HW5 - Solution

TA : Mohamad Hosein Faramarzi

Q1

1- Linearity	$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$	$X_3(z) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$	$R_3 \supset (R_1 \cap R_2 \neq \varnothing)$	۱- خطی بودن
2- Time Shifting	$x_3[n] = x_1[n - n_0]$	$X_3(z) = z^{-n_0} X_1(z)$	$R_3 = R_1$ (امکان حذف یا افزایش مبدا یا بی‌نهایت)	۲- انتقال زمانی
9- Differentiation in the z Domain	$x_3[n] = -n x_1[n]$	$X_3(z) = z\dfrac{dX_1(z)}{dz}$	$R_3 = R_1$	۹- مشتق در حوزه z
3- Frequency Shifting	$x_3[n] = z_0^n x_1[n]$ $x_3[n] = a^n x_1[n], a \in \Re$ $x_3[n] = e^{j\omega_0 n} x_1[n]$	$X_3(z) = X_1(\frac{z}{z_0})$ $X_3(z) = X_1(\frac{z}{a})$ $X_3(z) = X_1(e^{-j\omega_0} z)$	$R_3 = \|z_0\| R_1$ $R_3 = \|a\| R_1$ $R_3 = R_1$	۳- انتقال فرکانسی

Q1

2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$	
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$	
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 or ∞	
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$x[n]$
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$x[n]$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$	$x[n]$

* محاسبه‌ی تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال‌های زیر را به دست آورید. ناحیه‌ی همگرایی را نیز برای هریک مشخص کنید.

1. $x_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n-3]$
2. $x_2[n] = (1+n)(\frac{1}{3})^n u[n]$
3. $x_3[n] = n(\frac{1}{2})^{|n|}$
4. $x_4[n] = (\frac{1}{2})^n (u[n] - u[n-10])$

Q2

- روش دوم: سری توانی

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=\cdots+x[-2]z^{2}+x[-1]z^{1}+x[0]z^{0}+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

- مثال ۶–

$$X(z)=\log(1+az^{-1}) \qquad |z|>|a|$$

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{n}z^{-n}}{n} \Rightarrow x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^{n}}{n} & n\geq 1\\ 0 & n\leq 0\end{cases}$$

* تبدیل وارون به کمک بسط سری توانی، وارون تبدیل Z های زیر را بیابید.

- * $X(z)=\log(۱-۲z),\quad |z|<\frac{۱}{۲}$
- $X(z)=\log(۱-\frac{۱}{۲z}),\quad |z|>\frac{۱}{۲}$

Q3

- روش سوم
  - تجزیه به کسرهای جزیی
  - محاسبه ضرایب با مخرج مشترک گرفتن
  - محاسبه ضرایب با ضرب در یک فاکتور

$$X(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} & M<N\\ \sum_{k=1}^{M-N}B_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} & M\ge N\\ \sum_{k=1,k\neq i}^{N-2}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}+\frac{A_{i1}}{1-p_i z^{-1}}+\frac{A_{i2}}{\left(1-p_i z^{-1}\right)^2} & M<N\end{cases}$$

$$A_j=(1-p_j z^{-1})X(z)|_{z=p_j}$$

- مثال ۸–

$$X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}=\frac{k_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{k_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{(k_1+k_2)+\left(\frac{-k_1}{2}-\frac{k_2}{4}\right)z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}=\frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x[n]=\begin{cases}-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] & |z|>\frac{1}{2}\\ -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] & \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}\\ \left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] & |z|<\frac{1}{4}\end{cases}$$

- مثال ۹–

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$=2+\frac{8}{1-z^{-1}}-\frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Q3

با استفاده از روش تجزیه به کسرهای جزئی، واورن تبدیل Z های زیر را محاسبه کنید.

- $X(z) = \frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱}}, \quad |z| > \frac{۱}{۲}$
- $X(z) = \frac{۱-\frac{۱}{۲}z^{-۱}}{۱-\frac{۱}{۴}z^{-۲}}, \quad |z| > \frac{۱}{۲}$ *
- $X(z) = \frac{۱-az^{-۱}}{z^{-۱}-a}, \quad |z| > \frac{۱}{|a|}$ *

Key equations:

5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$

Q4

* بررسی خواص تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال‌های $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$، $y_2[n] = x[n] - x[n-1]$ و $y_3[n] = \begin{cases} x[r] & n = 2k \\ 0 & n \neq 2k \end{cases}$ را بر حسب تبدیل Z سیگنال $x[n]$ بیابید. ناحیه‌ی همگرایی آن‌ها را نیز بررسی کنید.

Key equation

$$\begin{cases} X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} & z \in ROC \\ x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz & C \subset ROC \end{cases}$$

Q4

- Time expansion $\quad x[n] \overset{\mathcal{Z}.\mathrm{T.}}{\longmapsto} X(z),\ z \in \mathrm{ROC}_x$

$$M \in \mathbb{N}^+,\ x_{\uparrow M}[n] \triangleq \begin{cases} x[n/M] & n \in M\,\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \overset{\mathcal{Z}.\mathrm{T.}}{\longmapsto} X(z^M),\ z \in \sqrt[M]{\mathrm{ROC}_x}$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_{\uparrow M}[m] z^{-m} = \sum_{\tilde{m}\in M\mathbb{Z}} x[\tilde{m}] z^{-M\tilde{m}} = X(z^M)$$

8- Running Sum	$x_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{n} x_1[l]$	$X_3(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} X_1(z)$	$R_3 \supset \{R_1 \cap (\lvert z\rvert > 1)\}$	۸- مجموع زمانی

Q5

* سیستم LTI سیستمی LTI و علّی، پاسخ ضربه‌ی $h[n]$دارد که تبدیل Z آن برابر است با

$$H(z) = \frac{۱ + z^{-۱}}{(۱ - \frac{۱}{۲}z^{-۱})(۱ + \frac{۱}{۴}z^{-۱})}$$

الف) ناحیه‌ی همگرایی تبدیل Z سیگنال h را بیابید.

ب) آیا این سیستم پایدار است؟

ج) تبدیل Z ورودی‌ای را بیابید که خروجی این سیستم به آن ورودی، برابر

$$y[n] = -\frac{۱}{۳}(-\frac{۱}{۴})^n u[n] - \frac{۴}{۳}۲^n u[-n-۱]$$

می‌شود.

د) پاسخ ضربه‌ی سیستم را به دست آورید.

Q5

- پایداری و سببی بودن و شرط مرتبط روی ناحیه همگرایی $H(z)$
  - شرط لازم و کافی برای سببی بودن: ناحیه همگرایی بیرون یک دایره و شامل بی‌نهایت
  - شرط لازم و کافی برای پایداری: ناحیه همگرایی شامل دایره واحد (= فوریه داشتن = مطلقا جمع‌پذیر بودن پاسخ ضربه)
- پایداری و سببی بودن با تابع تبدیل کسر گویا از z
  - شرط لازم و کافی برای سببی بودن: ناحیه همگرایی بیرون بیرونی‌ترین قطب و شامل بی‌نهایت (درجه صورت برحسب z از مخرج بیشتر نباشد)
  - شرط لازم و کافی برای ضدسببی بودن: ناحیه همگرایی درون درونی‌ترین قطب و شامل مبداء (درجه صورت برحسب z^{-1} از مخرج بیشتر نباشد)

$$y[n] = h[n] * x[n] \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{\Im\{y[n]\}}{\Im\{x[n]\}} = \Im\{h[n]\}$$

Q6

* شناسایی سیستم

سیستمی علّی و LTI در نظر بگیرید. خروجی این سیستم به ورودی

$$x[n] = -\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲})^n u[n] - \frac{۴}{۳}۲^n u[-n-۱]$$

دارای تبدیل Z ای برابر با

$$Y(z) = \frac{۱ + z^{-۱}}{(۱ - z^{-۱})(۱ + \frac{۱}{۲}z^{-۱})(۱ - ۲z^{-۱})}$$

است.

الف) تبدیل Z سیگنال $x[n]$ را بیابید.

ب) ناحیه‌ی همگرایی $Y(z)$ را مشخص کنید.

ج) پاسخ ضربه‌ی این سیستم را به دست آورید.

د) آیا این سیستم پایدار است؟

Q7

* وارون تبدیل Z

وارون تبدیل Z هر یک از سیگنال‌های زیر را بیابید.

- $X(z) = \sin(z)$ که ROC آن شامل دایره‌ی واحد است.
- $X(z) = \frac{z^{7}-2}{1-z^{-7}}$ با ROC $|z| > 1$.
- $X(z) = \frac{3z^{-3}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^{2}}$ با فرض دست چپی بودن سیگنال.

Q8

مسئله‌ی ۸.

* محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t) = x_۱(t-۲) * x_۲(-t+۳)$ و ناحیه‌ی همگرایی آن را به دست آورید.

$$x_۱(t) = e^{-۲t}u(t) \quad x_۲(t) = e^{-۳t}u(t)$$

Q8

خطی بودن	$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$	$\alpha X_1(s)+\beta X_2(s)$
شیفت زمانی	$x(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
کانولوشن $\begin{cases} x_1(t)=0 \\ x_2(t)=0 \end{cases} \quad t<0$	$x_1(t)*x_2(t) = \int_{0^-}^{t^+} x_1(\lambda)*x_2(t-\lambda)d\lambda$	$X_1(s).X_2(s)$

Key equation

$$e^{-at}u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s+a}$$

Q9

مسئله‌ی ۹.

* قطب‌های مزدوج مختلط

سیگنال حقیقی $x(t)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر تبدیل لاپلاس این سیگنال در نقطه‌ی $s_\circ$، قطب (صفر) داشته باشد، در نقطه‌ی $s_\circ^*$ نیز قطب (صفر) دارد.

Q9

Given the Laplace transform $X(s)$ of a real signal $x(t)$:

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)\, dt$$

Assume $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ is a pole of $X(s)$, i.e., $X(s_0) = \infty$.

Express s_0 in terms of its real and imaginary parts:

$$X(s_0) = \int_0^\infty e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)t} x(t)\, dt$$

Separate the real and imaginary parts:

$$X(s_0) = \int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) x(t)\, dt - j \int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t) x(t)\, dt$$

Assume the real part is infinite:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) x(t)\, dt = \infty$$

Q9

Now, consider the complex conjugate $s_0^* = \sigma_0 - j\omega_0$:

$$X(s_0^*) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) x(t)\, dt + j \int_0^{\infty} e^{-\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t) x(t)\, dt$$

Since the real part is assumed to be infinite, it follows that $X(s_0^*)$ is also infinite.

Therefore, if s_0 is a pole of $X(s)$, its complex conjugate s_0^* is also a pole of $X(s)$, completing the proof.

Q10

مسئله‌ی ۱۰.

* یافتن مقادیر سیگنال

فرض کنید $x[n]$ سیگنالی «پایدار» باشد. تبدیل Z این سیگنال برابر است با:

$$X(z) = \frac{z^{۱۰}}{(z-\frac{۱}{۲})(z-\frac{۳}{۲})^{۱۰}(z+\frac{۳}{۲})^{۲}(z+\frac{۵}{۲})(z+\frac{۷}{۲})}$$

(الف) ناحیه‌ی همگرایی $X(z)$ را بیابید.

(ب) مقدار $x[-۸]$ را به دست آورید.

- شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم سببی با تابع تبدیل کسر گویا از z
  - همه قطب‌ها داخل دایره واحد

Q10

- روش سوم
  - تجزیه به کسرهای جزیی
  - محاسبه ضرایب با مخرج مشترک گرفتن
  - محاسبه ضرایب با ضرب در یک فاکتور

$$A_j = (1 - p_j z^{-1}) X(z)|_{z=p_j}$$

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k z^{-1})} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} & M < N \\ \sum_{k=1}^{M-N} B_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} & M \geq N \\ \sum_{k=1, k \neq i}^{N-2} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_{i1}}{1 - p_i z^{-1}} + \frac{A_{i2}}{\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2} & M < N \end{cases}$$

- مثال ۸-

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4} z^{-1})(1 - \frac{1}{2} z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{(k_1 + k_2) + \left(\frac{-k_1}{2} - \frac{k_2}{4}\right) z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4} z^{-1})(1 - \frac{1}{2} z^{-1})} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$