دکتر صامتی
دانشکده مهندسی کامپیوتر

سیگنال ها و سیستم ها
پاییز ۱۴۰۲

تمرین ۲ — Fourier Series & Continuous-Time Fourier Transform

مسئله‌ی ۱.

یک سیستم LTI با ورودی $x(t)$ و پاسخ متناظر $y(t)$ را در نظر بگیرید. به تابع $\phi(t)$ تابع‌ویژه سیستم ذکر شده می‌گوییم اگر داشته باشیم

$$\phi(t) \to \lambda\phi(t)$$

یعنی اگر داشته باشیم $x(t) = \phi(t)$ آنگاه $y(t) = \lambda\phi(t)$ که به ضریب مختلط λ مقدار ویژه متناظر $\phi(t)$ گفته می‌شود.

الف

فرض کنید می‌توانیم ورودی $x(t)$ به سیستم را به صورت ترکیب خطی تابع‌ویژه‌های $\phi_k(t)$ نمایش دهیم، به صورتی که هر کدام دارای مقدار ویژه متناظر k می‌باشد.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t)$$

خروجی سیستم $y(t)$ را به صورت ترکیبی از c_k و λ_k و $\phi_k(t)$ نمایش دهید.

ب

نشان دهید تابع‌های $\phi_k(t) = t^k$ تابع‌ویژه‌های سیستم مقابل هستند.

$$y(t) = t^۲ \frac{d^۲ x(t)}{dt^۲} + t\frac{dx(t)}{dt}$$

مسئله‌ی ۲.

کانولوشن متناوب را برای دو سیگنال متناوب $\widetilde{x_۱}(t)$ و $\widetilde{x_۲}(t)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{y}(t) = \widetilde{x_۱} \circledast \widetilde{x_۲} = \int_{T_۰} \widetilde{x_۱}(\tau)\widetilde{x_۲}(t-\tau)d\tau$$

الف

اگر $\widetilde{x_1}(t)$، $\widetilde{x_2}(t)$ و $\widetilde{y}(t)$ دارای سری فوریه باشند، یعنی

$$\widetilde{x_1}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}, \quad \widetilde{x_2}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}, \quad \widetilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

نشان دهید $c_k = T_0 a_k b_k$.

ب

تابع متناوب $\widetilde{x}(t)$ به صورت مقابل تعریف می‌شود

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} 2 + 5k - x & \text{for } x \in [5k, 5k+2] \\ x + 2 - 5k & \text{for } x \in [5k-2, 5k] \end{cases}$$

اگر داشته باشیم $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}(t) \circledast \widetilde{x}(t)$، سیگنال متناوب $\widetilde{z}(t)$ را بدست آورید و با استفاده از بخش الف سری فوریه سیگنال $\widetilde{x}(t)$ را بدست آورید.

ج

حال سیگنال‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [-T, T] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{for } x \in [0, T] \\ e^{t} & \text{for } x \in [-T, 0] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال سیگنال‌های $\widetilde{x_1}(t)$ و $\widetilde{x_2}(t)$ را از تکرار سیگنال‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ تشکیل می‌دهیم (با دوره تناوب T_0) و سیگنال $y(t)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \tag{1}$$

و سیگنال $\widetilde{y}$ را نیز به صورت متناظر به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{y} = \widetilde{x_1}(t) \circledast \widetilde{x_2}(t)$$

نشان دهید اگر T_0 به اندازه کافی بزرگ باشد می‌توانیم سیگنال $y(t)$ را از یک دوره تناوب سیگنال $\widetilde{y}(t)$ بدست آوریم، یعنی،

$$y(t) = \begin{cases} \widetilde{y}(t), & |t| \leqslant \frac{T_0}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

مسئله‌ی ۳.

سیگنال متناظر تبدیل‌های فوریه مقابل را بدست آورید

- $X_a(\omega) = \frac{۱}{۷+j\omega}$
- $X_b(\omega) = ۲(\delta(\omega - ۷) + \delta(\omega + ۷))$
- $X_c(\omega) = \frac{۱}{۹+\omega^۲}$
- $X_d(\omega) = X_a(\omega)X_b(\omega)$ (تا حد امکان ساده کنید)

مسئله‌ی ۴.

فرض کنید یک سیستم علی LTI به صورت مقابل توصیف می‌شود

$$\frac{dy(t)}{dt} + ۲y(t) = x(t)$$

الف

پاسخ فرکانسی $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ را بدست آورید و نمودار اندازه و فرکانس آن را رسم کنید.

ب

اگر $x(t) = e^{-t}u(t)$ باشد، مقدار $Y(\omega)$ را بدست آورید.

ج

$y(t)$ را برای ورودی بخش ب به سیستم بدست آورید.

مسئله‌ی ۵.

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = (\frac{۱}{۲})^{|n|}$ در نظر بگیرید و ضرایب سری فوریه را برای خروجی $y[n]$ هرکدام از ورودی‌های مقابل بدست آورید.

- $x[n] = \sin(\frac{۳\pi n}{۴})$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - ۴k]$
- سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب ۶ متناوب است و

$$x[n] = \begin{cases} ۱, & n = ۰, \pm ۱ \\ ۰, & n = \pm ۲, \pm ۳, \pm ۴, \end{cases}$$

- $x[n] = j^n + (-۱)^n$

مسئله‌ی ۶.

دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$x_۱[n] = ۱ + \sin(\frac{۲\pi n}{۱۰})$$
$$x_۲[n] = ۱ + \sin(\frac{۲۰\pi}{۱۲}n + \frac{\pi}{۲})$$

الف

دوره تناوب $x_۱[n]$ و $x_۲[n]$ بدست آورید.

ب

ضریب‌های سری فوریه $a_{۱k}$ برای سیگنال $x_۱[n]$ و $a_{۲k}$ برای سیگنال $x_۲[n]$ بدست آورید.

ج

در هر دو بخش الف و ب ضریب‌های بدست آمده متناوب هستند، دوره تناوب ضرایب را پیدا کنید

مسئله‌ی ۷.

ضرایب سری فوریه برای سیگنال‌های مقابل را بدست آورید

- $x(t) = \sin(۱۰\pi t + \frac{\pi}{۶})$
- $x(t) = ۱ + \cos(۲\pi t)$
- $x(t) = [۱ + \cos(۲\pi t)][\sin(۱۰\pi t + \frac{\pi}{۶})]$

مسئله‌ی ۸.

در این سوال به بررسی فرمول‌های معادل برای تبدیل فوریه سیگنال‌های پیوسته می‌پردازیم

الف

رابطه وارون تبدیل $X_a(f)$ که در ادامه امده است را بدست آورید

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j۲\pi f t} dt$$

ب

رابطه وارون را همانند بخش قبل برای $X_b(v)$ بدست آورید

$$X_b(v) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jvt} dt$$

مسئله‌ی ۹.

عبارات مقابل را اثبات کنید

- $x(۰) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$
- $X(۰) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$

مسئله‌ی ۱۰.

تبدیل کسینوسی را برای سیگنال $x(t)$ به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$X^{\cos}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(\omega t)dt.$$

الف

نشان دهید وقتی سیگنال x حقیقی باشد، تبدیل کسینوسی بخش حقیقی تبدیل فوریه است: $X^{\cos}(\omega) = \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$.

ب

نشان دهید تبدیل کسینوسی خطی است. یعنی به ازای هر دو سیگنال $x_۱$ ، $x_۲$ و ثابت‌های α ، β، تبدیل کسینوسی سیگنال $\alpha x_۱ + \beta x_۲$ برابر است با $\alpha X_۱^{\cos}(\omega) + \beta X_۲^{\cos}(\omega)$

ج

نشان دهید اگر سیگنال x حقیقی و پادمتقارن باشد ($x(-t) = -x(t)$) تبدیل کسینوسی سیگنال $x(t)$ به ازای تمام ω ها صفر است. یعنی: $\forall\omega : X^{\cos}(\omega) = ۰$

موفق باشید :)