به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

بهار ۱۴۰۲
استاد: دکتر صامتی

طرح: سیدعماد ذوالحواریه

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سوم	مباحث تمرین: سیگنال‌های زمان گسسته ، مقیاس بندی در حوزه زمان و فرکانس	تاریخ: ۱۲ آذر

مجموع نمرات این تمرین (۱۰۰ نمره)

۱. **تبدیل فوریه گسسته و عکس آن** (۱۰ نمره)

تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان زیر را حساب کنید.

(آ)

$$x[n] = \frac{1}{5}^{-n} u[-n-1]$$

(ب)

$$x[n] = u[n+2] - u[n-3]$$

(ج)

$$2\delta[4-2n]$$

(د)

$$x[n] = \sin(\frac{5\pi n}{3}) + \cos(\frac{7\pi n}{3})$$

(ه)

$$x[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5\cos(\frac{\pi}{N}n) & n \leq N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(و)

$$x[n] = [\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}] * [\frac{\sin(\frac{\pi}{4}(n-8))}{\pi(n-8)}]$$

عکس تبدیل فوریه‌های سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید.

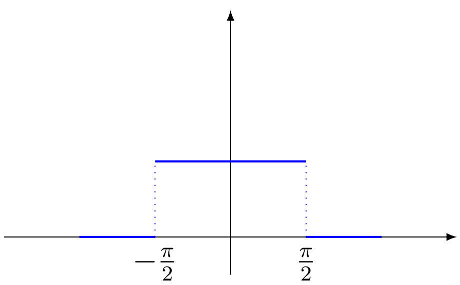
(آ)

$$X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega) + \sin^2(3\omega)$$

(ب)

$$X(e^{j\omega}) = e^{\frac{j\omega}{2}}, \quad \text{for} \pi \geq \omega \geq -\pi$$

(ج) شکلی سیگنالی در حوزه‌ی فرکانس به صورت زیر است.(طبیعی است که شکل با دوره تناوب 2π متناوب است)



(د)

$$X(e^{j\omega}) = \cos(2\omega) + j\sin(2\omega)$$

(ه)

$$X(e^{j\omega}) = \cos(\omega) + j\cos(\frac{\omega}{2})$$

(و)

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{otherwise} \\ & \\ & argX(e^{j\omega}) = -4\omega \end{cases}$$

۲. **تجزیه به مقادیر جزئی** (۳۵ نمره)

با استفاده از بسط تجزیه به مقادیر جزئی ، DTFTمعکوس سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

(آ)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2e^{-j\omega}}{-0.25e^{-j2\omega} + 1}$$

(ب)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{6 - 2e^{-jw} + 0.5e^{-j2\omega}}{(-0.25e^{-j2\omega} + 1)(1 - 0.25e^{-jw})}$$

۳. DTFT **سیگنال نامتعارف** (۱۰ نمره)

سیگنال $x[n]$دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ است. اگر $y[n] = x\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ باشد.تبدیل فوریه$y[n]$را بیابید. (منظور از $\lfloor u \rfloor$ ، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی u است.)

۴. **فاز تبدیل** (۱۰ نمره)

یک فیلتر FIR با پاسخ ضربه $h[n]$ و تابع تبدیل $H(\omega) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$ مفروض است. می‌دانیم $h[n]$ سیگنالی حقیقی بوده و در بازه $n < 0$ و$n \geq N$برابر صفر است. اگر $h[n] = h[N-1-n]$باشد ، آن‌گاه فاز تبدیل این فیلتر که به صورت زیر است را بر حسب a, b, c به دست آورید.

$$\theta(\omega) = (aN + b)\omega + c$$

۵. **معادله تفاضلی** (۱۰ نمره)

(آ) یک سیستم LTI زمان گسسته علّی با معادله تفاضلی زیر توصیف می‌شود.

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

به ازای ورودی $x[n]$ توان متوسط خروجی این سیستم، $y[n]$ را حساب کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 3 & \text{even is } n \text{ if} \\ 2 & \text{odd is } n \text{ if} \end{cases}$$

(ب) معادله تفاضلی مربوط به پاسخ فرکانسی زیر را بدست آورید.

$$X(e^{j\omega}) = 1 + \frac{e^{-j\omega}}{(1 - 0.5e^{-j\omega} + 1)(1 + 0.25e^{-j\omega})}$$

(ج) معادله تفاضلی مربوط به پاسخ ضربه زیر را بدست آورید.

$$h[n] = \delta[n] + 2(0.5)^2 u[n] + (0.5)^n u[n]$$

۶. **اثبات خواص** (۱۰ نمره)

خواص DTFT زیر را اثبات کنید.

(آ) خاصیت شیفت زمانی

(ب) خاصیت کانولوشن

(ج) خاصیت ضرب

(د) خاصیت Expansion Time

۷. **محاسبه مقدار لحظه‌ای هر دنباله بازگشتی خطی با ضرایب ثابت** (۱۰ نمره)

دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$1, \frac{3}{4}, \frac{7}{16}, \frac{15}{64}, \cdots$$

فرض کنید این دنباله خروجی یک سیستم LTI و علّی با ورودی ضربه واحد است.

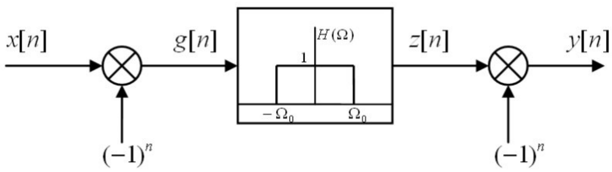
(آ) معادلات تفاضلی خطی سیستم به صورت زیر و بر حسب پارامتری از a, b می‌باشد. پارامترهای a, b را بیابید.

$$y[n] - ay[n-1] + by[n-2] = x[n]$$

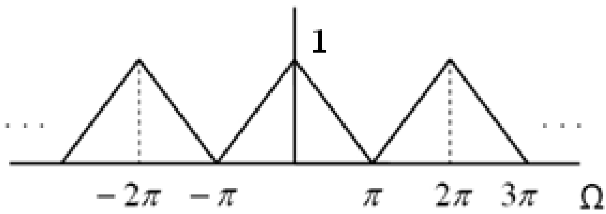
(ب) جمله عمومی دنباله را به دست آورید. (منظور از جمله عمومی فرمولی است که بتوان عنصر nام را بر حسب n و بدون نیاز به جملات قبلی بدست آورد.)

۸. **مدلاسیون** (۱۰ نمره)

خروجی سیستم زیر را بیابید اگر $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$



فرض کنید طیف $x[n]$به صورت زیر باشد.



۹. **رسم دامنه و فاز** (۱۰ نمره)

دامنه و فاز پاسخ فرکانسی $X(\omega)$ را رسم کنید اگر

(آ) $X(\omega) = 1 + 2e^{-j\omega}$

(ب) $X(\omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1+\frac{3}{4}e^{-j\omega})}$

(ج) $X(\omega) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})^3}$

۱۰. **سیستم مجهول خطی** (۱۰ نمره)
ورودی یک سیستم مجهول خطی به صورت زیر است.

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

اگر خروجی این سیستم در پاسخ به ورودی فوق برابر مقدار زیر باشد.

$$y[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$$

مطلوب است پاسخ فرکانسی سیستم و پاسخ ضربه آن.