

Контрольная работа №1

Вариант 9

1. Компания из $n = 22$ человек рассаживается в ряд случайным образом. Найдите вероятность того, что между двумя определенными людьми окажутся ровно $k = 5$ человек.

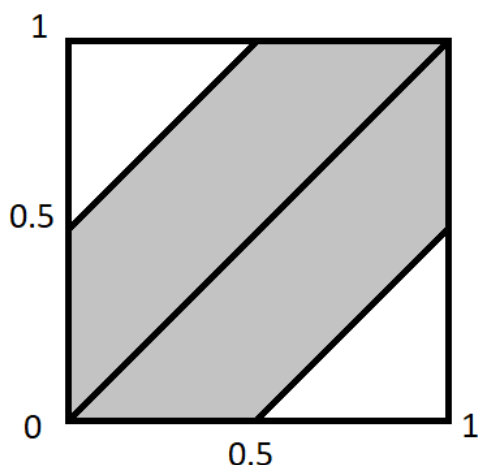
Если номер первого человека 1-6 или 17-22, то второго можно посадить одним способом, если 7-16, то двумя. После посадки первого человека, для второго остается свободным 21 место. Таким образом, вероятность равна $1/21 * 12/22 + 2/21 * 10/22 = 0,0693$

Ответ: 0,0693

2. Двое договорились о встрече между 7 и 8 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $a = 30$ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

Задачу можно решить геометрически.

По вертикали - момент прихода первого человека, по горизонтали - второго, закрашенная область - встреча состоялась:



Площадь закрашенной области составляет $3/4$ от площади всего квадрата.

Ответ: 0.75

3. События A , B и C независимы; $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,5$ и $P(C) = 0,8$. Найдите вероятность события $A \cup B$ при условии, что наступило событие $B \cup C$.

Условная вероятность события рассчитывается по формуле:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Вероятность $B \cup C$ равна:

$$(1 - (0.5 * 0.2)) = 0.9$$

Вероятность $A \cup B$ равна:

$$(1 - (0.9 * 0.5)) = 0.55$$

Таким образом, вероятность события $A \cup B$ при условии наступления $B \cup C$ равна:

А дальше?

Всего 3 балла

Контрольная работа №2

Saturday, December 5, 2020 7:00 PM

Вариант: Р.А. Кочкаров(ГУИФК)-К2- 8

1. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей:

X_i	-4	1	3	6
P_i	0.5	0.3		0.1

Найти математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$. Найти вероятность $P(|X - E(X)| \leq \sigma_X)$.

Пропущенное значение:

$$P(X = 3) = (1 - (0.5 + 0.3 + 0.1)) = 0.1$$

Математическое ожидание:

$$E(X) = (-4) * 0.5 + 1 * 0.3 + 3 * 0.1 + 6 * 0.1 = -0.8$$

Дисперсия:

$$D(X) = (-4 - (-0.8))^2 * 0.5 + (1 - (-0.8))^2 * 0.3 + (3 - (-0.8))^2 * 0.1 + (6 - (-0.8))^2 * 0.1 = 12.16$$

Вероятность $P(|X - E(X)| \leq \sigma_X)$:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{12.16} \approx 3.487$$

$|-4 - (-0.8)| = 3.2$ - подходит, вероятность этого: 0.5

$|1 - (-0.8)| = 1.8$ - подходит, вероятность этого: 0.3

$|3 - (-0.8)| = 3.8$ - не подходит, вероятность этого: 0.1

$|6 - (-0.8)| = 6.8$ - не подходит, вероятность этого: 0.1

$$P(|X - E(X)| \leq \sigma_X) = 0.5 + 0.3 = 0.8$$

2. Дана функция распределения вероятностей случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \frac{x^2 + 4x - 5}{16}, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X . Найти вероятность попадания X в интервал $(2; 4)$.

$$\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \frac{x+2}{8}, & \text{если } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases} \quad M[X] = \frac{25}{12}; \quad D[X] = \frac{47}{144}; \quad \sigma_X = \frac{\sqrt{47}}{12}; \quad P(2 < X < 4) = \frac{9}{16}.$$

Плотность распределения вероятностей:

$$\left(\frac{x^2 + 4x - 5}{16}\right)' = \frac{x}{8} + \frac{1}{4} = \frac{x+2}{8}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \frac{x+2}{8}, & \text{если } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 \cdot dx + \int_1^3 x \left(\frac{x+2}{8}\right) dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}\right) dx = \left(\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8}\right) \Big|_1^3 = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right) = \frac{54}{24} - \frac{4}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^1 x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_1^3 x^2 \left(\frac{x+2}{8}\right) dx + \int_3^{+\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx - (M(X))^2 = \int_1^3 \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4}\right) dx - (M(X))^2 = \left(\frac{x^4}{32} + \frac{x^3}{12}\right) \Big|_1^3 - (M(X))^2 = \frac{81}{32} + \frac{27}{12} - \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{12}\right) - (M(X))^2 = \frac{243}{96} + \frac{216}{96} - \frac{11}{96} - (M(X))^2 = \frac{448}{96} - (M(X))^2 = \frac{448}{96} - \frac{625}{144} = \frac{1344}{288} - \frac{1250}{288} = \frac{94}{288} = \frac{47}{144}$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{47}{144}} = \frac{\sqrt{47}}{12}$$

Вероятность попадания X в $(2; 4)$:

X не может попасть в $(3; 4)$, поэтому считаем для $(2; 3)$

$$\int_2^3 f(x)dx = F(x) \Big|_2^3 = \frac{9+12-5}{16} - \left(\frac{4+8-5}{16} \right) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

3. Случайные величины X_1, \dots, X_{180} распределены по биномиальному закону с параметрами

$n = 3$ и $p = \frac{5}{6}$. Найдите математическое ожидание $E(X_1^2 + \dots + X_{180}^2)$.

$$x_0 = 0$$

$$p_0 = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

$$x_1 = 1$$

$$p_1 = C_3^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{15}{216}$$

$$x_2 = 2$$

$$p_2 = C_3^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 = 3 \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216}$$

$$x_3 = 3$$

$$p_3 = C_3^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$M(X^2) = 0 + \left(1 \cdot \frac{15}{216}\right) + \left(4 \cdot \frac{75}{216}\right) + \left(9 \cdot \frac{125}{216}\right) = \frac{15 + 300 + 1125}{216} = \frac{1440}{216} = 6\frac{2}{3}$$

$$E(X_1^2 + \dots + X_{180}^2) = M(X^2) \cdot 180 = 6\frac{2}{3} \cdot 180 = 1200$$

Ответ: 1200

4. Случайные величины X_1, \dots, X_8 независимы и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 3. Найдите математическое ожидание

$$E[(X_1 + \dots + X_8)^2].$$

При геометрическом распределении: $M(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{q}{p^2}$.

$$p = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{3}, \quad q = 1 - p = \frac{2}{3}, \quad D(X) = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 1} = 6$$

$$E[(X_1 + \dots + X_8)^2] = D(X_1 + \dots + X_8) + (E(X_1 + \dots + X_8))^2 = 6 \cdot 8 + (3 \cdot 8)^2 = 48 + 24^2 = 624$$

Ответ: 624

5. Случайные величины X_1, \dots, X_{10} независимы и распределены по показательному закону.

Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \dots + X_{10} - 3)^2]$, если $E(X_1) = \dots = E(X_{10}) = 3$.

При показательном распределении: $D(X) = (E(X))^2 = 9$

$$E[(X_1 + \dots + X_{10} - 3)^2] = D(X_1 + \dots + X_{10} - 3) + (E(X_1 + \dots + X_{10} - 3))^2 = 9 \cdot 10 + (3 \cdot 10 - 3)^2 = 90 + 27^2 = 819$$

Ответ: 819

Какой это вариант?