**1.简介**

稀疏表示在最近的字典学习和压缩感知的研究中扮演了重要的角色。

对于给定的一个基向量集合（如一个字典），找一个信号的稀疏表示经常等同于带有l0范式和l1范式的最优化问题，并最终转化为解决一个欠定的线性系统。然后，每个样本表示成为基向量的一个稀疏线性组合。我们都知道，解决l0范式最小化问题是一个NP难问题并且数值上不稳定。对于提出的一些近似l0范式解决方法如匹配追求和OMP等，尽管这些方法相对简单有效，但它们都不是最优的。最近的关于稀疏编码的研究表明，在某种假设的情况下，解决l0范式最小化问题等价于l1范式最小化问题，而后者可由顶点最优计算。

在计算机视觉、机器学习、信号处理及计算机图形学等领域中，会有许多这样的问题，一个简单且有效的方法是假设同一个类中的样本可以依据原型建模。原型可以是样本本身，或者从样本中学习得到的结果（如：特征向量和均值）。本文中假定某一个类的样本可以根据同一类的原型子集建模。

在原型学习算法中，MOD（Method of Optimal Directions）和K-SVD算法引起了极大的兴趣，因为它们可以通过一个字典或者原型的稀疏组合表示每个样本。假定我们得到一个学习来的字典，我就可以使用字典中的原型通过稀疏表示近似得到基向量。其中，原始的稀疏表示问题可以简化为一个l1范式的约束问题。

**2.有原型的稀疏表示**

在许多问题里面，经常会给定一个已标记类别的样本集，并通过学习这个样本集来准确地推断未知样本的类别。假设我们从K个类别中的第i个类别得到ni个样本，并为每一个类i定义一个矩阵：

(1)

其中，表示类i中第j个样本。然后，合并所有K个类别的全部样本为一个矩阵：

(2)

其中，N是所有类别的样本总数。给定了类别i的充足样本数，如果待观察样本y属于类别i，那么样本y可以通过样本的线性组合近似得到：

(3)

其中，表示样本j在重建样本y时的加权贡献。

然而在大多数情况下，我们并不知道样本y属于哪个类。因此，我们可以重写y的线性表示：

(4)

这里，是一个稀疏系数向量。通常是一个稠密矩阵。

解决逆线性系统

对于上面的公式（4），每个观察样本y可以根据相应系数向量x表示，当然这需要先解决线性形态。如果出现观察数据y的维度大于所有样本数，那么唯一的解决办法是求解超定系统。然而，在大多数应用中，这个线性系统通常是欠定的，最终会导致无限的解决这个逆问题。因此，规则约束对得到有效的解决办法至关重要。

因为假定一个观察样本属于一个特定类别，它可以被同一类中的其它样本很好的表示。这个属性以及被广泛的探究，如局部线性嵌入、图像聚类及人脸识别等。在每个类都有充足样本的情况下，我们期望系数向量x尽可能稀疏，最好只有一小部分为非零值。通过稀疏约束，我们寻求观察样本y的表示：

这里， 统计非零值的数量。然而，解决欠定系统的l0范式最小化问题是一个NP难问题并且数值上不稳定。

最近，稀疏表示和压缩感知的研究表明，如果x的解决方案是足够稀疏的，那么最稀疏的解决方法可以通过l1范式最小化恢复：

这里，l1范式计算x中所有数值的绝对权值和。上式中，存在一定的噪声，更好的形式如下：

其中是容错度。

通过线性转化的特征提取

矩阵, d<<m, 在公式（4）两边分别乘上T得到：

其中，

**3.快速稀疏近似**