



دکتر صامتی
دانشکده مهندسی کامپیوتر

سیگنال ها و سیستم ها

پاییز ۱۴۰۲

سوالات تمرین پنجم

مسئله ۱.

* محاسبه ی تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال های زیر را به دست آورید. ناحیه ی همگرایی را نیز برای هریک مشخص کنید.

1. $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$
2. $x_2[n] = (1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$
3. $x_3[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$
4. $x_4[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])$

مسئله ۲.

* تبدیل وارون به کمک بسط سری توانی، وارون تبدیل Z های زیر را بیابید.

$$X(z) = \log(1 - 2z), \quad |z| < \frac{1}{2} \quad *$$

$$X(z) = \log\left(1 - \frac{1}{4z}\right), \quad |z| > \frac{1}{4} \quad *$$

مسئله ۳.

با استفاده از روش تجزیه به کسرهای جزئی، وارون تبدیل Z های زیر را محاسبه کنید.

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \quad *$$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \quad *$$

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > |a| \quad *$$

مسئله ۴.

* بررسی خواص تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال‌های $y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ ، $y_2[n] = x[n] - x[n-1]$ و $y_3[n] = \begin{cases} x[n] & n = 2k \\ 0 & n \neq 2k \end{cases}$ را بر حسب تبدیل Z سیگنال $x[n]$ بیابید. ناحیه‌ی همگرایی آن‌ها را نیز بررسی کنید.

مسئله ۵.

* سیستم LTI سیستمی LTI و علی، پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ دارد که تبدیل Z آن برابر است با

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

الف) ناحیه‌ی همگرایی تبدیل Z سیگنال h را بیابید.

ب) آیا این سیستم پایدار است؟

ج) تبدیل Z ورودی‌ای را بیابید که خروجی این سیستم به آن ورودی، برابر

$$y[n] = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1]$$

می‌شود.

د) پاسخ ضربه‌ی سیستم را به دست آورید.

مسئله ۶.

* شناسایی سیستم

سیستمی علی و LTI در نظر بگیرید. خروجی این سیستم به ورودی

$$x[n] = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1]$$

دارای تبدیل Z ای برابر با

$$Y(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

است.

الف) تبدیل Z سیگنال $x[n]$ را بیابید.

ب) ناحیه‌ی همگرایی $Y(z)$ را مشخص کنید.

ج) پاسخ ضربه‌ی این سیستم را به دست آورید.

د) آیا این سیستم پایدار است؟

مسئله ۷.

* وارون تبدیل Z

وارون تبدیل Z هر یک از سیگنال‌های زیر را بیابید.

• $X(z) = \sin(z)$ که ROC آن شامل دایره‌ی واحد است.

• $X(z) = \frac{z^4 - 2}{1 - z^{-4}}$ با ROC $|z| > 1$.

• $X(z) = \frac{z^{-3}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}$ با فرض دست چپی بودت سیگنال.

مسئله‌ی ۸.

* محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t) = x_1(t - 2) * x_2(-t + 3)$ و ناحیه‌ی همگرایی آن را به دست آورید.

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad x_2(t) = e^{-3t}u(t)$$

مسئله‌ی ۹.

* قطب‌های مزدوج مختلط

سیگنال حقیقی $x(t)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر تبدیل لاپلاس این سیگنال در نقطه‌ی s ، قطب (صفر) داشته باشد، در نقطه‌ی s^* نیز قطب (صفر) دارد.

مسئله‌ی ۱۰.

* یافتن مقادیر سیگنال

فرض کنید $x[n]$ سیگنالی «پایدار» باشد. تبدیل Z این سیگنال برابر است با:

$$X(z) = \frac{z^{10}}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{3}{4})^{10}(z + \frac{3}{4})^2(z + \frac{5}{4})(z + \frac{7}{4})}$$

(الف) ناحیه‌ی همگرایی $X(z)$ را بیابید.

(ب) مقدار $x[-8]$ را به دست آورید.

موفق باشید (:)