دکتر صامتی
دانشکده مهندسی کامپیوتر

سیگنال ها و سیستم ها
پاییز ۱۴۰۲

تمرین ۲ — Fourier Series & Continuous-Time Fourier Transform

مسئله‌ی ۱.

یک سیستم LTI با ورودی $x(t)$ و پاسخ متناظر $y(t)$ را در نظر بگیرید. به تابع $\phi(t)$ تابع‌ویژه سیستم ذکر شده می‌گوییم اگر داشته باشیم

$$\phi(t) \to \lambda\phi(t)$$

یعنی اگر داشته باشیم $x(t) = \phi(t)$ آنگاه $y(t) = \lambda\phi(t)$ که به ضریب مختلط λ مقدار ویژه متناظر $\phi(t)$ گفته می‌شود.

الف

فرض کنید می‌توانیم ورودی $x(t)$ به سیستم را به صورت ترکیب خطی تابع‌ویژه‌های $\phi_k(t)$ نمایش دهیم، به صورتی که هر کدام دارای مقدار ویژه متناظر k می‌باشد.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t)$$

خروجی سیستم $y(t)$ را به صورت ترکیبی از c_k و λ_k و $\phi_k(t)$ نمایش دهید.

ب

نشان دهید تابع‌های $\phi_k(t) = t^k$ تابع‌ویژه‌های سیستم مقابل هستند.

$$y(t) = t^۲ \frac{d^۲ x(t)}{dt^۲} + t\frac{dx(t)}{dt}$$

حل.

الف

از آن‌جایی که $\phi_k(t)$ ها تابع‌ویژه‌های سیستم هستند و سیستم خطی است خروجی $y(t)$ به صورت مقابل خواهد بود

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k c_k \phi_k(t)$$

ب

$$
\begin{aligned}
y(t) &= t^{۲}\frac{d^{۲}x(t)}{dt^{۲}} + t\frac{dx(t)}{dt},\\
\phi_k(t) &= t^k,\\
\frac{d\phi_k(t)}{dt^{۲}} &= k(k-۱)t^{k-۲}
\end{aligned}
$$

پس اگر داشته باشیم $\phi_k(t) = x(t)$ انگاه

$$
\begin{aligned}
y(t) &= t^{۲}k(k-۱)t^{k-۲} + tkt^{k-۱}\\
&= k(k-۱)t^k + kt^k\\
&= k^{۲}t^k = k^{۲}\phi_k(t)
\end{aligned}
$$

تابع ویژه $\phi_k(t)$ دارای مقدار ویژه متناظر $\lambda_k = k^{۲}$ می‌باشد. ▷

مسئله‌ی ۲.

کانولوشن متناوب را برای دو سیگنال متناوب $\widetilde{x_۱}(t)$ و $\widetilde{x_۲}(t)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$
\widetilde{y}(t) = \widetilde{x_۱} \circledast \widetilde{x_۲} = \int_{T.} \widetilde{x_۱}(\tau)\widetilde{x_۲}(t-\tau)d\tau
$$

الف

اگر $\widetilde{x_۱}(t)$، $\widetilde{x_۲}(t)$ و $\widetilde{y}(t)$ دارای سری فوریه باشند، یعنی

$$
\widetilde{x_۱}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{۲\pi}{T.})t}, \quad \widetilde{x_۲}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk(\frac{۲\pi}{T.})t}, \quad \widetilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk(\frac{۲\pi}{T.})t}
$$

نشان دهید $c_k = T. a_k b_k$.

ب

تابع متناوب $\widetilde{x}(t)$ به صورت مقابل تعریف می‌شود

$$
\widetilde{x}(t) = \begin{cases} ۲ + ۵k - x & \text{for } x \in [۵k, ۵k+۲] \\ x + ۲ - ۵k & \text{for } x \in [۵k-۲, ۵k] \end{cases}
$$

اگر داشته باشیم $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}(t) \circledast \widetilde{x}(t)$، سیگنال متناوب $\widetilde{z}(t)$ را بدست آورید و با استفاده از بخش الف سری فوریه سیگنال $\widetilde{x}(t)$ را بدست آورید.

ج

حال سیگنال‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [-T, T] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{for } x \in [0, T] \\ e^{t} & \text{for } x \in [-T, 0] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال سیگنال‌های $\widetilde{x_1}(t)$ و $\widetilde{x_2}(t)$ را از تکرار سیگنال‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ تشکیل می‌دهیم (با دوره تناوب T_0) و سیگنال $y(t)$ را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \tag{1}$$

و سیگنال $\widetilde{y}$ را نیز به صورت متناظر به صورت مقابل تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{y} = \widetilde{x_1}(t) \circledast \widetilde{x_2}(t)$$

نشان دهید اگر T_0 به اندازه کافی بزرگ باشد می‌توانیم سیگنال $y(t)$ را از یک دوره تناوب سیگنال $\widetilde{y}(t)$ بدست آوریم، یعنی،

$$y(t) = \begin{cases} \widetilde{y}(t), & |t| \leqslant \frac{T_0}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

حل.

الف

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(t) &= \widetilde{x_1}(t) \circledast \widetilde{x_2}(t) \\ &= \int_{T_0} \widetilde{x_1}(\tau)\widetilde{x_2}(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول محاسبه ضرایب سری فوریه $\widetilde{y}(t)$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\int_{T_0} \widetilde{x_1}(\tau)\widetilde{x_2}(t-\tau)d\tau e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \widetilde{x_1}(\tau)e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})\tau}d\tau \int_{T_0} \widetilde{x_2}(t-\tau)e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})(t-\tau)}dt \\ &= T_0 a_k b_k \end{aligned}$$

ب

$$z(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

سیگنال $\widetilde{z}(t)$ نیز از تکرار سیگنال $z(t)$ با دوره تناوب ۵ بدست می‌آید.
حال با استفاده از بخش الف داریم

$$\widetilde{x}(t) \leftrightarrow T_\circ z_k^2 = \frac{4}{5}(\text{sinc}(\frac{2\pi k}{5}))^2$$

ج

بدون محاسبه کردن کانولوشن مشخص است حاصل یک سیگنال متقارن نسبت به مبدا مختصات خواهد بود که دارای مقادیر غیرصفر در بازه $[-2T, 2T]$ خواهد بود. حال می‌دانیم اگر سیگنال‌های $\widetilde{x_1}(t)$ و $\widetilde{x_2}(t)$ دارای دوره تناوب $T_\circ$ باشند سیگنال $\widetilde{y}(t)$ نیز یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T_\circ$ خواهد بود و اگر $T_\circ$ به اندازه کافی بزرگ باشد تکرار سیگنال $y(t)$ در بازه‌های $T_\circ$ ای خواهد بود و می‌توان سیگنال اصلی را بدست آورد. $\triangleright$

مسئله‌ی ۳.

سیگنال متناظر تبدیل‌های فوریه مقابل را بدست آورید

- $X_a(\omega) = \frac{1}{7+j\omega}$
- $X_b(\omega) = 2(\delta(\omega-7)+\delta(\omega+7))$
- $X_c(\omega) = \frac{1}{9+\omega^2}$
- $X_d(\omega) = X_a(\omega)X_b(\omega)$ (تا حد امکان ساده کنید)

حل.

-

$$e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha+j\omega} \Rightarrow e^{-7t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{7+j\omega}$$

-

$$\begin{aligned}
X_b(\omega) &= 2\delta(\omega+7)+2\delta(\omega-7), \\
x_b(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_b(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2[\delta(\omega+7)+\delta(\omega-7)]e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}e^{-j7t}+\frac{1}{\pi}e^{j7t} = \frac{2}{\pi}\cos 7t
\end{aligned}$$

-

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \rightarrow \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$$

با یک جایگذاری ساده خواهیم داشت

$$\frac{1}{9+\omega^2} \leftrightarrow \frac{1}{6}e^{-3|t|}$$

•

$$\begin{aligned}X_a(\omega)X_b(\omega) &= X_a(\omega)[۲\delta(\omega+۷)+۲\delta(\omega-۷)]\\ &= ۲X_a(-۷)\delta(\omega+۷)+۲X_a(۷)\delta(\omega-۷)\\ X_d(\omega) &= \frac{۲}{۷-j۷}\delta(\omega+۷)+\frac{۲}{۷+j۷}\delta(\omega-۷)\\ x_d(t) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{۲}{۷-j۷}\delta(\omega+۷)+\frac{۲}{۷+j۷}\delta(\omega-۷)]e^{j\omega t}d\omega\\ x_d(t) &= \frac{۱}{\pi}\frac{۱}{۷-j۷}e^{-j۷t}+\frac{۱}{\pi}\frac{۱}{۷+j۷}e^{j۷t}\end{aligned}$$

حال دقت کنید

$$\frac{۱}{۷+j۷}=\frac{۱}{۷}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})e^{-j\pi/۴},\quad \frac{۱}{۷-j۷}=\frac{۱}{۷}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})e^{j\pi/۴}$$

پس در نهایت داریم

$$x_d(t)=\frac{۱}{۷\pi}\frac{\sqrt{۲}}{۲}[e^{-j(۷t-\pi/۴)}+e^{j(۷t-\pi/۴)}]=\frac{\sqrt{۲}}{۷\pi}\cos(۷t-\frac{\pi}{۴})$$

▷

مسئله‌ی ۴.

فرض کنید یک سیستم علی LTI به صورت مقابل توصیف می‌شود

$$\frac{dy(t)}{dt}+۲y(t)=x(t)$$

الف

پاسخ فرکانسی $H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ را بدست آورید و نمودار اندازه و فرکانس آن را رسم کنید.

ب

اگر $x(t)=e^{-t}u(t)$ باشد، مقدار $Y(\omega)$ را بدست آورید.

ج

$y(t)$ را برای ورودی بخش ب به سیستم بدست آورید.

حل.

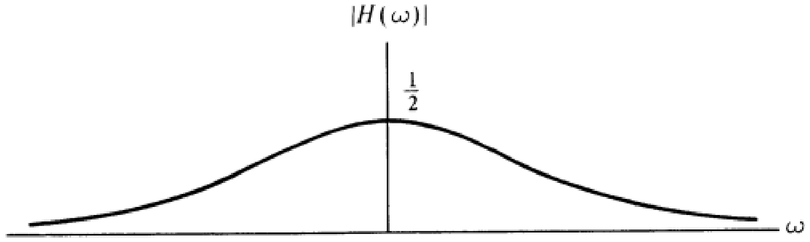
الف

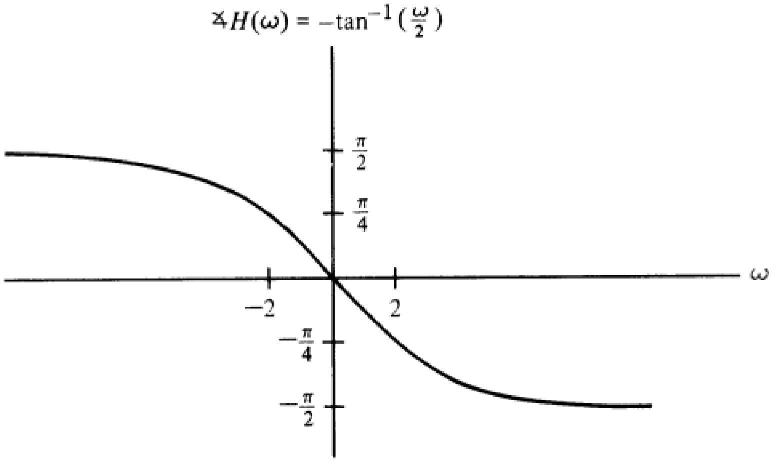
از دو طرف معادله تبدیل فوریه می‌گیریم

$$\frac{dy(t)}{dt}+۲y(t)=x(t)\leftrightarrow j\omega Y(\omega)+۲Y(\omega)=X(\omega)$$

پس در نهایت داریم

$$Y(\omega)[۲+j\omega]=X(\omega)\rightarrow H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{۱}{۲+j\omega},$$
$$H(\omega)=\frac{۱}{۲+j\omega}=\frac{۲}{۴+\omega^{۲}}-j\frac{\omega}{۴+\omega^{۲}}$$
$$|H(\omega)|^{۲}=\frac{۴+\omega^{۲}}{(۴+\omega^{۲})^{۲}}$$
$$|H(\omega)|=\frac{۱}{\sqrt{۴+\omega^{۲}}}$$





شکل ۱: نمودار اندازه و فرکانس پاسخ فرکانسی

ب

$$X(\omega)=\frac{۱}{۱+j\omega}\rightarrow Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{۱}{(۱+j\omega)(۲+j\omega)}=\frac{۱}{۱+j\omega}-\frac{۱}{۲+j\omega}$$

ج

با وارون گرفتن از $Y(\omega)$ خواهیم داشت

$$y(t)=e^{-t}u(t)-e^{-۲t}u(t)$$

▷

مسئله‌ی ۵.

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = (\frac{۱}{۲})^{|n|}$ در نظر بگیرید و ضرایب سری فوریه را برای خروجی $y[n]$ هرکدام از ورودی‌های مقابل بدست آورید.

- $x[n] = \sin(\frac{۳\pi n}{۴})$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - ۴k]$
- سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب ۶ متناوب است و

$$x[n] = \begin{cases} ۱, & n = ۰, \pm ۱ \\ ۰, & n = \pm ۲, \pm ۳, \pm ۴, \end{cases}$$

- $x[n] = j^n + (-۱)^n$

حل.

در ابتدا تبدیل فوریه $h[n]$ را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{۱}{۲})^n e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{۰} (\frac{۱}{۲})^{-n} e^{-j\Omega n} - ۱ \\ &= \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}e^{-j\Omega}} + \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}e^{j\Omega}} - ۱ \\ &= \frac{۳}{۵ - ۴\cos\Omega} \end{aligned}$$

- $$x[n] = \sin(\frac{۳\pi}{۴}n) = \frac{۱}{۲j}e^{j\frac{۳\pi}{۴}n} - \frac{۱}{۲j}e^{-j\frac{۳\pi}{۴}n}$$

  ابتدا دوره تناوب سیگنال را بدست می‌آوریم

$$\sin(\frac{۳\pi}{۴}n) = \sin[\frac{۳\pi}{۴}(n+N)] \equiv \sin(\frac{۳\pi}{۴}n) = \sin(\frac{۳\pi}{۴}n + \frac{۳\pi}{۴}N)$$

$$\frac{۳\pi N}{۴} = ۲\pi m \Rightarrow N = ۸, m = ۳ \Rightarrow x[n] = \sum_{k=۰}^{۷} a_k e^{jk(\pi/۴)n} \rightarrow a_۳ = \frac{۱}{۲j} = a_۵^*$$

  حال می‌دانیم ضرایب $y[n]$ را اگر با b_k نشان دهیم داریم $b_k = a_k H(\Omega)$ و در نهایت با قرار دادن $\Omega = \frac{\pi k}{۴}$ خواهیم داشت

$$b_۳ = \frac{۱}{۲j}\frac{۳}{۵ - ۴\cos(۳\pi/۴)} = b_۵^*$$

- $$a_k = \frac{۱}{۴}\sum_{n=۰}^{۳} x[n]e^{-jk(\pi/۲)n} = \frac{۱}{۴}\ \forall k \rightarrow b_k = \frac{۱}{۴}\frac{۳}{۵ - ۴\cos[(\pi/۲)k]} = \frac{۳}{۲۰}\ \forall k$$

- $$a_k = \frac{۱}{۶}[۱ + ۲\cos(\frac{\pi}{۳}k)], \quad ۰ \leqslant k \leqslant ۵$$

و در نهایت

$$b_k = \frac{۱}{۶}[۱ + ۲\cos(\frac{\pi}{۳}k)]\frac{۳}{۵ - ۴\cos[(\pi/۳)k]}$$

- دقت کنید دوره تناوب سیگنال برابر با ۴ است و با بازنویسی سیگنال داریم

$$\begin{aligned} x[n] &= [e^{j(\pi/۲)}]^n + (e^{j\pi})^n \\ &= \sum_{k=۰}^{۳} a_k e^{jk(\pi/۲)n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_۰ = ۰, \quad a_۱ = ۱, \\ &a_۲ = ۱, \quad a_۳ = ۰ \end{aligned}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده بخش قبل داریم $b_۰ = b_۳ = ۰$ و

$$\begin{aligned} b_۱ &= \frac{۳}{۵ - ۴\cos(\pi/۲)} = \frac{۳}{۵}, \\ b_۲ &= \frac{۳}{۵ - ۴\cos\pi} = \frac{۳}{۹} \end{aligned}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۶.

دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} x_۱[n] &= ۱ + \sin(\frac{۲\pi n}{۱۰}) \\ x_۲[n] &= ۱ + \sin(\frac{۲۰\pi}{۱۲}n + \frac{\pi}{۲}) \end{aligned}$$

الف

دوره تناوب $x_۱[n]$ و $x_۲[n]$ بدست آورید.

ب

ضریب‌های سری فوریه $a_{۱k}$ برای سیگنال $x_۱[n]$ و $a_{۲k}$ برای سیگنال $x_۲[n]$ بدست آورید.

ج

در هر دو بخش الف و ب ضریب‌های بدست آمده متناوب هستند، دوره تناوب ضرایب را پیدا کنید

حل.

الف

$$\begin{aligned} ۱ + \sin(\frac{۲\pi n}{۱۰}) &= ۱ + \sin[\frac{۲\pi}{۱۰}(n+N)] \\ &= ۱ + \sin(\frac{۲\pi}{۱۰}n + \frac{۲\pi}{۱۰}N) \end{aligned}$$

از آنجایی که $\sin(\frac{۲\pi}{۱۰}n + ۲\pi) = \sin(\frac{۲\pi}{۱۰}n)$ نتیجه می‌شود دوره تناوب سیگنال $x_۱[n]$ برابر با ۱۰ است.
به طور مشابه داریم

$$\begin{aligned} ۱ + \sin(\frac{۲۰\pi}{۱۲}n + \frac{\pi}{۲}) &= ۱ + \sin[\frac{۲۰\pi}{۱۲}(n+N) + \frac{\pi}{۲}] \\ &= ۱ + \sin(\frac{۲۰\pi}{۱۲}n + \frac{\pi}{۲} + \frac{۲۰\pi}{۱۲}N) \end{aligned}$$

در نتیجه دوره تناوب سیگنال $x_۲[n]$ برابر با ۶ می‌باشد.

ب

با استفاده از رابطه اویلر داریم

$$x_۱[n] = ۱ + \frac{۱}{۲j}e^{j(۲\pi/۱۰)n} - \frac{۱}{۲j}e^{-j(۲\pi/۱۰)n}, \quad x_۱[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(۲\pi/N)n}$$

$$\begin{aligned} &a_{۱۰} = ۱, \quad a_{۱-۱} = \frac{-۱}{۲j}, \\ &a_{۱۱} = \frac{۱}{۲j}, \quad a_{۱k} = ۰ \ \text{otherwise} \end{aligned}$$

به طور مشابه

$$x_۲[n] = ۱ + \frac{۱}{۲j}e^{j(\pi/۲)}e^{j(۲۰\pi/۱۲)n} - \frac{۱}{۲j}e^{-j(\pi/۲)}e^{-j(۲۰\pi/۱۲)n}$$

$$\begin{aligned} &a_{۲۰} = ۱, \quad a_{۱۵} = \frac{۱}{۲j}e^{j(\pi/۲)}, \\ &a_{۱-۵} = -\frac{۱}{۲j}e^{-j(\pi/۲)}, \quad a_{۲k} = ۰ \ \text{otherwise} \end{aligned}$$

▷

مسئله‌ی ۷.

ضرایب سری فوریه برای سیگنال‌های مقابل را بدست آورید

- $x(t) = \sin(۱۰\pi t + \frac{\pi}{۶})$
- $x(t) = ۱ + \cos(۲\pi t)$
- $x(t) = [۱ + \cos(۲\pi t)][\sin(۱۰\pi t + \frac{\pi}{۶})]$

حل.

•

$$\sin(۱۰\pi t+\frac{\pi}{۶})=\frac{e^{j\pi/۶}}{۲j}e^{j۱۰\pi}-\frac{e^{-j\pi/۶}}{۲j}e^{-j۱۰\pi t}$$

دقت کنید داریم $T_۰=۰/۲\rightarrow\omega_۰=\frac{۲\pi}{T_۰}=۱۰\pi$. پس خواهیم داشت

$$x(t)=\sum_k a_k e^{jk\omega_۰ t}\rightarrow a_۱=\frac{e^{j\pi/۶}}{۲j},\quad a_{-۱}=-\frac{e^{-j\pi/۶}}{۲j}$$

•

$$\begin{aligned}x(t)&=۱+\cos(۲\pi t)\\&=۱+\frac{e^{j۲\pi t}}{۲}+\frac{e^{-j۲\pi t}}{۲}\end{aligned}$$

از طرفی داریم $w_۰=۲\pi$

$$a_{-۱}=a_۱=\frac{۱}{۲}\quad a_۰=۱$$

•

$$\begin{aligned}x(t)&=[۱+\cos(۲\pi t)][\sin(۱۰\pi t+\frac{\pi}{۶})]\\&=\sin(۱۰\pi t+\frac{\pi}{۶})+\cos(۲\pi t)\sin(۱۰\pi t+\frac{\pi}{۶})\\&=(\frac{e^{j\pi/۶}}{۲j}e^{j۱۰\pi t}-\frac{e^{-j\pi/۶}}{۲j}e^{-j۱۰\pi t}+\frac{۱}{۲}(e^{j۲\pi t}+e^{-j۲\pi t})(\frac{e^{j\pi/۶}}{۲j}e^{j۱۰\pi t}-\frac{e^{-j\pi/۶}}{۲j}e^{-j۱۰\pi t})\end{aligned}$$

در نهایت با $w_۰=۲\pi$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}a_۴&=\frac{e^{j\pi/۶}}{۴j},\quad a_{-۴}=\frac{-e^{-j\pi/۶}}{۴j},\\a_۵&=\frac{e^{j\pi/۶}}{۲j},\quad a_{-۵}=\frac{-e^{-j\pi/۶}}{۲j},\\a_۶&=\frac{e^{j\pi/۶}}{۴j},\quad a_{-۶}=\frac{-e^{-j\pi/۶}}{۴j}\end{aligned}$$

▷

مسئله‌ی ۸.

در این سوال به بررسی فرمول‌های معادل برای تبدیل فوریه سیگنال‌های پیوسته می‌پردازیم

الف

رابطه وارون تبدیل $X_a(f)$ که در ادامه امده است را بدست آورید

$$X_a(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j۲\pi ft}dt$$

ب

رابطه وارون را همانند بخش قبل برای $X_b(v)$ بدست آورید

$$X_b(v)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jvt}dt$$

حل.

الف

$$X_a(f) = X(\omega)\Big|_{\omega=2\pi f}$$

از طرفی میدانیم

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{f=-\infty}^{\infty} X(2\pi f)e^{j2\pi ft}2\pi df = \int_{f=-\infty}^{\infty} X_a(f)e^{j2\pi ft}df$$

ب

$$X_b(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}X(\omega)\Big|_{\omega=v}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} X_b(v)e^{jvt}dv \end{aligned}$$

▷

مسئله‌ی ۹.

عبارات مقابل را اثبات کنید

- $x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega$
- $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$

حل.

•

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ x(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ X(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \end{aligned}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۱۰.

تبدیل کسینوسی را برای سیگنال $x(t)$ به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$X^{\cos}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(\omega t)dt.$$

الف

نشان دهید وقتی سیگنال x حقیقی باشد، تبدیل کسینوسی بخش حقیقی تبدیل فوریه است: $X^{\cos}(\omega) = \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$.

ب

نشان دهید تبدیل کسینوسی خطی است. یعنی به ازای هر دو سیگنال $x_۱$ ، $x_۲$ و ثابت‌های α ، β، تبدیل کسینوسی سیگنال $\alpha x_۱ + \beta x_۲$ برابر است با $\alpha X_۱^{\cos}(\omega) + \beta X_۲^{\cos}(\omega)$

ج

نشان دهید اگر سیگنال x حقیقی و پادمتقارن باشد ($x(-t) = -x(t)$) تبدیل کسینوسی سیگنال $x(t)$ به ازای تمام ω ها صفر است. یعنی: $\forall\omega : X^{\cos}(\omega) = ۰$

حل.

الف

اگر از فرمول اویلر در رابطه تبدیل فوریه استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(cos(\omega t) + jsin(\omega t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(\omega t)dt + j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)sin(\omega t)$$
$$X^{\cos}(\omega) = \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$$

ب

با استفاده از ویژگی‌های انتگرال داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_۱(t) + \beta x_۲(t))cos(\omega t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha x_۱(t)cos(\omega t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \beta x_۲(t)cos(\omega t)dt$$
$$= \alpha X_۱^{\cos}(\omega) + \beta X_۲^{\cos}(\omega)$$

ج

$$-X^{\cos}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -x(t)cos(\omega t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)cos(-\omega t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(\omega t)dt = X^{\cos}(\omega)$$
$$\Rightarrow X^{\cos}(\omega) = ۰ \quad \forall\omega$$

▷

موفق باشید :)