3. 填空：

(1) 正确的公式为______ (a) $(A\otimes B)^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}\otimes B^{\mathrm{H}}$；(b) $(A\otimes B)^{\mathrm{H}}=\mathrm{B}^{\mathrm{H}}\otimes \mathrm{A}^{\mathrm{H}}$

(2) 正确的公式为 ______ (a) $(A\otimes B)^{+}=\mathrm{B}^{+}\otimes \mathrm{A}^{+}$；(b) $(A\otimes B)^{+}=A^{+}\otimes B^{+}$

4.设 $A=\begin{pmatrix} D & D \\ D & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\otimes D$，$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，**求特征根** $\lambda(A)$ **与特式** $|\lambda I-A|$

5.设 $A=\begin{pmatrix} D & iD \\ iD & D \end{pmatrix},(i^2=-1)$，$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，(1)用**张量积求** A^{-1}

(2)求全体**特征根** $\lambda(A)$ **及特式** $|\lambda I-A|$ （**限用**张量积公式）

6. (1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

用**张量积求特征根** $\lambda(A)$ **及特式** $|\lambda I-A|$；**写出题**(1)中的 4 个特征向量.

7. 设 $A=\begin{pmatrix} D & 2D \\ D & 2D \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，**用张量公式** $(C\otimes D)^{+}=C^{+}\otimes D^{+}$ **求 A 的特征根** $\lambda(A)$ **与特征多项式** $|\lambda I-A|$**；求广逆** $A^{+}=?$

8.* 设 $A=A_{m,n}$，$B=A_{p,q}$ **的正奇异值分别为**

$$S_{+}(A)=\{a_1,\cdots a_r\}>0,\ S_{+}(B)=\{b_1,\cdots b_t\}>0,\ \mathrm{r}(A)=r,\mathrm{r}(B)=t$$

则 $A\otimes B$ **的正奇异值为** $S_{+}(A\otimes B)=\{a_i b_j\}$ 共 ***rt*** 个正数（含重复）.

9.* 设 $A=A_{m,n}$，$B=A_{p,q}$ **的正奇异值分别为**

$$S_{+}(A)=\{a_1,\cdots a_r\}>0,\ S_{+}(B)=\{b_1,\cdots b_t\}>0,\ \mathrm{r}(A)=r,\mathrm{r}(B)=t$$

若 A, B **的正 SVD (正奇异值分解)分别为**

$$A=P\Delta Q^{\mathrm{H}},\ B=P\Delta Q^{\mathrm{H}},\ \Delta=\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_r \end{pmatrix},\ \Delta=\begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_t \end{pmatrix}$$

$P,Q,P,\ Q$ 为半优阵：$P^H P=I_r=Q^H Q,\ P^H P=I_t=Q^H Q$

则 $A\otimes B$ **有正 SVD(正奇分解)：** $A\otimes B=(P\otimes P)(\Delta\otimes\Delta)(Q\otimes Q)^H$

提示：用吸收公式有

$$A\otimes B=(P\Delta Q^H)\otimes(P\Delta Q^H)=(P\otimes P)(\Delta\otimes\Delta)(Q\otimes Q)^H.$$

10.*设 $A=\alpha\beta=\alpha\otimes\beta$ 为秩 1 矩阵，其中 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}\neq 0,\ \beta=\begin{pmatrix}b_1 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\neq 0$

求 $\alpha,\ \beta$ 的**正奇分解(正 SVD)**；求秩 1 矩阵 $A=\alpha\otimes\beta$ 的**正 SVD**

参考习题

1.
2.

3.证明 $(A\otimes B)^+=A^+\otimes B^+$.

4.设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}, B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，证明

(1) $(A\otimes B)^3=A^3\otimes B^3$，且 $tr(A\otimes B)^3=tr(A^3)\bullet tr(B^3)$.

(2)若 A 和 B 都是 Hermite 阵，则 $A\otimes B$ 也是 Hermite 阵.
(3)设 A 和 B 都是正交阵，则 $A\otimes B$ 也是正交阵.
(4)若 A 和 B 均为正规矩阵，则 $A\otimes B$ 为正规矩阵.

5.设 $A^2=A$，$B^2=B$，证明：$(A\otimes B)^2=A\otimes B$.

6.(1) 证明分块公式：$\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}\otimes B=\begin{pmatrix}A_1\otimes B & A_2\otimes B\\ A_3\otimes B & A_4\otimes B\end{pmatrix}$

(2) 举例说明 $B\otimes\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}B\otimes A_1\\ B\otimes A_2\end{pmatrix}$，$B\otimes\begin{pmatrix}A_1, & A_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}B\otimes A_1, & B\otimes A_2\end{pmatrix}$.

7.设列向量 $x\in\mathbb{C}^m$，$y\in\mathbb{C}^n$ 证明：

(1) $\|x\otimes y\|_2=\|x\|_2\|y\|_2$；　(2)若 $\|x\|_2=\|y\|_2=1$, 则 $\|x\otimes y\|_2=1$

(3) $xy^T=x\otimes y^T=y^T\otimes x$；　(4) $\overrightarrow{xy^T}=\overrightarrow{x\otimes y^T}=x\otimes y$.

8.设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}, B\in\mathbb{C}^{n\times n}, F\in\mathbb{C}^{m\times n}$,若 A 和 B 没有公共特征值,则

$$\begin{bmatrix}B & 0\\ F & A\end{bmatrix}\text{相似于}\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & A\end{bmatrix}.$$

9.设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，求 $A\otimes B$ 的特征值，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{p\times p}.$$

10.若 A 和 B 是可对角化矩阵，证明：$A\otimes B$ 是可对角化矩阵.

11.求解矩阵方程 $AX+XB=C$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-3&4\\1&0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&3\\-2&2\end{bmatrix}$$

12.设 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&-2\\1&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-2&4\\-3&3\end{bmatrix}$，求解方程 $AX-XB=C$.

13.设 $A=(x_1,x_2,\cdots,x_p)\in\mathbb{C}^{m\times p}$ ，$B=(y_1,y_2,\cdots,y_q)\in\mathbb{C}^{n\times q}$

(1) 证明 $A\otimes B=(x_1\otimes y_1,x_1\otimes y_2,\cdots,x_1\otimes y_q,\cdots,x_p\otimes y_1,x_p\otimes y_2,\cdots,x_p\otimes y_q)$

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_p\in\mathbb{C}^m$ 是 p 个线性无关的向量，$y_1,y_2,\cdots,y_q\in\mathbb{C}^n$ 是 q 个线性无关的向量，证明 pq 个向量 $x_r\otimes y_s$ $(r=1,2,\cdots,p\text{；}s=1,2,\cdots,q)$ 线性无关.

(3) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 有 n 个线性无关的特征向量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，证明 $A\otimes A$ 有 n^2 个线性无关的特征向量.

14.

15.设 $A=(a_{ij})_{m\times m}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，证明 $e^{(A\otimes I_n+I_m\otimes B)}=e^A\otimes e^B$.

16.求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+XB$，$X(0)=C$， 其中

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

17*.若 A 和 B 的特征值都具有负实部，则 $AY+YB=C$ 有唯一解，

且 $Y=-\int_0^{\infty}e^{At}Ce^{Bt}dt$.

提示：若 A 的特征值 λ 都具有负实部，可推出 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{At}=0$. 例如 λ 为 A 极小式的 p 重根，令 $f(x)=e^{tx}$，则 $f(A)=e^{tA}$ 的广谱公式中含有 λ 的项可写成

$$f(\lambda)G_1+f'(\lambda)G_2+\cdots f^{(p-1)}(\lambda)G_p.$$

因为 $\lim_{t\to+\infty} f^{(k)}(\lambda)=\lim_{t\to+\infty} t^k e^{t\lambda}=0$ 可知

$\lim_{t\to+\infty}[f(\lambda)G_1+f'(\lambda)G_2+\cdots f^{(p-1)}(\lambda)G_p]=0$，从而 $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}=0$.

同样有 $\lim_{t\to+\infty} e^{tB}=0$，故 $\lim_{t\to+\infty} e^{At}Ce^{Bt}=0$.

另外可知 $X=e^{At}Ce^{Bt}$ 为 $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+XB$ 的解；

上式两边求积分并利用 $X\left(+\infty\right)=\lim_{t\to+\infty} e^{At}Ce^{Bt}=0$ 可得

$X(\infty)-X(0)=A\int_0^\infty Xdt+(\int_0^\infty Xdt)B$ 或 $A(-\int_0^\infty Xdt)+(-\int_0^\infty Xdt)B=C$

即 $Y=-\int_0^\infty Xdt=-\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt$ 是 $AY+YB=C$ 的唯一解.

18*.若 A 的特征值具有负实部则 $A^HY+YA=-F$，

有唯一解 $Y=\int_0^\infty e^{A^Ht}Fe^{At}dt$，

如果 F 是 Hermite 正定阵，则 Y 也是 Hermite 正定阵.

19*.

20*.若规定矩阵 $\mathbf{Y}=(\mathbf{y_{ij}})$ 的模长为 $\|\mathbf{Y}\|=\sqrt{\sum|\mathbf{y_{ij}}|^2}$，证明矩阵方程：

$\mathbf{AYB}=\mathbf{D}$ 的最佳极小二乘解为 $\mathbf{Y}=\mathbf{A}^+\mathbf{DB}^+$.