DISKRET MATTE

HØST 2021

FØRSTE OBLIGATORISKE OPPGAVE

Amna Dastgir 364520
Mathangi Murugesu 364580
Tiril Baklien 360821

oppgave 1

a)

p	q	¬p	p∨q	¬p∧(p∨q)	¬p∧(p∨q) → q
S	S	U	S	U	S
S	U	U	S	U	S
U	S	S	S	S	S
U	U	S	U	U	S

sannhetsverditabellen viser at det er en tautologi ettersom den siste raden har "sann" hele veien.
p og q → $2^2 = 4$. 4 rader

b)

p	q	r	q∧r	p→(q∧r)	(p→q)	(p→r)	(p→q)∧(p→r)
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	U	U	S	U	U
S	U	S	U	U	U	S	U
S	U	U	U	U	U	U	U
U	S	S	S	S	S	S	S
U	S	U	U	S	S	S	S
U	U	S	U	S	S	S	S
U	U	U	U	S	S	S	S

oppgave ②

• p: « Det regner »
• q: « Det blåser »

a) « Det er oppholdsvær og vindstille. »
$\neg p \wedge \neg q \approx \neg(p \vee q)$

b) « Det blåser hvis det ikke regner. »
$\neg p \rightarrow q$

c) « Det regner bare hvis det er vindstille. »
$p \rightarrow \neg q$

d) « Det både regner og blåser. »
$p \wedge q$

e) « Det verken regner eller blåser. »
$\neg p \wedge \neg q \approx \neg(p \vee q)$

f) « Det er nødvendig at det er vindstille for at det skal regne. »
$p \rightarrow \neg q$

g) « Det at det blåser er tilstrekkelig for at det ikke regner. » $q \rightarrow \neg p$

oppgave ③ P(x): « x har en bærbar pc »
Q(x): « x har en mac »

a) $\forall x (P(x) \vee Q(x))$
b) $\forall x (Q(x) \rightarrow P(x))$
c) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)$
d) $\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$
e) $\neg \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$

oppgave 4

a) $\exists m \forall n\,(n^2 = m)$ f.eks $n=2$ og $m=3$
$\boxed{\text{Usant}}$ da $2^2 = 3 \rightarrow 4 \neq 3$

b) $\forall m \exists n\,(n^2 - m < 100)$
$\boxed{\text{USANN}}$ Det finnes ikke noen n verdier som gjør alle m-verdier lik sann. f.eks hvis $m = 1000$

c) $\forall m \forall n\,(mn > n)$ f.eks $n = 3$ og $m = -6$
$\boxed{\text{USANN}}$
$-6 \cdot 3 > 3$
$-18 > 3$

d) $\forall n \exists m\,(n^2 = m)$
$\boxed{\text{SANN}}$

e) $\forall m \exists n\,(n^2 = m)$
$\boxed{\text{USANN}}$

oppgave 5 m & n er heltall
$m > 0$

a) $P(5,6)$: USANT. $\frac{6}{5} = 1{,}2$

b) $P(2,6)$: SANN. $\frac{6}{2} = 3$

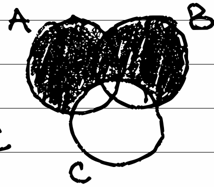
c) $\forall m \forall n\, P(m,n)$: USANN. Fordi det går ikke opp med alle. Hvis $m = 5$ og $n = 3$ f.eks.

d) $\exists m \forall n\, P(m,n)$: SANN. fordi det finnes én m.

e) $\exists n \forall m\, P(m,n)$: SANN

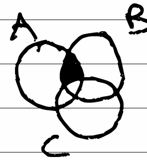
oppgave 6

a) i



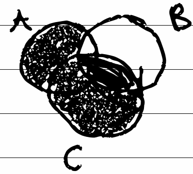
$(A\cup B)-C$

ii



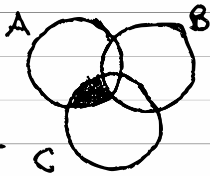
$(A\cap B)-C$

iii



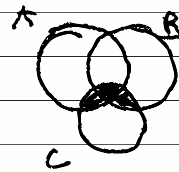
$(A-B)\cup C$

b) i



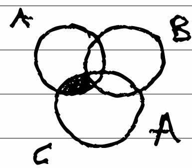
$(A-B)\cap C$

ii



$(A\cup B)\cap C$

iii



$A\cap(C-B)$

den første og siste er like.

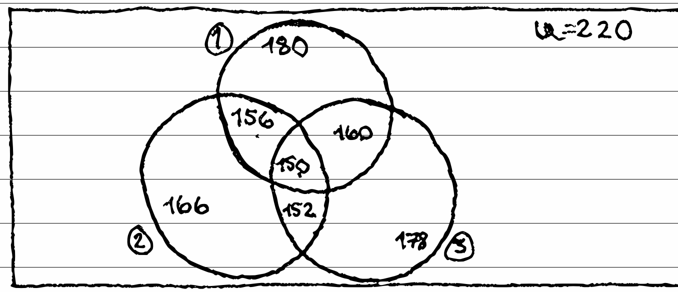
c) $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$
$A=\{a,b,c,d\}$
$B=\{c,d,e,f\}$

$A\cap B=\{c,d\}$
$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$
$\overline{A}=\{e,f,g,h\}$
$\overline{B}=\{a,b,g,h\}$
$\overline{A\cap B}=\{a,b,e,f,g,h\}$
$\overline{A}\cup\overline{B}=\{a,b,e,f,g,h\}$
$\overline{A\cup B}=\{g,h\}$
$\overline{A}\cap\overline{B}=\{g,h\}$

oppgave (7)

Opplysninger:
↳ 220 studenter
(1) 180 Algoritmer og datastrukturer
(2) 166 operativsystemer
(3) 178 webprogrammering

(1) + (2) = 156
(1) + (3) = 160
(2) + (3) = 152
(1) + (2) + (3) = 150



a) Hvor mange har ingen av de emnene?
Inklusion - eklusjonsformelen:

$|A \cup O \cup W| = |1| + |2| + |3| - |1 \cap 2| - |1 \cap 3| - |2 \cap 3| +$
$|1 \cap 2 \cap 3|$

Med tall:

$(180 + 166 + 178) - 156 - 160 - 152 + 150 = 206$

220 studenter $- 206 = \underline{14}$

b) $(1 \cap 2) - (1 \cap 2 \cap 3) = 156 - 150 = \underline{6}$

c) $(1 \cap 2) + (1 \cap 3) + (2 \cap 3) = (160 + 156 + 152) = 468$
$468 - (150 \cdot 3) = \underline{18}$

d) $|U| - (|A| + |B| + |C|) - |(A \cap B - (A \cap C) - B \cap C)| - (A \cap B \cap C)$

$220 - 524 - (-306) = \underline{2}$

oppgave 8

a) i $f(x) = \frac{1}{x}$

ii $f(x) = \pm\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{R}$

For at f skal være funksjoner må alle verdier kunne treffe verdiområdet og det må gå en pil fra den ene mengden til den andre. Forholdet med relasjoner fra 1 mengde i telleren og i x-mengden, nevneren: Putter vi en verdi i x må vi kunne få et svar ikke to verdier som gir samme svar. i = det må i et hvert element finnes bare én tilhørende funksjonsverdi. Hvis $x=0$ er ikke $f(x)$ definert (0 i nevner). Derfor er ikke $f(x)=\frac{1}{x}$ en funksjon.

$f(3) = \pm\sqrt{3^2+1} = \pm 5 \quad (+5 \wedge -5)$

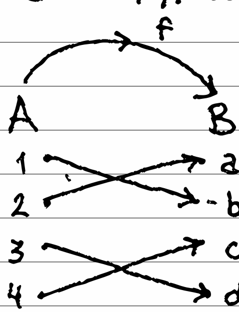
$f(-3) = \pm\sqrt{(-3)^2+1} = \pm 5 \quad (+5 \wedge -5)$

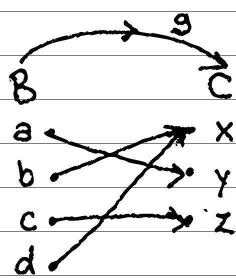
dvs $f(3) = f(-3)$: og vi kan da si med begrunnelsen ovenfor at dette ikke er en funksjon.

b) $A = \{1,2,3,4\}$ $\quad f: A \to B$

$B = \{a,b,c,d\}$ $\quad g: B \to C$

$C = \{x,y,z\}$





Funksjonen f er en-til-en og på. Funksjonen g er ikke en-til-en fordi flere elementer i B har samme funksjonsverdi. Den er på fordi verdimengden (V_g er lik C.

Sammensetning $h = g \circ f$.

$\boxed{\text{h er ikke invers fordi den er på men ikke en-til-en}}$

$h(1) = x$ $\quad h(3) = x$

$h(2) = y$ $\quad h(4) = z$

oppgave 9

a) $5+7+9+\ldots+97+99$

Dette er en aritmetisk rekke hvor differansen er $d=2$. Det første leddet, $\underline{a_1 = 5}$.

Generelle formelen blir:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= 5 + (n-1)2$$
$$= 5 + 2n - 2$$
$$\underline{\underline{a_n = 2n+3}}$$

sumformelen for en aritmetisk rekke er gitt ved

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2} = \frac{n\cdot(5+2n+3)}{2} = \frac{n\cdot(2n+8)}{2}$$
$$= \frac{2n^2+8n}{2} = \underline{\underline{n^2+4n}}$$

For å finne summen må jeg finne hvor mange ledd rekka har.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 99 = 5 + (n-1)2$$
$$99 = 5 + 2n - 2 \rightarrow 96 = 2n \qquad \underline{\underline{n=48}}$$

$$S_{46} = 48^2 + 4\cdot 48 = 2304 + 192 = \underline{\underline{2496}}$$

$$\sum_{n=5}^{99} n = \left(\frac{5+99}{2}\right)\cdot 48 = \underline{\underline{2496}}$$

b) $1-2+4-8+16-32+\ldots-512+1024$

Dette er en geometrisk rekke hvor kvotienten er $k=-2$. Det første leddet er, $a_1 = 5$

Generelle formelen blir:

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$
$$= 1 \cdot (-2)^{n-1}$$
$$\underline{\underline{a_n = (-2)^{n-1}}}$$

For å finne antall ledd i rekka setter man $a_n = 1024$.

$$1024 = (-2)^{n-1} \longrightarrow n = 11$$

Sumformel for en geometrisk rekke er gitt ved

$$S_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$$

Setter dermed inn $n=11$

$$S_{11} = \frac{1 \cdot ((-2)^{11} - 1)}{(-2) - 1} = \underline{\underline{683}}$$ er

den totale summen av rekka.

$$\sum_{i=0}^{N} = a_1 \frac{(k^{N+1} - 1)}{k-1} = \sum_{n=1}^{11} 1 \cdot (-2)^n$$

$$\left(\frac{(-2)^{10+1} - 1}{(-2) - 1}\right) = \frac{-2048}{-3} = \underline{\underline{683}}$$

c) $10+14+18+22+\ldots+86+90+94$

Dette er også en aritmetisk rekke hvor differansen er lik $d=4$. Det første leddet er 10 og det generelle formelen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= 10 + (n-1)4$$
$$= 10 + 4n - 4$$
$$a_n = 4n + 6$$

Summen av den aritmetiske rekka kan formes ved: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \cdot (10 + 4n + 6)}{2}$

$$= \frac{4n^2 + 16n}{2} = \underline{\underline{2n^2 + 8n}}$$

For å finne summen til rekka trenger jeg å vite antall ledd.

$a_n = a_1 + (n-1)d \longrightarrow 94 = 10 + (n-1)4$
$94 = 10 + 4n - 4 \longrightarrow 88 = 4n \quad |:4$
$\underline{n = 22}$

$S_{22} = 2 \cdot 22^2 + 8 \cdot 22 = 968 + 176 = \underline{\underline{1144}}$

$$\sum_{n=10}^{94} = \frac{(10+94)}{2} \cdot 22 = \underline{\underline{1144}}$$

Summen av rekka ved bruk av indeksen er 1144. Dette er riktig fordi det stemmer overens med sumformelen tidligere utledet for rekka med leddformel.

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

Dette er en geometrisk rekke hvor kvotienten er $k = \frac{1}{2}$, og det første leddet er $\frac{1}{2}$. Den generelle leddformelen kan utvides slik:

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

For å finne antall ledd setter jeg formelen utledet oppe $= \frac{1}{64}$.

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow \underline{\underline{n = 6}}$$

summen av rekka finner jeg av å sette inn alle verdier:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (k^n - 1)}{k - 1}$. Siden leddene

Rekka utover blir mindre og mindre. Dermed blir summen av rekka tilnærmet 1. Vi sier at rekka konverger siden $-1 < k < 1$.

Av å sette $S_6 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}^6 - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \underline{\underline{\frac{63}{64}}}$

Desto flere ledd rekka får vil verdien tilnærme seg én, men aldri nå det.

$$\sum_{n=\frac{1}{2}}^{6} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}^{5+1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{63}{64}\right)}{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{63}{64}}}$$

e) summen av $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=1}^{3} ij$

$n_i = \frac{(2-0)}{1} + 1 = 3$ $\left(\frac{0+2}{2}\right) \cdot 3 = 3$

$\cdot = 18$

$n_j = \frac{(3-1)}{1} + 1 = 3$ $\left(\frac{1+3}{2}\right) \cdot 3 = 6$