Контрольная работа №1

Вариант 9

1. Компания из $n = 22$ человек рассаживается в ряд случайным образом. Найдите вероятность того, что между двумя определенными людьми окажутся ровно $k = 5$ человек.

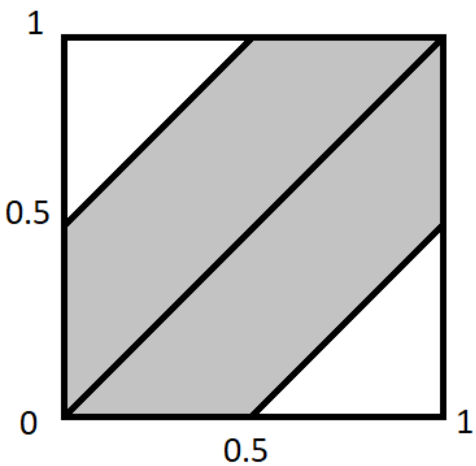
Если номер первого человека 1-6 или 17-22, то второго можно посадить одним способом, если 7-16, то двумя. После посадки первого человека, для второго остается свободным 21 место. Таким образом, вероятность равна 1/21 * 12/22 + 2/21 * 10/22 = 0,0693

Ответ: 0,0693

2. Двое договорились о встрече между 7 и 8 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $a = 30$ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

Задачу можно решить геометрически.

По вертикали - момент прихода первого человека, по горизонтали - второго, закрашенная область - встреча состоялась:



Площадь закрашенной области составляет 3/4 от площади всего квадрата.

Ответ: 0.75

3. События A, B и C независимы; $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,5$ и $P(C) = 0,8$. Найдите вероятность события $A \cup B$ при условии, что наступило событие $B \cup C$.

Условная вероятность события рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Вероятность B U C равна:

(1 - (0.5 * 0.2)) = 0.9

Вероятность A U B равна:

(1 - (0.9 * 0.5)) = 0.55

Таким образом, вероятность события A U B при условии наступления B U C равна:

А дальше?

Всего 3 балла

Контрольная работа №2

Saturday, December 5, 2020 7:00 PM

Вариант: Р.А. Кочкаров(ГУиФК)-К2- 8

1. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей:

X_i	-4	1	3	6
P_i	0.5	0.3		0.1

Найти математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$. Найти вероятность $P(|X-E(X)|\leq \sigma_X)$.

Пропущенное значение:
P(X = 3) = (1 - (0.5 + 0.3 + 0.1)) = 0.1

Математическое ожидание:
E(X) = (-4) * 0.5 + 1 * 0.3 + 3 * 0.1 + 6 * 0.1 = -0.8

Дисперсия:
D(X) = $(-4 - (-0.8))^2 * 0.5 + (1 - (-0.8))^2 * 0.3 + (3 - (-0.8))^2 * 0.1 + (6 - (-0.8))^2 * 0.1 =$ 12.16

Вероятность $P(|X - E(X)| \leq \sigma_X)$:
$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{12.16} \approx 3.487$
|-4 - (-0.8)| = 3.2 - подходит, вероятность этого: 0.5
|1 - (-0.8)| = 1.8 - подходит, вероятность этого: 0.3
|3 - (-0.8)| = 3.8 - не подходит, вероятность этого: 0.1
|6 - (-0.8)| = 6.8 - не подходит, вероятность этого: 0.1
$P\big(|X - E(X)| \leq \sigma_X\big) = 0.5 + 0.3 = 0.8$

2. Дана функция распределения вероятностей случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 1, \\ \frac{x^2+4x-5}{16}, & \text{если} \quad 1 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X. Найти вероятность попадания X в интервал $(2;4)$.

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 1, \\ \frac{x+2}{8}, \text{если } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, \text{если } x > 3 \end{cases}$ $M[X] = \frac{25}{12}$; $D[X] = \frac{47}{144}$; $\sigma_X = \frac{\sqrt{47}}{12}$; $P(2 < X < 4) = \frac{9}{16}$.

Плотность распределения вероятностей:

$$\left(\frac{x^2 + 4x - 5}{16}\right)` = \frac{x}{8} + \frac{1}{4} = \frac{x + 2}{8}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 1, \\ \frac{x+2}{8}, \text{если } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{1}^{3} x\left(\frac{x+2}{8}\right)dx + \int_{3}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \int_{1}^{3}\left(\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}\right)dx = \left(\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right) = \frac{54}{24} - \frac{4}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{1} x^2 * 0 * dx + \int_{1}^{3} x^2\left(\frac{x+2}{8}\right)dx + \int_{3}^{+\infty} x^2 * 0 * dx - (M(X))^2 = \int_{1}^{3}\left(\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4}\right)dx - (M(X))^2 = \left(\frac{x^4}{32} + \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_1^3 - \big(M(X)\big)^2$$

$$= \frac{81}{32} + \frac{27}{12} - \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{12}\right) - \big(M(X)\big)^2 = \frac{243}{96} + \frac{216}{96} - \frac{11}{96} - \big(M(X)\big)^2 = \frac{448}{96} - \big(M(X)\big)^2 = \frac{448}{96} - \frac{625}{144} = \frac{1344}{288} - \frac{1250}{288} = \frac{94}{288} = \frac{47}{144}$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{47}{144}} = \frac{\sqrt{47}}{12}$$

Вероятность попадания X в (2; 4):
X не может попасть в (3; 4), поэтому считаем для (2; 3)

$$\int_2^3 f(x)dx = F(x)\Big|_2^3 = \frac{9+12-5}{16} - \left(\frac{4+8-5}{16}\right) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

3. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{180}$ распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 3$ и $p = \dfrac{5}{6}$. Найдите математическое ожидание $E(X_1^2 + \ldots + X_{180}^2)$.

$x_0 = 0$

$p_0 = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

$x_1 = 1$

$p_1 = C_3^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{15}{216}$

$x_2 = 2$

$p_2 = C_3^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 = 3 \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216}$

$x_3 = 3$

$p_3 = C_3^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

$$M(X^2) = 0 + \left(1 \cdot \frac{15}{216}\right) + \left(4 \cdot \frac{75}{216}\right) + \left(9 \cdot \frac{125}{216}\right) = \frac{15 + 300 + 1125}{216} = \frac{1440}{216} = 6\tfrac{2}{3}$$

$E(X_1^2 + \cdots + X_{180}^2) = M(X^2) \cdot 180 = 6\tfrac{2}{3} \cdot 180 = 1200$

Ответ: 1200

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_8$ независимы и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 3. Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \ldots + X_8)^2]$.

При геометрическом распределении: $M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}$.

$$p = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{3}, \qquad q = 1 - p = \frac{2}{3}, \qquad D(X) = \frac{2/3}{(1/3)^2} = \frac{2}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 1} = 6$$

$$E\left[(X_1 + \cdots + X_8)^2\right] = D(X_1 + \cdots + X_8) + \left(E(X_1 + \cdots + X_8)\right)^2 = 6 \cdot 8 + (3 \cdot 8)^2 = 48 + 24^2 = 624$$

Ответ: 624

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{10}$ независимы и распределены по показательному закону. Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \ldots + X_{10} - 3)^2]$, если $E(X_1) = \ldots = E(X_{10}) = 3$.

При показательном распределении: $D(X) = \left(E(X)\right)^2 = 9$

$$E\left[(X_1 + \cdots + X_{10} - 3)^2\right] = D(X_1 + \cdots + X_{10} - 3) + \left(E(X_1 + \cdots + X_{10} - 3)\right)^2 = 9 \cdot 10 + (3 \cdot 10 - 3)^2 = 90 + 27^2 = 819$$

Ответ: 819

Какой это вариант?