

# 高等代数复习笔记

---

## 目录

0.1	矩阵消元	2
0.2	$Ax = b$	2
0.2.1	解的存在性	2
0.3	向量空间	2
0.4	八个运算律(以下均为缩略表示)	2
0.5	线性相关与线性无关	3
0.6	线性组合	3
0.7	秩	3
0.8	基	3
0.8.1	坐标变换	3
0.8.2	过渡矩阵	3
0.8.3	子空间	3
0.8.4	子空间的交与和	3
0.9	行列式	4
0.9.1	性质	4
0.9.2	展开定理	4
0.9.3	分块运算	4
0.10	矩阵	4
0.10.1	矩阵乘法	4
0.10.2	逆	4
0.10.3	迹	4
0.10.4	特征值	4
0.10.5	特征向量	5
0.11	初等变换	5
0.12	线性映射	5
0.13	相似	5
0.13.1	性质	5
0.13.2	相似对角化条件(具体可参照维基百科“可对角化矩阵词条”)	5

0.13.3 三角化（实用）	6
0.13.4 化零多项式	6
0.14 内积	6
0.14.1 性质	6
0.14.2 柯西不等式	6
0.14.3 施密特正交化方法	6
0.14.4 正交方阵	7
0.15 二次型、实对称方阵、相合、正交相似	7
0.15.1 西尔维斯特惯性定律	7
0.15.2 顺序主子式	7
0.16 若尔当标准形	7

## 0.1 矩阵消元

不再赘述。

## 0.2 $Ax = b$

### 0.2.1 解的存在性

当系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等时，有解。即

$$R(A, b) = R(A)$$

而对于  $A \in F^{n \times n}$ ,  $Ax = b$  有唯一解，等价于  $|A| \neq 0$

考虑  $Ax = O$ ,  $V = \{x | Ax = O\}$

有  $\dim(V) + \text{Rank}(A) = n$  (秩-零化度定理)

同时，有  $A = (A_1 \dots A_n)^T$ ,  $V(A_1 \dots A_n) \perp V$

对于  $Ax = b$ ，解可写成一个特解加上解  $Ax = O$  得到的通解。

## 0.3 向量空间

### 0.4 八个运算律(以下均为缩略表示)

- 加法交换律  $a + b = b + a$
- 加法结合律  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- 存在零向量  $O = (0, \dots, 0)$ ,  $a + O = O + a$
- 存在负向量  $a = (a_1, \dots, a_n)$   $\text{f}X(\mathcal{O}) - a = (-a_1, \dots, -a_n)$   $\text{f}ia + (-a) = O$
- 数乘对于数的加法的分配律  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
- 数乘对于向量加法的分配律  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
- 数乘结合律  $\lambda(\mu a) = (\lambda \mu)a$
- 1乘向量  $1a = a$

## 0.5 线性相关与线性无关

对于 $n$ 个向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ，考虑

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n = 0$$

若上式当且仅当 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 全为0时才满足，则称这 $n$ 个向量线性无关，否则线性相关。

## 0.6 线性组合

具体含义不再赘述。

若 $B$ 是 $A$ 的线性组合，则 $\text{Rank}(A) \geq \text{Rank}(B)$

## 0.7 秩

对于一个向量组，它的秩就是极大线性无关向量组中的向量的个数。不再赘述。

## 0.8 基

基的概念由秩派生而来，不再赘述。

### 0.8.1 坐标变换

坐标：有序数组 $(x_1, \dots, x_n)$ ，通常记作列向量。即 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)(x_1, \dots, x_n)^T$

使用 $NB$ 代表新基， $OP$ 代表旧坐标， $NP$ 代表新坐标，则有 $[NB][NP] = [OP]$ ，而通过化简 $[NB, OP]$ 可得到 $NP$ 。

### 0.8.2 过渡矩阵

过渡矩阵是基与基之间的可逆线性变换，具体请参照教材，不再赘述。

由基 $A$ 变到基 $B$ ： $B = AP$ ，由坐标 $X(A)$ 变到坐标 $Y(B)$ ： $X = PY$ ，使用逆运算即可求解过渡矩阵。

### 0.8.3 子空间

子空间 $W$ 是数域 $F$ 上的向量空间 $V$ 的非空子集，且满足加法与数乘封闭。

子空间 $W$ 包含的线性无关向量的最大个数称为 $W$ 的维数，记作 $\dim W$ 。其余可参照教材，不再赘述。

### 0.8.4 子空间的交与和

对于 $W_1, W_2 \subseteq V, W_1 \cap W_2 = W_3, W_1 + W_2 = W_4 \ominus W_3, W_4$ 仍是 $V$ 的子空间，但是 $W_1 \cup W_2 = W_5, W_5$ 不一定是子空间。

其中， $\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$ ，当 $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ 时， $W_1 + W_2$ 记为 $W_1 \oplus W_2$ ，称为直和。

## 0.9 行列式

行列式也是一种映射，它将一个方阵映射到一个数。

### 0.9.1 性质

太多了，不再赘述。

### 0.9.2 展开定理

用于行列式降阶，极其实用。同时也是行列式的归纳定义。

代数余子式乘以该项（可以是一个数，也可以是方阵），求和，得到行列式。具体可看教材或拉普拉斯展开维基页面。

### 0.9.3 分块运算

若  $A, B$  均为方阵，则  $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$

若  $A$  可逆，则还有  $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B - DA^{-1}C \end{vmatrix} = |A||B - DA^{-1}C|$

还有  $\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & D \end{vmatrix} = (-1)^n |A||B|$

还有比较实用的  $|A| = \begin{vmatrix} A & O \\ O & I_m \end{vmatrix}$

## 0.10 矩阵

矩阵即一个数表， $A \in F^{m \times n}, \dim(F^{m \times n}) = mn$

矩阵可进行加法运算，数乘运算，矩阵间乘法，转置，逆，等运算。

### 0.10.1 矩阵乘法

对于  $A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times p}, AB = C, C \in F^{m \times p}$ ， $C$  中每一个元素  $c_{ij}$ ，由  $A$  中的  $i$  行与  $B$  中的  $j$  列构成，即  $A_i B_j$ 。

### 0.10.2 逆

对于一个矩阵  $A \in F^{n \times n}$ ，若存在矩阵  $B \in F^{n \times n}$ ， $AB = BA = I$  ( $I$ : 单位阵)，则称  $A$  为可逆矩阵， $B$  为  $A$  的逆矩阵且记为  $A^{-1}$ 。

方阵可逆，当且仅当其行列式不为零。

当方阵  $A$  可逆，则其存在相应的伴随矩阵  $A^*$ ，满足  $A^{-1} = |A|^{-1} A^*$

### 0.10.3 迹

迹也是一个映射，将一个方阵映射到一个数。其定义为方阵主对角线上各个元素的总和。

### 0.10.4 特征值

3B1B，请。

$|\lambda I - A|$  称为方阵的特征多项式，它的根称为特征，即特征值。

### 0.10.5 特征向量

对于方阵A的每一个特征值 $\lambda_i$ ，方程组 $(A - \lambda I)X = 0$ 的解空间 $V_{\lambda_i}$ 称为 $\lambda_i$ 的特征子空间。

### 0.11 初等变换

左乘初等方阵即对矩阵进行初等行变换，右乘初等方阵即对矩阵进行初等列变化。具体看教材。

若方阵 $A \in F^{n \times n}$ ， $B \in F^{n \times n}$ ，则称方阵A，B相抵，也称等价。若两个方阵相抵，则 $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(B)$ 。

### 0.12 线性映射

若一个映射满足 $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ，则称该映射为线性映射。线性映射 $\sigma: X \rightarrow Y$ 可以通过用矩阵A左乘自变量X实现。若 $\sigma: F^n \rightarrow F^m$ ， $\sigma(x) = Ax$ 。

对于线性映射 $\sigma: U \rightarrow V$ ， $\tau: V \rightarrow W$ ， $\tau \circ \sigma: U \rightarrow W$ 。

若该映射为线性变换，则A与B相似。即同个线性变换在不同基下的矩阵相似。

### 0.13 相似

$A, B \in F^{n \times n}$ ， $B = P^{-1}AP$ ，则称A与B相似。

#### 0.13.1 性质

- 反身性与传递性等基本性质，不再赘述。
- 若A与B相似，则A与B的特征多项式、特征值、每个特征值的重数、最小多项式、行列式以及迹都相同，但特征向量不一定相同。该性质均为充分条件，不是充要条件。
- $(PAP^{-1})(PBP^{-1}) = P(AB)P^{-1}$
- $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$ （暗示要将矩阵相似到对角阵再进行幂运算）
- $f(PAP^{-1}) = Pf(A)P^{-1}$ （实质是上一条的一般情况）
- 属于同一个方阵的不同特征值对应的特征向量线性无关。

#### 0.13.2 相似对角化条件（具体可参照维基百科“可对角化矩阵词条”）

先阐述两个概念：代数重数即 $\lambda$ 作为方阵A的特征多项式的根的次数，几何重数即特征值 $\lambda$ 对应的特征空间的维数（即 $\dim V_{\lambda}$ ）。

- 方阵的每个特征值的重数等于其相应的特征子空间的维数，即每个特征值都有一个与其他特征向量线性无关的特征向量与其对应。
- 方阵有n个线性无关的特征向量。实质同上一条。
- 最小多项式没有重根。实质同第一条。

- 所有的特征子空间可以表征为一维不变子空间的直和。对角化过程实质就是换一套坐标系去观察同一个矩阵，也就是找某个特征方向，即一维不变子空间的过程，形象化过程可参见3B1B相应的视频。
- 每个特征值的代数重数等于其对应的几何重数。
- 方阵是实对称方阵。该条件仅为充分条件。
- 有 $n$ 个特征值。该条件仅为充分条件。

### 0.13.3 三角化（实用）

每个复方阵都可以相似于上（下）三角矩阵。证明不再赘述，请参照教材。

### 0.13.4 化零多项式

设 $\phi_A(\lambda)$ 为 $A$ 的特征多项式， $\phi_A(A) = O$ ，因此， $\phi_A(\lambda)$ 是 $A$ 的零化多项式。

对于每个方阵 $A$ ，存在唯一的最低次数的首项系数为1的多项式 $d(\lambda)$ 使 $d(A) = O$ ，称为 $A$ 的最小多项式，其化零多项式都是最小多项式的倍式。

## 0.14 内积

内积与欧氏空间的定义参见教材，不再赘述。

### 0.14.1 性质

- 双线性： $(a + c, b) = (a, b) + (c, b)$ ， $(a, b + d) = (a, b) + (a, d)$ ， $(\lambda a, b) = \lambda(a, b) = (a, \lambda b)$
- 对称性： $(a, b) = (b, a)$
- 正定性：当 $a \neq O$ 时，有 $(a, a) > 0$

### 0.14.2 柯西不等式

对于两个向量 $a, b \in R^n$ ，都有 $|a|^2|b|^2 \geq (a, b)^2$ ，等号当且仅当 $a$ 与 $b$ 成比例时成立。

可使用内积定义进行证明，或是使用二次方程的判别式进行证明。

相应地，存在三角不等式： $|a + b| \leq |a| + |b|$ ，由柯西不等式可轻松得到。

### 0.14.3 施密特正交化方法

欧氏空间的任何一组基都可以改造成正交基，并可以进行归一化得到标准正交基。过程如下（如果是用

于编写线性代数计算器就用豪斯霍尔德变换吧)：首先要拥有一组线性无关的向量 $a_1, \dots, a_n$ 。

$$\begin{aligned}\beta_1 &= a_1 \eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} \\ \beta_2 &= a_2 - (a_2, \eta_1) \eta_1 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} \\ \beta_3 &= a_3 - (a_3, \eta_1) \eta_1 - (a_3, \eta_2) \eta_2 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} \\ &\dots \\ \beta_n &= a_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_n, \eta_i) \eta_i\end{aligned}$$

很有规律哒。

#### 0.14.4 正交方阵

满足 $A^T = A^{-1}$ 的方阵 $A$ 称为正交方阵。 $n$ 阶正交方阵的列向量组与行向量组都是 $R^n$ 的标准正交基。

### 0.15 二次型、实对称方阵、相合、正交相似

这里的主要内容课上已经讲的很详细了，不打算再赘述。请参照教材，并使用例题与相应习题辅助理解。

#### 0.15.1 西尔维斯特惯性定律

设 $n$ 阶实对称方阵 $S$ 通过两个不同的可逆方阵 $P, P_1$ 相合到标准形

$$\Lambda = P^T S P = \text{diag}(I_{(p)}, -I_{(q)}, O) \text{ 且 } \Lambda_1 = P_1^T S P_1 = \text{diag}(I_{(p_1)}, -I_{(q_1)}, O)$$

则 $\Lambda = \Lambda_1$ ，即 $p = p_1, q = q_1$

同时，如果 $p = n$ ，则 $\Lambda \text{ 与 } S \text{ 合同}$ ，如果 $p = 0$ ，则 $\Lambda \text{ 与 } S \text{ 正交相似}$ 。

#### 0.15.2 顺序主子式

$n$ 阶实对称方阵 $S$ 正定 $\Leftrightarrow S$ 所有的顺序主子式 $|S_k| > 0$

### 0.16 若尔当标准形

看教材给出的算法吧，极好。