به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

بهار ۱۴۰۲
استاد: دکتر صامتی

طرح: سیدعماد ذوالحواریه

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سوم | مباحث تمرین: سیگنال‌های زمان گسسته ، مقیاس بندی در حوزه زمان و فرکانس | تاریخ: ۱۲ آذر

مجموع نمرات این تمرین (۱۰۰ نمره)

۱. **تبدیل فوریه گسسته و عکس آن** (۱۰ نمره)

تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان زیر را حساب کنید.

(آ)

$$x[n] = \frac{1}{5}^{-n} u[-n-1]$$

(ب)

$$x[n] = u[n+2] - u[n-3]$$

(ج)

$$2\delta[4-2n]$$

(د)

$$x[n] = \sin(\frac{5\pi n}{3}) + \cos(\frac{7\pi n}{3})$$

(ه)

$$x[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5\cos(\frac{\pi}{N}n) & n \leq N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(و)

$$x[n] = [\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}] * [\frac{\sin(\frac{\pi}{4}(n-8))}{\pi(n-8)}]$$

عکس تبدیل فوریه‌های سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید.

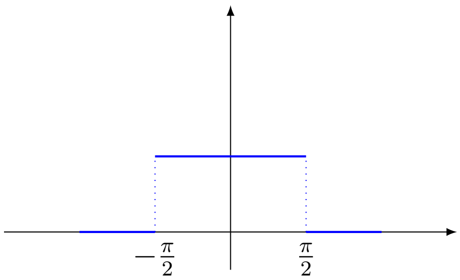
(آ)

$$X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega) + \sin^2(3\omega)$$

(ب)

$$X(e^{j\omega}) = e^{\frac{j\omega}{2}}, \quad \text{for} \pi \geq \omega \geq -\pi$$

(ج) شکلی سیگنالی در حوزه‌ی فرکانس به صورت زیر است.(طبیعی است که شکل با دوره تناوب 2π متناوب است)



(د)

$$X(e^{j\omega}) = \cos(2\omega) + j\sin(2\omega)$$

(ه)

$$X(e^{j\omega}) = \cos(\omega) + j\cos(\frac{\omega}{2})$$

(و)

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{otherwise} \\ \\ & argX(e^{j\omega}) = -4\omega \end{cases}$$

۲. **تجزیه به مقادیر جزئی** (۳۵ نمره)

با استفاده از بسط تجزیه به مقادیر جزئی ، DTFTمعکوس سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

(آ)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2e^{-j\omega}}{-0.25e^{-j2\omega} + 1}$$

(ب)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{6 - 2e^{-jw} + 0.5e^{-j2\omega}}{(-0.25e^{-j2\omega} + 1)(1 - 0.25e^{-jw})}$$

۳. DTFT **سیگنال نامتعارف** (۱۰ نمره)

سیگنال $x[n]$دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ است. اگر $y[n] = x\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ باشد.تبدیل فوریه$y[n]$را بیابید. (منظور از $\lfloor u \rfloor$ ، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی u است.)

۴. **فاز تبدیل** (۱۰ نمره)

یک فیلتر FIR با پاسخ ضربه $h[n]$ و تابع تبدیل $H(\omega) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$ مفروض است. می‌دانیم $h[n]$ سیگنالی حقیقی بوده و در بازه $0 > n$و $n \geq N$برابر صفر است. اگر $h[n] = h[N-1-n]$باشد ، آن‌گاه فاز تبدیل این فیلتر که به صورت زیر است را بر حسب a, b, c به دست آورید.

$$\theta(\omega) = (aN + b)\omega + c$$

۵. **معادله تفاضلی** (۱۰ نمره)

(آ) یک سیستم LTI زمان گسسته علّی با معادله تفاضلی زیر توصیف می‌شود.

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

به ازای ورودی $x[n]$ توان متوسط خروجی این سیستم، $y[n]$ را حساب کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 3 & \text{even is } n \text{ if} \\ 2 & \text{odd is } n \text{ if} \end{cases}$$

(ب) معادله تفاضلی مربوط به پاسخ فرکانسی زیر را بدست آورید.

$$X(e^{j\omega}) = 1 + \frac{e^{-j\omega}}{(1 - 0.5e^{-j\omega} + 1)(1 + 0.25e^{-j\omega})}$$

(ج) معادله تفاضلی مربوط به پاسخ ضربه زیر را بدست آورید.

$$h[n] = \delta[n] + 2(0.5)^2 u[n] + (0.5)^n u[n]$$

۶. **اثبات خواص** (۱۰ نمره)

خواص DTFT زیر را اثبات کنید.

(آ) خاصیت شیفت زمانی

(ب) خاصیت کانولوشن

(ج) خاصیت ضرب

(د) خاصیت Expansion Time

پاسخ سوال:

تبدیل فوریه زمان-ناوریان دیجیتال (DTFT) یک ابزار اساسی در تحلیل سیستم‌های دیجیتال و پردازش سیگنال است. در اینجا خواص مهم DTFT را بیان و اثبات می‌کنیم:

۱. خاصیت شیفت زمانی (Time-Shifting Property) اگر $x[n]$ تبدیل فوریه داشته باشد که $X(e^{j\omega})$ است، آنگاه برای هر عدد صحیح n_0، داریم:

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
DTFT\{x[n-n_0]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega(m+n_0)} \quad (\text{letting} m = n - n_0) \\
&= e^{-j\omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m} \\
&= X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}
\end{aligned}$$

۲. خاصیت کانولوشن (Convolution Property) کانولوشن دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$ در زمان به تبدیل فوریه حاصل‌ضرب آن‌ها متناظر است:

$$x[n] * h[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
DTFT\{x[n]*h[n]\} &= DTFT\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]\right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]\right)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-m]e^{-j\omega n}\right) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

۳. خاصیت ضرب (Multiplication Property) ضرب دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$ در زمان به کانولوشن تبدیل فوریه‌های آن‌ها متناظر است:

$$x[n] \cdot h[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$$

اثبات: این خاصیت معمولاً از طریق مفهوم تبدیل فوریه و معکوس آن اثبات می‌شود و مشابه با خاصیت کانولوشن است اما در فضای فرکانس.

۴. خاصیت Expansion Time (خاصیت توسعه زمانی) اگر $x[n]$ را در زمان با ضریب a توسعه دهیم، تبدیل فوریه آ
ن متناسباً در فرکانس تراکم خواهد یافت:

$$x[an] \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(e^{j(\omega/a)}\right)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} DTFT\{x[an]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[an] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{|a|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(\omega/a)m} \quad \text{جایی که } m = an \\ &= \frac{1}{|a|} X\left(e^{j(\omega/a)}\right) \end{aligned}$$

این خواص فرمول‌های پایه‌ای هستند که در تحلیل سیستم‌های دیجیتال و پردازش سیگنال استفاده می‌شوند و اثبات‌ها نشان می‌دهند چگونه هر خاصیت به صورت ریاضی می‌تواند از تعاریف اولیه DTFT نتیجه گرفته شود.

۷. **محاسبه مقدار لحظه‌ای هر دنباله بازگشتی خطی با ضرایب ثابت** (۱۰ نمره)

دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$1, \frac{3}{4}, \frac{7}{16}, \frac{15}{64}, \dots$$

فرض کنید این دنباله خروجی یک سیستم LTI و علّی با ورودی ضربه واحد است.

(آ) معادلات تفاضلی خطی سیستم به صورت زیر و بر حسب پارامتری از a, b می‌باشد. پارامترهای a, b را بیابید.

$$y[n] - ay[n-1] + by[n-2] = x[n]$$

(ب) جمله عمومی دنباله را به دست آورید. (منظور از جمله عمومی فرمولی است که بتوان عنصر nام را بر حسب n و بدون نیاز به جملات قبلی بدست آورد.)

پاسخ سوال:

۱. پیدا کردن پارامترهای a و b

داده شده است که دنباله خروجی $y[n]$ با معادله تفاضلی خطی زیر مرتبط است:

$$y[n] - ay[n-1] + by[n-2] = x[n]$$

که $x[n]$ ورودی ضربه واحد است. برای یک ورودی ضربه واحد، $x[0] = 1$ و $x[n] = 0$ برای $n > 0$.

مقادیر اولیه دنباله عبارتند از:

$$y[0] = 1, \quad y[1] = \frac{3}{4}, \quad y[2] = \frac{7}{16}, \quad y[3] = \frac{15}{64}, \cdots$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله تفاضلی، می‌توانیم مقادیر a و b را بدست آوریم.

۲. جمله عمومی دنباله

بعد از به دست آوردن a و b، می‌توانیم جمله عمومی دنباله را با استفاده از روش‌های حل معادله تفاضلی بیابیم. این معمولاً شامل پیدا کردن ریشه‌های معادله مشخصه و سپس به کار بردن این ریشه‌ها برای ساختن فرمول عمومی است.

اجازه دهید ابتدا پارامترهای a و b را بیابیم.

پارامترهای a و b در معادله تفاضلی سیستم LTI به ترتیب ۰.۷۵ و ۰.۱۲۵ می‌باشند. با این مقادیر، معادله تفاضلی به صورت زیر در می‌آید:

$$y[n] - 0.75y[n-1] + 0.125y[n-2] = x[n]$$

حال که مقادیر a و b را داریم، می‌توانیم جمله عمومی دنباله را با استفاده از روش‌های مربوط به معادلات تفاضلی خطی حل کنیم. این معمولاً شامل پیدا کردن ریشه‌های معادله مشخصه و سپس استفاده از این ریشه‌ها برای ساختن فرمول عمومی است. بیایید این کار را انجام دهیم.

ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 - 0.75r + 0.125 = 0$ به ترتیب ۰.۲۵ و ۰.۵ هستند. با توجه به اینکه ریشه‌ها متمایز هستند، فرمول عمومی دنباله می‌تواند به صورت ترکیب خطی از توان‌های این ریشه‌ها نوشته شود:

$$y[n] = C_1 \times 0.25^n + C_2 \times 0.5^n$$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌هایی هستند که باید از شرایط اولیه دنباله به دست آیند. برای این کار، ما مقادیر اولیه دنباله را در این فرمول قرار می‌دهیم و سپس C_1 و C_2 را حل می‌کنیم.

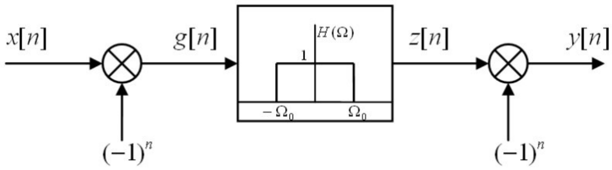
ثابت‌های C_1 و C_2 در فرمول عمومی دنباله به ترتیب -۱ و ۲ به دست آمدند. بنابراین، فرمول عمومی دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$y[n] = -1 \times 0.25^n + 2 \times 0.5^n$$

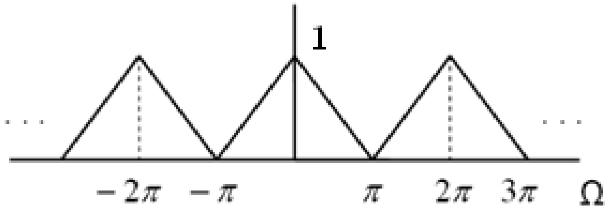
این فرمول به ما امکان می‌دهد تا هر عنصر nام دنباله را بر حسب n و بدون نیاز به دانستن جملات قبلی محاسبه کنیم.

۸. **مدلاسیون** (۱۰ نمره)

خروجی سیستم زیر را بیابید اگر $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$



فرض کنید طیف $x[n]$به صورت زیر باشد.



پاسخ سوال :

برای یافتن خروجی $y[n]$ سیستم، باید چندین مرحله را دنبال کنیم:

۱. **مدولاسیون:** ابتدا، ورودی $x[n]$ با $(-1)^n$ مدوله می‌شود که باعث تغییر فرکانس طیف $x[n]$ می‌شود.

۲. **فیلترینگ:** سپس، سیگنال مدوله شده از طریق یک فیلتر با پاسخ فرکانسی $H(\Omega)$ عبور داده می‌شود. این فیلتر یک فیلتر پایین‌گذر مربعی است با عرض $2\Omega_0$ که در اینجا $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$ داده شده است.

۳. **دمدولاسیون:** در نهایت، سیگنال فیلتر شده دوباره با $(-1)^n$ دمدوله می‌شود تا خروجی نهایی $y[n]$ به دست آید.

برای اینکه به طور دقیق خروجی $y[n]$ را محاسبه کنیم، باید ابتدا تأثیر مدولاسیون را بر طیف $x[n]$ ببینیم، سپس اثر فیلتر را بر طیف مدوله شده بررسی کنیم، و در نهایت خروجی دمدوله شده را محاسبه کنیم.

مرحله ۱: مدولاسیون مدولاسیون $(-1)^n$ موجب انتقال فرکانس $x[n]$ به اندازه π می‌شود. این باعث می‌شود که مثلث‌های موجود در طیف $x[n]$ در فرکانس‌های π و $-\pi$ به جای صفر قرار گیرند.

مرحله ۲: فیلترینگ از آنجا که فیلتر یک فیلتر پایین‌گذر مربعی با عرض $2\Omega_0$ است و $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$ داده شده، فیلتر فرکانس‌های بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ را عبور می‌دهد و بقیه را حذف می‌کند. با توجه به اینکه مدولاسیون فرکانس‌های $x[n]$ را به π و $-\pi$ منتقل کرده است، این فرکانس‌ها توسط فیلتر حذف می‌شوند.

مرحله ۳: دمدولاسیون پس از فیلتر شدن، دمدولاسیون با $(-1)^n$ باعث بازگشت سیگنال به حالت اولیه فرکانسی خود می‌شود. از آنجا که طیف $x[n]$ توسط فیلتر کاملا حذف شده، دمدولاسیون تأثیری بر سیگنال نخواهد داشت و خروجی $y[n]$ باید صفر باشد.

بن

ابراین، بر اساس این تحلیل، خروجی $y[n]$ باید تابعی باشد که در همه نقاط صفر است، چرا که طیف ورودی $x[n]$ به طور کامل توسط فیلتر حذف می‌شود.

۹. **رسم دامنه و فاز** (۱۰ نمره)

دامنه و فاز پاسخ فرکانسی $X(\omega)$ را رسم کنید اگر

(آ) $X(\omega) = 1 + 2e^{-j\omega}$

(ب) $X(\omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1+\frac{3}{4}e^{-j\omega})}$

(ج) $X(\omega) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})^3}$

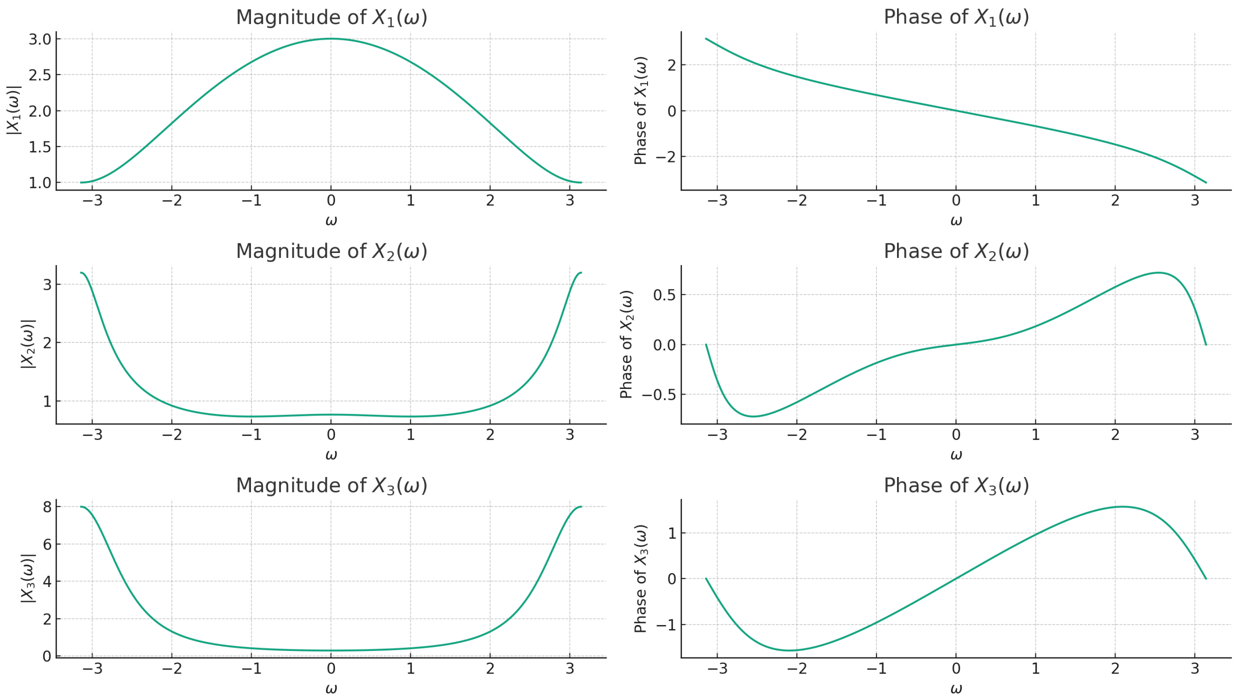
پاسخ سوال:

در اینجا نمودارهای دامنه و فاز پاسخ فرکانسی $X(\omega)$ برای هر سه تابع داده شده را می‌بینید:

- برای $X_1(\omega) = 1 + 2e^{-j\omega}$، نمودار دامنه نشان دهنده تغییرات دامنه با فرکانس است و نمودار فاز نشان‌دهنده تغییر فاز است که با تغییر فرکانس، خطی کاهش می‌یابد.

- برای $X_2(\omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1+\frac{3}{4}e^{-j\omega})}$، نمودار دامنه پیک‌های برجسته‌ای در اطراف فرکانس‌های مشخصی دارد که نشان‌دهنده نقاط تقویت و ضعف است و نمودار فاز نوساناتی دارد که نشان‌دهنده تغییرات فاز در آن نقاط فرکانسی است.

- برای $X_3(\omega) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})^3}$، دامنه با توان سوم تغییر می‌کند که باعث می‌شود دامنه در نقاط خاصی بسیار بزرگ شود و فاز نیز نوسانات بزرگ‌تری دارد که نشان‌دهنده تغییر فاز در این نقاط است.



شکل ۱: شکل دامنه و فاز

۱۰. **سیستم مجهول خطی** (۱۰ نمره)

ورودی یک سیستم مجهول خطی به صورت زیر است.

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

اگر خروجی این سیستم در پاسخ به ورودی فوق برابر مقدار زیر باشد.

$$y[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$$

مطلوب است پاسخ فرکانسی سیستم و پاسخ ضربه آن.

پاسخ سوال:

پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ یک سیستم خطی و زمان‌ـناوریان (LTI) از طریق نسبت تبدیل فوریه خروجی به ورودی به دست می‌آید:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

که در آن $Y(e^{j\omega})$ و $X(e^{j\omega})$ به ترتیب تبدیل فوریه خروجی و ورودی سیستم هستند. بنابراین، برای به دست آوردن پاسخ فرکانسی، ما ابتدا باید تبدیل فوریه $x[n]$ و $y[n]$ را محاسبه کنیم.

ورودی داده شده $x[n]$ را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

تبدیل فوریه برای $(\frac{1}{2})^n u[n]$ به صورت زیر است:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

و برای $(\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1]$ به صورت زیر است:

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

بنابراین تبدیل فوریه کلی $x[n]$ خواهد بود:

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}X_2(e^{j\omega})$$

و تبدیل فوریه خروجی $y[n]$ خواهد بود:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

با جایگذاری این تبدیلات فوریه در معادله پاسخ فرکانسی، پاسخ فرکانسی سیستم $H(e^{j\omega})$ به دست می‌آید.

پاسخ ضربه $h[n]$ سیستم، که تابعی از زمان است، از طریق تبدیل معکوس فوریه پاسخ فرکانسی به دست می‌آید. بیایید ابتدا پاسخ فرکانسی را محاسبه کنیم. ا به دست آوریم.

پاسخ فرکانسی سیستم $H(e^{j\omega})$ به صورت ساده شده زیر است:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{2j\omega}}{(e^{j\omega} - \frac{1}{3})(e^{j\omega} + \frac{1}{8})}$$