高数公式默写

麦克劳林公式 $x \to 0$

$e^x =$ ______

$\sin x =$ ______

$\cos x =$ ______

$\frac{1}{1-x} =$ ______

$\frac{1}{1+x} =$ ______

$\ln(1+x) =$ ______

$(1+x)^a =$ ______

等价无穷小（除以上，其他重要部分）

$\begin{cases} \sin x - x \sim \text{\_\_\_\_\_\_} \\ \updownarrow \\ \arcsin x - x \sim \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$ $\begin{cases} \tan x - x \sim \text{\_\_\_\_\_\_} \\ \updownarrow \\ \arctan x - x \sim \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

$1-\cos ax \sim$ ______

$a^x - 1 \sim$ ______

其余

(1) $f(x)$、$g(x)$在$x=0$的邻域内C，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

则$\int_0^x g(t)dt \sim \int_0^x f(t)dt$

(2) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\partial}\ln x = \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (\partial > 0) \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\triangle}{\triangle} = \text{\_\_\_\_\_\_} \quad \lim\limits_{\triangle\to 0}(1+\triangle)^{\frac{1}{\triangle}} = \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

间断点

第 I 类：$f(x+0)$、$f(x-0)\exists$

$\begin{cases} \text{可去：\_\_\_\_\_\_} \\ \text{跳跃：\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

第 II 类：

极值点、拐点

(1) $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\begin{cases} >0 & \text{\_\_\_\_\_\_} \\ <0 & \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

$\overset{推}{\Rightarrow} f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(2k-1)}(x_0)=0$

且 $f^{(2k)}(x_0)\begin{cases} >0 & \text{\_\_\_\_\_\_} \\ <0 & \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

(2) $f''(x)>0$ ______

$f''(x)<0$ ______ 凹凸性$\Rightarrow f'(x)$的______性

(3) $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$ ______

$\overset{推}{\Rightarrow} f''(x_0)=f'''(x_0)=f^{(2k)}(x_0)=0$

且 $f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow x_0$是______

注：若$(x_0, f(x_0))$为$f(x)$极值点则

$\begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_} \\ or \\ \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

若$(x_0, f(x_0))$为$f(x)$拐点则

$\begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_} \\ or \\ \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

无穷大 $n\to\infty$

$\log^n a(a>1) < n < n^k(k>1) < a^n(a>1) < n! < n^n$

默一次：

______ < ______ < ______ < ______ < ______

重要不等式：【默一遍】

(1) $2ab$ ___ a^2+b^2

(2) $\frac{x}{1+x}$ ___ $\ln(1+x)$ ___ $x(x>0)$

(3) $0<x<\frac{\pi}{2}$ $\arctan x$ ___ $\sin x$ ___ x ___ $\arcsin x$ ___ $\tan x$

$\sin x$ ___ x ___ $\tan x$

(4) $1+x$ ___ e^x

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots \Rightarrow e^x-(1+x)=\frac{x^2}{2!}+\cdots>0$

(5) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

(6)柯西不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$

一些必备公式

$x^n - 1 =$ ______

$\cos 2x =$ ______

$\tan^2\frac{x}{2} =$ ______

$\tan\frac{x}{2} =$ ______

$\begin{cases} \sec^2 x = \text{\_\_\_\_\_\_} \\ \csc^2 x = \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$ $\begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2}\pm\alpha) = \text{\_\_\_\_\_\_} \\ \cot(\frac{\pi}{2}\pm\alpha) = \text{\_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

求导工具

(1)

$(x^a)'=$ ______ $(c)'=$ ______

$(\sin x)'=$ ______ $(\cos x)'=$ ______

$(e^x)'=$ ______ $(a^x)'=$ ______

$(\log_a x)'=$ ______ $(\ln x)'=$ ______

(2)

$(\tan x)'=$ ______ $(\cot x)'=$ ______

$(\sec x)'=$ ______ $(\csc x)'=$ ______

$(arc\sin x)'=$ ______ $(arc\cos x)'=$ ______

$(\arctan x)'=$ ______ $(arc\cot x)'=$ ______

(3)考前背熟

$\left[\ln(x+\sqrt{x^2\pm1})\right]'=$ ______

$\left[\ln(\sec x+\tan x)\right]'=$ ______

(4)高阶导数

$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=$ ______

$(\sin kx)^{(n)}=$ ______

$(\cos kx)^{(n)}=$ ______

$(uv)^{(n)}=$ ______

(5) $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=$ ______

$\dfrac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt=$ ______

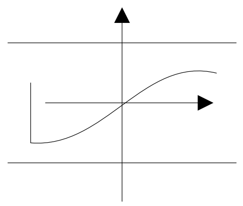
渐近线

(1)铅直渐近线：找______点

$<x=a>$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to a^+)\\(x\to a^-)}} y=\infty$

(2)水平渐近线$<y=A>$



$\lim\limits_{x\to\infty} y=A$ （二条不同的$\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}$） y = ±A V=条

(3)斜渐近线$<y=ax+b>$

$\begin{cases}a= \text{______}\\ b= \text{______}\end{cases}$

积分公式

(1) $\int k dx=$ ______ $\int x^\alpha dx=$ ______

$\int \dfrac{1}{x}dx=$ ______ $\int e^x dx=$ ______

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ ______ $\int a^x dx=$ ______

$\int \dfrac{1}{1+x^2}dx=$ ______

(2) $\int \sec^2 x dx=$ ______ $\int \csc^2 x dx=$ ______

$\int \sec x\tan x dx=$ ______ $\int \csc x\cot x dx=$ ______

$\int \sin x dx=$ ______ $\int \cos x dx=$ ______

(3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$ ______

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=$ ______

$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=$ ______

$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=$ ______

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx \Rightarrow$ 令 ______

（4）

$\int \tan x dx=$ ______

$\int \cot x dx=$ ______

△ $\int \sec x dx=$ ______

△ $\int \csc x dx=$ ______

（5）三角函数替换

$\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow$ ______

$\sqrt{x^2+a^2}\Rightarrow$ ______

$\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow$ ______

定积分重要公式

$N-L$： $\int_a^b f(t)dt=$ ______

对称区间： $\int_{-a}^a f(x)dx=$ ______

$\begin{cases}\text{奇：______}\\ \text{偶：______}\end{cases}$

三角函数：

$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=$ ______

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

$=\begin{cases}\text{______} & \text{奇}\\ \text{______} & \text{偶}\end{cases}$

□ 积分中值定理

$$\begin{cases} ①\int_a^b f(x)dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \delta \in (a,b) \\ ②\int_a^b f(x)g(x)dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \delta \in [a,b] \end{cases}$$

□ Γ 函数

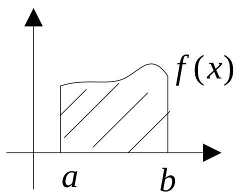
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

$①\Gamma(\alpha+1) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$②\Gamma(n+1) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$③\Gamma(\frac{1}{2}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

□ 面积 or 体积



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

□ 多元函数微分学 $Z = f(x,y)$ $F(x,y,z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \triangleq \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \triangleq \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$dz = \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

若 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 \Rightarrow$ 则__________

eg $\lim\limits_{\rho \to 0} = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (A\Delta x + B\Delta y)}{\rho(Ax + By)} = 0$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\lim\limits_{\rho \to 0} = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (Ax + By)}{\rho} = 0$

关系：

连续　　可偏导

可微

连续可偏导 $\Longleftrightarrow$ 偏导数连续

□ 条件极值与无条件极值

无条件极值

$step1$：$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ 求出驻点 (x_0, y_0)

$step2$：
- 若“求极值”，验证 $\Delta = B^2 - AC$ $\begin{cases} A = \_\_\_\_\_\_, B = \_\_\_\_\_\_, C = \_\_\_\_\_\_ \\ \Delta \_\_\_\_\_\_ 0 \quad \text{才为极值点} \\ \Rightarrow \begin{cases} A < 0 & \_\_\_\_\_\_ \\ A > 0 & \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \end{cases}$
- 若“求最值”，无须验证

条件极值 求 $z = f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的极值

拉格朗日乘数法 令 $F = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \Rightarrow \\ F'_\lambda = 0 \end{cases}$ 求出

微分方程

一阶齐次：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$

通解 $y=$ ______________

一阶非齐：$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$

通解 $y=$ ______________

二阶齐次：$y''+py'+qy=0$

1° 令 ______________，$\triangle=p^2-4q$

$$2^\circ\begin{cases}\triangle>0\Rightarrow \_\_\_\_\_\_, & y_{\text{齐通}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\ \triangle<0\Rightarrow \_\_\_\_\_\_ & y_{\text{齐通}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\ \triangle=0\Rightarrow \_\_\_\_\_\_, & y_{\text{齐通}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}$$

二阶非齐次：$y''+py'+qy=f(x)$

1° 求 ______________，算出 λ_1、$\lambda_2\Rightarrow$ ____________

2° 看 $f(x)$ 的形式：

1） $f(x)=p_n(x)e^{\alpha x}$

$$\Rightarrow y^*=\_\_\_\_\_\_\_\_\begin{cases}\alpha=\_\_\_\_\_\_\_\_\\ k=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}\end{cases}$$

2） $f(x)=e^{\alpha x}\left\lfloor p_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\underset{n>m}{\sin}\beta x\right\rfloor$

$\Rightarrow y^*=$ ____________________

$$\text{其中}\begin{cases}\alpha、\beta\Rightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\ k=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}\end{cases}$$

二重积分

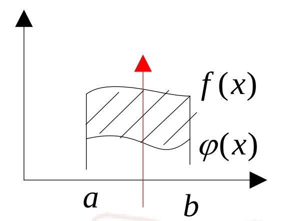
性质

1） $\iint\limits_D f(x,y)d_\sigma$ ______ $\iint\limits_D |f(x,y)|d_\sigma$

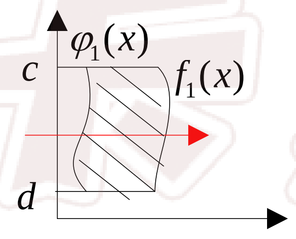
2）当 $m\le f(x,y)\le M$，S 为区域 D 的面积

则 mS ______ $\iint\limits_D f(x,y)d_\sigma$ ______ MS

直角坐标系



1）先 y 后 x $\quad \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{f(x)}g(x,y)dy$



2）先 x 后 y $\quad \int_d^c dy\int_{\varphi_1(x)}^{f_1(x)}g(x,y)dx$

可利用性质：

对称性：利用 x 轴、y 轴对称

利用 $y=x$ 对称 $\Rightarrow x$，y 可对调

极坐标 $d_\sigma=rd_r d\theta$

泰勒公式：

$f(x)=$ ______________________________

有理式拆分：

$\dfrac{1}{(ax+b)(cx+d)}=$ ____________________

$\dfrac{1}{(ax+b)^n}=$ ____________________

$\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)(cx+d)}=$ ____________________

此无法解

□ 级数

(1)常数项级数

判敛：【方法】

①$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n \begin{cases} u_n,v_n\text{都收敛} \Rightarrow \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ u_n,v_n\text{其中一个发散} \Rightarrow \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ u_n,v_n\text{都发散} \Rightarrow \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$

②必要条件：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛______$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

③重要级数：

1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} p\le 1 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ p>1 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发

2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n\begin{cases} |q|\le 1 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ |q|>1 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$ $\quad s=\frac{a_1}{1-q}$

3）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} & \begin{cases} p>1 \\ p=1\text{且}q>1 \end{cases} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} & \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}\ \text{发} \end{cases}$

④针对正项级数：$a_n\ge 0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 有上界$\Rightarrow$收

1）比较审敛法：向零跑的速度快，收敛可能性越高

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases} c & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ 0 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ +\infty & \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

2）比值审敛法：【阶乘】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\begin{cases} \rho<1 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \rho>1 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

3）根值审敛法：【带n次方】

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\begin{cases} \rho<1 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \rho>1 & \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

⑤交错级数及其审敛法：

莱布尼茨审敛法：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$$

$\Rightarrow$收敛

⑥一些$tips$：

添加|　|　$\Rightarrow$ 发散性↑

添加（　）　$\Rightarrow$ 收敛性↑

（2）幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ / $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

①求收敛域：

$step1$:求R $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho \end{cases}$ $\Rightarrow R=\underline{\qquad\qquad\qquad}$

$step2$:单独讨论 $x=\pm R$的敛散性

$step3$:收敛域

$note$:对$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，在$x_0$处条件下收敛，则$R=\underline{\qquad\qquad\qquad}$

②和函数：

1）常见公式：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$e^x=$ ________________

$\sin x=$ ________________

$\cos x=$ ________________

$\frac{1}{1-x}=$ ________________

$\frac{1}{1+x}=$ ________________

$\ln(1-x)=$ ________________ $\ln'(1-x)=$ ________________

$\ln(1+x)=$ ________________

2）分析性质：

逐项可导性质：$(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n x^{n-1}$

逐项可积性质：$\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

注：R 仍是 R，但端点处收敛性须判断

□ 数三专项 背

差分方程

一阶差分：$y_{t+1}-y_t=\triangle y_t$

二阶差分：$\triangle^2 y_t=\triangle(\triangle y_t)=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$

差分方程☆形如：$y_{t+1}+ay_t=f(t)\quad a\neq 0$

(1)齐次：$y_{t+1}+ay_t=0\qquad \lambda_1=-a$

$y_{齐}=$ ________________ C 为∀常

(2)非齐：$y_{t+1}+ay_t=p_m(t)\cdot\lambda_2^t$ 　　仍齐+非齐

$y^*=$ ________________

特：$y_{t+1}+ay_t=p_m(t)$

$y^*=$ ________________