נגדיר

$$\tau_i = \inf\{n | \, n \geq 1, \; X_n = i\}$$

מצב i נקרא "נשנה" (recurrent) אם מתקיים כי $P_i(\tau_i < \infty) = 1$. אחרת הוא נקרא "חולף" (transient).

מצב נשנה נקרא נשנה חיובית (positive recurrent) אם $E_i\tau_i < \infty$ והוא נקרא נשנה אפסית (null recurrent) אם $E_i\tau_i = \infty$.

אנו נראה בהמשך כי כמו במקרה שה המחזור, כל התכונות הללו (נשנה, חולף, נשנה חיובית ונשנה אפסית) הן כולן תכונות מחלקתיות. ולכן אפשר לדבר על מחלקה נשנית, מחלקה חולפת, מחלקה נשנית חיובית, מחלקה נשנית אפסית. כאשר השרשרת בלתי פריקה אז אפשר לדבר על שרשרת מרקוב בלתי פריקה וחולפת/נשנית/נשנית חיובית/נשנית אפסית.

נסמן

$$f_{ij}^n = P_i\left(\tau_j = n\right)$$

הסיכוי של i להגיע ל-j אחרי n צעדים **בפעם הראשונה**

כך ש-$f_{ij}^0 = 0$ לכל i, j, גם אם $i = j$. כמו כן, נסמן

$$f_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^n = P_i\left(\tau_j < \infty\right) = 1 - f_{ij}^{\infty}$$

מההגדרה נובע כי

$$f_{ij}^n = P_i\left(X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\right)$$

נסמן עבור $z \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} P_{ij}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{ij}^n \\ F_{ij}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_{ij}^n \end{aligned}$$

ברור כי לכל $z \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} P_{ij}(z) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} < \infty \\ F_{ij}(z) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^n = f_{ij} \leq 1 \end{aligned}$$

לכן שני הטורים מתכנסים לכל $z \in [0, 1)$. כמו כן שימו לב כי אם $f_{ij} > 0$ (קיים $n \geq 1$ כך ש-$f_{ij}^n > 0$) אז לכל $z \in [0, 1)$ מתקיים כי $F_{ij}(z) < f_{ij}$ ולכן בין אם $f_{ij} > 0$ או $f_{ij} = 0$ מתקיים כי $F_{ij}(z) < 1$ לכל $z \in [0, 1)$. זה יהיה חשוב בהמשך.

נשים לב כי לכל $n \geq 1$ ולכל i, j (כולל המקרה $i = j$)

$$p_{ij}^n = P_i\left(X_n = j\right) = P_i\left(\tau_j \leq n, X_n = j\right) = \sum_{k=0}^{n} P_i\left(\tau_j = k, X_n = j\right)$$

וכן כמו כן

$$P_i\left(\tau_j=k,X_n=j|\mathcal{F}_k\right)=1_{\{\tau_j=k\}}P\left(X_n=j|\mathcal{F}_k\right)=1_{\{\tau_j=k\}}p^{n-k}_{X_kj}=1_{\{\tau_j=k\}}p^{n-k}_{jj}$$

השוויון האחרון נובע מכך ש-$\{\tau_j=k\}\subset\{X_k=j\}$. אם ניקח תוחלת בשני האגפים נקבל כי

$$P_i\left(\tau_j=k,X_n=j\right)=f^k_{ij}p^{n-k}_{jj}$$

כמו כן, $f^0_{ij}=0$ וכן עבור $k=n$

$$P_i\left(\tau_j=n,X_n=j\right)=P_i\left(\tau_j=n\right)=f^n_{ij}=f^n_{ij}p^0_{jj}$$

ולכן בסך הכל קיבלנו כי לכל $n\geq 1$

$$p^n_{ij}=\sum_{k=0}^{n}f^k_{ij}p^{n-k}_{jj}$$

עבור $n=0$

$$p^0_{ij}=\delta_{ij}=\delta_{ij}+\sum_{k=0}^{0}f^k_{ij}p^{0-k}_{jj}$$

לכן אם נכפיל את המשוואה ה-n-ב z^n (עבור $z\in(0,1)$ ונסכם, נקבל

$$\begin{aligned}
P_{ij}(z) &= \delta_{ij}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{n}f^k_{ij}p^{n-k}_{jj}\\
&= \delta_{ij}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}z^n f^k_{ij}p^{n-k}_{jj}\\
&= \delta_{ij}+\sum_{k=0}^{\infty}z^k f^k_{ij}\sum_{n=k}^{\infty}z^{n-k}p^{n-k}_{jj}\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \ell=n-k}}{=} \delta_{ij}+\sum_{k=0}^{\infty}z^k f^k_{ij}\sum_{\ell=0}^{\infty}z^{\ell}p^{\ell}_{jj}\\
&= \delta_{ij}+F_{ij}(z)P_{jj}(z)
\end{aligned}$$

בפרט, עבור $j=i$ נקבל

$$P_{ii}(z)=1+F_{ii}(z)P_{ii}(z)$$

ולכן

$$P_{ii}(z)=\frac{1}{1-F_{ii}(z)}$$

כאשר נזכור כי $F_{ii}(z)<1$ לכל $z\in[0,1)$. מכיוון ש-$F_{ii}(z)\to f_{ii}$ ו-$P_{ii}(z)\to\sum_{n=0}^{\infty}p^n_{ii}$ כאשר $z\uparrow 1$ (משפט ההתכנסות המונוטונית) אז

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^n_{ii}=\begin{cases}\frac{1}{1-f_{ii}} & f_{ii}<1\\ \infty & f_{ii}=1\end{cases}$$

כמו כן אם $j \neq i$ אז כאשר נשאיף $z \uparrow 1$ נקבל כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^n = f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^n$$

ומכאן נובעת הטענה הבאה.

טענה:

i הוא מצב נשנה נשנה אם ורק אם $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$ והוא מצב חולף אם ורק אם $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n < \infty$.

כמו כן, אם j חולף אז לכל i מתקיים כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^n < \infty$$

ולכן לכל i מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0$$

אפשר גם להסיק עוד משהו מתוצאות אילו.

טענה:

בכל שרשרת מרקוב עם מרחב מצבים סופי יש לפחות מצב נשנה אחד.

הוכחה:

אם לא אז כל המצבים חולפים ולכן מהטענה הקודמת נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0$$

לכל i, j. מכיוון שאוסף המצבים סופי וגבול של סכום סופי של סדרות מתכנסות שווה לסכום הגבולות, נובע כי

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \sum_j p_{ij}^n = \sum_j \lim_{n\to 0} p_{ij}^n = \sum_j 0 = 0$$

והגענו לסתירה. לכן לא יתכן שכל המצבים חולפים ומכאן שלפחות אחד מהם נשנה.

טענה:

נשנות וחולפות הן תכונות מחלקתיות.

הוכחה:

נניח כי $j \leftrightarrow i$ וניקח n, m כך ש-$p_{ij}^n, p_{ji}^m > 0$ אז

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^k \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{m+k+n} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ji}^m p_{ii}^k p_{ij}^n = p_{ji}^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k \right) p_{ij}^n$$

ובאופן דומה

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k \geq p_{ij}^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^k \right) p_{ji}^m$$

ולכן $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^k, \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^k$ הם שניהם אינסוף או שניהם סופיים. במקרה הראשון i, j נשנית ובמקרה השני הם חולפים.

מכיוון שכאשר מרחב המצבים הוא סופי אז יש לפחות מצב נשנה אחד, אז כל המחלקה שהוא שייך אליה היא נשנית ולכן גם קיימת לפחות מחלקה נשנית אחת (שיכולה גם להכיל רק מצב אחד).

טענה:

כל מחלקה סגורה וסופית חייבת להיות נשנית.

הוכחה:

אם נתחיל ממחלקה זו, אז נישאר שם לתמיד ולכן אפשר להתעלם מכל המצבים שאינם נמצאים במחלקה זו. מקבלים איפה שרשרת מרקוב בלתי פריקה עם מרחב מצבים סופי. מכיוון שלפחות אחד מהמצבים נשנה אז כל המצבים חייבים להיות נשנים.

טענה: $j \to i$ אם ורק אם $f_{ij} > 0$.

הוכחה: אם $f_{ij} = 0$ אז $F_{ij}(z) = 0$ לכל $z \in (0,1)$ ולכן

$$z^n p_{ij}^n \le P_{ij}(z) = F_{ij}(z) P_{jj}(z) = 0$$

ולכן $p_{ij}^n = 0$ לכל $n \ge 0$. אם $f_{ij} > 0$ אז

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^n = f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^n \ge f_{ij} > 0$$

ולכן קיים $n \ge 1$ כך ש-$p_{ij}^n > 0$. קבלנו איפה כי $f_{ij}^n = 0$ לכל $n \ge 1$ אם ורק אם $p_{ij}^n = 0$ לכל $n \ge 1$ וכי קיים $n \ge 1$ עבורו $f_{ij}^n > 0$ אם ורק אם קיים $n \ge 1$ עבורו $p_{ij}^n > 0$. זה מה שהיה צריך להראות.

טענה:

כל מחלקה נשנית חייבת להיות סגורה (גם אם היא אינסופית).

הוכחה

נניח כי C נשנית. אם היא לא סגורה אז קיים $i \in C$ ו-$j \notin C$ כך ש-$p_{ij} > 0$. מכיוון ש-$j \notin C$ אז $f_{ji} = 0$

$$\begin{aligned} f_{ii} &= p_{ii} + p_{ij} f_{ji} + \sum_{k \ne i,j} p_{ik} f_{ki} = p_{ii} + \sum_{k \ne i,j} p_{ik} f_{ki} \\ &\le p_{ii} + \sum_{k \ne i,j} p_{ik} = 1 - p_{ij} < 1 \end{aligned}$$

אך $f_{ii} = 1$ כי C נשנית וזו סתירה. לכן לא יתכן כי קיים $i \in C$ ו-$j \notin C$ כך ש-$p_{ij} > 0$ ומכאן שלכל $i \in C$ ולכל $j \notin C$ מתקיים כי $p_{ij} = 0$ ולכן

$$\sum_{j \in C} p_{ij} = \sum_{j \in C} p_{ij} + \sum_{j \notin C} p_{ij} = \sum_{j} p_{ij} = 1$$

לכן C סגורה.

מכל זאת נובע כי מחלקה פתוחה חייבת להיות חולפת וכי מחלקה חולפת וסגורה חייבת להיות אינסופית. מכיוון שמחלקה **סופית** סגורה אם ורק אם היא נשנית, אז היא פתוחה אם ורק אם היא חולפת.

עוד טענה שאפשר להראות עבור f_{ii}^n היא זו.

טענה

נסמן

$$\delta_i = \gcd\left(n | f_{ii}^n > 0\right)$$

4. $f_{ii} \overset{claim}{=} p_{ii}^1 + \sum_{k \ne i} p_{ik} f_{ki}$ הפעם הראשונה ש$i \to i$ או שחזרתי לi אחרי פעם אחת או$(+)$ שחזרתי לi אחרי k צעדים

אז $d_i = \delta_i$.
הוכחה: מכיוון ש-

$$\{n | f_{ii}^n > 0\} \subset \{n | p_{ii}^n > 0\}$$

אז ברור כי $d_i \leq \delta_i$ (d_i מחלק יותר מספרים). נשאר להראות את הכיוון ההפוך. ניזכר כי לכל $n \geq 1$ מתקיים כי

$$p_{ii}^n = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k}$$

נניח בשלילה כי $n \geq 1$ הוא המספר הראשון עבורו $p_{ii}^n > 0$ אך δ_i אינו מחלק את n. דהיינו לכל $k = 0, \ldots, n-1$ אם $p_{ii}^k > 0$ אז δ_i מחלק את k. נראה שאין ראשון כזה ולכן המסקנה תהיה כי δ_i מחלק כל איבר ב-

$$\{n | p_{ii}^n > 0\}$$

והמסקנה מכך שהוא קטן או שווה מהגדול ביותר בעל התכונה הזאת, דהיינו $\delta_i \leq d_i$. מכיוון שקודם הראינו כי מתקיים אי השוויון ההפוך אז ינבע כי $\delta_i = d_i$. אם כן

$$0 < p_{ii}^n = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^k p_{ii}^{n-k}$$

לכן קיים $1 \leq k \leq n$ כך ש-$f_{ii}^k p_{ii}^{n-k} > 0$. בפרט $f_{ii}^k > 0$ וגם $p_{ii}^{n-k} > 0$. מכיוון ש-$f_{ii}^k > 0$ אז δ_i מחלק את k. מכיוון ש-$p_{ii}^{n-k} > 0$ ו-$n - k < n$ אז δ_i מחלק את $n - k$ (כי n הוא הראשון עבורו δ_i אינו מחלק את n). לכן δ_i מחלק את הסכום. דהיינו, את $k + (n-k) = n$ בסתירה לכך שהוא לא מחלק אותו. מכאן שלא קיים n ראשון עבורו $p_{ii}^n > 0$ ו-δ_i אינו מחלק את n וסיימנו את ההוכחה.

טענה:
עבור שרשרת מרקוב בלתי פריקה מתקיים כי היא נשנית אם ורק אם $f_{ij} = 1$ לכל i, j.
הוכחה:

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}$$

לכן

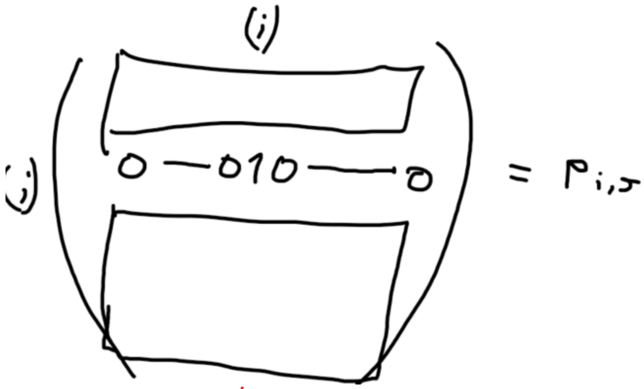
$$\begin{aligned} 1 - f_{ij} &= 1 - p_{ij} - \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} = \sum_{k \neq j} p_{ik} - \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} \\ &= \sum_{k \neq j} p_{ik} \left(1 - f_{kj}\right) \end{aligned}$$

אם השרשרת נשנית, אז $f_{jj} = 1$ לכל j ומכאן ש-$p_{ij}\left(1 - f_{jj}\right) = 0$ ובמקרה זה קיבלנו כי

$$1 - f_{ij} = \sum_{k} p_{ik} \left(1 - f_{kj}\right)$$

מכאן שאם נסמן ב-A את המטריצה שהאיבר ה-ij שלה הוא $1 - f_{ij}$ נקבל כי

$$A = PA$$



ובאינדוקציה נובע כי

$$A = P^n A$$

כלומר

$$1 - f_{ij} = \sum_k p_{ik}^n \left(1 - f_{kj}\right)$$

בפרט אם ניקח $i = j$ נקבל כי מכיוון ש-$f_{jj} = 1$ אז לכל k, j ולכל $n \geq 1$ מתקיים כי

$$0 = \sum_k p_{jk}^n \left(1 - f_{kj}\right) \geq p_{jk}^n \left(1 - f_{kj}\right)$$

בפרט, לכל k, j קיים n כך ש-$p_{jk}^n > 0$ (כי השרשרת בלתי פריקה) ולכן $1 - f_{kj} = 0$. קיבלנו איפה כי $f_{kj} = 1$ לכל k, j כנדרש.
לצורך הטענות הבאות יהיה מועיל להסתכל על הדבר הבא. נניח כי P היא מטריצת המעברים של שרשרת מרקוב בלתי פריקה. עבור i_0 כלשהו נסמן

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & i \neq i_0 \\ \delta_{i_0 j} & i = i_0 \end{cases}$$

כלומר, הפכנו את i_0 למצב סופג אך הסתברויות המעברים מכל שאר המצבים נשארו ללא שינוי.
אם מתחילים מ-$i \neq i_0$ אז כל עוד לא נכנסו ל-i_0 (ואז נשארים שם לתמיד) אז המעברים הם כמו בשרשרת המקורית. בפרט הזמן עד שלראשונה נכנסים ל-i_0 בשרשרת החדשה ובשרשרת המקורית מתפלגים אותו הדבר. עכשיו, מכיוון שבשרשרת החדשה i_0 סופג, אז לכל $i \neq i_0$

$$\tilde{p}_{ii_0}^n = \tilde{P}_i\left(\tau_{i_0} \leq n\right) = P_i\left(\tau_{i_0} \leq n\right) = \sum_{k=0}^n f_{ii_0}^k$$

(c) מתקיים כי $\tilde{p}_{ii_0}^{n} \xrightarrow{n\to\infty} f_{ii_0}$

בפרט אם השרשרת היא נשנת ובלתי פריקה נקבל כי $\tilde{p}_{ii_0}^{n} \longrightarrow \begin{cases} 1 & i = i_0 \\ 0 & i \neq i_0 \end{cases}$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{p}_{ii_0}^n = f_{ii_0}$$

בפרט, אם השרשרת נשנית אז הגבול הוא 1. כמו כן, מכיוון שהשרשרת המקורית היא בלתי פריקה אז $f_{ii_0} > 0$ ומכאן שלכל $i \neq i_0$ קיים n עבורו $\tilde{p}_{ii_0}^n > 0$. דהיינו, בשרשרת החדשה $i \to i_0$ בעוד ש-i_0 הוא סופג ולכן $i \not\to i_0$ ומכאן שלכל $i \neq i_0$ מתקיים כי i נמצא במחלקה פתוחה ומכאן שהוא חולף. לכן, לכל k מתקיים כי

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{p}_{ki}^n = 0$$

זה נכון גם אם השרשרת המקורית נשנית וגם אם היא חולפת.
עכשיו, נסתכל על

$$\begin{aligned} f_{ii_0} &= p_{ii_0} + \sum_{k \neq i_0} p_{ik} f_{ki_0} \\ &= \tilde{p}_{ii_0} + \sum_{k \neq i_0} \tilde{p}_{ik} f_{ki_0} \end{aligned}$$

כמו כן מכיוון ש-$\tilde{p}_{i_0k} = \delta_{i_0k}$ אז

$$1 = \tilde{p}_{i_0i_0} + \sum_{k\neq i_0} \tilde{p}_{i_0k} f_{ki_0}$$

לכן, אם נגדיר

$$y_i = \begin{cases} 1 & i = i_0 \\ f_{ii_0} & i \neq i_0 \end{cases}$$

נקבל כי לכל i

$$y_i = \sum_k \tilde{p}_{ik} y_k$$

ומכאן באינדוקציה

$$y_i = \sum_k \tilde{p}^n_{ik} y_k$$

מכיוון ש-

$$f_{i_0i_0} = p_{i_0i_0} + \sum_{k\neq i_0} p_{i_0k} f_{ki_0}$$

אז אם $f_{i_0i_0} < 1$ (השרשרת המקורית חולפת) אז בהכרח קיים $k \neq i_0$ כך ש-$f_{ki_0} < 1$. במקרה זה y_i פותר את המערכת

$$y_i = \sum_j p_{ij} y_j \; \forall i \neq i_0$$

כאשר קיים $i \neq i_0$ עבורו $y_{i_0} = 1 > y_i$. אם ניקח cy_i עבור $c \neq 0$ במקום y_i זה עדיין יפתור את מערכת המשוואות האחרונה כאשר y_i הוא פתרון חסום (על ידי $|c|$) ולא קבוע (כי קיים i כך ש-$cy_i \neq cy_{i_0}$). אם כן, המסקנה כאן היא שאם השרשרת חולפת אז לכל i_0 קיים פתרון חסום ולא קבוע למערכת

$$y_i = \sum_j p_{ij} y_j \; \forall i \neq i_0$$

טענה:
נניח כי נתונה שרשרת מרקוב בלתי פריקה וכי i_0 הוא מצב שרירותי. השרשרת חולפת אם ורק אם קיים פתרון חסום ולא קבוע למערכת

$$y_i = \sum_j p_{ij} y_j \; \forall i \neq i_0$$

אם יש פתרון כזה, אז יש פתרון כזה לכל i_0 ואם אין פתרון כזה אז אין כזה פתרון עבור אף i_0.
הוכחה:

אם השרשרת חולפת אז ראינו כבר כי לא משנה איזה i_0 נבחר תמיד אפשר למצוא כזה פתרון. נראה אם כן כי אם השרשרת נשנית אז אין כזה פתרון עבור אף i_0. אם כן, נשים לב כי

$$y_i = \sum_j p_{ij} y_j \ \forall i \neq i_0$$

שקול ל-

$$y_i = \sum_j \tilde{p}_{ij} y_j \ \forall i$$

זאת מכיוון ש-

$$y_{i_0} = \sum_j \delta_{i_0 j} y_j = \sum_j \tilde{p}_{i_0 j} y_j$$

לכן באינדוקציה נובע

$$y_i = \sum_j \tilde{p}_{ij}^n y_j$$

מכיוון שהפתרון חסום אז קיים K כך ש-$|y_i| \leq K$ לכל i ובפרט לכל $i \neq i_0$ מתקיים כי

$$\left| \sum_{j \neq i_0} \tilde{p}_{ij}^n y_j \right| \leq K \sum_{j \neq i_0} \tilde{p}_{ij}^n = K \left(1 - \tilde{p}_{ii_0}^n\right)$$

זכרו כי כאשר השרשרת נשנית אז

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{p}_{ii_0}^n = f_{ii_0} = 1$$

ולכן

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j \neq i_0} \tilde{p}_{ij}^n y_j = 0$$

כמו כן

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{p}_{ii_0}^n y_{i_0} = y_{i_0}$$

ולכן

$$y_i = \sum_j \tilde{p}_{ij}^n y_j = \tilde{p}_{ii_0}^n y_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} \tilde{p}_{ij}^n y_j \to y_{i_0}$$

כאשר $n \to \infty$ וקיבלנו כי $y_i = y_{i_0}$ לכל i ומכאן שכל פתרון חסום חייב להיות קבוע.

שימו לב כי מה שעשינו כאן נכון לכל i_0 שנבחר. לכן כדי להחליט אם שרשרת מרקוב בלתי פריקה היא נשנית או חולפת אז בוחרים i_0 באופן שרירותי (מה שהכי נוח) ואז בודקים אם יש פתרון חסום ולא קבוע למערכת

$$y_i = \sum_j p_{ij} y_j \ \forall i \neq i_0$$

מסקנה מתרגיל 12 המטריצה כאן היא סטוכסטית כפולה
סכום שורות וגם סכום עמודות הינו 1

או אין. אם אין, אז השרשרת נשנית ואין פתרון כזה עבור אף i_0 שנבחר ואם יש אז השרשרת חולפת ויש פתרון כזה לכל i_0 שנבחר.

דוגמה:

מהלך מקרי על אוסף המספרים השלמים האי שליליים. דהיינו

$$p_{ij}=\begin{cases}q_i & i\geq 1,\, j=i-1\\ r_i & i\geq 0,\, j=i\\ p_i & i\geq 0,\, j=i+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

כאשר $p_i>0$ לכל $i\geq 0$, $q_i>0$ לכל $i\geq 1$ ו-$r_0=1-p_0\geq 0$ ו-$r_i=1-p_i-q_i\geq 0$ לכל $i\geq 1$.

ניקח $i_0=0$ ונקבל כי יש לבדוק אם קיים פתרון חסום ולא קבוע למערכת

$$y_i=q_iy_{i-1}+r_iy_i+p_iy_{i+1}\;\forall i\geq 1$$

מכיוון ש-$r_i=1-p_i-q_i$ אפשר על ידי העברת אגפים להראות כי זה שקול ל-

$$p_i\left(y_{i+1}-y_i\right)=q_i\left(y_i-y_{i-1}\right)$$

כלומר

$$y_{i+1}-y_i=\frac{q_i}{p_i}\left(y_i-y_{i-1}\right)$$

באינדוקציה נובע מכך כי

$$y_{i+1}-y_i=\frac{q_1\cdots q_i}{p_1\cdots p_i}\left(y_1-y_0\right)$$

אם נסמן

$$\eta_i=\begin{cases}1 & i=0\\ \frac{q_1\cdots q_i}{p_1\cdots p_i} & i\geq 1\end{cases}$$

אז קיבלנו כי לכל $i\geq 0$ (כולל $i=0$) מתקיים כי

$$y_{i+1}-y_i=\eta_i\left(y_1-y_0\right)$$

ואם נסכם נקבל כי לכל $j\geq 1$

נסכם כדי להגיע לטור טלסקופי ולבודד את y_n

$$y_j-y_0=\sum_{i=0}^{j-1}\left(y_{i+1}-y_i\right)=\left(\sum_{i=0}^{j-1}\eta_i\right)\left(y_1-y_0\right)$$

או

$$y_j=y_0+\left(\sum_{i=0}^{j-1}\eta_i\right)\left(y_1-y_0\right)$$

אם הייתי לוקח y_0, y_1 אחרים הייתי מקבל פתרון אחר לכן הפתרון לא קבוע !

אם $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i < \infty$ אז ניקח $y_0 = 0$ ו-1 $y_1 =$ וקיבלנו פתרון חסום ולא קבוע. לכן במקרה זה השרשרת חולפת.

אם לעומת זאת $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i = \infty$ אז או ש-$y_1 = y_0$ ואז $y_j = y_0$ לכל j והפתרון קבוע או ש-$y_1 \neq y_0$ ואז קיבלנו פתרון לא חסום. מכאן שבכל מקרה אין פתרון חסום ולא קבוע. לכן במקרה זה השרשרת נשנית.

אם כן קיבלנו כי מהלך מקרי בלתי פריק על המספרים השלמים האי שליליים הוא חולף אם ורק אם $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i < \infty$ ונשנה אם ורק אם $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i = \infty$.

לדוגמה, אם $p_i = p$ לכל $i \geq 0$ ו-$q_i = q$ לכל $i \geq 1$ (ואז $r_0 = 1 - p$ ו-$r_i = 1 - p - q$ לכל $i \geq 1$) נקבל כי

$$\eta_i = (q/p)^i$$

לכן השרשרת נשנית כאשר $q \leq p$ וחולפת כאשר $p > q$.

אם $p_i = p$ ו-$q_i = q/i$, אז

$$\eta_i = \frac{(q/p)^i}{i!}$$

ולכן

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i = e^{q/p} < \infty$$

ולכן במקרה זה השרשרת חולפת לכל $p, q \in (0, 1)$ כך ש- $p + q \leq 1$.

נניח עכשיו כי השרשרת היא בלתי פריקה ונשנית. איך נוכל לבדוק אם היא נשנית חיובית או נשנית אפסית?

משפט:

לכל שרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית קיימים $\mu_i > 0$ כך ש-

$$\mu_j = \sum_i \mu_i p_{ij}$$

הפתרון הזה הוא יחיד עד כדי מכפלה בקבוע. השרשרת נשנית חיובית אם ורק אם $\sum_i \mu_i < \infty$ ונשנית אפסית אם ורק אם $\sum_i \mu_i = \infty$.

כאשר השרשרת נשנית חיובית אז קיים פתרון יחיד למערכת

$$\begin{aligned} \sum_i \pi_i p_{ij} &= \pi_j \; \forall j \\ \sum_j \pi_j &= 1 \\ \pi_j &\geq 0 \; \forall j \end{aligned}$$

המקיים בהכרח כי $\pi_i > 0$ לכל i (מכאן המושג נשנה "חיובית"). כמו כן, אם ההתפלגות ההתחלתית של השרשרת היא π_i אז התהליך $X_0, X_1, \ldots$ הוא סטציונארי במובן ש-

$$(X_n, \ldots, X_{n+k}) \sim (X_0, \ldots, X_k)$$

לכל $n \geq 0$ ו-$k \geq 0$. מסיבה זו התפלגות זאת נקראת ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת.

לפני שנוכיח את הטענה נוכיח משהו יותר פשוט:

טענה:

שרשרת מרקוב שיש לה התפלגות סטציונרית היא בהכרח נשנית חיובית.

הוכחה:

אם השרשרת נשנית אז התוצאה נובעת מהמשפט הקודם שעדיין לא הוכחנו. לכן מספיק להראות כי השרשרת לא יכולה להיות חולפת. ראינו כי אם היא חולפת, אז p_{ij}^n שואף לאפס לכל ij (מכיוון ש-$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^n < \infty$). עכשיו, אם

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

אז נובע באינדוקציה כי

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}^n$$

ומכיוון ש-$p_{ij}^n \leq 1$ נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת כי

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_i \pi_i p_{ij}^n = \sum_i \pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \sum_i \pi_i 0 = 0$$

ומכאן ש-

$$\sum_j \pi_j = 0$$

בניגוד להנחה ש-$\sum_j \pi_j = 1$ (כי π_i התפלגות סטציונרית). לכן השרשרת לא יכולה להיות חולפת. לכן היא נשנית. מכיוון שהיא נשנית וקיים פתרון למערכת המתאימה שמסתכם לערך סופי, היא נשנית חיובית.

אם כן, אנו יודעים עכשיו כי שרשרת מרקוב בלתי פריקה היא נשנית חיובית אם ורק אם קיימת לה התפלגות סטציונרית ובמקרה זה התפלגות זו היא יחידה וחיובית.

מילה אחרונה לפני דוגמה. נשים לב כי אם עבור j_0 שרירותי

$$\begin{aligned}
\sum_i \pi_i p_{ij} &= \pi_j \; \forall j \neq j_0 \\
\sum_j \pi_j &= 1 \\
\pi_j &\geq 0 \; \forall j
\end{aligned}$$

אז גם

$$\begin{aligned}
\pi_{j_0} &= 1 - \sum_{j\neq j_0} \pi_j = 1 - \sum_{j\neq j_0} \sum_i \pi_i p_{ij} \\
&= 1 - \sum_i \pi_i \sum_{j\neq j_0} p_{ij} = 1 - \sum_i \pi_i \left(1 - p_{ij_0}\right) \\
&= 1 - \sum_i \pi_i + \sum_i \pi_i p_{ij_0} = \sum_i \pi_i p_{ij_0}
\end{aligned}$$

ולכן אפשר להתעלם ממשוואה אחת באופן שרירות (כל משוואה חוץ מ-$\sum_j \pi_j = 1$). לפעמים זה עוזר ולפעמים לא. שימו לב כי כאשר יש מספר סופי של מצבים K אז מספר המשוואות הוא $K+1$ בעוד מספר הנעלמים הוא K ולכן זה ברור במקרה זה כי יש משוואה אחת מיותרת. מה שהראינו עכשיו היא שכל אחת מהמשוואות פרט למשוואה $\sum_j \pi_j = 1$ היא מיותרת.

כמו כן שימו לב כי שרשרת מרקוב בלתי פריקה עם מרחב מצבים היא תמיד נשנית (ראינו זאת קודם) ומכיוון ש-$\sum_i \mu_i < \infty$ (סכום סופי של ערכים סופיים) נובע כי כל מחלקה סגורה וסופית היא בעצם נשנית חיובית, לא רק נשנית. לכן מחלקה יכולה להיות נשנית אפסית רק אם היא אינסופית. במקרה הסופי יש מחלקות פתוחות ולכן חולפות או מחלקות סגורות ולכן נשנות חיובית. אין במקרה הסופי מחלקות נשנות אפסית.

לפני ההוכחה, בואו ניישם את התוצאה עבור מהלך מקרי.

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \pi_0 r_0 + \pi_1 q_1\\ \pi_j &= \pi_{j-1} p_{j-1} + \pi_j r_j + \pi_{j+1} q_{j+1} \; j \geq 1\end{aligned}$$

אם נעביר אגפים במשוואה הראשונה נקבל כי

$$\pi_0 p_0 = \pi_0 (1 - r_0) = \pi_1 q_1$$

נניח באינדוקציה כי

$$\pi_{j-1} p_{j-1} = \pi_j q_j$$

אז

$$\begin{aligned}\pi_j &= \pi_{j-1} p_{j-1} + \pi_j r_j + \pi_{j+1} q_{j+1}\\ &= \pi_j q_j + \pi_j r_j + \pi_{j+1} q_{j+1}\\ &= \pi_j (1 - p_j) + \pi_{j+1} q_{j+1}\end{aligned}$$

ואם נעביר אגפים נקבל כי

$$\pi_j p_j = \pi_{j+1} q_{j+1}$$

ולכן זה מתקיים לכל j. כמו כן, אם זה מתקיים לכל j אז גם המערכת המקורית מתקיימת, דהיינו, זהו תנאי הכרחי ומספיק. עכשיו

$$\pi_{j+1} = \frac{p_j}{q_{j+1}} \pi_j$$

ובאינדוקציה נקבל כי

$$\pi_{j+1} = \frac{p_0 \cdots p_j}{q_1 \cdots q_{j+1}} \pi_0$$

לכן אם נסמן

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{p_0 \cdots p_{j-1}}{q_1 \cdots q_j} & j \geq 1 \end{cases}$$

אז

$$\pi_j = \xi_j \pi_0$$

נקבל כי $\sum_j \zeta_j \cdot \pi_0 = \sum_j \pi_j = 1$ לכן $\pi_0 = \frac{1}{\sum_j \zeta_j}$ לפי הטענה כי $\pi_j = \zeta_j \pi_0$ אסיק כי $\pi_j = \frac{\zeta_j}{\sum_j \zeta_j}$

אם $\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j < \infty$ אז

$$\pi_j = \frac{\xi_j}{\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i}$$

הוא פתרון אי שלילי ל-$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} = \pi_j$ שמסתכם לאחד ולכן במקרה זה השרשרת נשנית חיובית וזו ההתפלגות הסטציונרית (היחידה) שלה.
אם לעומת זאת $\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j = \infty$ אז או ש-$\pi_0 = 0$ ואז $\pi_j = 0$ לכל j (לכן מסתכם לאפס ולא לאחד) או ש-$\pi_0 > 0$ ואז הפתרון מסתכם לאינסוף. בכל מקרה לא קיים פתרון שמסתכם לאחד ולכן אין פתרון למערכת המשוואות

$$\begin{aligned} \sum_i \pi_i p_{ij} &= \pi_j \; \forall j \neq j_0 \\ \sum_j \pi_j &= 1 \\ \pi_j &\geq 0 \; \forall j \end{aligned}$$

ולכן במקרה זה השרשרת אינה נשנית חיובית. במקרה זה היא יכולה להיות או חולפת או נשנית אפסית.
אם כן קבלנו עבור מהלך מקרי בלתי פריק כי

1. אם $\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i < \infty$ השרשרת נשנית חיובית וההתפלגות הסטציונרית היא

$$\pi_j = \frac{\xi_j}{\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i}$$

2. אם $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i < \infty$ אז השרשרת חולפת.

3. אם $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i = \infty$ אז השרשרת נשנית אפסית (כי היא לא חולפת, לכן נשנית, אבל גם לא נשנית חיובית, לכן בהכרח נשנית אפסית).

דוגמה: $p_i = p$ לכל $i \geq 0$, $q_i = q$ לכל $i \geq 1$. אז

$$\begin{aligned} \eta_i &= (q/p)^i \\ \xi_i &= (p/q)^i \end{aligned}$$

לכן אם $p < q$ השרשרת נשנית חיובית עם התפלגות סטציונרית

$$\pi_i = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^i$$

דהיינו, התפלגות גיאומטרית.
אם $p > q$ השרשרת חולפת ואם $p = q$ השרשרת נשנית אפסית.
אם $p_i = p/(i+1)$ ו-$q_i = q$ כאשר $p + q \leq 1$ אז

$$\xi_i = \frac{(p/q)^i}{i!}$$

ולכן במקרה זה

$$\pi_i = e^{-p/q}\frac{(p/q)^i}{i!}$$

במקרה זה השרשרת תמיד נשנית חיובית עם התפלגות סטציונרית פואסונית.

קודם עבור שרשרת מרקוב בלתי פריקה הגדרנו שרשרת מרקוב חדשה שבה הפכנו מצב מסויים i_0 לסופג על ידי כך שהחלפנו את השורה ה-i_0 במטריצה ל-$\delta_{i_0 j}$ ובכך הפכנו את כל שאר המצבים לחולפים (כי הם שייכים לקבוצות פתוחות). כמו כן ראינו כי

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{p}^n_{ii_0} = f_{ii_0}$$

ואם השרשרת נשנית אז הגבול הוא בהכרח 1. נסתכל עכשיו על מטריצה אחרת

$$\bar{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & j \neq i_0 \\ 0 & j = i_0 \end{cases}$$

דהיינו, לוקחים את העמודה ה-i_0 של P ומחליפים אותה בעמודה של אפסים. נגדיר $\bar{P}^0 = I$ למרות ש-$\bar{P}$ כבר אינה מטריצת מעברים. זאת מכיוון שבמטריצה זו לא ניתן להיכנס ל-i_0 מאף מצב בעוד שבמטריצה המקורית אפשר היה בגלל אי הפריקות. מכאן שיש לפחות שורה אחת שסכום האיברים שלה קטן ממש מאחד. למרות שזה קורה זה אינו מפריע למה שעומד לבוא. עכשיו לכל $j \neq i_0$ ולכל i (כולל $i = i_0$)

$$\begin{aligned}
\bar{p}^n_{ij} &= \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} \bar{p}_{ii_1}\bar{p}_{i_1i_2}\cdots\bar{p}_{i_{n-2}i_{n-1}}\bar{p}_{i_{n-1}j} \\
&= \sum_{i_1\neq i_0,\dots,i_n\neq i_0} p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-2}i_{n-1}}p_{i_{n-1}j} \\
&= P_i\left(X_1 \neq i_0,\dots,X_{n-1}\neq i_0, X_n = j\right) \\
&= P_i\left(\tau_{i_0} > n, X_n = j\right)
\end{aligned}$$

עכשיו נשים לב כי זה נכון גם עבור $j = i_0$ מכיוון שבמקרה זה

$$\bar{p}^n_{ii_0} = 0 = P_i\left(\tau_{i_0} > n, X_n = i_0\right)$$

זאת מכיוון ש-

$$\{\tau_{i_0} > n\} = \{X_1 \neq i_0,\dots,, X_n \neq i_0\}$$

ולכן החיתוך עם $\{X_n = i_0\}$ הוא ריק. בפרט, זה נכון גם עבור $i = i_0$. עכשיו נגדיר

$$\nu_j = E_{i_0}\sum_{n=0}^{\tau_{i_0}-1} 1_{\{X_n=j\}}$$

ונשים לב כי מההגדרה נובע כי $\nu_{i_0} = 1$ מכיוון שאם מתחילים ב-i_0 אז $X_0 = i_0$ ולכל n

$1,\dots,\tau_{i_0}-1$ מתקיים כי $X_n\neq i_0$. אם $j\neq i_0$ אז

$$\begin{aligned} E_{i_0}\sum_{n=0}^{\tau_{i_0}-1}1_{\{X_n=j\}} &= E_{i_0}\sum_{n=0}^{\infty}1_{\{X_n=j\}}1_{\{\tau_{i_0}-1\geq n\}}\\ &= E_{i_0}\sum_{n=0}^{\infty}1_{\{X_n=j\}}1_{\{\tau_{i_0}>n\}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}P\left(\tau_{i_0}>n,X_n=j\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{p}_{i_0j}^{n} \end{aligned}$$

תחילה נראה כי $\nu_j<\infty$ לכל j.

טענה: לכל $i,j\neq i_0$ מתקיים כי

$$\bar{p}_{ij}^{n}=\tilde{p}_{ij}^{n}$$

הוכחה:

זה נובע מכך שלכל $i_1,\dots,i_{n-1}\neq i_0$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ii_1}\bar{p}_{i_1i_2}\cdots\bar{p}_{i_{n-2}i_{n-1}}\bar{p}_{i_{n-1}j} &= p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-2}i_{n-1}}p_{i_{n-1}j}\\ &= \tilde{p}_{ii_1}\tilde{p}_{i_1i_2}\cdots\tilde{p}_{i_{n-2}i_{n-1}}\tilde{p}_{i_{n-1}j} \end{aligned}$$

אם לפחות אחד מהאברים $i_1,\dots,i_{n-1}$ שווים ל-i_0 אז

$$\bar{p}_{ii_1}\bar{p}_{i_1i_2}\cdots\bar{p}_{i_{n-2}i_{n-1}}\bar{p}_{i_{n-1}j}=0=\tilde{p}_{ii_1}\tilde{p}_{i_1i_2}\cdots\tilde{p}_{i_{n-2}i_{n-1}}\tilde{p}_{i_{n-1}j}$$

מכאן שהשוויון מתקיים לכל $i_1,\dots,i_{n-1}$. נסכם ונקבל את התוצאה. אפשר גם בקלות להראות זאת באינדוקציה על n.

עכשיו, לכל $j\neq i_0$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} \nu_j &= \sum_{n=0}^{\infty}\bar{p}_{i_0j}^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{p}_{i_0j}^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\neq i_0}p_{i_0k}\bar{p}_{kj}^{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\neq i_0}p_{i_0k}\tilde{p}_{kj}^{n-1}=\sum_{k\neq i_0}p_{i_0k}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{p}_{kj}^{n-1}=\sum_{k\neq i_0}p_{i_0k}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{p}_{kj}^{m} \end{aligned}$$

נזכור כי

$$\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{p}_{kj}^{m}\leq\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{p}_{jj}^{m}$$

ומכיוון ש-j חולף בשרשרת שבה i_0 סופג נובע כי $\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{p}_{jj}^{m}<\infty$ ולכן

$$\sum_{k\neq i_0}p_{i_0k}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{p}_{kj}^{m}\leq\sum_{k\neq i_0}p_{i_0k}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{p}_{jj}^{m}=\left(1-p_{i_0i_0}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{p}_{jj}^{m}<\infty$$

ומכאן נובע כי $\nu_j<\infty$ לכל $j\neq i_0$, כאשר $\nu_{i_0}=1<\infty$ גם כן. שימו לב כי כל מה שהיינו צריכים עבור התוצאה הזאת היא שהשרשרת היא בלתי פריקה. זה לא משנה אם היא חולפת או נשנית.

עכשיו, נשים לב כי לכל $j \neq i_0$

$$\begin{aligned}\sum_i \nu_i p_{ij} &= \sum_i \nu_i \bar{p}_{ij} = \sum_i \sum_{n=0} \bar{p}^n_{i_0 i} \bar{p}_{ij} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i \bar{p}^n_{i_0 i} \bar{p}_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}^{n+1}_{i_0 j} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{p}^m_{i_0 j} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}^m_{i_0 j} = \nu_j\end{aligned}$$

כאשר השוויון לפני האחרון נובע מכך ש-$0 = \delta_{i_0 j} = \bar{p}^0_{i_0 j}$ כי $j \neq i_0$. עכשיו, נשים לב כי לכל $i \neq i_0$ ולכל $n \geq 0$ מתקיים כי

$$\bar{p}^n_{i_0 i} p_{i i_0} = P_{i_0}\left(X_1 \neq i_0, \ldots, X_{n-1} \neq i_0, X_n = i, X_{n+1} = i_0\right) = P_{i_0}\left(X_n = i, \tau_{i_0} = n+1\right)$$

ועבור $i = i_0$ שני הצדדים הם אפס. לכן אם נסכם נקבל כי

$$\sum_i \bar{p}^n_{i_0 i} p_{i i_0} = P_{i_0}\left(\tau_{i_0} = n+1\right)$$

ואם נסכם על n נקבל כי

$$f_{i_0 i_0} = P_{i_0}\left(\tau_{i_0} < \infty\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i \bar{p}^n_{i_0 i} p_{i i_0} = \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}^n_{i_0 i} p_{i i_0} = \sum_i \nu_i p_{i i_0}$$

לכן כאשר השרשרת נשנית אז $f_{i_0 i_0} = 1$ ומכיוון ש-$\nu_{i_0} = 1$ נובע כי לכל j מתקיים כי

$$\sum_i \nu_i p_{ij} = \nu_j$$

עכשיו, נניח כי μ_i הם ערכים סופיים ואי שליליים ומתקיים לכל j כי

$$\mu_j \geq \sum_i \mu_i p_{ij}$$

אז באינדוקציה נובע כי

$$\mu_j \geq \sum_i \mu_i p^n_{ij} \geq \mu_i p^n_{ij}$$

ולכן אם קיים j עבורו $\mu_j = 0$ אז בהכרח $\mu_i p^n_{ij} = 0$ לכל i ו-$n \geq 0$. מכיוון שלכל i קיים n עבורו $p^n_{ij} > 0$ (השרשרת בלתי פריקה) אז $\mu_i = 0$ לכל i. מכאן שאו ש-$\mu_i > 0$ לכל i או ש-$\mu_i = 0$ לכל i. זה יהיה חשוב עוד מעט.

נשים לב כי מכיוון ש-$\mu_j \geq 0$ לכל j ו-$\mu_{i_0} = \mu_{i_0}$, ניתן לכתוב

$$\mu_j \geq \mu_{i_0} \delta_{i_0 j} = \mu_{i_0} \bar{p}^0_{i_0 j}$$

מכך נובע כי עבור $j \neq i_0$

$$\begin{aligned}\mu_j &\geq \sum_i \mu_i p_{ij} \geq \mu_{i_0} \sum_i \bar{p}^0_{i_0 i} p_{ij} = \mu_{i_0} p_{i_0 j} \\ &= \mu_{i_0 j} \bar{p}_{i_0 j} = \mu_{i_0}\left(\bar{p}^0_{i_0 j} + \bar{p}^1_{i_0 j}\right)\end{aligned}$$

השוויון האחרון נובע מכך ש-$\bar{p}^0_{i_0j}=0$ ו-$\bar{p}_{i_0j}=\bar{p}^1_{i_0j}$. עבור $j=i_0$ מתקיים כי

$$\mu_{i_0}=\mu_{i_0}\left(\bar{p}^0_{i_0i_0}+\bar{p}^1_{i_0i_0}\right)$$

מכיוון ש-$\bar{p}_{i_0i_0}=\bar{p}^1_{i_0i_0}=0$ ו-$\bar{p}^0_{i_0i_0}=1$. קיבלנו איפה כי לכל j (כולל i_0) מתקיים כי

$$\mu_j\geq\mu_{i_0}\left(\bar{p}^0_{i_0j}+\bar{p}^1_{i_0j}\right)$$

זה כבר נותן רעיון כיצד לנסות להמשיך. נניח אם כן באינדוקציה כי לכל j מתקיים כי

$$\mu_j\geq\mu_{i_0}\sum_{k=0}^{n-1}\bar{p}^k_{i_0j}$$

אז עבור $j=i_0$ מתקיים כי

$$\sum_{k=0}^{n}\bar{p}^k_{i_0i_0}=1$$

זאת מכיוון ש-$\bar{p}^0_{i_0i_0}=1$ בעוד ש-$\bar{p}^k_{i_0i_0}=0$ לכל $1\leq k\leq n$. מכאן ש-

$$\mu_{i_0}=\mu_{i_0}\sum_{k=0}^{n}\bar{p}^k_{i_0i_0}$$

בעוד שעבור $j\neq i_0$

$$\begin{aligned}\mu_j &\geq \sum_i\mu_ip_{ij}=\sum_i\mu_i\bar{p}_{ij}\geq\sum_i\left(\mu_{i_0}\sum_{k=0}^{n-1}\bar{p}^k_{i_0i}\right)\bar{p}_{ij}\\ &= \mu_{i_0}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_i\bar{p}^k_{i_0i}\bar{p}_{ij}=\mu_{i_0}\sum_{k=0}^{n-1}\bar{p}^{k+1}_{i_0j}=\mu_{i_0}\sum_{\ell=1}^{n}\bar{p}^\ell_{i_0j}\end{aligned}$$

ומכיוון ש-$\bar{p}^0_{i_0j}=0$ צד ימין שווה גם ל- $\mu_{i_0}\sum_{\ell=0}^{n}\bar{p}^\ell_{i_0j}$. הוכחנו אם כן באינדוקציה כי לכל j ולכל $n\geq 0$ מתקיים כי

$$\mu_j\geq\mu_{i_0}\sum_{k=0}^{n}\bar{p}^k_{i_0j}$$

מכיוון שזה נכון לכל $n\geq 0$ זה גם נכון בגבול ומכאן ש-

$$\mu_j\geq\mu_{i_0}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{p}^k_{i_0j}=\mu_{i_0}\nu_j$$

עכשיו אנו יודעים כי

$$\begin{aligned}\mu_j &\geq \sum_i\mu_ip_{ij}\\ \nu_j &= \sum_i\nu_ip_{ij}\end{aligned}$$

לכן

$$\mu_j - \mu_{i_0}\nu_j \geq \sum_i \left(\mu_i - \mu_{i_0}\nu_i\right) p_{ij}$$

כאשר $\mu_j - \mu_{i_0}\nu_j \geq 0$ לכל j. ראינו קודם כי פיתרון של מערכת כזו חייב לקיים שכל האיברים חיוביים או שכל האיברים הם אפס. מכיוון ש-$\nu_{i_0} = 1$ אז $\mu_{i_0} - \mu_{i_0}\nu_{i_0} = 0$ ולכן לא יתכן שכל האיברים חיוביים. לכן בהכרח קיבלנו כי

$$\mu_i = \mu_{i_0}\nu_j$$

מכאן נובע כי כל פתרון אי שלילי של מערכת אי השוויונות

$$\mu_j \geq \sum_i \mu_i p_{ij}$$

הוא בעצם פתרון של מערכת השוויונים

$$\mu_j = \sum_i \mu_i p_{ij}$$

ומתקיים בהכרח כי יש פתרון יחיד עד כדי מכפלה בקבוע. כמו כן, אם $\mu_{i_0} > 0$ אז $\mu_j > 0$ לכל j ומתקיים כי

$$\frac{\mu_j}{\mu_{i_0}} = \nu_j = E_{i_0} \sum_{n=0}^{\tau_{i_0}-1} 1_{\{X_n=j\}}$$

כמו כן, שימו לב כי i_0 נבחר באופן שרירותי ולכן לכל i, j

$$\frac{\mu_j}{\mu_i} = E_i \sum_{n=0}^{\tau_i-1} 1_{\{X_n=j\}}$$

כלומר כאשר השרשרת היא בלתי פריקה ונשנית, כל פתרון חיובי למערכת

$$\mu_j = \sum_i \mu_i p_{ij}$$

יקיים כי תוחלת מספר הביקורים ב-j בין שני ביקורים עוקבים ב-i הוא μ_j/μ_i. מכאן גם ש-

$$E_i \sum_{n=0}^{\tau_i-1} 1_{\{X_n=k\}} \cdot E_k \sum_{n=0}^{\tau_k-1} 1_{\{X_n=j\}} = \frac{\mu_k}{\mu_i} \cdot \frac{\mu_j}{\mu_k} = \frac{\mu_j}{\mu_i} = E_i \sum_{n=0}^{\tau_i-1} 1_{\{X_n=j\}}$$

ובפרט אם ניקח $i = j$ נקבל כי צד שמאל הוא 1 ולכן

$$E_k \sum_{n=0}^{\tau_k-1} 1_{\{X_n=i\}} = \frac{1}{E_i \sum_{n=0}^{\tau_i-1} 1_{\{X_n=k\}}}$$

למשל עבור המהלך המקרי ראינו כי אם $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i = \infty$ אז השרשרת נשנית. במקרה זה ראינו כי פתרון חיובי למערכת

$$\mu_j = \sum_i \mu_i p_{ij}$$

הוא $\mu_j = \xi_j$ ולכן תוחלת מספר הביקורים ב-j בין שני ביקורים עוקבים ב-i הוא ξ_j/ξ_i. למשל, כאשר $p = q$ ראינו כי $\xi_i = 1$ לכל i ולכן התוצאה היא 1 לכל i, j.

עכשיו, נשים לב כי

$$\sum_j \frac{\mu_j}{\mu_i} = \sum_j E_i \sum_{n=0}^{\tau_i - 1} 1_{\{X_n = j\}} = E_i \sum_{n=0}^{\tau_i - 1} \sum_j 1_{\{X_n = j\}} = E_i \sum_{n=0}^{\tau_i - 1} 1 = E_i \tau_i$$

ולכן לכל i מתקיים כי

$$E_i \tau_i = \frac{\sum_j \mu_j}{\mu_i}$$

כאשר נזכור כי $\infty > \mu_i > 0$ ולכן קבלנו כי אם $\infty > \sum_j \mu_j$ אז $\infty > E_i \tau_i$ לכל i ואם $\infty = \sum_j \mu_j$ אז $\infty = E_i \tau_i$ לכל i. מכאן נובע כי נשנות חיובית ונשנות אפסית הן תכונות מחלקתיות (לכל מחלקה נשנית ולכן בהכרח סגורה, ניתן להתייחס כאל שרשרת מרקוב בלתי פריקה).

כאשר $\sum_j \mu_j < \infty$ נקבל כי

$$\pi_i = \frac{1}{E_i \tau_i} = \frac{\mu_i}{\sum_j \mu_j}$$

היא התפלגות על מרחב המצבים המקיימת כי $\mu_i > 0$ לכל i. נשים לב גם כי

$$\frac{\pi_k}{\pi_i} = \frac{\mu_k}{\mu_i} = E_i \sum_{n=0}^{\tau_i - 1} 1_{\{X_n = k\}}$$

התפלגות זו היא ההתפלגות היחידה שפותרת את המערכת

$$\begin{aligned} \sum_i \pi_i p_{ij} &= \pi_j \ \forall j \\ \sum_j \pi_j &= 1 \\ \pi_j &\geq 0 \ \forall j \end{aligned}$$

זאת מכיוון מכיוון שהפתרון למערכת $\mu_j = \sum_i \mu_i p_{ij}$ הוא יחיד עד כדי מכפלה בקבוע. לכן אם $\tilde{\pi}_i$ הוא גם פתרון אז $\tilde{\pi}_i = c\pi_i$ אך מכיוון ש-

$$1 = \sum_i \tilde{\pi}_i = c \sum_i \pi_i = c$$

ולכן בהכרח $\tilde{\pi}_i = \pi_i$ לכל i. קיבלנו איפה כי או שלמערכת הזו אין פתרון, או שיש לה פתרון יחיד.

לבסוף, נשים לב כי

$$\pi^T = \pi^T P$$

ולכן באינדוקציה נובע כי

$$\pi^T = \pi^T P^n$$

כלומר,

$$P_\pi\left(X_0 = j\right) = \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}^n = P_\pi\left(X_n = j\right)$$

מכאן נובע כי לכל $n \geq 0$ ו-$k \geq 0$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} P_\pi\left(X_n = i_0, \ldots, X_{n+k} = i_k\right) &= P_\pi\left(X_n = i_0\right) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k} \\ &= \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k} \end{aligned}$$

וצד ימין אינו תלוי ב-n. מכאן שתהליך המרקוב כשמתחילים אותו בהתפלגות הזאת הוא תהליך סטציונרי (במובן החזק). לכן π_i נקראת ההתפלגות סטציונרית.

נציין רק כי כאשר השרשרת אינה בלתי פריקה, אז אם יש לה רק מחלקה נשנית חיובית אחת, גם אז יש התפלגות סטציונרית יחידה. זאת מכיוון שאם j חולף אז

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}^n \to \sum_i \pi_i 0 = 0$$

ולכן חייבים לבחור $\pi_j = 0$ לכל j חולף. כמו כן אם j נשנה אפסית, שייך למחלקה C כלשהי ו-$\pi_j > 0$ אז π_j מקיים את המשוואה

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

אך $\pi_i = 0$ לכל i חולף ו-$p_{ij} = 0$ לכל i נשנה שאינו ב-C (כי המחלקה ש-i שייך אליה בהכרח סגורה). לכן קיבלנו כי

$$\pi_j = \sum_{i \in C} \pi_i p_{ij} \; \forall j \in C$$

ומכיוון ש-C היא מחלקה נשנית אפסית נובע כי $\sum_{j \in C} \pi_j = \infty$ וזה לא יכול להיות כי הנחנו כי π_j היא התפלגות סטציונרית של השרשרת כולה. מכאן שאין ברירה, לוקחים את ההתפלגות הסטציונרית של המחלקה הנשנית חיובית ולכל j שאינו במחלקה זו חייבים להגדיר $\pi_j = 0$ (בין אם הוא חולף או נשנה).

כאשר יש יותר ממחלקה נשנית חיובית אחת, אז אפשר לחשב את ההתפגלות הסטציונרית של כל מחלקה כזו בנפרד ואז ואז לקחת ערוב כלשהו של התפלגויות אילו ולקבל התפלגות סטציונרית לשרשרת כולה. במקרה כזה יש אינסוף פתרונות למערכת כאשר כל פתרון חייב להיות ערוב של הפתרונות היחידים של כל מחלקה נשנית חיובית. במילים אחרות, מבצעים הגרלה שרירותית (ערוב) מאיזו מחלקה נשנית חיובית אנו מתחילים ואז בוחרים במצב מסויים בתוך המחלקה לפי ההתפלגות הסטציונרית היחידה של אותה מחלקה. כלומר אם $\{\pi_j(C) | j \in C\}$ היא ההתפלגות הסטציונית של מחלקה C ו-λ_C הוא ההסתברות שבה אנו בחרים במחלקה C (דהיינו $\sum_C \lambda_C = 1$ כאשר אנו עוברים על כל המחלקות שנשנות חיובית) אז

$$\pi_j = \sum_C \lambda_C \pi_j(C) 1_C(j)$$

שימו לב כי $\pi_j = 0$ לכל j שאינו נמצא באחת מהמחלקות הנשנות חיובית. לכל בחירה של λ_C (כך שהם אי שליליים ומסתכמים לאחד) מקבלים התפלגות סטציונרית לשרשרת כולה.