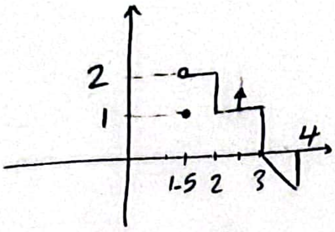
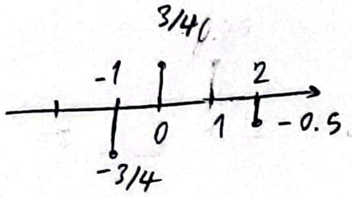
①

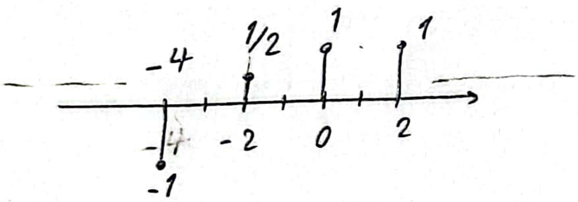
$y(t) = x(1-t)\, u(t-1.5) + x(t-1) \cdot \delta(t-2.5)$



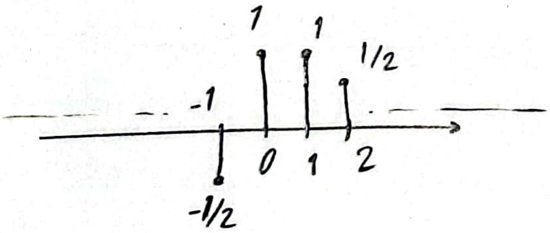
$y[t] = x[t-2] \cdot x(-t)$



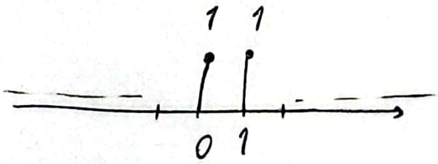
$y[n] = \dfrac{x[n] + (-1)^n x[n]}{2}$



$y[n] = x[2n-1]$



$y[n] = x[(2n-1)^2]$



پاسخ تمرین مسائل ②

$x(t) = x(t+t_0) \quad t_0 > 0$

$$\Rightarrow \cos^2\left(2t-\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(2t+t_0-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right) = \pm \cos\left(2t+t_0-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \min t_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \sqrt{\left|\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right|} \Rightarrow \sqrt{\left|\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right|} = \sqrt{\left|\sin\left(\frac{t+t_0}{\sqrt{2}}\right)\right|} \Rightarrow \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \pm \sin\left(\frac{t+t_0}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \min t_0 = \sqrt{2}\,\pi$$

$$x(t) = \sin(\pi t^2) \Rightarrow \sin(\pi t^2) = \sin(\pi(t+t_0)^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow \pi t_0^2 = 2k_1\pi \\ t=2 \Rightarrow \pi(2+t_0)^2 = 2k_2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi t_0 = 2k_3\pi \Rightarrow$$ t_0 صحیح است.

$t=\sqrt{2} \Rightarrow \sin(\pi(t_0+\sqrt{2})) = 0 \Rightarrow \underbrace{t_0+\sqrt{2}}_{\text{صحیح است}} \Rightarrow \times$ تناوب ندارد

$$x[n] = e^{jn} \Rightarrow e^{jn} = e^{j(n+n_0)} \Rightarrow n_0 = 2k\pi \Rightarrow$$ n_0 صحیح نیست

تناوب ندارد

$$x[n] = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{8}n^2\right)}_{\text{دوره تناوب } 8} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)}_{\text{دوره تناوب } 16}$$

$\min n_0 = 16$

$$x[n] = \cos(n) \Rightarrow \cos(n) = \cos(n+n_0) \Rightarrow n_0 = 2\pi k \Rightarrow$$ n_0 صحیح نیست

بدون دوره تناوب

③

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\delta(t-3u)\,\delta(t-2)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(u)\,\delta(t-2)\right)\delta(\underbrace{t-3u})\,du =$$

زمانی که ورودی δ صفر شود، انتگرال آن یک می‌شود

$$f(u)\,\delta(t-2)\Big|_{t-3u=0} = f\left(\frac{t}{3}\right)\delta(t-2)$$

---

④ $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$: به ازای گسستگی در ورودی، خروجی نامحدود می‌شود، پس پایدار نیست.

$$y_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad y_2 = \frac{dx_2}{dt} \Longrightarrow (y_1+y_2) = \frac{d(x_1+x_2)}{dt} \Longrightarrow$$ سیستم خطی است.

سیستم بی حافظه و علی است، چون $y(t)$ به زمان‌های گذشته و آینده وابسته نیست.

$$t \longrightarrow t+t_0 \Rightarrow y(t+t_0) = \frac{d\,x(t+t_0)}{dt+t_0}$$ سیستم مستقل از زمان است.

$y(t) = \int_{-t}^{2t} x(\tau)\,d\tau$: چون $y(t)$ به $x(\frac{-t}{2})$, $x(\frac{3t}{2})$ وابسته است، حافظه‌دار و غیر علی است.

$x(t)=1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ پس پایدار نیست.

$$y_1(t) = \int_{-t}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau, \quad y_2(t) = \int_{-t}^{2t} x_2(\tau)\,d\tau \Longrightarrow (y_1+y_2)(t) = \int_{-t}^{2t} (x_1+x_2)(\tau)\,d\tau$$

پس خطی است.

$$t \longrightarrow t+t_0 \Rightarrow y(t+t_0) = \int_{t_0-t}^{2t+t_0} x(\tau)\,d\tau \neq \int_{-t}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

پس وابسته به زمان است.

$y(t) = x(\sin(t))$: حافظه‌دار و غیر علی $\quad y(10\pi) = x(0), \quad y(-10\pi) = x(0) \Rightarrow$

$$y_1(t) = x_1(\sin(t)), \quad y_2(t) = x_2(\sin(t)) \Rightarrow (y_1+y_2)(t) = (x_1+x_2)(\sin(t)) \Rightarrow$$ خطی

$$t \longrightarrow t+t_0 \Rightarrow y(t+t_0) = x(\sin(t)+t_0) \neq x(\sin(t+t_0)) \Rightarrow$$ وابسته به زمان

$$\forall_t\, x(t) < k \Rightarrow \forall_t\, y(t) < k \Rightarrow$$ پایدار

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{x(t)} & x(t) \neq 0 \\ x(t+2) & \text{o.w.} \end{cases}$$

$x(0) = 0 \Rightarrow y(0) = x(2) \Rightarrow$ غیر علی

به گذشته‌ی x دسترسی ندارد پس بی حافظه است.

$$y_1(1) = \frac{1}{x_1(1)} = 2 \,,\; y_2(1) = \frac{1}{x_2(1)} = 3 \Rightarrow (y_1+y_2)(1) \neq \frac{1}{(x_1+x_2)(1)} = \frac{6}{5}$$

غیر خطی

$x(t) = \min\{1, e^{-t}\} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ ناپایدار

$$t \to t+t_0 \Rightarrow y(t+t_0) = \begin{cases} \frac{1}{x(t+t_0)} & x(t) \neq 0 \\ x(t+t_0+2) & \text{o.w.} \end{cases}$$

مستقل از زمان

در اثبات کلی استقلال از زمان، در اصل x به اندازه‌ی t_0 ثانیه به عقب شیفت داده شده است.

$y[n] = n x[n]$:

$$\left.\begin{aligned} y_1[n] &= n x_1[n] \\ y_2[n] &= n x_2[n] \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1+y_2)[n] = n(x_1+x_2)[n] \Rightarrow$$

خطی

علی و بی حافظه

$n \to n+n_0 \Rightarrow y[n+n_0] = n x[n+n_0] \neq (n+n_0)\, x[n+n_0]$ وابسته به زمان

$x[n] = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y[n] = +\infty \Rightarrow$ ناپایدار

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ x(\frac{n}{2}) & \text{o.w.} \end{cases}$$

$n \to n+n_0 \Rightarrow y[2n+2n_0] = x(n+n_0) \neq x(n+2n_0)$

وابسته به زمان $\Leftarrow$ در نقاط فرد y صفر است.

$$\left.\begin{aligned} y_1[2n] &= x_1(n) \\ y_2[2n] &= x_2(n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1+y_2)[2n] = (x_1+x_2)(n) \Rightarrow$$

خطی

$y[-10] = x(-5) \Rightarrow$ غیر علی $\quad y[10] = x(5) \Rightarrow$ حافظه دار

$\forall_n\; x(n) < k \Rightarrow \forall_n\; y[n] < k \Rightarrow$ پایدار

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (-1)^k x[k]$$

خطی، حافظه دار و علی است.

$x[n] = (-1)^n \Rightarrow y[n] = +\infty$ پایدار نیست.

$$n \to n+1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (-1)^{k+1} x[k] \neq \sum_{k=-\infty}^{n} (-1)^k x[k]$$

وابسته به زمان

(5) برای بخش های زوج و فرد $x[t]$ می دانیم:

$$x[t] = x_e[t] + x_o[t]$$

$$x_e[t] = x_e[-t] \,,\; -x_o[t] = x_o[-t]$$

پس می توان $x_e[t]$, $x_o[t]$ را اینگونه محاسبه کرد:

$$x_e[t] = \frac{x[t] + x[-t]}{2} \,,\; x_o[t] = \frac{x[t] - x[-t]}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x_e^2[t] + x_o^2[t] = \frac{(x[t] + x[-t])^2 + (x[t] - x[-t])^2}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad x_e^2[t] + x_o^2[t] = \frac{x^2[t] + x^2[-t]}{2}$$

اگر عبارت بالا را به ازای همه t ها جمع کنیم به جواب مسئله می رسیم:

$$\Longrightarrow \quad \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x_e^2[t] + \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x_o^2[t] = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x^2[t]$$

⑥ فرض می‌کنیم سیستم علی است تا جواب خروجی یکتا شود (لزومی ندارد!)

$$-2 > n \Rightarrow y[n] = 0$$

$$n=-2 \Rightarrow y[-2] + 2y[-3] = x[-2] + 2x[-4] \Rightarrow y[-2] = 1$$

$$n=-1 \Rightarrow y[-1] = x[-1] + 2x[-3] - 2y[-2] \Rightarrow y[-1] = 0$$

$$n=0 \Rightarrow y[0] = x[0] + 2x[-2] - 2y[-1] \Rightarrow y[0] = 5$$

$$n=1 \Rightarrow y[1] = x[1] + 2x[-1] - 2y[0] \Rightarrow y[1] = -4$$

$$n=2 \Rightarrow y[2] = x[2] + 2x[0] - 2y[1] \Rightarrow y[2] = 16$$

$$n=3 \Rightarrow y[3] = x[3] + 2x[1] - 2y[2] \Rightarrow y[3] = -27$$

$$n=4 \Rightarrow y[4] = x[4] + 2x[2] - 2y[3] \Rightarrow y[4] = 58$$

$$n=5 \Rightarrow y[5] = x[5] + 2x[3] - 2y[4] \Rightarrow y[5] = -114$$

$$n>5 \Rightarrow x[n] = x[n-2] = 0 \Rightarrow y[n] = -2y[n-1]$$

$$\Rightarrow y[n] = (-2)^{n-5}(-114)$$

سیستم پایدار نیست!

$$A_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right)dt =$$

جابجایی انتگرال ها

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{مستقل از } t} h(t-\tau)\,dt\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,dt\right)}_{A_h}d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)A_h\,d\tau = A_h\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,d\tau = A_h A_x \;. \blacksquare$$

---

8 سیستم خطی است، بنابراین ترکیب خطی چند ورودی، ترکیب خطی خروجی ها را می دهد.

$$3x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow 3y(t) + \left(-3y(t) + e^{-2t}u(t)\right)$$

$$\Rightarrow 6e^{-3t}u(t-1) + \left(-6e^{-3t}u(t) + 2e^{-3t}\delta(t-1)\right) \longrightarrow e^{-2t}u(t)$$

$$\Rightarrow 2e^{-3t}\delta(t-1) \longrightarrow e^{-2t}u(t) \overset{\text{خاصیت } \delta}{\Longleftrightarrow} 2e^{-3}\delta(t-1) \longrightarrow e^{-2t}u(t)$$

خطی بودن

$$\Rightarrow \delta(t-1) \longrightarrow \frac{e^{3-2t}}{2}u(t) \underset{t \to t+1}{\overset{\text{نا متغیر با زمان}}{\Longrightarrow}} \delta(t) \longrightarrow \frac{e^{1-2t}}{2}u(t)$$

پس پاسخ ضربه سیستم برابر با $\frac{e^{1-2t}}{2}u(t)$ می شود.

۵ الف)

$$x(t) = \delta(t) \Longrightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau-2)\, d\tau$$

بررسی می‌کنیم که آیا δ در محاسبه‌ی انتگرال دیده می‌شود یا نه.

پاسخ ضربه

$$\Longrightarrow h(t) = \begin{cases} e^{2-t} & t>2 \\ 1/2 & t=2 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

ب) کانولوشن

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - t)\, x(t)\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-t)\, u(4-t^2)\, dt = \int_{-2}^{2} h(\tau-t)\, dt =$$

$$\begin{cases} \int_{-2}^{2} e^{2-t} dt = -e^{2-t}\Big|_{-2}^{2} = e^{4}-1 & \tau > 4 \\ \int_{-2}^{2-\tau} e^{2-t} dt = -e^{2-t}\Big|_{-2}^{2-\tau} = e^{\tau}-1 & 4 \geq \tau \geq 0 \\ 0 & \text{O.W.} \end{cases}$$