physikdidaktik | Universität Bayreuth

Bayreuther

Abiturtrainer Astrophysik

(Stand Februar 2025)

Vorwort

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Hinweis zum Sprachgebrauch:
Uns liegt die gleichsame Ansprache und Einbindung aller Menschen, unabhängig von ihrer Geschlechtsidentität, sehr am Herzen. In diesem Skript verwenden wir dennoch das generische Maskulinum für Personen aller Geschlechtsidentitäten. Wir haben uns für diese Lösung entschieden, da sie für uns die beste ist, um die Lesbarkeit zu gewährleisten und den Vorgaben der Bayerischen Staatsregierung zu entsprechen.

Inhaltsverzeichnis

1. Abituraufgabe 2023-1

1.1 Fachliche Grundlagen

1.1.1 Entfernungsmessungen

In der Astronomie gibt es verschiedene Möglichkeiten zur Bestimmung der Entfernung von Objekten im Weltall. Eine Möglichkeit ist die Parallaxemethode. Diese wird zum Beispiel für die Entfernungsbestimmung naher Sterne verwendet. Der Grundgedanke ist, dass diese Sterne sich aus Sicht der Erde vor einem Hintergrund aus Fixsternen befindet. Im Laufe eines Jahres betrachtet man den Stern aus unterschiedlichen Winkeln, da die Erde auf ihrem Orbit eine Strecke von circa 2 AE zurücklegt. Das äußert sich darin, dass der Stern vor dem Hintergrund verschoben wird. Der Winkel φ, um den der Stern verschoben zu sein scheint, wird Parallaxewinkel genannt. Das Prinzip ist in Abb. 1.1 veranschaulicht. Misst man mit einem Teleskop den Winkel φ, so kann man aus dem Abstand von Sonne und Erde den Abstand d des Sterns berechnen. Es gilt dann mit der Kleinwinkelnäherung

$$\varphi \approx \tan(\varphi) = \frac{1\,\text{AE}}{d}$$
$$d = \frac{1\,\text{AE}}{\varphi}$$

Auf diese Weise kann man eine neue Längeneinheit definieren, das Parsec (pc). Es handelt sich um den Abstand, den ein Stern hätte, wenn er einen Parallaxewinkel von einer Bogensekunde ($1'' = 1\,\mathrm{arcsec}$) hätte. Der Name besteht daher aus „Parallaxe“ und „arcsec“. Rechnet man die Parallaxe in Bogensekunden um, so nennt man sie p und der Abstand d_{pc} in pc ist gegeben durch:

$$d_{\text{pc}} = \frac{1''}{p}$$

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung der Entfernung ist das Entfernungsmodul. Mit dieser Methode können Entfernungen von Objekten bestimmt werden, die zu geringe Parallaxen haben, um die mit den verfügbaren Teleskopen aufzulösen. Dabei verwendet man die scheinbare Helligkeit m und absolute Helligkeit M von Sternen. Die scheinbare Helligkeit des Sternes ist von seinem Abstand abhängig (vgl. Abschnitt 1.1.2). Die absolute Helligkeit ist definiert als scheinbare Helligkeit in einem Abstand von 10 pc. Die scheinbare Helligkeit kann von der Erde aus gemessen werden. Die absolute Helligkeit muss man auf andere Weisen bestimmen, zum Beispiel durch Pulsare, Standardkerzen und charakteristische Spektren des Sternenlichtes. Hat man beide dieser Werte experimentell bestimmt, so kann man die Formel des Entfernungsmoduls verwenden Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.17 und nach dem Abstand

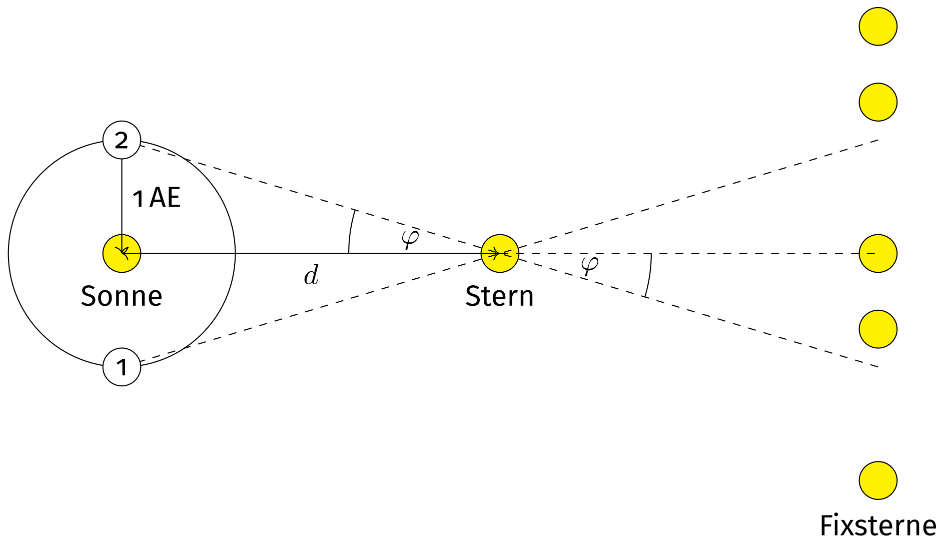

Abbildung 1.1: Veranschaulichung der Parallaxemethode. Der Parallaxewinkel φ eines Sternes wird durch Messungen im Abstand eines halben Jahres gemessen. Daraus kann der Abstand d berechnet werden.

d auflösen:

$$
\begin{aligned}
m - M &= 5 \cdot \lg\left(\frac{d}{10\,\text{pc}}\right) \\
\frac{m - M}{5} &= \lg\left(\frac{d}{10\,\text{pc}}\right) \\
10^{\frac{m-M}{5}} &= \frac{d}{10\,\text{pc}} \\
\frac{d}{\text{pc}} &= 10 \cdot 10^{\frac{m-M}{5}} \\
d_{\text{pc}} &= 10^{\frac{m-M}{5}+1}.
\end{aligned}
$$

1.1.2 Sternenlicht

Für die Entfernungsbestimmung mit dem Entfernungsmodul ist eine Kenntnis über die Helligkeit eines Sternes notwendig. Diese hängt mit der Lichtstrahlung des Sternes zusammen. Deshalb sollen hier die wesentlichen Begriffe im Zusammenhang mit dem Sternenlicht voneinander abgegrenzt werden. Die Leuchtkraft L bezeichnet die Strahlungsleistung des Sternes und hat damit die Einheit Watt (W). Es handelt sich um die gesamte Energie, die der Stern pro Sekunde in den gesamten Raum abstrahlt. Diese Größe hängt daher nicht von der Entfernung oder der Betrachtung ab. Sie ist allein durch die Energieproduktion durch Kernfusion im Inneren des Sternes gegeben. Die Leuchtkraft setzt sich aus allen Wellenlängen zusammen, ist also das Ergebnis eines Integrals über die spektrale Leistungsdichte. Diese bezeichnet die Leistung pro Wellenlänge und ist durch das Planck'sche Strahlungsgesetz gegeben. Sie ist daher von der Temperatur des Sternes abhängig. Die Temperaturabhängigkeit der Strahlungsdichte ist in Abb. 1.2 veranschaulicht. Insgesamt ergibt sich für die Leuchtkraft eines Sternes jedoch eine sehr einfache Formel, die nur noch von der Temperatur T und der Oberfläche des Sternes $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ abhängt Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.16:

$$L = A \cdot \sigma \cdot T^4$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante σ.

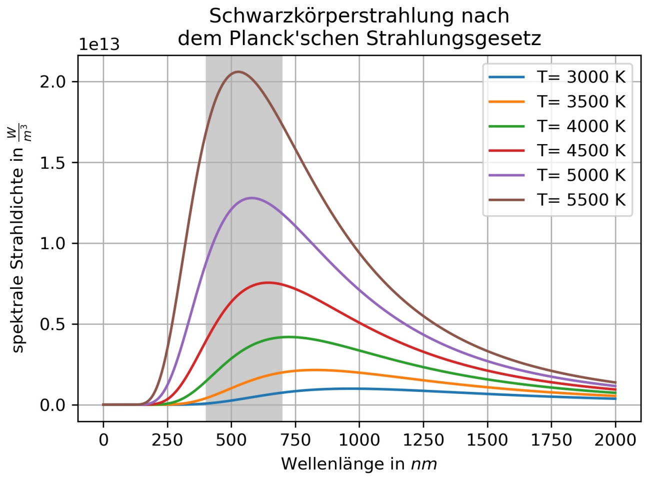

Abbildung 1.2: Spektrale Strahlungsdichte eines schwarzen Körpers nach dem Planck'schen Strahlungsgesetz. Die Linien zeigen die Spektren für Temperaturen, die für die Sterne in dieser Aufgabe passen. Das grau hinterlegte Intervall ist der Wellenlängenbereich von sichtbarem Licht. Man sieht, dass Sterne unter $3 \cdot 10^3$ K hauptsächlich im infraroten Spektralbereich strahlen. Die Strahlungsdichte hat die Einheit $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}$, weil noch über die Fläche und die Wellenlänge integriert werden muss. Dann erhält man die Leuchtkraft mit der Einheit W.

Ist man daran interessiert, welche Leistung auf einem Planeten in einiger Entfernung ankommt, dann muss man auch den Abstand des Planeten berücksichtigen. Dann ist die Bestrahlungsstärke E die relevante Größe. Sie ist eine Leistung pro Fläche, hat also die Einheit $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Da die Sterne in alle Richtungen etwa gleich abstrahlen, verteilt sich in einem gegebenen Abstand d die gesamte Leuchtkraft auf eine Kugeloberfläche mit Radius d. Damit wird für zunehmenden Abstand die Bestrahlungsstärke quadratisch abfallen, denn es gilt:

$$E = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2}.$$

Die Leistung die ein Planet dann absorbieren kann ist das Produkt von Bestrahlungsstärke E und seiner Fläche A, die der Stern von ihm sieht. Das ist eine Kreisscheibe mit dem Radius R des Planeten. Damit gilt für die absorbierte Leistung unter Vernachlässigung von Reflexion:

$$P_{\text{Planet}} = E \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{L}{4} \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^2.$$

1.1.3 Zweikörperproblem

Die Beschreibung von Planetenbahnen hat eine lange Geschichte. Mit Keplers Gesetzen wurde empirisch bestimmt, dass sich die Planeten des Sonnensystems auf Ellipsen um die Sonne bewegen. Eine theoretische Beschreibung, die mit diesen Bahnen übereinstimmte lieferte erst die Newton'sche Kräftemechanik. Betrachtet man zwei isolierte Körper, auf die nur die Gravitationskraft wirkt, so spricht man von einem Zweikörpersystem und dem Zweikörperproblem. Die Berechnung der Trajektorien ist in guter Übereinstimmung mit den Ellipsenbahnen der meisten Planeten und liefert auch quantitative Beziehungen über die Bewegung der Planeten. Da dieses Problem sehr allgemein formuliert und gerechnet werden kann, gelten die erhaltenen Formeln für alle Zweikörpersysteme auch jenseits des Sonnensystems. Berücksichtigt man die Gravitation eines dritten Körpers, so spricht man vom Dreikörperproblem, welches nur näherungsweise und nicht exakt gelöst werden kann. Im Zweikörperproblem ergeben sich drei mögliche Bahnformen: Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Liegt eine Ellipse vor, so entfernen sich die zwei

Körper nie ins unendliche und man spricht von einem gebundenen System. Parabelbahnen entsprechen dem Grenzzustand ungebundender Bahnen, die ansonsten Hyperbelförmig sind. Die Geschwindigkeit eines Körpers, die notwendig ist um eine ungebundene Bahn zu haben, nennt man Fluchtgeschwindigkeit.

1.1.4 Dopplereffekt

Der Dopplereffekt von Schallwellen ist ein Alltagseffekt, der besonders prägnant auftritt, wenn ein Fahrzeug mit Martinshorn an einem ruhenden Hörer vorbeifährt. Zunächst bewegt sich das Fahrzeug auf den Hörer zu. Dann klingen die beiden Töne des Martinshorns höher, als wenn es den Hörer passiert hat und sich entfernt. Den gleichen Effekt gibt es auch für Licht und man spricht vom optischen Dopplereffekt. Auch dort werden Lichtwellen zu höheren Frequenzen oder „in’s Blaue“ verschoben, wenn sich der Emitter auf den Beobachter zu bewegt. Bei einer Geschwindigkeit weg vom Beobachter ist das Licht „rotverschoben“, also zu niedrigeren Frequenzen. Durch eine genaue Messung von charakteristischen Wellenlängen von Atomen und Molekülen kann damit auf die Bewegung des Emitters also z.B. eines Sterns geschlossen werden.

1.2 Musterlösung

Hinweis

In dieser Lösung werden Formeln und physikalische Größen aus einer Formelsammlung Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013 verwendet, die im achtjährigen Gymnasium zugelassen war. Die Angaben sind beispielhaft zu sehen, da die verwendeten Informationen auch in anderen Formelsammlungen zu finden sind.

1.2.1 Proxima Centauri

Aufgabenstellung

1. Proxima Centauri
Im Sternbild Centaurus wurde 1915 ein lichtschwacher rötlicher Stern entdeckt, der der nächstgelegene Stern zur Sonne ist. Dieser Stern wird daher Proxima Centauri genannt. Proxima Centauri hat eine jährliche Parallaxe von 0,768″. Im sichtbaren Spektralbereich wird eine scheinbare Helligkeit von 11,1 beobachtet.

a) Bestimmen Sie die Entfernung von Proxima Centauri zur Erde. Ermitteln Sie seine Leuchtkraft L_{sichtbar} im sichtbaren Spektralbereich in Vielfachen der Sonnenleuchtkraft. [Zur Kontrolle: $L_{\text{sichtbar}} = 5{,}3 \cdot 10^{-5} L_{\odot}$]
S3,S7 / II

Bei Proxima Centauri handelt es sich um einen Hauptreihenstern mit der Oberflächentemperatur $3{,}0 \cdot 10^3$ K. Sein Durchmesser beträgt 15 % des Sonnendurchmessers.

b) Berechnen Sie die Gesamtleuchtkraft L von Proxima Centauri in Vielfachen der Sonnenleuchtkraft. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem in Teilaufgabe a ermittelten Wert für die Leuchtkraft im sichtbaren Spektralbereich und geben Sie eine Begründung für diese Abweichung an. [Zur Kontrolle: $L = 1{,}6 \cdot 10^{-3} L_{\odot}$]
S1,S7 / II

a) Wenn die jährliche Parallaxe angegeben ist, kann diese verwendet werden, um direkt den Abstand in Parsec(pc) anzugeben. Nähere Erklärungen sind in Abschnitt 1.1.1 zu finden. Die notwendige Formel ist auch in der Formelsammlung Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.17 zu finden. Mit der Parallaxe p aus der Angabe gilt für den Abstand d_{PC}:

$$\begin{aligned}
\frac{d_{\text{PC}}}{1\,\text{pc}} &= \frac{1''}{p} \\
d_{\text{PC}} &= \frac{1}{0{,}768}\,\text{pc} \\
&= 1{,}30\,\text{pc}
\end{aligned}$$

Dabei wurde das Ergebnis auf 3 gültige Ziffern gerundet. Mit den verschiedenen Umrechnungen könnte der Abstand auch in anderen Einheiten angegeben werden. Das ist in dieser Aufgabe nicht explizit verlangt und für die weiteren Teile nicht nötig.

Mit dem bekannten Abstand kann nun über Zwischenschritte die Leuchtkraft L_{sichtbar} im sichtbaren Licht berechnet werden. Die scheinbare Helligkeit m ist aus historischen Gründen auf das sichtbare Licht bezogen und kann dazu verwendet werden. Mit der scheinbaren Helligkeit und dem Abstand des Sternes kann das Entfernungsmodul Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.17 verwendet werden, um die absolute Helligkeit M zu berechnen. Die absoluten Helligkeiten zweier Sterne können verglichen werden, um die Leuchtstärken zu vergleichen, wie es hier das Ziel ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \cdot \lg(\frac{d_{\text{PC}}}{10\,\text{pc}}) \\ M &= m - 5\lg(0{,}130) \\ &= 11{,}1 - (-4{,}43) \\ &= 15{,}5 \end{aligned}$$

Dabei wurde das Ergebnis auf 3 gültige Ziffern gerundet. Die absolute Helligkeit kann nun mit der absoluten Helligkeit $M_\odot$ der Sonne verglichen werden. Damit erhält man das Verhältnis der Leuchtstärken. Mit dem Wert $M_\odot = 4{,}83$ Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.46 und der Formel aus Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.17 erhält man:

$$\begin{aligned} M - M_\odot &= -2{,}5\lg(\frac{L_{\text{sichtbar}}}{L_\odot}) \\ \lg(\frac{L_{\text{sichtbar}}}{L_\odot}) &= -\frac{2}{5}(M - M_\odot) \\ \frac{L_{\text{sichtbar}}}{L_\odot} &= 10^{-\frac{2}{5}(M-M_\odot)} \\ \frac{L_{\text{sichtbar}}}{L_\odot} &= 10^{-\frac{2}{5}(15{,}5-4{,}83)} = 5{,}40 \cdot 10^{-5} \\ L_{\text{sichtbar}} &= 5{,}40 \cdot 10^{-5} L_\odot \end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt in etwa mit dem Kontrollergebnis ein. Zudem kann man noch eine kurze Plausibilitätsüberlegung anstellen: der Stern hat eine Parallaxe von etwas unter $1''$, sollte also etwas weiter als $1\,\text{pc}$ entfernt sein. Seine scheinbare Helligkeit ist aufgrund der großen Magnitude eher gering, und sie wird noch geringer, wenn man sich bis auf $10\,\text{pc}$ entfernt. Insgesamt kann man daher mit einer Leuchtkraft rechnen, die deutlich unter der der Sonne liegt.

b) In der letzten Teilaufgabe wurde nur die Strahlungleistung im sichtbaren Bereich berücksichtig. Das liegt daran, dass die scheinbare Helligkeit historisch gesehen auf Beobachtungen im sichtbaren Spektrum zurückgeht. Das Spektrum von Sternen ist jedoch ein Schwarzkörperspektrum und damit wird von Sternen auch Licht abgestrahlt, was mit dem Auge nicht sichtbar ist. Die gesamte Leuchtkraft über alle Spektralbereiche ist daher unter Umständen höher. Die gesamte Strahlungsleistung ergibt sich aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.16

$$L = A \cdot \sigma \cdot T^4$$

mit der Fläche A, der Temperatur T in Kelvin und der Stefan-Boltzmann-Konstante σ. Da die Oberflächentemperaturen und Radien von Proxima Centauri und der Sonne bekannt sind, kann man ihre Leuchtkräfte ins Verhältnis setzen. Dabei verwendet man $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.69:

$$\begin{aligned} \frac{L}{L_\odot} &= \frac{A \cdot \sigma \cdot T^4}{A_\odot \cdot \sigma \cdot T_\odot^4} \\ &= \frac{4\pi r^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi r_\odot^2 \cdot \sigma \cdot T_\odot^4} \\ &= \left(\frac{r}{r_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right) \end{aligned}$$

Mit $T_\odot$ = 5,8 · 10³ K Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.47 folgt dann:

$$\frac{L}{L_\odot} = (0{,}15)^2 \cdot \left(\frac{3}{5{,}8}\right)^4 = 1{,}61 \cdot 10^{-3}$$
$$L = 1{,}6 \cdot 10^{-3} L_\odot$$

Dabei wurde das Endergebnis auf 2 gültige Ziffern gerundet. Wie eingangs beschrieben, fällt die gesamte Strahlungleistung von Proxima Centauri deutlich höher aus als die visuelle. Das liegt daran, dass der Stern hauptsächlich im Infraroten Spektralbereich strahlt. Das kann man mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.16 und dem Wert für die Wien'sche Verschiebungskonstante b Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.42 sehen:

$$\lambda_{\text{max}} \cdot T = b$$
$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$$
$$= \frac{2{,}8978 \cdot 10^{-3}\,\text{m K}}{3{,}0 \cdot 10^{3}\,\text{K}}$$
$$= 966\,\text{nm}$$

Die Wellenlänge mit der maximalen Strahlungsleistung λ_{max} liegt also deutlich unterhalb der Grenze des sichtbaren Lichtes bei circa 700 nm und damit im Infraroten.

1.2.2 Proxima Centauri und das Doppelsternsystem Alpha Centauri

Aufgabenstellung

2. Proxima Centauri und das Doppelsternsystem Alpha Centauri

Proxima Centauri scheint sich um das Doppelsternsystem Alpha Centauri zu bewegen, welches näherungsweise als ein Zentralgestirn mit 2,16 Sonnenmassen angenommen werden kann. Die Masse von Proxima Centauri ist gegenüber der Masse von Alpha Centauri vernachlässigbar klein.
Für Proxima Centauri wurden in den letzten Jahren verschiedene Bahnformen diskutiert, von denen zwei in Abb. 1.3 aus Sicht der Erde mit der momentanen Position von Proxima Centauri dargestellt sind. Die große Halbachse der elliptischen Bahn 1 beträgt $9 \cdot 10^3$ AE.

a) Berechnen Sie die Umlaufzeit von Proxima Centauri auf Bahn 1.
[Zur Kontrolle: $6 \cdot 10^5$ a]
S7 / I

b) Begründen Sie, dass trotz 100-jähriger Beobachtung nicht geklärt werden konnte, ob sich Proxima Centauri auf Bahn 1 oder auf Bahn 2 bewegt. Schätzen Sie mithilfe von Abb. 1.3 grob ab, in wie vielen Jahren eine Momentaufnahme des Centauri-Systems genügen wird, um eine der Bahnen auszuschließen. Gehen Sie dabei von einem konstanten Betrag der Bahngeschwindigkeit aus.
S7,K3 / I

Neueste Beobachtungsdaten von Alpha Centauri und Proxima Centauri ermöglichen sehr präzise Geschwindigkeitsbestimmungen und stützen die Annahme, dass es sich bei Alpha Centauri und Proxima Centauri um ein gravitativ gebundenes System handelt. Proxima Centauri ist heute $13 \cdot 10^3$ AE von Alpha Centauri entfernt.

c) Bestimmen Sie für einen Körper an der heutigen Position von Proxima Centauri die Geschwindigkeit, die er zum Verlassen des gravitativen Einflussbereichs von Alpha Centauri benötigt, also die 2. kosmische Geschwindigkeit. Beschreiben Sie unter Verwendung Ihres Ergebnisses ein Kriterium, das die Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler in der Annahme eines gebundenen Systems bestärkt haben könnte.
S1,S7 / I

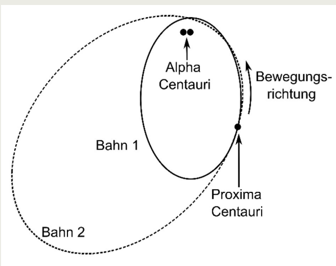

Abbildung 1.3

a) Die Umlaufzeit von Planeten kann durch Lösung des Zweikörperproblemes berechnet werden. Ist die Masse eines der beiden Körper viel größer, als die des anderen, kann man die Formeln deutlich vereinfachen. Der Zusammenhang zwischen Umlaufdauer T und großer Ellipsenhalbachse a ist dann gegeben durch Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.15:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\alpha}$$

mit der Masse M_α des Sterns Alpha Centauri. Diese Formel kann umgeformt werden, um die Umlaufdauer zu berechnen. Dabei werden die Werte für die Gravitationskonstante G Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.42, die Sonnenmasse Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.47 und die Definition der Astronomischen Einheit AE Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.45 benutzt:

$$\begin{aligned}
\frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GM_\alpha} \\
T^2 &= \frac{4\pi^2}{GM_\alpha} \cdot a^3 \\
T &= \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_\alpha} \cdot a^3} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot 2{,}16 M_\odot} \cdot (9 \cdot 10^3\ \mathrm{AE})^3} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 2{,}16 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}} \cdot (9 \cdot 10^3 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^3} \\
&= 1{,}833 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s} = \frac{1{,}833 \cdot 10^{13}}{31\,556\,952}\mathrm{a} \\
&\approx 6 \cdot 10^5\ \mathrm{a}
\end{aligned}$$

Damit wurde verwendet, dass ein Jahr 3 155 693 s hat Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.45.

b) Um nachvollziehen zu können, dass die Entscheidung zwischen den beiden Bahnen noch nicht getroffen werden konnte, berechnen wir die Distanz, die Proxima Centauri in 100 Jahren zurück legt, wenn es sich gleichförmig bewegen würde. Nimmt man an, dass die Zeichnung maßstabsgetreu ist, so kann man den Abstand r_{PC} grob abschätzen. Hier kommt es nicht auf den genauen Wert an, deshalb schätzen wir $r_{\mathrm{PC}} \approx a$. Für die Bahngeschwindigkeit v eines Himmelskörpers auf einer Keplerellipse gilt Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.14:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

und damit im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{GM_\alpha\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{a}\right)} \\
&= \sqrt{GM_\alpha\frac{1}{a}} \\
&= \sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\cdot 2{,}16\cdot 1{,}989\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\frac{1}{9\cdot 10^3\cdot 1{,}4989\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}} \\
&= 461{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v &\approx 0{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Hinweis

An dieser Stelle kann man beispielhaft eine Überschlagsrechnung der Größenordnungen durchführen. Das ist eine gute Möglichkeit, um Ergebnisse aus Taschenrechnereingaben zu kontrollieren. In der wissenschaftlichen Notation werden Größen in der Form $1000 = 10^3$ angegeben. Bei Multiplikation solcher Zahlen addieren sich die Exponenten, also $10^3\cdot 10^5 = 10^8$ oder $10^4\cdot 10^{-2} = 10^2$. Beim Wurzelziehen wird der Exponent halbiert und beim quadrieren verdoppelt. Für die vorliegende Rechnung ergibt sich unter Berücksichtigung der Zehnerpotenzen ein Exponent von

$$\frac{-11+30-4-11}{2} = 2$$

Man kann also damit rechnen, dass in SI-Einheiten eine Zahl der Größenordnung $10^2 = 100$ herauskommt, und das Ergebnis stimmt damit gut überein.

Da wir eine gleichförmige Bewegung annehmen gilt für die zurückgelegte Strecke Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.10:

$$\begin{aligned}
\Delta s &= v\cdot\Delta t \\
&= 0{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\cdot 100\cdot 31\,556\,952\,\mathrm{s} \\
&\approx 1{,}6\cdot 10^9\,\mathrm{km} = \frac{1{,}6\cdot 10^9}{1{,}496\cdot 10^8}\mathrm{AE} \\
&\approx 11\,\mathrm{AE}
\end{aligned}$$

Dieser Wert ist nur ein Bruchteil der Hauptachse, also hat der Stern in den letzten 100 Jahren nur einen kleinen Winkel seiner Ellipse überstrichen. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die Entscheidung über die tatsächliche Bahn noch aussteht, weil die beiden Kandidaten sich in diesem Bereich kaum unterscheiden. Betrachtet man die Skizze, so muss ein deutlich größerer Winkel überstrichen werden. Geht man von einer genauen Ortsbestimmung aus, so kann man bei der Teilung der Bahnen etwa 20° von der jetzigen Position von einer Entscheidung ausgehen. Bei ungenauer Ortsbestimmung unter Umständen sogar erst bei Winkeln um 70°. Geht man davon aus, dass die Entscheidung bei einer Bewegung um weitere 20° getroffen werden kann, so kann man grob von gleichbleibendem Tempo ausgehen. Dann ist die Dauer $\frac{20}{360}$ der gesamten Umlaufzeit und damit

$$\Delta t = \frac{20}{360} \cdot T \approx 3{,}3 \cdot 10^5 \text{ a}.$$

c) Die 2. kosmische Geschwindigkeit wird auch als Fluchtgeschwindigkeit bezeichnet. Für einen Körper, der unter dem gravitativen Einfluss eines anderen Körpers steht, ist diese Geschwindigkeit nötig, um sich für immer von dem Körper zu entfernen. Die Gravitation reicht dann nicht mehr aus, um die beiden Körper in einem Orbit zu halten. Die Fluchtgeschwindigkeit bezieht sich üblicherweise auf die Oberfläche eines kugelförmigen Körpers. Man kann sich eine Kugel denkten, deren Radius genau der Abstand r_{PC} von Proxima Centauri und Alpha Centauri ist. Diese Kugel soll Alpha Centauri im Zentrum haben und die gleiche Masse M_α haben. Die Fluchtgeschwindigkeit von Proxima Centauri bezüglich Alpha Centauri kann dann mit dieser fiktiven Kugel abgeschätzt werden und alle Bedingungen für die Formel Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.15 sind erfüllt:

$$v_2 = \sqrt{2gR}$$

mit der Fallbeschleunigung g an der Oberfläche der Kugel und dem Radius $R = r_{\text{PC}}$. Die Fallbeschleunigung g kann aus der Gravitationskraft Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.15 berechnet werden:

$$m \cdot g = F = G\frac{mM}{r^2}$$

und mit $r = r_{\text{PC}}$ und $M = M_\alpha$ gilt

$$g = G\frac{M_\alpha}{(r_{\text{PC}})^2}$$

Setzt man das in die Formel der Fluchtgeschwindigkeit ein, kann man diese berechnen:

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2 \cdot G\frac{M_\alpha}{(r_{\text{PC}})^2} \cdot r_{\text{PC}}} \\ &= \sqrt{2G\frac{M_\alpha}{r_{\text{PC}}}} \\ &= \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot \frac{2{,}16 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}}{13 \cdot 10^3 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m}}} \\ &= 542{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liegt nahe an dem vorhin von uns abgeschätzten Wert des aktuellen Tempos. Rechnet man dieses mit der obigen Formel und dem genauen Abstand $r_{\text{PC}} = 13 \cdot 10^3$ AE kommt man auf:

$$\begin{aligned} v_{\text{akt}} &= \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_{\text{PC}}} - \frac{1}{a}\right)} \\ &= 286{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Damit liegt die aktuelle Geschwindigkeit v_{akt} deutlich unter der Fluchtgeschwindigkeit. Es ist also nicht davon auszugehen, dass Proxima Centauri einfach aus dem Gravitationspotenzial von Alpha Centauri entkommen kann und das System ist gebunden.

1.2.3 Der Exoplanet Proxima b – eine zweite Erde?

Aufgabenstellung

3. Der Exoplanet Proxima b – eine zweite Erde?
Mittels Doppler-Spektroskopie wurde 2016 eine minimale periodische Radial- bewegung von Proxima Centauri relativ zum Doppelsternsystem Alpha Centauri nachgewiesen. Aus den Daten folgerten Astronomen die Existenz des Exoplaneten Proxima b, der sich auf einer annähernd kreisförmigen Bahn in 11,2 Tagen um Proxima Centauri bewegt.

a) Erläutern Sie das Messverfahren der Doppler-Spektroskopie zum Nachweis von Radialbewegungen.
S5, K6 / II

In Abb. 1.4 sind die Bahnen von Proxima Centauri und seinem Exoplaneten Proxima b um den gemeinsamen Schwerpunkt SP schematisch dargestellt.

b) Tragen Sie in Abb. 1.4 für die Sternposition 1 die Position des Planeten Proxima b ein. Zeichnen Sie ein qualitatives Diagramm für die beobachtete Radialgeschwindigkeit des Sterns Proxima Centauri in Abhängigkeit von der Zeit. Tragen Sie darin die Nummern 1 bis 4 passend zu Abb. 1.4 ein.
E4, K3, K7 / III

Die Masse des Sterns Proxima Centauri beträgt 12 % der Sonnenmasse, sein Durchmesser 15 % des Sonnendurchmessers. Die Masse des Exoplaneten Proxima b wird mit 1,3 Erdmassen angenommen.

c) Bestimmen Sie den Bahnradius des Exoplaneten Proxima b. Vergleichen Sie diesen mit dem Bahnradius des innersten Planeten unseres Sonnensystems.
[Zur Kontrolle: $7{,}2 \cdot 10^9$ m]
S7 / I

d) Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Skizze den Winkeldurchmesser von Proxima Centauri am Himmel von Proxima b und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Winkeldurchmesser der Sonne an unserem Himmel.
K6, S7 / II

e) Wie in Teilaufgabe 1b) gezeigt, beträgt die Gesamtleuchtkraft von Proxima Centauri $1{,}6 \cdot 10^{-3} L_{\odot}$. Zeigen Sie, dass die Bestrahlungsstärke auf Proxima b in derselben Größenordnung liegt wie die solare Bestrahlungsstärke auf der Erde.
S7 / I

f) Aus den vorliegenden Daten kann noch nicht geschlossen werden, dass die Oberflächentemperaturen auf Proxima b und auf der Erde ähnlich sind. Erläutern Sie dies anhand zweier selbstgewählter Einflussgrößen.
E8, K8 / III

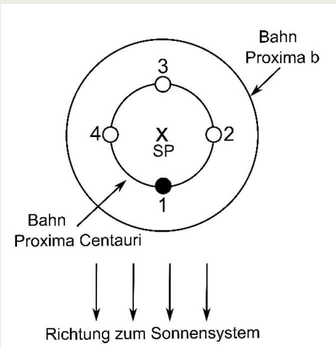

Abbildung 1.4

a) Bei der Dopplerspektroskopie kann man die Geschwindigkeiten von Objekten im Weltall bestimmen. Spektroskopie bedeutet, dass man das von den Objekten ausgestrahlte Licht hinsichtlich seiner Wellenlängen, also seines Spektrums untersucht. Dabei vergleicht man das gemessene Spektrum mit Spektren die man auf der Erde genau vermessen kann. Man stellt fest, dass die Himmelsobjekte aus den gleichen Materialien aufgebaut sind, wie wir sie hier auf der Erde erzeugen können (bis auf wenige Ausnahmen, bei denen zu viel Energie nötig wäre). Vergleicht man das Spektrum eines ruhenden Körpers und eines Körpers, der sich vom Messpunkt wegbewegt, sind zwar die Abstände zwischen den Spektrallinien gleich, aber die Werte sind verschoben. Das liegt am Dopplereffekt. Dadurch kann umgekehrt auch durch Aufnahme des Spektrums die Geschwindigkeit eines Körpers gemessen werden, aber nur der vektorielle Anteil, mit dem sich der Körper wegbewegt und nicht zum Beispiel im Kreis bei gleichbleibendem Abstand. Solche Bewegungen, bei denen sich der Abstand ändert, nennt man Radialbewegungen. Insgesamt kann man also durch Messung der Spektren und Vergleich mit ruhenden Proben die Radialgeschwindigkeit von Himmelsobjekten bestimmen.

   Im Zweikörpersystem drehen sich beide beteiligten Körper um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Kennt man die Bewegung dieses Schwerpunktes im Raum, so bewegen sich die beiden Körper mit dem Schwerpunkt mit, aber auch noch um den Schwerpunkt. Dadurch kommt es zu wellen- und schleifenförmigen Abweichungen von der Schwerpunktbewegung. So bewegen sich Erde und Mond um einen gemeinsamen Schwerpunkt, der innerhalb der Erde, aber nicht im Erdmittelpunkt liegt. Das gesamte System dreht sich aber noch um die Sonne und daher haben Mond noch Erde Abweichungen von perfekten Ellipsenbahnen im Orbit um die Sonne.

   Betrachtet man von der Erde aus einen Stern, so kann man seine Bewegung zum Beispiel mit Dopplerspektroskopie ermitteln. Hat dieser Stern keine Planeten, bewegt er sich ohne solche Störungen auf seiner Bahn relativ zur Erde. Hat er allerdings einen Planeten, mit dem er um einen gemeinsamen Schwerpunkt rotiert, kommen zu seiner Bahn periodische Veränderungen hinzu, die sich immer dann wiederholen, wenn der Planet einen Umlauf beendet hat. Diese Veränderungen kann man im Dopplerspektroskopiesignal messen und aufgrund der Geschwindigkeitsschwankungen auf einen Planeten schließen.

b) Die beiden Körper bewegen sich immer um einen Schwerpunkt, der zwischen ihnen liegt. Da der Schwerpunkt in der Abbildung genau im Zentrum der Kreisbahnen liegt, müssen die Körper sich jeweils genau gegenüber stehen, also um 180° versetzt. Abbildung 1.5 zeigt die dazugehörige Zeichnung.

   Um die Radialgeschwindigkeit als Funktion der Zeit zeichnen zu können, ist die Skizze der Orte zu verschiedenen Zeiten hilfreich. Da die Radialgeschwindigkeit die zeitliche Ableitung des Abstandes ist, bietet es sich an, zunächst die Abstände im Zeitverlauf aufzutragen. Das wurde im oberen Teil von Abb. 1.6 gemacht. Hier wurde noch der Abstand d_0 des Schwerpunktes abgezogen, um die Schwingung um 0 zu zentrieren. Die Cosinus-Form des Abstandes kommt davon, dass man eine Kreisbewegung auf eine einzelne Richtung projiziert, nämlich die Beobachtungsrichtung. In Position 1 hat Proxima Centauri keine Abstandsveränderung, weil es dort am nächsten zur Erde steht und sich danach wieder wegbewegt. In Position 2 ist die Geschwindigkeit maximal mit positivem Vorzeichen, wenn man die Achsen so legt, dass positive Geschwindigkeiten zu größeren Abständen führen. In Position 3 findet man wieder einen Umkehrpunkt und in Position 4 maximale Geschwindigkeit in Richtung der Erde. Der untere Teil von Abb. 1.6 zeigt den gesamten Zeitverlauf und deutet an, dass der Verlauf periodisch ist. Auch hier wurde wieder die Schwerpunktgeschwindigkeit v_0 abgezogen, um die Schwingung um 0 zu zentrieren. Zeichnerisch kann man die Punkte 1 bis 4 aus der Skizze ablesen und Cosinusförmig verbinden. Die Geschwindigkeit erhält man dann durch graphische Ableitung.

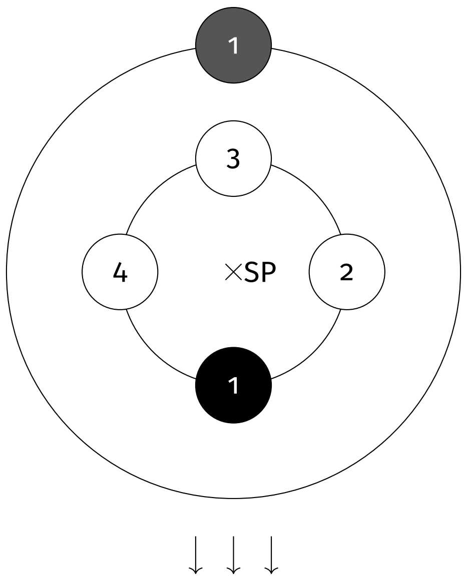

Abbildung 1.5: Bahnen von Proxima b und Proxima Centauri um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Die äußere Bahn gehört zum Planeten Proxima b und die innere gehört zum Stern Proxima Centauri. Die Pfeile zeigen die Richtung an, in der unser Sonnensystem liegt, um den Bezug zu Abb. 1.6 herzustellen.

c) Die Bahn ist laut Angabe näherungsweise kreisförmig. Bei Kreisbewegungen muss immer eine Zentripetalkraft vorliegen, um den Körper in dieser Bewegung zu halten. Das liegt daran, dass eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit immer durch eine Beschleunigung verursacht wird. Die Ursache für die Beschleunigung zur Mitte hin ist in diesem Fall die Gravitationskraft. Mit den Massen aus der Angabe und der Sonnen- und Erdmasse Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.47, kann man die Kräfte berechnen. Für die Zentripetalkraft ist hier die Formel nützlich, in der die Kraft durch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.11 ausgedrückt wird Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.12, weil die Umlaufdauer T bekannt ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
F_G &= F_z \\
G\frac{M_{\mathsf{PC}}M_{\mathsf{Pb}}}{r^2} &= M_{\mathsf{Pb}}\omega^2 r \\
GM_{\mathsf{PC}} &= \omega^2 r^3 \\
r &= \sqrt[3]{\frac{GM_{\mathsf{PC}}}{\omega^2}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{GM_{\mathsf{PC}T^2}}{(2\pi)^2}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 0{,}12 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot 11{,}2 \cdot 86\,400\,\mathrm{s}}{4\pi^2}} \\
&= 7{,}2 \cdot 10^9\,\mathrm{m} \\
&\approx 0{,}05\,\mathrm{AE}
\end{aligned}$$

Der Planet, der unserer Sonne am nähsten ist, ist der Merkur mit einem Abstand von etwa 0,387 AE Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.48. Damit ist Proxima b deutlich näher an Proxima Centauri, als alle Planeten unseres Sonnensystems.

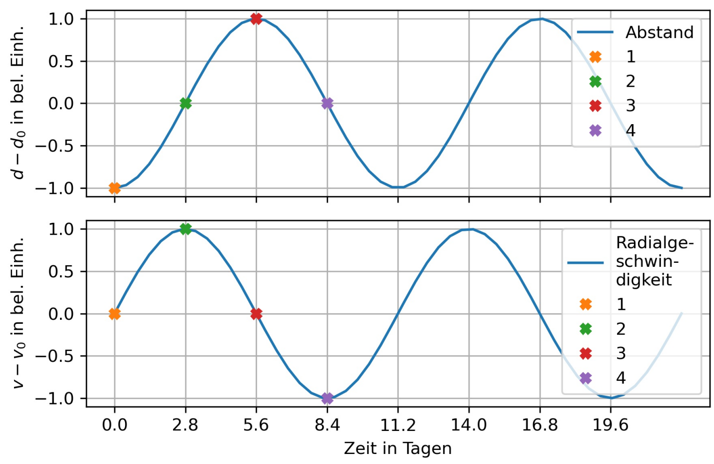

Abbildung 1.6: Radialbewegung von Proxima Centrauri im Zeitverlauf im System des gemeinsamen Schwerpunktes mit Proxima b. Im oberen Teil ist der Abstand d zur Erde aufgetragen und der Abstand d_0 des Schwerpunktes abgezogen. Im unteren Teil ist die Radialgeschwindigkeit v aus Sicht der Erde aufgetragen. Auch hier wurde die Radialgeschwindigkeit v_0 des Schwerpunktes abgezogen.

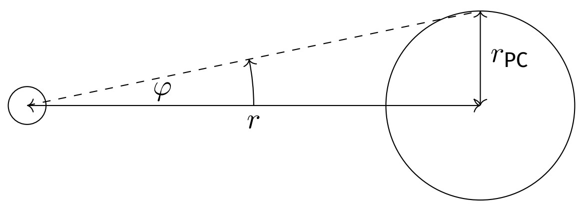

Abbildung 1.7: Veranschaulichung der Argumentation zum Winkeldurchmesser. Beachte, dass die Abstände nicht maßstabsgetreu sind. Weil $r \gg r_{\text{PC}}$ ist es legitim von den Mittelpunkten der Himmelskörper auszugehen.

d) Der Stern Proxima Centauri wird von Proxima b aus beobachtet. Dann erscheint der Stern am Himmel in einem Winkel φ, der durch den Radius r_{PC} von Proxima Centauri und den Abstand r zum Planeten gegeben ist. Die Trigonometrie liefert für den Winkel die Beziehung (siehe auch Abb. 1.7):

$$\tan(\varphi) = \frac{r_{\text{PC}}}{r}$$

Da der Abstand viel größer ist als der Radius handelt es sich um einen kleinen Winkel, deshalb gilt im Bogenmaß näherungsweise die Kleinwinkelnäherung $\varphi \approx \tan(\varphi)$ Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.28. Damit wird die obige Formel mit dem Erddurchmesser Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.47 und dem vorher berechneten Abstand zu

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{r_{\text{PC}}}{r} \\ &= \frac{0{,}15 \cdot 6{,}957 \cdot 10^8\,\text{m}}{7{,}2 \cdot 10^9\,\text{m}} \\ &= 0{,}014\,\text{rad} \end{aligned}$$

Damit ist der Winkeldurchmesser durch $\alpha_{\text{PC}} = 2\varphi = 0{,}028\,\text{rad}$ gegeben. Das entspricht einem Winkel von

$$\alpha_{\text{PC}} = \frac{0{,}028}{2\pi} \cdot 360° = 1{,}6°$$

Hinweis

Zur Erinnerung: Für Winkel gibt es in der Mathematik mehrere Maße. In der Physik kommt neben dem gut bekannten Gradmaß auch manchmal das Bogenmaß zum Einsatz. Beim Bogenmaß wird der Kreisbogen des Sektors des Einheitskreises gemessen. Manchmal gibt man dieses ohne Einheiten an, zur Verdeutlichung kann man es aber auch in seiner Einheit radian (rad) angeben. Die Kleinwinkelnäherung wie sie oben verwendet wurde, gilt nur für das Bogenmaß, denn $\tan(1{,}6°) = 0{,}028$. Hier sind Winkel und Tangens komplett verschiedene Zahlen, aber der Tangens stimmt gut mit dem Winkel im Bogenmaß überein.

Zum Vergleich kann man die gleiche Rechnung für die Sonne machen. Mit dem Sonnenradius $r_\odot$ Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.47 und dem Abstand von 1 AE gilt:

$$\varphi_\odot = \frac{r_\odot}{1\,\text{AE}} = \frac{6{,}957 \cdot 10^8\,\text{m}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m}} = 4{,}65 \cdot 10^{-3}\,\text{rad}$$
$$\alpha_\odot = 2\varphi_\odot = 2 \cdot \frac{4{,}65 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \cdot 360° = 0{,}53°$$

Die Sonne erscheint daher an unserem Himmel kleiner als Proxima Centauri am Himmel von Proxima b.

e) Die Bestrahlungsstärke ist gegeben durch die Leistung einer Lichtquelle, die auf eine bestimmte Fläche fällt. Betrachtet man einen Stern und seinen Planeten, so verteilt sich im Abstand des Planeten die gesamte Leistung des Sternes auf eine Kugeloberfläche. Die Kugel hat dabei als Radius genau den Abstand von Stern und Planet. Mit der Formel für die Kugeloberfläche gilt daher für die Bestrahlungsstärke E:

$$E = \frac{L}{4\pi r^2}$$

und diese Formel deckt sich mit der in Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.16. Für Proxima Centauri und die Sonne ergibt sich dann auf ihren Planeten Proxima b und der Erde jeweils

$$E_{\text{Pb}} = \frac{L_{\text{PC}}}{4\pi r_{\text{Pb}}^2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}846 \cdot 10^{26}\,\text{W}}{4\pi \cdot (7{,}2 \cdot 10^9\,\text{m})^2} = 944{,}6\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$
$$E_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi r_{\text{Erde}}^2} = \frac{3{,}846 \cdot 10^{-26}\,\text{W}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m})^2} = 1367{,}5\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Dieser Wert stimmt genau mit dem Wert der Solarkonstante aus Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2013, S.47 überein. Bildet man das Verhältnis der beiden Werte, kommt man auf $\frac{E_{\text{Pb}}}{E_\odot} = 0{,}69$, also kann man gut davon sprechen, dass die Bestrahlungsstärken auf den beiden Planeten in der gleichen Größenordnung liegen.

f) Die Oberflächentemperatur hängt nicht nur von der Bestrahlungsstärke ab. Auf der Erde wird die Oberflächentemperatur maßgeblich von der Zusammensetzung der Erdatmosphäre beeinflusst. Sichtbares Licht kann die Atmosphäre gut durchdringen, wird auf der Erde absorbiert und als Wärme im Infraroten wieder abgestrahlt. Die infrarote Strahlung wird von der Atmosphäre jedoch nicht gut durchgelassen und es bleibt warm auf der Erde. Dieses Phänomen nennt man den Treibhauseffekt. Da Proxima Centauri im Infraroten strahlt und die Zusammensetzung der Atmosphäre von Proxima b hier nicht diskutiert wurde, ist unklar, ob es den Treibhauseffekt auch auf Proxima b gibt.

Ein zweiter Einfluss auf die Oberflächentemperatur ist die Albedo. Dabei handelt es sich um die Oberflächenbeschaffenheit und wie sich diese auf die Reflexion von Strahlung auswirkt. Da hier die Oberfläche von Proxima b nicht betrachtet wurde, sind wir auch darüber in Unkenntnis.

Ein dritter Einfluss (der hier eigentlich nicht verlangt ist), ist die Wärmeentstehung im Inneren der Planeten. Durch radioaktive Zerfalle und vulkanische Aktivität kann der Planet aus seinem Inneren heraus die Oberfläche erwärmen. Auch dieser Aspekt wurde hier nicht betrachtet.

Literatur

Staatsministerium für Unterricht und Kultus. (2013). *Formelsammlung Naturwissenschaften: mit Merkhilfe Mathematik - Gymnasium Bayern* (T. Pehle & L. Engelmann, Hrsg.; 2. Fassung). Cornelsen.