Capítulo 1

Conjuntos y números

1.1. Conjuntos finitos

Los conjuntos se denotan con corchetes, algunos ejemplos de conjuntos finitos son:

$$\mathbb{B} = \{0, 1\},$$
$$\mathbb{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

La cardinalidad de los conjuntos finitos indica el número de elementos.

$$|\mathbb{B}| = 2, \quad |\mathbb{D}| = 10$$

Además se tiene que $5 \in \mathbb{D}$ y $5 \notin \mathbb{B}$.

Otra forma de crear conjuntos es a partir de los conjuntos conocidos. Por ejemplo

$$\{3 * x \mid x \in \mathbb{D} \text{ y } x \notin \mathbb{B}\} = \{6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$$

Esto se lee 'el conjunto de los $3 * x$ tales que x pertenece a $\mathbb{D}$ y x no pertenece a $\mathbb{B}$´.

1.2. Conjuntos infinitos

Algunos conjuntos infinitos con sus respectivas operaciones son

Números naturales: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
Operaciones: suma, producto (o multiplicación) y exponente. La multiplicación entre dos variables a y b se puede denotar ab, $a{\cdot}b$ o $a * b$, esta última se usará especialmente para los lenguajes de programación.

Números enteros: $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Operaciones: suma, producto, exponente y resta (que es sumar el opuesto).

Números racionales: $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{N}\}$, teniendo en cuenta que $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ si y sólo si $a_1 b_2 = a_2 b_1$.
Operaciones: suma (con común denominador), producto, exponente, resta y división (que es multiplicar por el inverso si es diferente de cero).

Números reales: $\Re$. En este conjunto cada número se representa con una sucesión infinita de dígitos entre los cuales hay un punto y comienza con un signo.

$$\pm d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \ldots \qquad \text{con } d_i \in \mathbb{D}$$

Operaciones: suma, producto, exponente, resta, división (con denominador diferente de cero) y raíz cuadrada (de

números no negativos).

Números complejos: $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \Re\}$ en donde $i^2 = -1$.
Operaciones: suma, producto, exponente, resta, división (con denominador diferente de cero) y raíz cuadrada (tomando la raíz con parte real positiva).

Estos conjuntos se relacionan por medio de la contenencia.

$$\mathbb{B} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \Re \subset \mathbb{C}$$

Dos conjuntos son iguales si tiene los mismos elemento, es decir

$$A_1 = A_2 \text{ si y sólo si } A_1 \subseteq A_2 \text{ y } A_2 \subseteq A_1$$

1.3. Propiedades algebraicas de los reales

Sean $a, b, c, a', b' \in \Re$

Igualdad: Si $a = a'$ y $b = b'$ entonces $a + b = a' + b'$, $a * b = a' * b'$, $a^b = a'^{b'}$, $a - b = a' - b'$, $a/b = a'/b'$ (con $b \neq 0 \neq b'$) y $\sqrt[a]{b} = \sqrt[a']{b'}$.

Transitiva: Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.

Módulo 0: $a + 0 = a$

Identidad 1: $a * 1 = a$

Opuesto $-a$: Cada numero a tiene un opuesto $-a$ tal que $a + (-a) = 0$. La resta es sumar por el opuesto.

Inverso a^{-1}: Cada numero $a \neq 0$ tiene un inverso a^{-1} tal que $a * (a^{-1}) = 1$. La división es multiplicar por el inverso.

Conmutativa: $a + b = b + a$ y $a * b = b * a$

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a * b) * c = a * (b * c)$

Distributiva: $a * (b + c) = a * b + a * c$

1.4. Despejar variables de una ecuación

No siempre es posible despejar una variable de una ecuación, pero la mayoría de las ecuaciones utilizadas en este curso si se pueden despejar con el procedimiento que ilustraremos con la siguiente ecuación:

$$\frac{ax}{6b} - \frac{ab + bx}{9} = a$$

1. Colocar TODOS los factores con el mismo denominador. Para encontrar el denominador común yo prefiero ver los números del denominador en sus factores primos:

$$\frac{ax}{3{\cdot}2b} - \frac{ab + bx}{3^2} = a$$

$$\frac{ax}{3{\cdot}2b}\left(\frac{3}{3}\right) - \frac{ab + bx}{3^2}\left(\frac{2b}{2b}\right) = a\left(\frac{3^2 2b}{3^2 2b}\right)$$

$$\frac{3ax}{18b}-\frac{2b(ab+bx)}{18b}+\frac{18b^2x}{18b}=\frac{18ab}{18b}$$

2. Colocar el denominador común colocando paréntesis donde sea necesario en especial si hay que cambiar los signos.

$$\frac{3ax-2b(ab+bx)}{18b}=\frac{18ab}{18b}$$

Como el denominador es el mismo a ambos lados se puede cancelar.

$$3ax-2b(ab+bx)=18ab$$

3. Se realizan las multiplicaciones teniendo en cuenta la multiplicación de signos

$$3ax-2ab^2-2b^2x=18ab$$

4. Dejar los factores con x a la izquierda y el resto a la derecha respetando los cambios de signos.

$$3ax-2b^2x=18ab+2ab^2$$

5. Factorizar y despejar x

$$x(3a-2b^2)=18ab+2ab^2$$

$$x=\frac{18ab+2ab^2}{3a-2b^2}$$

Vamos a ilustrar el mismo procedimiento con la siguiente ecuación:

$$\frac{ax-b^2}{6a^3b}-\frac{ab-ax}{9ab^2}+b^2=a$$

1. Colocar TODOS los factores con el mismo denominador. Para encontrar el denominador común yo prefiero ver los números del denominador en sus factores primos:

$$\frac{ax-b^2}{2\cdot 3a^3b}-\frac{ab-ax}{3^2ab^2}+b^2=a$$

$$\frac{ax-b^2}{2\cdot 3a^3b}\left(\frac{3b}{3b}\right)-\frac{ab-ax}{3^2ab^2}\left(\frac{2a^2}{2a^2}\right)+b^2\left(\frac{2\cdot 3^2a^3b^2}{2\cdot 3^2a^3b^2}\right)=a\left(\frac{2\cdot 3^2a^3b^2}{2\cdot 3^2a^3b^2}\right)$$

2. Colocar el denominador común colocando paréntesis donde sea necesario en especial si hay que cambiar los signos.

$$\frac{(ax-b^2)3b-(ab-ax)2a^2+b^2(2\cdot 3^2a^3b^2)}{2\cdot 3^2a^3b^2}=\frac{a(2\cdot 3^2a^3b^2)}{2\cdot 3^2a^3b^2}$$

Como el denominador es el mismo a ambos lados se puede cancelar.

$$(ax-b^2)3b-(ab-ax)2a^2+b^2(2\cdot 3^2a^3b^2)=a(2\cdot 3^2a^3b^2)$$

3. Se realizan las multiplicaciones teniendo en cuenta la multiplicación de signos

$$ax3b-b^23b-(ab2a^2-ax2a^2)+b^22\cdot 3^2a^3b^2=a2\cdot 3^2a^3b^2$$

$$ax3b-b^23b-ab2a^2+ax2a^2+b^22\cdot 3^2a^3b^2=a2\cdot 3^2a^3b^2$$

$$3abx-3b^3-2a^3b+2a^3x+18a^3b^4=18a^4b^2$$

4. Dejar los factores con x a la izquierda y el resto a la derecha respetando los cambios de signos.

$$3abx+2a^3x=18a^4b^2+3b^3+2a^3b-18a^3b^4$$

5. Factorizar y despejar x

$$ax(3b+2a^2)=18a^4b^2+3b^3+2a^3b-18a^3b^4$$

$$x=\frac{18a^4b^2+3b^3+2a^3b-18a^3b^4}{a(3b+2a^2)}$$

1.5. Problemas

Despeje x y simplifique.

1. $$\frac{ax}{6b}-\frac{ab-bx}{9a^2}=a$$

2. $$\frac{ax}{6b}-\frac{ab-bx}{9a^2}+b=a$$

3. $$\frac{ax}{6b}-\frac{ab-bx}{9a^2}+\frac{x}{3ab}=a$$

Bibliografía

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.