1 - p_b = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}$$

כאשר $p = q$ השיטה הזו לא עוזרת (אלא אם כן לוקחים גבולות מתאימים, אבל אז יש להצדיק אותם). במקרה זה נשתמש במרטינגייל הראשון ונקבל כי מכיוון ש-$\mu = 0$ אז

$$ES_{\tau \wedge n} = 0$$

וממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$ES_\tau = 0$$

אך

$$0 = ES_\tau = -a \cdot (1 - p_b) + bp_b$$

ולכן

$$p_b = \frac{a}{a+b}$$

אך מדוע גם במקרה זה $\tau < \infty$ בהסתברות אחת? זה נובע מהמרטינגייל השני. שם מתקיים כי (מכיוון ש-$\mathrm{Var}(Y_1) = p + q = 1 - r$)

$$ES^2_{\tau\wedge n} = (1-r)E\tau \wedge n$$

צד שמאל חסום על ידי $a^2 \vee b^2$ ולכן גם צד ימין. אם נשאיף $n \to \infty$ נקבל ממשפט ההתכנסות המונוטונית כי

$$E\tau \leq \frac{a^2 \vee b^2}{1-r}$$

ומכיוון ש-$r < 1$ (כי $p = q > 0$) נובע כי $E\tau < \infty$ ולכן $P(\tau < \infty) = 1$ כנדרש. עכשיו, אנחנו גם יכולים לחשב במקרה זה את $E\tau$ באופן הבא

$$\begin{aligned}(1-r)E\tau &= ES^2_\tau = a^2(1-p_b) + b^2 p_b \\ &= a^2\frac{b}{a+b} + b^2\frac{a}{a+b} = ab\end{aligned}$$

ולכן

$$E\tau = \frac{ab}{1-r}$$

אפשר גם לחשב את $E\tau$ גם במקרה ש-$p \neq q$ אך התוצאה הרבה פחות נקיה. משתמשים במרטינגייל $S_n - (p-q)n$ ומקבלים כי

$$(p-q)E\tau = ES_\tau = -a(1-p_b) + bp_b = -a \cdot \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^b}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} + b \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

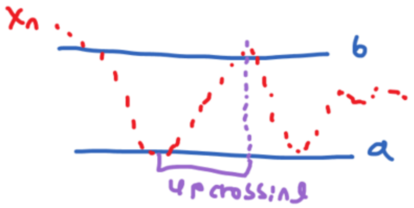
ואז נחלק ב-$p-q$ ונקבל את התשובה הסופית. אתם יכולים לבדוק על ידי שימו בכלל לופיטל שכאשר $p \to q$ כי מקבלי את התוצאה $\frac{ab}{1-r}$ כמצופה.

בהנתן תהליך X_n מסויים ו-$a < b$ נתונים

$$\begin{aligned}S_1 &= \inf\{n|X_n \leq a\} \\ T_1 &= \inf\{n|n \geq S_1, X_n \geq b\} \\ &\vdots \\ S_m &= \inf\{n|n \geq T_{n-1}, X_n \leq a\} \\ T_m &= \inf\{n|n \geq S_n, X_n \geq b\}\end{aligned}$$

אז $0 = T_0 \leq S_1 \leq T_1 \leq S_2 \leq T_2 \leq \ldots$ וכי יתכן כי ממקום מסויים והילך כל זמני העצירה הללו הם אינסופיים.כאשר $T_0 = 0$.
אם $n \geq T_m \geq S_m$ אז

$$X_{T_m\wedge n} - X_{S_m\wedge n} = X_{T_m} - X_{S_m} \geq b - a$$



קיימת סגירה של רציונלים
קיימים שני רציונלים בקטע (a,b) שחוצים את (a,b) ∞ פעמים $\Leftrightarrow$ ~~סדרה~~ a_n גבול לא קיים גם לא קיים במובן הרחב

יש סגור של רציונלים בקטע (a,b) שחוצים את (a,b) רק מספר סופי של פעמים $\Leftrightarrow$ a_n מתכנסת

נניח כי X_n הוא על מרטיגייל, אז מכיוון ש-$S_m \leq T_m$ אז

$$EX_{S_m \wedge n} \geq EX_{T_m \wedge n}$$

ולכן

$$0 \geq E \sum_{m=1}^{n} \left(X_{T_m \wedge n} - X_{S_m \wedge n} \right)$$

עכשיו, ישנם שני מקרים. אם $S_1 < T_1 < \ldots < S_k < T_k \leq n < S_{k+1}$ אז

$$\sum_{m=1}^{n} \left(X_{T_m \wedge n} - X_{S_m \wedge n} \right) = \sum_{m=1}^{k} \left(X_{T_m} - X_{S_m} \right) \geq (b-a)k \geq (b-a)k - (X_n - a)^-$$

אם $S_1 < T_1 < \ldots S_k < T_k < S_{k+1} \leq n < T_{k+1}$ אז

$$\sum_{m=1}^{n} \left(X_{T_m \wedge n} - X_{S_m \wedge n} \right) = \sum_{m=1}^{k} \left(X_{T_m} - X_{S_m} \right) + X_n - X_{S_{k+1}} \geq (b-a)k + X_n - a \geq (b-a)k - (X_n - a)^-$$

לכן, אם נסמן ב-$N_n[a,b]$ את מספר החציות של $[a,b]$ עד זמן n, נקבל כי

$$0 \geq (b-a)EN[a,b] - E(X_n - a)^-$$

ולכן

$$EN_n[a,b] \leq \frac{E(X_n - a)^-}{b-a} = \frac{E(a - X_n)^+}{b-a} \leq \frac{a^+ + EX_n^-}{b-a}$$

ברור כי $N_n[a,b]$ לא יורדת ב-n ושואפת ל-$N[a,b]$, מספר החציות בכלל. מכאן ש-

$$EN[a,b] \leq \frac{a^+ + \sup_{n \geq 0} EX_n^-}{b-a}$$

אם סדרה לא שואפת לגבול, אז קיימות לפחות שתי תתי סדרות ששואפות במובן הרחב לשני גבולות שונים ולכן אם ניקח את a, b ביניהם נקבל אינסוף חציות. דהיינו קיימים $a < b$ כך שהסדרה חוצה את הקטע $[a,b]$ אינסוף פעמים. לכן אם לכל $a < b$ הסדרה חוצה את $[a,b]$ מספר סופי של פעמים, הסדרה בהכרח מתכנסת. לחילופין, אם הסדרה מתכנסת, אז לכל $a < b$ יכולים להיות רק מספר סופי של חציות, אחרת היו שתי תתי סדרות, האחת גדולה או שווה ל-b והשניה קטנה או שווה ל-a בניגוד להנחה שהסדרה מתכנסת. במילים אחרות, סדרת מספרים מתכנסת (במובן הרחב, דהיינו, כולל לאינסוף או מינוס אינסוף) אם ורק אם לכל $a < b$ מספר החציות של הקטע $[a,b]$ הוא סופי. למעשה מספיק להסתכל רק על ערכים רציונלים של a, b.
נחזור עכשיו למקרה של על-מרטינגייל.
טענה: אם X_n הוא על-מרטינגייל המקיים

$$\sup_{n \geq 0} EX_n^- < \infty$$

(בפרט אם הוא אי שלילי), אז קיים משתנה מקרי $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$ המקיים $E|X_\infty| < \infty$ כך ש-

$$X_n \xrightarrow{1} X_\infty$$

הוכחה:

מכיוון ש-$EN[a,b] < \infty$ לכל $a < b$ אז $N[a,b]$ סופי בהסתברות אחת. מכאן שבהסתברות אחת $N[a,b]$ סופי לכל $a < b$ רציונלים (חיתוך של אוסף בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אחת). מכאן שבהסתברות אחת X_n מתכנס לגבול.

עכשיו, מכיוון שמדובר בעל-מרטינגייל אז

$$EX_0 \geq EX_n = EX_n^+ - EX_n^- \geq EX_n^+ - \sup_{k\geq 0} EX_k^-$$

ולכן

$$\sup_{n\geq 0} EX_n^+ \leq EX_0 + \sup_{n\geq 0} EX_n^- < \infty$$

ומכאן ש-

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n| \leq \sup_{n\geq 0} EX_n^+ + \sup_{n\geq 0} EX_n^- < \infty$$

מהלמה של פטו

$$E|X_\infty| \leq \liminf_{n\to\infty} E|X_n| \leq \sup_{n\geq 0} E|X_n| < \infty$$

מכיוון ש-$X_n \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty$ לכל $n \geq 0$ אז גם הגבול מדיד ביחס ל-$\mathcal{F}_\infty$.

עבור תת-מרטינגייל התוצאה זהה רק הפוך. דהיינו, אם $\sup_{n\geq 0} EX_n^+ < \infty$ אז $X_n \xrightarrow{1} X_\infty$ (פשוט מפעילים את הטענה על $-X_n$).

מכיוון שעבור מרטינגייל $EX_0 = EX_n = EX_n^+ - EX_n^-$ נובע כי

$$EX_0 + \sup_{n\geq 0} EX_n^- = \sup_{n\geq 0} EX_n^+$$

ולכן ההנחות $\sup_{n\geq 0} EX_n^- < \infty$, $\sup_{n\geq 0} EX_n^+ < \infty$, $\sup_{n\geq 0} E|X_n|$ הן שקולות וכל אחת מהן גוררת כי $X_n \xrightarrow{1} X_\infty$ כאשר $E|X_\infty| < \infty$.

נשאלת השאלה אם $EX_\infty = EX_0$ גם כן. התשובה היא שלא תמיד. למשל נניח כי Y_i הם בלתי תלויים ומקבלים את הערכים 0 או 2 בסיכוי חצי כל אחד. אז, עבור $X_0 = 1$ ו-$X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$ מתקיים כי $\{X_n | n \geq 0\}$ הוא מרטינגייל עם $EX_0 = 1$. מצד שני מכיוון שלאחר מספר צעדים המתפלג גאומטרית עם $1/2$ נגריל Y_k ששווה לאפס אז ברור כי $X_n \xrightarrow{1} 0$ ולכן התוחלת של המשתנה הגבולי לא שווה לזו של EX_0.

הגדרה:

סדרת משתנים מקריים נקראת אינטגרבילית במידה שווה אם

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{n\geq 0} E|X_n| 1_{\{|X_n|>t\}} = 0$$

דבר ראשון שנשים אליו לב הוא כי אם הסדרה אינטגרבילית במידה שווה אז

$$E|X_n| \leq E|X_n| 1_{\{|X_n|\leq t\}} + E|X_n| 1_{\{|X_n|>t\}} \leq t + \sup_{n\geq 0} E|X_n| 1_{\{|X_n|>t\}}$$

ולכן

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n| < \infty$$

מכאן שמרטינגיילים, תת מרטינגיילים או על מרטינגיילים אינטגרבילים במידה שווה תמיד מתכנסים בהסתברות אחת למשתנה מקרי בעל תוחלת סופית.

טענה :

נניח כי $X_n \xrightarrow{1} X_\infty$ ו-$E|X_n| < \infty$ לכל $n \geq 0$. אז $E|X_n - X_\infty| \to 0$ אם ורק אם הסדרה X_n אינטגרבילית במידה שווה.

הוכחה :

נניח כי הסדרה אינטגרבילית במידה שווה. אז מתקיים כי

$$E|X_n| \leq E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} + E|X_n|1_{\{|X_n|\leq t\}} \leq \sup_{n\geq 0} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} + t$$

ולכן

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n| \leq \sup_{n\geq 0} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} + t$$

ניקח t כך ש-

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq 1$$

ונקבל כי בהכרח

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n| < \infty$$

מכך ומהלמה של Fatou נובע כי

$$E|X_\infty| \leq \liminf_{n\to\infty} E|X_n| \leq \sup_{n\geq 0} E|X_n| < \infty$$

ולכן (משפט ההתכנסות הנשלטת) נובע כי

$$\lim_{t\to\infty} E|X_\infty|1_{\{|X_\infty|>t\}} = 0$$

נגדיר

$$g_t(x) = \begin{cases} -t & x < -t \\ x & -t \leq x \leq t \\ t & x > t \end{cases}$$

אז לכל $t > 0$ הפונקציה $g_t(\cdot)$ היא פונקציה רציפה וחסומה על ידי t. עכשיו

$$|g_t(X_n) - g_t(X_\infty)| \leq |g_t(X_n)| + |g_t(X_\infty)| \leq 2t$$

מהרציפות של $g_t(\cdot)$ נובע כי בהסתברות אחת

$$|g_t(X_n) - g_t(X_\infty)| \xrightarrow{1} 0$$

וממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} E|g_t(X_n) - g_t(X_\infty)| = 0$$

עבור $\epsilon > 0$ ניקח t כך ש-

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq \epsilon/2$$

וגם

$$E|X_\infty|1_{|X_\infty|>t\}} \leq \epsilon/2$$

אז

$$\begin{aligned}
E|X_n - g(X_n)| &= E|X_n - t|1_{\{X_n>t\}} + E|X_n + t|1_{\{X_n<-t\}} \\
&= E(X_n - t)1_{\{X_n>t\}} + E(-X_n - t)1_{\{X_n<-t\}} \\
&\leq EX_n 1_{\{X_n>t\}} + E(-X_n)1_{\{X_n<-t\}} \\
&= E|X_n|1_{\{X_n>t\}} + E|X_n|1_{\{X_n<-t\}} \\
&= E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq \epsilon/2
\end{aligned}$$

באותו אופן גם

$$E|g(X_\infty) - X_\infty| \leq \epsilon/2$$

$$\begin{aligned}
E|X_n - X_\infty| &\leq E|X_n - g(X_n)| + E|g(X_n) - g(X_\infty)| + E|g(X_\infty) - X_\infty| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + E|g(X_n) - g(X_\infty)| + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon + E|g(X_n) - g(X_\infty)|
\end{aligned}$$

מכיוון ש- $E|g(X_n) - g(X_\infty)| \to 0$ אז

$$\limsup_{n\to\infty} E|X_n - X_\infty| \leq \epsilon$$

וזה נכון לכל $\epsilon > 0$. מכאן שהגבול קיים ושווה לאפס.
נניח כי $E|X_n - X_\infty| \to 0$. אז

$$E|X_\infty| \leq E|X_n| + E|X_\infty - X_n|$$

מכיוון ש-$E|X_n| < \infty$ לכל $n \geq 0$ וקיים $n \geq 0$ כך ש-$E|X_n - X_\infty| \leq 1$ (כי סדרה זו שואפת לאפס) נובע כי $E|X_\infty| < \infty$ ולכן

$$\lim_{t\to\infty} E|X_\infty|1_{\{|X_\infty|>t\}=0}$$

עכשיו,

$$\begin{aligned}
E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} &\leq E|X_n - X_\infty|1_{\{|X_n|>t\}} + E|X_\infty|1_{\{|X_n|>t\}} \\
&\leq E|X_n - X_\infty| + E|X_\infty|1_{\{|X_n|>t\}}
\end{aligned}$$

ונשים לב כי

$$\begin{aligned}
E|X_\infty|1_{\{|X_n|>t\}} &\leq E|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|+|X_\infty|>t\}} \\
&\leq E|X_\infty|\left(1_{|X_n - X_\infty|>t/2\}} + 1_{\{|X_\infty|>t/2\}}\right) \\
&= E|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|>t/2\}} + E|X_\infty|1_{\{|X_\infty|>t/2\}}
\end{aligned}$$

מכיוון ש-$X_n \xrightarrow{1} X_\infty$ אז ברור כי

$$|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|>1\}} \xrightarrow{1} 0$$

ומכייון ש-

$$|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|>1\}} \leq |X_\infty|$$

ו-$E|X_\infty| < \infty$ נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת כי גם

$$\lim_{n\to\infty} E|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|>1\}} = 0$$

מכיוון שלכל $t \geq 2$ מתקיים כי

$$E|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|>t/2\}} \leq E|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|>1\}}$$

אנו יודעים עכשיו כי לכל $t \geq 2$ מתקיים כי

$$E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq E|X_n - X_\infty| + E|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|>1\}} + E|X_\infty|1_{\{|X_\infty|>t/2\}}$$

עכשיו, עבור $\epsilon > 0$ ניקח N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} E|X_n - X_\infty| &\leq \frac{\epsilon}{3} \\ E|X_\infty|1_{\{|X_n - X_\infty|>1\}} &\leq \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

ועכשיו ניקח $t \geq 2$ כך ש-

$$E|X_\infty|1_{\{|X_\infty|>t/2\}} < \frac{\epsilon}{3}$$

וקיבלנו כי לכל $t \geq 2$ מתקיים כי

$$\sup_{n\geq N} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq \epsilon$$

עכשיו, ניתן לבחור $t \geq 2$ מספיק גדול כך שלכל $0 \leq n < N$ מתקיים כי

$$E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq \epsilon$$

ולכן, עבור t זה נקבל כי

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq \epsilon$$

דהיינו, הראינו כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $t > 0$ כך ש-

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq \epsilon$$

ומכיוון שצד שמאל היא פונצקיה לא עולה של t נובע כי

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{n\geq 0} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} = 0$$

כנדרש.

טענה:

נניח כי X_n הוא מרטינגייל אינטגרבילי במידה שווה. אז קיים X_∞ עם $E|X_\infty| < \infty$ כך ש-$X_\infty \to X_n$ בהסתברות אחת וב-L^1. כמו כן $EX_n \overset{1}{=} E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$.

הוכחה:

החלק הראשון נובע מהטענה הקודמת ומכך שאינטגרביליות במידה שווה גוררת כי

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n| < \infty$$

וזה התנאי להתכנסות בהסתברות אחת. עכשיו, ניקח $A \in \mathcal{F}_n$. אז, לכל $m \geq n$ מתקיים כי

$$EX_n 1_A = EE[X_m|\mathcal{F}_n]1_A = EE[X_m 1_A|\mathcal{F}_n] = EX_m 1_A$$

עכשיו

$$EX_m 1_A = EX_\infty 1_A + E(X_m - X_\infty)1_A$$

ומכיוון ש-

$$|E(X_m - X_\infty)1_A| \leq E|X_m - X_\infty| \to 0$$

נובע כי

$$\lim_{m\to\infty} EX_m 1_A = EX_\infty 1_A$$

מכאן ש-

$$EX_n 1_A = EX_\infty 1_A = EE\left[X_\infty 1_A|\mathcal{F}_n\right] = EE[X_\infty|\mathcal{F}_n]1_A$$

זה נכון לכל $A \in \mathcal{F}_n$ ולכן בהסתברות אחת מתקיים כי

$$X_n = E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$$

טענה:

אם $E|Y| < \infty$, אז הסדרה $X_n = E[Y|\mathcal{F}_n]$ (בהסתברות אחת) היא מרטינגייל אינטגרבילי במידה שווה ומתקיים כי $X_\infty = E[Y|\mathcal{F}_\infty]$. בפרט, אם $Y \in \mathcal{F}_\infty$ אז $X_\infty = Y$ בהסתברות אחת. $X_n \in \mathcal{F}_n$ ו

הוכחה:

$$\begin{aligned} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} &= E|E[Y|\mathcal{F}_n]|1_{\{|X_n|>t\}} \leq EE[|Y||\mathcal{F}_n]1_{\{|X_n|>t\}} = E|Y|1_{\{|X_n|>t\}} \\ &\leq E|Y|1_{\{|X_n|>t\}\cap\{|Y|>s\}} + E|Y|1_{\{|X_n|>t\}\cap\{|Y|\leq s\}} \\ &\leq E|Y|1_{\{|Y|>s\}} + Es1_{\{|X_n|>t\}\cap\{|Y|\leq s\}} \\ &\leq E|Y|1_{\{|Y|>s\}} + sP(|X_n|>t) \\ &\leq E|Y|1_{\{|Y|>s\}} + \frac{s}{t}E|X_n| \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{n\geq 0} E|X_n| \cdot 1_{\{|X_n|>t\}} = 0$$

כאשר השוויון השני נובע מכך ש-$\{|X_n| > t\} \in \mathcal{F}_n$ (ומההגדרה של תוחלת מותנה) והאחרון נובע מאי שוויון מרקוב. עכשיו

$$E|X_n| = E|E[Y|\mathcal{F}_n]| \leq EE[|Y||\mathcal{F}_n] = E|Y|$$

ולכן

$$E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq E|Y|1_{\{|Y|>s\}} + \frac{s}{t}E|Y|$$

לכל $n \geq 0$ ומכאן שגם

$$\sup_{n\geq 0} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq E|Y|1_{\{|Y|>s\}} + \frac{s}{t}E|Y|$$

לכל $s,t > 0$. אם נשאיף $t \to \infty$ נקבל כי לכל $s > 0$

$$\lim_{t\to\infty} E|X_n|1_{\{|X_n|>t\}} \leq E|Y|1_{\{|Y|>s\}}$$

ואם נשאיף עכשיו $s \to \infty$ נקבל שצד ימין שואף לאפס ולכן צד שמאל שווה לאפס.
עכשיו, כפי שהראינו בהוכחה הקודמת, לכל $n \geq 0$ ולכל $A \in \mathcal{F}_n$ מתקיים כי

$$EX_\infty 1_A = EX_n 1_A$$

כמו כן

$$EX_n 1_A = E[Y|\mathcal{F}_n]1_A = EY1_A$$

ולכן לכל $A \in \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n$ מתקיים כי

$$EX_\infty 1_A = EY1_A$$

אם נסתכל על

$$\{A | EX_\infty 1_A = EY1_A,\ A \in \mathcal{F}_\infty\}$$

אז, קל לבדוק כי זהו σ-שדה המכיל את $\bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n$ ומוכל ב-$\mathcal{F}_\infty$. לכן σ-שדה זה הוא בעצם $\mathcal{F}_\infty$ וקיבלנו עכשיו כי

$$EX_\infty 1_A = EY1_A = EE[Y|\mathcal{F}_\infty]1_A$$

לכל $A \in \mathcal{F}_\infty$ כאשר אנו יודעים כי X_∞ מדידה ביחס ל-$\mathcal{F}_\infty$. לכן $X_\infty = E[Y|\mathcal{F}_\infty]$ בהסתברות אחת.

מרטינגייל הפוך בזמן:
נניח כי $\ldots \mathcal{F}_{-2} \subset \mathcal{F}_{-1} \subset \mathcal{F}_0$ כי $E|X_0| < \infty$ עם $X_0 \in \mathcal{F}_0$ ו-$X_n = E[X_0|\mathcal{F}_{-n}]$. אז $\{X_n | n \geq 0\}$ נקרא מרטינגייל הפוך בזמן. מההוכחות הקודמות (תרגיל) נובע כי תהליך זה אינטגרבילי במידה שווה ומתקיים כי

$$EN[a,b] \leq \frac{a^+ + EX_0^-}{b-a}$$

ולכן קיים $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=0}^\infty \mathcal{F}_{-n}$ כך ש-$X_n \to X_\infty$ בהסתברות אחת וב-L^1.

מסקנה:
אם $Y_1, Y_2, \ldots$ היא סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות עם $E|Y_1| < \infty$ אז קיים גבול בהסתברות אחת לסדרה $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

הוכחה:
נסמן

$$\mathcal{F}_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$$

אז מטעמי סימטריה מתקיים כי

$$E[X_1|\mathcal{F}_{-n}] = \ldots = E[X_n|\mathcal{F}_{-n}]$$

ולכן

$$E[X_1|\mathcal{F}_{-n}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i|\mathcal{F}_{-n}] = E[\bar{X}_n|\mathcal{F}_{-n}] = \bar{X}_n$$

ממה שראינו קודם נובע כי בהכרח

$$\bar{X}_n \to E[X_1|\mathcal{F}_{-\infty}]$$

בהסתברות אחת וב-L^1. אם היינו יודעים כי X_1 בלתי תלוי ב-$\mathcal{F}_{-\infty}$ אז אפשר היה להסיק כי $\bar{X}_n \to EX_1$ בהסתברות אחת וב-L^1.

σ-שדה זנב:

בהנתן מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ו- $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ הם σ-שדות, נאמר כי $\{\mathcal{F}_i | i \geq 1\}$ הם בלתי תלויים אם כל סדרה $\{A_i | i \geq 1\}$ עם $A_i \in \mathcal{F}_i$ היא סדרת מאורעות בלתי תלויים. עם $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, נסמן

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_n &= = \bigvee_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{F}_i \\
\mathcal{C}_\infty &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_i \\
\mathcal{D}_n &= \bigvee_{i=0}^{n} \mathcal{F}_i \\
\mathcal{D}_\infty &= \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n = \bigvee_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_\infty$ נקרא σ-שדה זנב.

1. אם $D_i \in \mathcal{F}_i$ עבור $1 \leq i \leq n$ ו-$C_k \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ עבור $k \in K$, כאשר K סופית, אז

$$P\left(D_1 \cap \ldots \cap D_n \cap \left(\bigcap_{k \in K} C_k\right)\right) = P(D_1) \cdots P(D_n)\, P\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right)$$

שימו לב כי $C_k \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ אם ורק אם קיים $i_k > n$ עבורו $C_k \in \mathcal{F}_{i_k}$. כמו כן, שימו לב כי אם $\mathcal{F}_{k_1} = \cdots = \mathcal{F}_{k_\ell}$ אז גם $\bigcap_{j=1}^{\ell} C_{k_j} \in \mathcal{F}_{k_1}$. מכאן שניתן להציג את $\bigcap_{k \in K} C_k$ כחיתוך של חיתוכים של קבוצות, כאשר כל אחד מהחיתוכים הללו נמצא ב-$\mathcal{F}_i$ עם אינדכס i אחר. דהיינו, אפשר ללא הגבלת הכלליות להניח כי $\{i_k | k \in K\}$ הם אינדכסים שונים.

2. אם $D_i \in \mathcal{F}_i$ לכל $1 \le i \le n$, אז

$$\{C | P\left(D_1 \cap \ldots \cap D_n \cap C\right) = P(D_1) \cdots P\left(D_n\right) P(C)\}$$

הוא אוסף שסגור תחת הפרשים וגבולות לא יורדים. אוסף כל החיתוכים הסופיים של קבוצות ב-$\bigcup_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ הוא אוסף שסגור תחת חיתוכים סופיים ומכיל את Ω. לכן ממשפט המחלקה המונוטונית נובע כי

$$P\left(D_1 \cap \ldots \cap D_n \cap C\right) = P(D_1) \cdots P\left(D_n\right) P(C)$$

לכל

$$C \in \mathcal{C}_n$$

ומכאן נובע כי $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n, \mathcal{C}_n$ הם σ-שדות בלתי תלויים.

3. עם אותם רעיונות כמו בסעיפים 1 ו-2 נובע כי, לכל $n \ge 0$, $\mathcal{D}_n$ ו-$\mathcal{C}_n$ הם σ-שדות בלתי תלויים.

4. מכיוון ש-$\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{C}_n$ נובע כי אם $C \in \mathcal{C}_\infty$ ו-$D \in \mathcal{D}_n$ אז

$$P(D \cap C) = P(D)P(C)$$

מכאן שוויון זה מתקיים גם עבור $D \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$. עכשיו $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$ סגורה תחת חיתוכים סופיים ומכילה את Ω ולכן ממשפט המחלקה המונוטונית השוויון בעצם מתקיים לכל $C \in \mathcal{C}_\infty$ ו-$D \in \mathcal{D}_\infty$.

5. מכיוון ש-$\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{D}_\infty$ נובע כי אם $C \in \mathcal{C}_\infty$ אז

$$P(C) = P^2(C)$$

ומכאן ש-$P(C) \in \{0, 1\}$. הסיבה ש-$\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{D}_\infty$ היא כי

$$\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{C}_n = \bigvee_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{F}_i \subset \bigvee_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i = \mathcal{D}_\infty$$

6. עכשיו, נניח כי $\{X_n | n \ge 1\}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים (לא בהכרח שווי התפלגות). נסמן

$$\mathcal{C}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigvee_{m=n}^{\infty} \sigma(X_m)$$

אז ההסתברות של כל מאורע ב-$\mathcal{C}_\infty$ היא אפס או אחד. בפרט, מתרגיל שראינו, אם X הוא משתנה מקרי המקיים כי $X \in \mathcal{C}_\infty$ (דהיינו $X^{-1}(B) \in \mathcal{C}_\infty$ לכל קבוצת בורל B), אז קיים קבוע c (יתכן ואינסופי) עבורו $P(X = c) = 1$.

7. נניח כי $\{X_n|n \geq 1\}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים. אז המשתנים המקריים הבאים הם קבועים בהסתברות אחת

$$\liminf_{n\to\infty} X_n,\ \limsup_{n\to\infty} X_n,\ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ומכאן שלמאורע שקיים הגבול של X_n או של $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ יש הסתברות אפס או אחד.

8. ראינו קודם כי עבור סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $E|X_1| < \infty$ מתקיים כי $\bar{X}_n$ שואף לגבול X_∞ בהסתברות אחת וב-L^1. מסעיף 7 נובע כי בהכרח X_∞ הוא קבוע בהסתברות אחת ומתקיים כי

$$EX_\infty = EE[X_1|\mathcal{F}_{-\infty}] = EX_1$$

ולכן השלמנו את ההוכחה של המשפט כי אם $E|X_1| < \infty$ אז $\bar{X}_n \to EX_1$ בהסתברות אחת וב-L^1.

9. נסיים עם הטענה הבאה עבור המקרה שבו $E|X_1| = \infty$: אם $EX_1^+ < \infty$ או $EX_1^- < \infty$ אז $\bar{X}_n \to EX_1$ בהסתברות אחת. נעיר כי כאשר EX_1 קיימת אבל היא אינסופית, אז אין מה לדבר על שאיפה ב-L^1.
הוכחה: נניח תחילה כי $X_1 \geq 0$ ו-$EX_1 = \infty$. אז

$$\liminf_{n\to\infty} \bar{X}_n \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \wedge k$$

מהחוק החזק של המספרים הגדולים נובע כי צד ימין שווה בהסתברות אחת ל-$EX_1 \wedge k$. לכן

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} \bar{X}_n \geq EX_1 \wedge k\right) = 1$$

לכל $k \geq 1$ ואם נשאיף $k \to \infty$ נקבל

$$1 = \lim_{k\to\infty} P\left(\liminf_{n\to\infty} \bar{X}_n \geq EX_1 \wedge k\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\liminf_{n\to\infty} \bar{X}_n \geq EX_1 \wedge k\right\}\right)$$

ומכיוון ש-$EX_1 \wedge k \to EX_1 = \infty$ נובע כי $\liminf_{n\to\infty} \bar{X}_n = \infty$ בהסתברות אחת ולכן בהסתברות אחת קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n$ ושווה לאינסוף. אם X_1 אינו אי שלילי או אי חיובי אז

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^+ &= EX_1^+ \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^- &= EX_1^- \end{aligned}$$

מכיוון שאחד מהגבולות הוא סופי אז הפרש הגבולות שווה לגבול של ההפרש ומכאן נובעת הטענה.