# 等价无穷小

2023年2月19日　18:49

错误的用法是认为

$$\lim_{x\to0}(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})$$
$$=\lim_{x\to0}(\frac{e^x+xe^x}{\cancel{e^x-1}}\times\frac{\cancel{e^x-1}}{x}-\frac{1}{x})$$

正确的用法是应该

$$\lim_{x\to0}(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})$$
$$=1\times\lim_{x\to0}(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\lim_{x\to0}(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cancel{e^x-1}}{x}\times\frac{e^x+xe^x}{\cancel{e^x-1}}-\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x}\right)$$

所以等价无穷小的唯一正确用法是把整个式子乘上一个1，把1换成极限为1的式子，然后利用极限的四则运算法则完成约分。

所以等价无穷小的唯一正确用法是把整个式子乘上一个极限为1的式子，然后利用极限的乘法等于乘法的极限。

所以是想说这么干?

$$\lim_{x\to0}(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}\times\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{\cancel{e^x-1}}\times\frac{\cancel{e^x-1}}{x}\right)-\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x})$$

第一步就错了QwQ

$$\lim_{x\to0}(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})$$
$$\neq\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

等号前面是一个数，等号后面是 $\infty-\infty$ 。一个数等于俩不是数的东西的差？这咋相等嘛。

请随我背诵一遍极限和减法交换定理：

如果 $\lim(A-B),\lim A,\lim B$ 都存在
**（极限存在隐含着极限值不为无穷）**
那么有 $\lim(A-B)=\lim A-\lim B$

然而 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ 极限显然不存在（极限等于无穷是一种特殊的极限不存在情形）。所以两者不相等。

最近这个文章莫名其妙的火了起来，也有不少人问了些问题。针对这些问题我弄了几个练习。练习名称为：**只利用极限的四则运算法则**证明下面的等价无穷小用法正确，或者说明下面的等价无穷小用法不正确。

1. $\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+xe^x)-(e^x-1)}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+xe^x)-(e^x-1)}{x^2}$

2. $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x}$

3. $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^2}$

1. 用法正确。证明：

$$\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+xe^x)-(e^x-1)}{x(e^x-1)}$$
$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+xe^x)-(e^x-1)}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+xe^x)-(e^x-1)}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{e^x-1}}{x}\frac{x(e^x+xe^x)-(e^x-1)}{x\,\cancel{(e^x-1)}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+xe^x)-(e^x-1)}{x^2}$$

2. 有点跳步，然而用法正确。证明：

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\text{(注意拆开之后两个极限都存在)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}-1\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}-\lim_{x\to0}(\frac{x}{\cancel{\sin x}}\frac{\cancel{\sin x}}{x})$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x}$$

3. 不正确。因为

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}\neq\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2}$$