# DISKRET MATTE

HØST 2021

ANDRE OBLIGATORISKE OPPGAVE

Amna Dastgir 364520
Mathangi Murugesu 364580
Tiril Baklien 360821

Oppgave ①

Mengden $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (positive heltall)
↳ Definisjonsmengde og verdiområde for f og g.

Finne f(x) og g(x) for:

$x = 1$
$x = 6$
$x = 8$
$x = 14$

$f: A \to A$ der $f(x) = x \bmod 7$
$g: A \to A$ der $g(x) = x \operatorname{div} 7$

$f(x) = x \bmod 7$

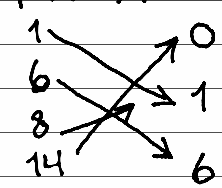
- $f(1) = 1 \bmod 7$
  $= 0$ med 1 i rest
- $f(6) = 6 \bmod 7$
  $= 0$ med 6 i rest
- $f(8) = 8 \bmod 7$
  $= 1$ med 1 i rest
- $f(14) = 14 \bmod 7$
  $= 2$ med 0 i rest

$g(x) = x \operatorname{div} 7$

- $g(1) = 1 \operatorname{div} 7$
  $= 0$
- $g(6) = 6 \operatorname{div} 7$
  $= 0$
- $g(8) = 8 \operatorname{div} 7$
  $= 1$
- $g(14) = 14 \operatorname{div} 7$
  $= 2$

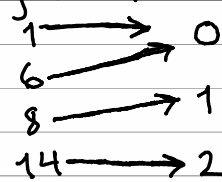
Finne verdimengden til f og g

$f: A \to A$




$V_f = \{0, 1, 6\}$

$g: A \to A$




$V_g = \{0, 1, 2\}$

Ingen av funksionene er en-til-en og bare g er p

oppgave 2

a) $$\sum_{i=2}^{10}\sum_{j=1}^{5}(i+j) = ((i+1)+(i+2)+(i+3)+(i+4)+(i+5))$$
$$= 5i+15$$
$$= \underline{\underline{405}}$$

b) $$\sum_{j=2}^{8}(-2)^j = (-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+(-2)^5+(-2)^6+(-2)^7+(-2)^8$$
$$= 4-8+16-32+64-128+256$$

Rekka er geometrisk fordi det varier mellom "+" og "-" mellom hvert ledd og kvotienten er: $\frac{-8}{4} = \underline{\underline{-2}}$ og $\frac{-32}{16} = \underline{\underline{-2}}$.

Dersom indeksen j begynner på 0 er:

$$\sum_{j=0}^{7}(-2)^j = \frac{4((-2)^7-1)}{(-2)-1} = \underline{\underline{172}}$$

oppgave 3

a) $44 : 8 = \underline{\underline{5}}$
$-40$
$4$

$\underline{q = 5 \text{ og } r = 4.}$

b) $777 : 21 = \underline{\underline{37}}$
$-63$
$147$
$-147$
$0$

$\underline{q = 37 \text{ og } r = 0.}$

c) $7 : 17 = \underline{\underline{0}}$ $\underline{q = 0 \text{ og } r = 7.}$

d) $0 : 17 = \underline{\underline{0}}$ $\underline{q = 0 \text{ og } r = 0.}$

e) $1234567 : 101 = \underline{\underline{12223}}$ $\qquad \underline{q = 12223 \text{ og } r = 44}$

$$
\begin{array}{l}
-101 \\
\hline
\quad 224 \\
\quad -202 \\
\hline
\qquad 225 \\
\qquad -202 \\
\hline
\qquad\quad 236 \\
\qquad\quad -202 \\
\hline
\qquad\qquad 347 \\
\qquad\qquad -303 \\
\hline
\qquad\qquad\quad 44
\end{array}
$$

f) $-221 : 23 = -10$ $\qquad \underline{q = -10 \quad \text{og} \quad r = 9}$

$$
\begin{array}{r}
+\ 230 \\
\hline
9
\end{array}
$$

oppgave 4

i) $3 \equiv 17 \pmod 7$

$3 - 17 \equiv \bmod 7$

$-14 \equiv \bmod 7$

Sant

Utsagnet er riktig fordi $-14$ mod 7 går opp.
Tallene som er kongruente med 17 (mod 7)
$-14, 3, 20, 37, \ldots$ osv.

ii) $43 \equiv 7 \pmod 5$

$43 - 7 \equiv \bmod 5$

$36 \equiv \bmod 5$

Usant

Utsagnet er galt fordi svaret med 36 mod 5 blir
6 med 1 i rest.

b) $a \equiv 7 \pmod 5$ $\quad a = 12, 17, 22, 27, 32$

c) $a = 5937 \rightarrow \quad = g(5+9+3+7) = g(24) = g(6)$
$b = 65846 \rightarrow \quad = g(6+5+8+4+6) = g(29) = g(11) = g(2)$

$g(a) \cdot g(b) = 6 \cdot 2 = 12 \rightarrow 1+2 = \underline{3}$

Så sjekker vi hvilke av tallene som har tverrsum 3:

1) $3+9+0+9+2+7+6+0+2 = 2$

2) $3+9+0+9+2+7+7+0+2 = 39 = 12 = \underline{\underline{3}}$

3) $3+9+0+9+2+7+8+0+2 = 4$

Dermed er 2) rixtig løsning til:

$5937 \cdot 65846.$

oppgave 5

a) 

| | |
|---|---|
| $4027_{10}$ | 2 |
| 2013 | 1 |
| 1006 | 1 |
| 503 | 0 |
| 251 | 1 |
| 125 | 1 |
| 62 | 1 |
| 31 | 0 |
| 15 | 1 |
| 7 | 1 |
| 3 | 1 |
| 1 | 1 |
| 0 | 1 |

$4027_{10}$ på binær form er lik $\underline{\underline{111110111011}}_2$

| 4027 | 8 |
| --- | --- |
| 503 | 3 |
| 62 | 7 |
| 7 | 6 |
| 0 | 7 |

$4027_{10} \longrightarrow$ oktal form

$\underline{\underline{7673_8}}$

$4027_{10} \rightarrow$ heksadesimal form

$\underline{\underline{0100\ 0000\ 0010\ 0111_{16}}}$

b) $A1B2C3_{16} \rightarrow$ binær

$\underline{\underline{1010\ 0001\ 1011\ 0010\ 1100\ 0011_2}}$

$A1B2C3_{16} \rightarrow$ binær $\rightarrow$ oktal

$\underline{\underline{50331303_8}}$

$A1B2C3_{16} \rightarrow$ desimal

$A \cdot 16^5 + 1 \cdot 16^4 + B \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = \underline{\underline{10597059_{10}}}$

c) $1010010001_2 \rightarrow$ oktal form

1 2 2 1

$\underline{1221_8}$

Binær $\rightarrow$ heksadesimal

$10|1001|0001_2 \rightarrow \underline{291_{16}}$

2 9 1

Binær til desimal $1010010001_2$

$512 + 128 + 16 + 1 = \underline{\underline{657}}_{10}$

oppgave 6

Kravet som refereres til er at for å kunne danne et matriseprodukt fra matrise A med mxn dimensjon, og matrise B med nxK dimensjon, må antall rader i A være lik Kolonner i B.

AB finnes og får dimensjon 2x2.
BA finnes og får dimensjonen 3x3.
Ac finnes også og får dimensjon 2x3.

CB finnes og har dimensjonen 3x2.

b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i)

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

ii)

$$BA = \begin{matrix} 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ (-1)\cdot 2 + 0\cdot 0 & (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-1) & (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

oppgave 7 gitt $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ er $AB \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

1 $-1a + 2c = -1$ 3 $1a + 3c = 6$

2 $-1b + 2d = 4$ 4 $1b + 3d = 6$

1 og 3 $-1a + 2c = -1$

$1a + 3c = 6 \rightarrow a = 6 - 3c$

$-(6-3c) + 2c = -1$

$-6 + 5c = -1$

$5c = 5$ $\underline{\underline{c = 1}}$

$a = 6 - 3 \cdot 1$ $\underline{\underline{a = 3}}$

2 og 4 $-1b + 2d = 4$

$1b + 3d = 6 \rightarrow b = 6 - 3d$

$-(6-3d) + 2d = 4$

$-6 + 5d = 4$ $5d = 10$ $\underline{\underline{d = 2}}$

$b = 6 - 3 \cdot 2$ $b = 0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $\boxed{C + D} = \emptyset$

Ingen løsning ~~ettersom~~ ettersom en matrise C+D ikke er definert.

$\boxed{D+E}$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} + E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{CD}$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 3\cdot(-2)+(-1)\cdot 4 & 3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 3+{-1}\cdot(-2) \\ 1\cdot(-2)+2\cdot 4 & 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 3+2\cdot(-2) \\ 0\cdot(-2)+(-3)\cdot 4 & 0\cdot 1+(-3)\cdot 3 & 0\cdot 3+(-3)\cdot(-2) \end{matrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 11 \\ 6 & 7 & -1 \\ -12 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$\boxed{DC}$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$DC = \begin{bmatrix} -2\cdot 3+1\cdot 1+3\cdot 0 & -2\cdot(-1)+1\cdot 2+3\cdot(-3) \\ 4\cdot 3+3\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 4\cdot(-1)+3\cdot 2+(-2)(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 15 & -8 \end{bmatrix}$$

$\boxed{D^T}$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow D^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

oppgave ⑧ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \odot B = \begin{bmatrix} (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge1) & (1\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(1\wedge0) & (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge1) \\ (1\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1) & (1\wedge0)\vee(0\wedge1)\vee(1\wedge0) & (1\wedge1)\vee(0\wedge0)\vee(1\wedge1) \\ (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge1) & (1\wedge0)\vee(1\wedge1)\vee(1\wedge0) & (1\wedge1)\vee(1\wedge0)\vee(1\wedge1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{[2]} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 \\ 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

oppgave 9

i) $(1\cdot 9)+(3\cdot 8)+(7\cdot 1)+(9\cdot 1)+(13\cdot 2)+3(2\cdot 7+6\cdot 7+8\cdot 3$
$+10\cdot 5+12\cdot 1) = 75+642 \bmod 10 = 2$

$$
\begin{array}{l}
561 : 10 = \underline{\underline{71}} \\
\underline{-70} \\
\quad 12 \\
\underline{-10} \\
\quad 2
\end{array}
$$

ii) 978-0-073-20679-x

$$S_{13} = \left(\sum_{i=1}^{12} i \cdot s_i\right) \bmod 14$$

$= (1\cdot 9+2\cdot 7+3\cdot 8+4\cdot 0+5\cdot 0+6\cdot 7+7\cdot 3+8\cdot 2+9\cdot 0$
$+10\cdot 6+11\cdot 7+12\cdot 9) \bmod 14$

$$
\begin{array}{l}
371 : 14 = 26 \\
\underline{-28} \\
\quad 91 \\
\underline{-84} \\
\quad 7
\end{array}
$$

$x = 7$ så 978-0-073-20679-7

oppgave 10

a) $64_{10} = 1\,000\,000_2$ $\qquad$ $123_{10} = 1\,111\,011_2$

| 64 | 2 |
|---|---|
| 32 | 0 |
| 16 | 0 |
| 8 | 0 |
| 4 | 0 |
| 2 | 0 |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

| 123 | 2 |
|---|---|
| 61 | 1 |
| 30 | 1 |
| 15 | 0 |
| 7 | 1 |
| 3 | 1 |
| 1 | 1 |
| 0 | 1 |

b) $64_{10} = 01\,000\,000$ $\qquad$ $123_{10} = 01\,111\,011$

K = 10 111 111 $\qquad$ K = 10 000 100

+ 1 $\qquad$ + 1

$-64_{10} \rightarrow$ 11 000 000 $\qquad$ $-123_{10} \rightarrow$ 10000101

c) Binær addisjon:

$$\begin{array}{r} 01000000 \\ +\ 01111011 \\ \hline =\ 10111011 \end{array}$$

Andre komplement på resultatet for å få positivt tall å konvertere til desimal form:

$$\begin{array}{r} 10111011 \\ K = 01000100 \\ +\ \qquad 1 \\ \hline 01000101 \end{array}$$

| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |

$= 64 + 4 + 1 = \underline{\underline{69}}_{10}$

Så siden jeg omgjorde resultatet og løste for komplementet må jeg nå legge til negativ: $\underline{\underline{-69}}_{10}$

ⓐ Finne $-64_{10} + (-123_{10})$

$-64_{10} = 11000000$
$-123_{10} = 10000101$

$$\begin{array}{r} 11000000 \\ +\ 10000101 \\ \hline =101000101 \end{array}$$

Siden vi her bruker 8 biter og to komplement fjerner jeg fortegnsbiten 1 og får svar: $\underline{\underline{01000101_2}}$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{array} = 64+4+1 = \underline{\underline{69}}_{10}$$

oppgave (11)

(1) $\sum_{k=0}^{7} 6\cdot 16^k = \frac{6(16^{7+1}-1)}{16-1}$

$= \underline{\underline{1717986918}}$

formel:

$$\sum_{i=0}^{N} a\cdot r^i = a\frac{(r^{N+1}-1)}{r-1}$$

(2) $a = 101\,101\,101\,101\,101\,101\,101\,101\,101\,101_2$

For å gjøre om til oktal form her regner man med 3-og 3 biter fra høyre mot venstre:

a på oktal form blir $\underline{\underline{5555555555}}_8$

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Så oktal til desimal: $5\cdot 8^0 + 5\cdot 8^1 + \ldots + 5\cdot 8^9$

$= \underline{\underline{766\ 958\ 445}}$

(3) $\boxed{a}$ 0110|0110|0110|0110|0110|0110|0110|0110$_{(2)}$

$\underline{\underline{66666666}}_{16}$ form

Fra heksadesimal til desimal:

$6\cdot 16^7 + 6\cdot 16^6 + \ldots + 6\cdot 16^0 = \underline{\underline{1717986918}}_{10}$

$\boxed{b}$ Siden b er et negativt tall (noe fortegnsbiten indikerer)

$b \rightarrow 1001|1001|1001|1001|1001|1001|1001|1001_2$

Fra binær til heksadesimal: $99999999_{16}$

Finne 2-komplement til $\boxed{b}$:

$$\begin{aligned}
& 10011001100110011001100110011001 \\
K = \; & 01100110011001100110011001100110
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 01100110011001100110011001100110 \\
+ & 1 \\
\hline
(K+1) = & 01100110011001100110011001100111
\end{array}$$

29 28 25 24 21 20 17 16 13 12 9 8 5 2 1 0

$$-\left(2^{29}+2^{28}+2^{25}+2^{24}+2^{21}+2^{20}+2^{17}+2^{16}+2^{13}+2^{12}+2^{9}+2^{8}+2^{5}+2^{2}+2^{1}+2^{0}\right)$$

$= \underline{\underline{-1717986919}}_{10}$

oppgave 12

a) 101, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149.

b) $25! = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

$= (5^2) \cdot (2^3 \cdot 3) \cdot (23) \cdot (2 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 5) \cdot (19) \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (17) \cdot (2^4) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 7) \cdot (13) \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot (11) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (3^2) \cdot (2^3) \cdot (7) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (5) \cdot (2^2) \cdot (3) \cdot (2) \cdot (1)$

Primtallsfaktorisering til $25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^{6} \cdot 7^{2} \cdot 11^{2} \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

c) Da tar vi $2^{23} \cdot 5^{6}$ og får vi

65536 000000

Oppgave 13

$\gcd(420, 42) = \underline{2^{2} \cdot 3}$

b) $\operatorname{lcm}(420, 42) = \underline{2^{3} \cdot 3^{2} \cdot 5 \cdot 7}$

$420 = 2^{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5$ $\quad$ $72 = 2^{3} \cdot 3^{2}$

| | |
|---|---|
| 420 | 2 |
| 210 | 2 |
| 105 | 3 |
| 35 | 7 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 72 | 2 |
| 36 | 2 |
| 18 | 2 |
| 9 | 3 |
| 3 | 3 |
| 1 | |

c)

| a | b | r |
|---|---|---|
| 420 | 72 | 60 |
| 72 | 60 | 12 |
| 60 | 12 | 0 |
| 12 | 0 | |

a mod b = r

gcd = 12

| a | b | r |
|---|---|---|
| 53295 | 10920 | 9615 |
| 10920 | 9615 | 1305 |
| 9615 | 1305 | 480 |
| 1305 | 480 | 345 |
| 480 | 345 | 135 |
| 345 | 135 | 75 |
| 135 | 75 | 60 |
| 75 | 60 | 15 |
| 60 | 15 | 0 |

$\gcd(53295, 10920) = 15$