14-15.6.22

תרגול #12 מוצ'י, ב'

למה 2.1: יהי $S\in S^4(x_1,\dots,x_n)$, $h_i=x_{i+1}-x_i$. ונגדיר מטריצה $(n-2)\times n$:

$$\Delta=\begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & -\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & 0 \cdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{h_{n-2}} & -\left(\frac{1}{h_{n-2}}+\frac{1}{h_{n-1}}\right) & \frac{1}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

ואת המטריצה הסימטרית בגודל $(n-2)\times(n-2)$: (tridiagonal)

$$W=\begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & & \vdots \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \frac{h_4}{6} \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} \end{pmatrix}$$

יהי $K=\Delta^T W^{-1}\Delta$ ו-S וקטור של ערכים $S(x_i)$, $i=1,\dots,n$. אז

$$\|S''\|^2=S^TKS$$

שאלה 4: הוכיחו את למה 2.1 בעזרת הצעדים הבאים.

cubic spline

(1) הסבירו מדוע הנגזרת השנייה של $S\in S^4(x_1,\dots,x_n)$ היא פונקציה רציפה ולינארית למקוטעין:

$x\in[x_i,x_{i+1}]$; $S''(x)=z_{i+1}\cdot\frac{x-x_i}{h_i}+z_i\cdot\frac{x_{i+1}-x}{h_i}$ כאשר

$z_i=S''(x_i)$; $h_i=x_{i+1}-x_i$

פתרון: $m=2$

במקרה שלנו, $r=4$ ולכן S הוא פולינום מדרגה 3 לכל היותר על קטע, $[x_i,x_{i+1}]$. הנגזרת השלישית היא קבועה (למקוטעין) ולכן הנגזרת השנייה היא לינארית (למקוטעין).
כדי למצוא את הישר המתאים בין הנקודות, ניתן לעשות אינטרפולציה לינארית בעזרת הנקודות $(x_i,S''(x_i))$, $(x_{i+1},S''(x_{i+1}))$ ולקבל בדיוק את הנוסחה הנתונה:

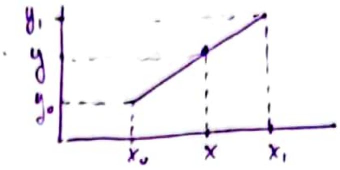
$$S''(x)=S''(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}+S''(x_i)\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}$$

הערה על אינטרפולציה לינארית:

אם נתונות לנו הנקודות $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$, אז האינטרפולנט הלינארי הוא הקו הישר בין שתי הנקודות.

לכן לכל $x\in[x_0,x_1]$ ונקודה y על הישר, מתקיים

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\Rightarrow y=y_0\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\right)+y_1\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)$$



(2) הסבירו מדוע אם $S\in NS^4(x_1,\dots,x_n)$ אז $z_1=z_n=0$.

פתרון:

בפרט לנו המעלה הקובית שלנו. $2m=4$ ולכן $m=2$. ספלין טבעי יש לו דרגה לכל היותר $m-1$ לכל היותר מחוץ לקטע $[x_1,x_n]$ ובמקרה שלנו - חייב להיות לינארי.

הנגזרת השנייה תהיה אפס.

כיון שהנגזרת השנייה גם צריכה להיות רציפה, בהכרח נקבל

$$S''(x_1)=0,\quad S''(x_n)=0$$

(3) הראו כי $\|S''\|^2=z^TWz$ עם $z=(z_2,\dots,z_{n-1})$.

פתרון: נחשב את שני האגפים בנפרד ונראה שהם שווים.

$$\|S''\|^2=\int S''(x)^2\,dx=\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}S''(x)\mathbb{1}_{\{x\in[x_i,x_{i+1})\}}\,dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(z_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i}+z_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right)^2dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}z_{i+1}^2\frac{(x-x_i)^2}{h_i^2}+2z_iz_{i+1}\frac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)}{h_i^2}+z_i^2\frac{(x_{i+1}-x)^2}{h_i^2}\,dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(z_i^2\frac{h_i}{3}+2z_iz_{i+1}\frac{h_i}{6}+z_{i+1}^2\cdot\frac{h_i}{3}\right)$$

(כמובן מתקיים $z_1=z_n=0$)

Scanned with CamScanner

...קי, נחשב את z^TWz.

...י ה-i,j המטריצה W נתון ע"י,

$$W_{ij}=\frac{1}{6}h_{i-1}\mathbb{1}_{\{j=i-1\}}+\frac{1}{3}(h_{i-1}+h_i)\mathbb{1}_{\{i=j\}}+\frac{1}{6}h_i\mathbb{1}_{\{j=i+1\}}$$

$i,j\in\{2,\dots,n-1\}$ (המטריצה היא $(n-2)\times(n-2)$).

לכן:

$$z^TWz=\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1}z_iW_{ij}z_j=\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1}z_i\left(\frac{1}{6}h_{i-1}\mathbb{1}_{\{j=i-1\}}+\frac{1}{3}(h_{i-1}+h_i)\mathbb{1}_{\{j=i\}}+\frac{1}{6}h_i\mathbb{1}_{\{j=i+1\}}\right)z_j$$

שני האיברים מתאפסים

$$=\sum_{i=2}^{n-1}z_i\left(\frac{1}{6}h_{i-1}z_{i-1}+\frac{1}{3}(h_{i-1}+h_i)z_i+\frac{1}{6}h_iz_{i+1}\right)$$

$$=\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{6}h_{i-1}z_iz_{i-1}+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{3}h_{i-1}z_i^2+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{3}h_iz_i^2+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{6}h_iz_iz_{i+1}$$

נחליף משתנה בשני הסכומים הראשונים.

$$=\underbrace{\sum_{j=1}^{\cancel{n-2}\;n-1}\frac{1}{6}h_jz_jz_{j+1}+\sum_{j=1}^{\cancel{n-2}\;n-1}\frac{1}{3}h_jz_{j+1}^2}_{\text{אפשר להוסיף למעלה את האינדקס } j=n-1 \text{ כי אז } z_{j+1}=z_n=0 \text{ והסכום לא משתנה.}}+\underbrace{\sum_{\cancel{i=2}\;i=1}^{n-1}\frac{1}{3}h_iz_i^2+\sum_{\cancel{i=2}\;i=1}^{n-1}\frac{1}{6}h_iz_iz_{i+1}}_{\text{אפשר להוסיף למטה את האינדקס } i=1 \text{ כיוון ש- } z_1=0 \text{ והסכום לא משתנה.}}$$

שני הסכומים הקיצוניים שווים!

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(z_i^2\frac{h_i}{3}+2\frac{1}{6}z_iz_{i+1}\cdot h_i+z_{i+1}^2\frac{h_i}{3}\right)=\|S''\|^2$$

//

(4) הסבירו מדוע עבור $x\in[x_i,x_{i+1}]$ הספליין $s(x)$ מ- $S^4(x_1,\dots,x_n)$ ניתן להצגה

$$s(x)=z_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}+z_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+c_i(x-x_i)+d_i(x_{i+1}-x)\quad;\ c_i,d_i\in\mathbb{R}$$

פתרון:

לספליין מדרגה 3 עם נזכור נגזרת שניה בהצגה שראינו:

$$S''(x)=z_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i}+z_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}$$

נבצע להם עוד 2 דרגות חופש והן נתונות ע"י c_i,d_i.

(5) נראה כי c_i, d_i תלויים בערכי ה-spline ב-x_i ו-x_{i+1} דרך הנוסחאות.

$$d_i = \frac{S(x_i)}{h_i} - z_i\frac{h_i}{6} \quad ; \quad c_i = \frac{S(x_{i+1})}{h_i} - z_{i+1}\frac{h_i}{6} \qquad (3.9)$$

פתרון:

נחשב את S בנקודות הנ"ל ונקבל את התוצאה הרצויה לאחר העברת אגפים.

$$S(x_i) = z_i\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6h_i} + d_i(x_{i+1}-x_i) = z_i\frac{h_i^2}{6} + d_i h_i$$

$$S(x_{i+1}) = z_{i+1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6h_i} + c_i(x_{i+1}-x_i) = z_{i+1}\frac{h_i^2}{6} + c_i h_i$$

(6) השתמשו בנוסחאות הנדרשות על מקטעים כדי להראות שהקשר בין z ל- $S=(S(x_1),\dots,S(x_n))$
נתון ע"י הנוסחה, $Wz = \Delta S$.
הסיקו את הנוסחה $\|S''\|^2 = S^TKS$ מתקיים.

$$K = \Delta^T W^{-1}\Delta$$

פתרון:

מרציפות הנגזרת במקטעים, מתקיים כי $S'(x_i+) = S'(x_i-)$. (מימין ומשמאל). אכן, עבור

$$S'(x) = z_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} - z_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + c_i - d_i \quad ; \quad x\in[x_i, x_{i+1}]$$

מתקיים

$$S'(x) = z_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_{i-1}} - z_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_{i-1}} + c_{i-1} - d_{i-1} \quad , \quad x\in[x_{i-1}, x_i]$$

$$-z_i\frac{h_i}{2} + c_i - d_i = z_i\frac{h_{i-1}}{2} + c_{i-1} - d_{i-1}$$

נציב את c_i, d_i שמצאנו בסעיף הקודם ונקבל את המשוואה

$$-z_i\frac{h_i}{2} + \frac{S(x_{i+1})}{h_i} - z_{i+1}\frac{h_i}{6} - \frac{S(x_i)}{h_i} + z_i\frac{h_i}{6} = z_i\frac{h_{i-1}}{2} + \frac{S(x_i)}{h_{i-1}} - z_i\frac{h_{i-1}}{6} - \frac{S(x_{i-1})}{h_{i-1}} + z_{i-1}\frac{h_{i-1}}{6}$$

נעביר לצד אחד את כל מה שתלוי ב-S ולאחר את כל מה שתלוי ב-z ונקבל:

$$z_{i-1}\frac{h_{i-1}}{6} + z_i\frac{h_{i-1}+h_i}{3} + z_{i+1}\frac{h_i}{6} = S(x_{i-1})\frac{1}{h_{i-1}} - S(x_i)\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right) + S(x_{i+1})\frac{1}{h_i}$$

אבל אלה בדיוק האיברים המתאימים במטריצות: $Wz = \Delta S$. $\Leftarrow$ $z = W^{-1}\Delta S$

נזכור כי בסעיף (3) הוכחנו ש $\|S''\|^2 = z^TWz$ לכן נציב ΔS ונקבל

$$\|S''\|^2 = (W^{-1}\Delta S)^T\Delta S = S^T\underbrace{\Delta^T W^{-1}\Delta}_{K} S = S^TKS \quad //$$

...מפורש את ה- smoothing spline מדרגה שלישית עבור בעיית הרגרסיה.

פתרון:

מהסעיפים הקודמים נסיק כי

$$\hat{f}_n(x)=z_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}+z_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+c_i(x-x_i)+d_i(x_{i+1}-x)\quad;\ x\in[x_i,x_{i+1}]$$
$$i=1,\dots,n-1$$

כאשר $h_i=x_{i+1}-x_i$, המקדמים c_i,d_i מחושבים בעזרת הנוסחאות שמצאנו, והזי'ים z_i שווים לווקטור

$$z=W^{-1}\Delta S$$

$$S=(I+n\lambda K)^{-1}Y$$

-ראינו בכיתה שזה ה- S שממזער את הבעיה.

מה קורה מחוץ לקטע $[x_1,x_n]$? הספליין חייב להיות ליניארי. מרציפות הספליין ונגזרתו הוא שונה, נקבל:

$$x\in[0,x_1]\Rightarrow\quad \hat{f}_n(x)=c_1(x-x_1)+d_1(x_2-x_1)$$
$$x\in[x_n,1]\Rightarrow\quad \hat{f}_n(x)=c_{n-1}(x-x_{n-1})+d_{n-1}(x_n-x)$$

(האיברים הוא שונים מהאפסים).

שאלה 5: פתרו באופן דומה את שאלה 4 פרוצדורה עבור natural smoothing spline ליניארי.

פתרון:

• נסמן במקרה הזה את $m=1$. נקבל כי:

$$S(x)=S(x_{i+1})\frac{x-x_i}{h_i}+S(x_i)\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\quad;\ x\in[x_i,x_{i+1}]$$

• בקצוות: דרגת פולינום היא 0 לכל היותר כי $[0,1]\setminus[x_1,x_n]$. דהיינו, פונ' קבועה. לכן אין אילוצים נוספים.

• נסמן את $\|S^{(m)}\|_2^2$: (נסמן $S_i=S(x_i)$)

נגזרת של s

$$\|S'\|^2=\int_0^1 S'(x)^2dx=\sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{S_{i+1}-S_i}{h_i}\right)^2dx=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(S_{j+1}-S_j)^2}{h_i}$$

$$\Rightarrow\quad J_1(S)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k-S_k)^2+\lambda\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(S_{j+1}-S_j)^2}{h_i}$$

אם נגזור את $J_1(s)$ לפי s_l ונשווה ל-0, נקבל:

$$\frac{1}{n}S_l+\lambda\left(-S_{l-1}\frac{1}{h_{l-1}}+S_l\left(\frac{1}{h_{l-1}}+\frac{1}{h_l}\right)-S_{l+1}\frac{1}{h_l}\right)=\frac{1}{n}Y_l \quad ; l=1,\dots,n$$

כאשר, $S_0=S_1$, $S_{n+1}=S_n$ לדרישת הרציפות ב- knots.

בקיצור, $(I+n\lambda V)S=Y$, כאשר, $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$ עם

$$V=\begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1} & 0 & 0 & & & \\ -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & 0 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -\frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}}+\frac{1}{h_n} & -\frac{1}{h_n} \\ & & & & & -\frac{1}{h_n} & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

Goodness of fit tests :

שאלה 3:

נסתכל על בעיית טיב ההתאמה עבור מבחני ההשערות המורכבת

$$\mathcal{F}_0 = \{F_\theta : \theta \in E\} \quad ; E \subseteq \mathbb{R}^d \quad , d \in \mathbb{N}$$

יהי $\hat{\theta}_n$ האומד תחת השערת האפס. קבעו האם סטטיסטי המבחן

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F_{\hat{\theta}_n}(x) \right| \sqrt{n}$$

הוא distribution free עבור גודל מדגם קבוע n.

(1) $F_\theta(\cdot)$ היא ההתפלגות המעריכית עם $\theta \in \mathbb{R}_+ = E$.

פתרון:

הערה: סטטיסטי הוא distribution free אם התפלגותו תחת H_0 קבועה ולא משתנה לכל $F \in \mathcal{F}_0$.

במקרה הנ"ל, $\hat{\theta}_n = 1/\bar{X}_n$ ולכן תחת P_{F_θ}:

$$D_n = \sqrt{n} \sup_{x>0} \left| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j \le x\}} - F_{\hat{\theta}_n}(x) \right| = \sqrt{n} \sup_{u \in [0,1]} \left| \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{V_j \le u\}} - F_{\hat{\theta}_n}\left(F_\theta^{-1}(u)\right) \right|$$

$$V_j = F_\theta(X_j) \overset{H_0}{\sim} U([0,1])$$

נחשב את האבר השני באופן מפורש:

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\theta x} \quad ;$$

$$y - 1 = -e^{-\theta x}$$

$$\log(1-y) = -\theta x$$

$$x = -\frac{1}{\theta}\log(1-y)$$

$$\Rightarrow F_\theta^{-1}(x) = -\frac{1}{\theta}\log(1-x)$$

$$\Rightarrow F_{\hat{\theta}_n}\left(F_\theta^{-1}(u)\right) = 1 - e^{-\hat{\theta}_n\left(-\frac{1}{\theta}\log(1-u)\right)}$$

$$= 1 - (1-u)^{\hat{\theta}_n/\theta}$$

$$= 1 - (1-u)^{1/\theta\bar{X}_n}$$

$$\theta \bar{X}_n =: \bar{Y}_n$$

$$Y_i = \theta X_i \sim Exp(1)$$

קיבלנו ש D_n תלוי ב- V_j, Y_j אשר התפלגותם לא תלויה ב- θ ולכן

D_n הוא distribution free.

הערה: D_n יקיים תכונה זו עבור משפחות של scale: $F_\theta(x) = F_0(x/\theta)$ כאשר

$\hat{\theta}_n$ הוא equivariant ביחס ל- θ.