例 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$谱半径$\rho(\mathrm{B})$范围是

$h(\mathrm{B}) \le \rho(\mathrm{B}) < \|\mathrm{B}\|_\infty$， 即 $\frac{4}{5} < \rho(\mathrm{B}) < 1$

补充练习题

1 填空**（20 分）（ 矩阵理论 A 2007 ）**

（1） $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的极小多项式为（ ）Jordan 标准型为（ ）

（2）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$， $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \quad (I-A)^{-1} =$ （ ）.

（3） $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$， $A \otimes B$ 的全部特征值为(）.

（4） $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_\infty = (\quad)$, $\|Ax\|_\infty = (\quad)$

（5） $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ $\rho(\mathrm{B})$范围是（ $\frac{4}{5} < \rho(\mathrm{B}) < 1$ ）.

2．(5 分) 设 n 维空间 V 中向量α在第一基下的坐标x与第二基下的坐标y有关系

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, \cdots, y_n = x_n - x_{n-1} \quad .$$

求第一组基到第二组基的过渡矩阵P.

3．(15 分) (1) 设 $A=\begin{pmatrix}6 & 6 & 0\\ -3 & -3 & 0\\ -3 & -6 & 3\end{pmatrix}$， 求 A 与 $\cos(A)$ 的谱分解式．

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$， 求 $f(A)$ 的广义谱分解公式， 并计算 e^{At}

4．(18 分)

(1)设 $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}_{4\times 6}$，求 A^+ 与 Ax=b 的极小范数解或最佳极小二乘解

(2) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求 B 的奇异值分解.

5．(10 分) (1)设 $\|\bullet\|_*$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的矩阵范数，$\alpha=(1,0,\cdots,0)^H\in\mathbb{C}^n$,

验证 $\mathbb{C}^n$ 中的向量范数： $\|x\|=\|x\alpha^H\|_*$ 与矩阵范数 $\|\bullet\|_*$ 是 相容的

(提示：见参考书中定理的证明方法)

(2) 令 $\|A\|_*=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$，是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中矩阵范数，求一个与其相容的向量范数.

6. (8 分) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，用拉直法解矩阵方程 $AY+YB=C.$

7．(6 分) 求矩阵 A 的盖尔圆（讨论特征值的分布）； 并证明行列式

$$\det(\mathbf{A}) > \mathbf{1\cdot 3\cdot 5}\cdots(2n-1).$$ 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 4 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 6 & \cdots & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$