Capítulo 2

Introducción a vectores

Un **vector-m** se puede escribir como un vector renglón

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

o como un vector columna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

2.1. Operación transposición

La **transposición** permite pasar de un vector columna a un vector renglón y viceversa

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

2.2. Algunas definición

- Cada a_i es el **elemento** i del vector, donde $a_i \in \Re$.
- El número de elementos del vector se conoce como el **tamaño** del vector. Un vector-m es un vector de tamaño m. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector de tamaño 3 o un vector-3.
- El **vector cero** $(\overline{0})$ tiene cero en todos los elementos. Para indicar el número de renglones podemos clocar un subíndice $(\overline{0_m})$
- Dos vectores columna $\overline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ y $\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ son **iguales** si tienen el mismo tamaño y $v_i = u_i$ para cada uno de sus renglones.
- El conjunto de todos los vectores-m se conoce como $\Re^m$

Ejemplo de algunos vectores columna:

$$\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overline{0_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3. El plano coordenado y los vectores de 2 renglones

2.3.1. Ejes coordenados

Un **eje coordenado** corresponde a la recta de los números reales. El **plano coordenado** está formado por dos ejes coordenados: el **eje horizontal** o **abscisa** y el **eje vertical** u **ordenanda**. Los dos ejes se intersectan en el cero de cada eje y ese punto se llama el **origen de coordenadas**. Como se muestra en la Figura 2.1.

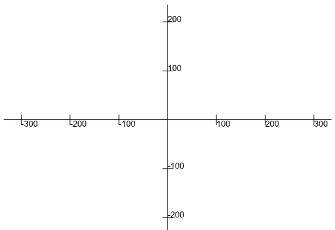


Figura 2.1: Plano coordenado

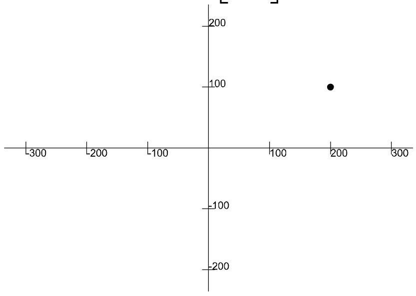
2.3.2. Vectores-2 como puntos

Un punto en el plano se puede representar por un vector-2. el primer renglón representa el desplazamiento horizontal y el segundo renglón representa el desplazamiento vertical.

$P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

x_1 desplaza horizontalmente y x_2 verticalmente.

Por ejemplo $\overline{v} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$



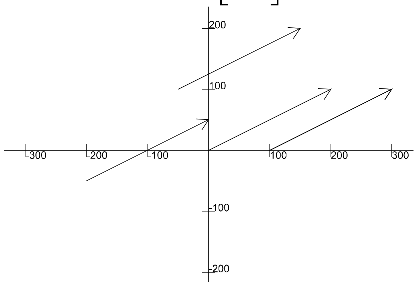
2.3.3. Vectores-2 como flechas

Una vector-2 también se puede representar en el plano coordenado como flechas. El primer elemento tiene la longitud horizontal de la flecha y el segundo elemento tiene la longitud vertical.

$\overline{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

x_1 longitud horizontal, x_2 longitud vertical.

Por ejemplo $\overline{v} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$



Se recomienda ver [NJ99, Pg 154 y 155]

2.4. Operación suma de vectores

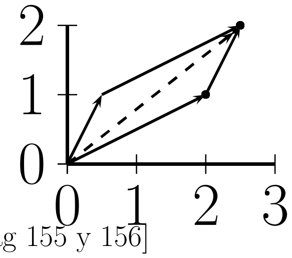
Si $\overline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ y $\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ entonces la **suma de vectores** $\overline{u} + \overline{v}$ es la suma elemento a elemento.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1+u_1 \\ v_2+u_2 \\ \vdots \\ v_m+v_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

Gráficamente la suma de dos vectores se representa por la ley del paralelogramo.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Ver [NJ99, Pag 155 y 156]

2.5. Operación escalar por vector

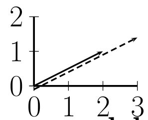
Si $\overline{v}$ es cualquier vector y c es cualquier escalar, entonces el **producto de escalar por vector** $c\overline{v}$ es vector obtenido al multiplicar c por cada elemento de $\overline{v}$.

$$c \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}$

Gráficamente el producto escalar por un vector se representa por otro vector en la misma dirección pero diferente longitud.

$$1,5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$



Dos vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son **paralelos** si hay un escalar c tal que $\overline{u} = c\overline{v}$.

2.6. Operaciones opuesto de vectores

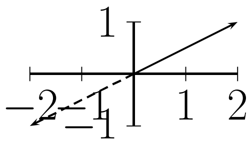
El **vector opuesto** de $\overline{v}$ es $-\overline{v} = (-1)\overline{v}$.

$$-\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $-\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Gráficamente un la operación opuesta sobre una flecha consiste en cambiarle la dirección

$$-\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



2.7. Operaciones resta de vectores

La **resta entre vectores** consiste en sumar el opuesto $\overline{u} - \overline{v} = \overline{u} + (-\overline{v})$.

Si $\overline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ y $\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ entonces la **resta de vectores** $\overline{u} - \overline{v}$ es la suma elemento a elemento.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1-u_1 \\ v_2-u_2 \\ \vdots \\ v_m-v_m \end{bmatrix}$$

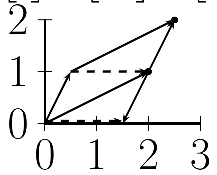
Ejemplo: $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

En Octave la resta se realiza de manera usual

```
[4 ; 3] - [2 ; 5]
```

Gráficamente la resta de dos vectores se representa por la otra diagonal de la ley del paralelogramo.

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0{,}5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}5\\0\end{bmatrix}$$



2.8. Propiedades de la suma y escalar por vector

Como en la suma entre vectores se realizan independientemente varias sumas de reales y como en la multiplicación por escalar también se realizan de manera independiente varias multiplicaciones de reales, entonces la notación usada permite extrapolar algunas propiedades de la suma y multiplicación de reales a la suma entre vectores y multiplicación de escalar con vector.

Proposición 2.1. *Si $a, b, c \in \Re$ y $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ son vectores-n entonces se cumplen las siguientes propiedades*

	Reales	*Vectores*
Suma conmutativa	$a+b=b+a$	$\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$
Mult. conmutativa	$ab=ba$	*Escalar a la izquierda*
Suma asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})$
Mult. asociativa	$(ab)c=a(bc)$	$(ab)\overline{v}=a(b\overline{v})$
Modulativa	$a+0=a$	$\overline{v}+\overline{0}=\overline{v}$
Identidad	$1a=a$	$1\overline{v}=\overline{v}$
Nulidad	$0a=0$	$0\overline{v}=\overline{0}$
Opuesto	$a+(-a)=0$	$\overline{v}+(-\overline{v})=\overline{0}$
Distributiva I	$(a+b)c=ac+bc$	$(a+b)\overline{v}=a\overline{v}+b\overline{v}$
Distributiva D	$a(b+c)=ab+ac$	$a(\overline{u}+\overline{v})=a\overline{u}+a\overline{v}$

2.9. Operación producto punto

El **producto punto** o **producto escalar** entre dos vectores de igual tamaño n da el escalar definido por

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = \begin{bmatrix}1\\4\\2\\3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\2\\7\\5\end{bmatrix} = (1)(3)+(4)(2)+(2)(7)+(3)(5)$$

$$= 3+8+14+15 = 40$$

Proposición 2.2. *1. $\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{v}\cdot\overline{u}$.*

2. $\overline{u}\cdot(\overline{v}+\overline{w}) = \overline{v}\cdot\overline{u}+\overline{v}\cdot\overline{w}$.

3. $c(\overline{u}\cdot\overline{v}) = (c\overline{v})\cdot\overline{u} = \overline{v}\cdot(c\overline{u})$.

4. $\overline{u}\cdot\overline{u} \geq 0$. Además, $\overline{u}\cdot\overline{u} = 0$ si y sólo si $\overline{u} = 0$.

2.10. Magnitud

[NJ99, pag 79]
La **norma**, **longitud** o **magnitud** de un vector $\overline{u}$ es

$$|u| = \sqrt{\overline{u}\cdot\overline{u}}$$

Que en función de los elementos queda

$$\left|\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}\right| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$$

Ejemplo:

$$\left|\begin{bmatrix}3\\4\\1\\5\end{bmatrix}\right| = \sqrt{9+16+1+25} = \sqrt{51}$$

Proposición 2.3. *Si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son dos vectores-n cualquiera, se tiene*

1. $|c\overline{u}| = abs(c)|\overline{u}|$.

2. $|\overline{u}| \geq 0$. Además, $|\overline{u}| = 0$ si y sólo si $\overline{u} = 0$.

3. $|\overline{u}+\overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 + 2\overline{u}\cdot\overline{v}$.

4. Es un caso particular del anterior si $\overline{u}\cdot\overline{v} = 0$ entonces $|\overline{u}+\overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2$.

5. $|\overline{u}-\overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 - 2\overline{u}\cdot\overline{v}$.

6. $abs(\overline{u}\cdot\overline{v}) \leq |\overline{u}|\ \ |\overline{v}|$ la igualdad se da cuando $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son paralelos.

7. $|\overline{u}+\overline{v}| \leq |\overline{u}| + |\overline{v}|$.

2.11. Distancia entre dos vectores o dos puntos

$$dist(\overline{u},\overline{v}) := |\overline{u}-\overline{v}|$$

Proposición 2.4. *Si $\overline{u}, \overline{v}$ y $\overline{w}$ son vectores-m entonces*

1. $dist(\overline{u},\overline{v}) \geq 0$.

2. $dist(\overline{u},\overline{v}) = 0$ si y sólo si $\overline{u} = \overline{v}$.

3. $dist(\overline{u},\overline{v}) = dist(\overline{v},\overline{u})$.

4. $dist(\overline{u},\overline{v}) \leq dist(\overline{u},\overline{w}) + dist(\overline{w},\overline{v})$.

[Ant06, Teorema 4.1.5] Esta distancia se conoce como distancia euclidiana.

Ejemplo:

$$dist\left(\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix}\right)=\left|\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$$

2.12. Vector unitario

Dado un vector $\overline{v}$, el **vector unitario** de $\overline{v}$ es $\hat{v}=\frac{1}{|\overline{v}|}\overline{v}$.

Ejemplo:

Si $\overline{v}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\\5\end{bmatrix}$ entonces $\hat{v}=\frac{1}{\sqrt{51}}\begin{bmatrix}3\\4\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/\sqrt{51}\\4/\sqrt{51}\\1/\sqrt{51}\\5/\sqrt{51}\end{bmatrix}$

Proposición 2.5. *Si $\overline{v}$ es un vector diferente de cero, se tiene*

1. $|\hat{v}|=1$.

2.13. $cos(\alpha)$

La siguiente igualdad se obtiene, por un lado con la ley del coseno, y por otro lado con la magnitud de la diferencia vista antes.

$$|\overline{u}|\ |\overline{v}|cos(\alpha)=\frac{1}{2}(|\overline{u}|^2+|\overline{v}|^2-|\overline{u}-\overline{v}|^2)=\overline{u}\cdot\overline{v}$$

Con esto se encuentra una forma para calcular el coseno entre dos vectores.

$$cos(\alpha)=\frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{u}|\ |\overline{v}|}$$

o lo que es lo mismo.

$$cos(\alpha)=\hat{u}\cdot\hat{v}$$

Dos vectores (diferentes de cero) son **ortogonales** o **perpendiculares** si el producto punto entre ellos es cero. Lo cual implica que el ángulo entre ellos es de 90°.

Los **cosenos directores** de un vector $\overline{v}$ son los cosenos entre $\overline{v}$ y cada uno de los ejes coordenados.

Demuestre en $\Re^2$ que el coseno director de un vector $\overline{v}$ con el eje y es $sen(\alpha)$

2.14. Proyección

[NJ99, pag 86]

La proyección del vector-m $\overline{u}$ sobre el vector $\overline{v}$ se define

$$proy_v(\overline{u})=\frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v}$$

2.15. Problemas

1. Sean $u=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$, grafíque :

   $$2u,\quad -v,\quad 2u+3v,\quad 2u-3v,\quad 2u-3v+w$$

2. Encuentre el perímetro y los ángulos internos del triangulo con puntos

   $$P=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad Q=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\qquad R=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

3. Para el vector $\overline{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ encuentre un vector que
   - un vector unitario paralelo a $\overline{v}$
   - un vector paralelo a $\overline{v}$ con magnitud $9|\overline{v}|$
   - un vector paralelo a $\overline{v}$ con magnitud 9
   - un vector perpendicular a $\overline{v}$
   - un vector unitario perpendicular a $\overline{v}$

4. (Opcional) Imagine una pantalla de 20 pixeles de ancho por 6 pixeles de alto. Escriba las letras FJC, cada letra ocupa un cuadro de 6x6 pixeles.

   Sea $\overline{v_J}$ el vector columna de 36 renglones formado por los pixeles de la letra J (1 si es negro y 0 si es blanco).

   El vector $\overline{u_0}$ corresponde al vector columna de 36 renglones formado por los 6x6 pixeles de la pantalla más a la izquierda. El vector $\overline{u_1}$ es similar a $\overline{u_0}$ pero desplazado una columna a la derecha. El vector $\overline{u_i}$ esta desplazado i columnas a la derecha. El último vector es $\overline{u_{14}}$ formado por las 6 columnas de la pantalla más a la derecha.

En grupos calculen (para i entre 0 hasta 14) el producto punto de los vectores unitarios $\widehat{v_J} \cdot \widehat{u_i}$ e indique en donde da el mayor valor.

Bibliografía

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.