极限、连续

1：“$\frac{0}{0}$”型函数的极限

[1]分子或分母先因式分解，然后约分求值（分子和分母均为有理式）

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

[2]有理化分子或分母，然后约分求值

公式：$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$

$$(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b$$

例 2 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+7x-8}{2+\sqrt[3]{x}}$

[3]利用等价无穷小替换求极限

常见的等价无穷小：变量在变化的过程中，下列各式左边均为无穷小，则

①$\sin$ □～□　　②$\tan$□～□　　③arcsin□～□　　④arctan□～□

⑤ln(1+□)～□　　⑥$e^{□}-1$～□　　⑦1-cos□～$\dfrac{□^2}{2}$　　⑧$(1+□)^{\alpha}-1$～α□

等价无穷小替换的原则：①只对函数的乘积因子可作等价无穷小替换
②该因子首先必须是无穷小量

例 3 求极限(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$　　　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2[(a+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}]$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

(4) 已知 A 为异于 0 的实数，β 为实数，a 为常数，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n^\beta-(n-1)^\beta}=A$，求 A、β

2：“$\frac{\infty}{\infty}$” 型　（分子和分母同时除以变量 x 的次数最高项）

[1]分子和分母均为有理式

例 4 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(3x-4)(5x-7)}{(5x-1)^5}$

[2]分子和分母均为根式

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

3：“$\infty-\infty$”型

[1]通分后，利用因式分解约分等方式求值

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

[2]有理化分子，利用“$\frac{\infty}{\infty}$”型的方法求值

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

4：“1^∞”型　（公式 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e,\lim\limits_{x\to o}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 的利用）

分析：①判断是否是“1^∞”型

②转换成（1+□）$^{\frac{1}{\square}}$的形式

③则 $\lim\limits_{x}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x}$［（1+□）$^{\frac{1}{\square}}$］$^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x}\varphi(x)}=e^a$

例 8 求极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}(3e^{\frac{x}{x-1}}-2)^{\frac{1}{x}}$　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2})^n$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^x=8$，求 a

（4）设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$

（5）设 $a=\max\{a_1,a_2,\ldots a_m\}$，且 $a_k>0\ (k=1,2,\ldots m)$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{{a_1}^n+{a_2}^n+\ldots {a_m}^n}$

5：无穷小量和有界函数的乘积为无穷小量

例 9 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\arctan\dfrac{1}{x}$

6：用洛必达法则求极限

注意：①零因式最好先用等价无穷小替换

②非零因式的极限可以先求出来

[1] “$\dfrac{0}{0}$” 型和 “$\dfrac{\infty}{\infty}$” 型　　（$\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$）

例 10 求极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}[\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}(\ln\dfrac{x+1}{x-1})^{-2}]$　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\sin^{10}x}$　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\int_0^{\tan^2 y}\frac{\sin t}{t}dt)dy}{x^3}$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt}{\sin^2 x}$

（8） $f(x)$ 在 $x=6$ 的邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to 6}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to 6}f'(x)=1995$，求

$$\lim_{x\to 6}\frac{\int_6^x(t\int_t^6 f(u)du)dt}{(6-x)^3}$$

（9）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}-\frac{a}{\sqrt{1+x^2}}}{\int_0^x\frac{\sin bt}{\ln(1+t)}dt}=-2$，试确定常数 a ,b 的值

（10）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}=1$， $\alpha>0,c>0$ 为常数，求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-cx}\int_0^x e^{ct}f(t)dt}{f(x)}$$

［2］“$0\cdot\infty$”　型

$$\lim_x f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}\lim\limits_x\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\lim\limits_x\dfrac{[g(x)]'}{[\dfrac{1}{f(x)}]'}=a\\[2ex]\lim\limits_x\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\lim\limits_x\dfrac{[f(x)]'}{[\dfrac{1}{g(x)}]'}=a\end{cases}$$

其中 $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$

注：①如 f(x)或 g(x)是 ln[φ(x)]的形式，则该函数一般在分子

②分母一般较分子简单

例 12 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1})$　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x}\dfrac{a^x-1}{a-1})^{\frac{1}{x}}$（$a>0$ 讨论）

[3]　“1^∞”　型、“0^0”　型、“∞^0”　型

$$\lim_x[f(x)]^{g(x)}=\lim_x e^{g(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_x\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}=e^{\lim\limits_x\frac{[\ln f(x)]'}{[\frac{1}{g(x)}]'}}=e^a$$

例 13 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-a}{x+a})^x=\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx$，求 a

[4]　“$\infty-\infty$”　型

分析：一般采用通分的方式转化为“$\dfrac{0}{0}$”型和“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，然后利用洛必达法则及等价无穷小替换求极限

例 14 求极限

(1)　$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2})$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\dfrac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1})$（令 $\dfrac{1}{n}=x$）

7:不能用洛必达法则求解的“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型

分析：一般采用等价无穷小替换和无穷小量和有界函数的乘积为无穷小量

例 13 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

8:利用麦克劳林公式求函数的极限

注意: 下列公式中，$x\to 0$

$$(1)\ e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n) \qquad (2)\ \sin x=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n})$$

$$(3)\ \cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \qquad (4)\ \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+o(x^{2n})$$

$$(5)\ (1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

例 14 求极限

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$ （2） $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}]$ （4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{x}-\cot x)$

9:利用定积分的定义求极限

方法：如果 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(a+\dfrac{b-a}{n}\cdot k)=\int_a^b f(x)dx$

例 15 求极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+4k^2}$

解：$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+4k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+4(\frac{k}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+4x^2}dx=\frac{ac\tan 2x}{2}\Big|_0^1=\frac{ac\tan 2}{2}$$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{nx+2k}{n^2}$

解：$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nx+2k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[x+2(\frac{k}{n})]=\int_0^1(x+2t)dt=x+1$$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}$

解：因为$\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}=e^{\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{k}{n})}{n}}$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\dfrac{k}{n})=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1=\ln\dfrac{4}{e}$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}=e^{\ln\frac{4}{e}}=\dfrac{4}{e}$

10:利用级数收敛的必要条件求极限

方法：如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

例 16 求极限（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

解：令$a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot\dfrac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}=\dfrac{1}{4}<1$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}=0$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$（同上）

11:利用夹逼准则求极限

例 17（1）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+n+k}$

12:求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(n,k)$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n,k)=0$， $\lim\limits_{n\to\infty} g(n,k)=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n,k)}{g(n,k)}=1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(n,k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(n,k)$$

例 18 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1)$

解：当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\sim\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{k}{n^2}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}=\dfrac{1}{3}\int_0^1 xdx=\dfrac{1}{6}$

13:已知数列的递推式，证明数列极限存在，并求极限

方法：利用“单调有界函数必有极限”处理

（1）由 $x_n=f(x_{n-1})$ 先判断数列 $\{x_n\}$ 单调，即判断 x_n-x_{n-1} 的正、负或判断 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ 比 1 大还是小

（2）假设 $\{x_n\}$ 的极限存在，并估算极限 a，计算 x_n-a 判断数列 $\{x_n\}$ 有界

（3）求数列 $\{x_n\}$ 的极限 a

例 19（1）求极限 $x_1=\sqrt{6}$，$x_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$，$x_3=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$，.......$x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$

解：因为 $x_n-x_{n-1}=\sqrt{6+x_{n-1}}-\sqrt{6+x_{n-2}}=\dfrac{x_{n-1}-x_{n-2}}{\sqrt{6+x_{n-1}}+\sqrt{6+x_{n-2}}}$

由于 x_n-x_{n-1} 和 $x_{n-1}-x_{n-2}$ 同号，依次类推可知 x_n-x_{n-1} 和 x_2-x_1 同号，故

$x_n-x_{n-1}>0$，即 $x_n>x_{n-1}$，数列单调增加

又因为 $x_n-3=\sqrt{x_{n-1}+6}-3=\dfrac{x_{n-1}-3}{\sqrt{x_{n-1}+6}+3}$

依次类推知 x_n-3 和 x_1-3 同号，即 $x_n<3$ 且 $x_n>0$，故数列 $\{x_n\}$ 单调有界必有极限

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由 $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$ 知 $a=\sqrt{6+a}$ 得 $a=3$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

注意：这里为什么用 x_n 和 3 比较大小判断数列有界呢？因为我们首先假设数列有极限时，算出它的极限为 3，然后用 x_n 和 3 比较。

（2）设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{4}(3x_n+\dfrac{2}{{x_n}^3})$，（$n=1,2,3\ldots$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

分析：可用均值定理确定上、下界

解：因为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}(x_n+x_n+x_n+\dfrac{2}{{x_n}^3})\geq\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\dfrac{2}{x_n}}=\sqrt[4]{2}$

所以数列有下界，又因为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{4}(3+\dfrac{2}{{x_n}^4})\leq 1$

故数列单调减少，有极限为 $\sqrt[4]{2}$

(3) 设 $x_1=\dfrac{1}{2}, y_1=1, x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}, \dfrac{1}{y_n}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{y_{n-1}})$，证明数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 收敛，并且有相同的极限

解：因为 $x_{n-1}>0$，$y_{n-1}>0$，

所以 $\dfrac{1}{y_n}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{y_{n-1}})\geq\dfrac{1}{\sqrt{x_{n-1n-1}}}=\dfrac{1}{x_n}$ 即 $x_n\geq y_n$

又因为 $x_n-x_{n-1}=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}-x_{n-1}=\dfrac{x_{n-1}(y_{n-1}-x_{n-1})}{\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}+x_{n-1}}\leq 0$

即数列 $\{x_n\}$ 有上界 $x_1=\dfrac{1}{2}$

因为 $y_n=\dfrac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}$

而 $y_n-y_{n-1}=\dfrac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}-y_{n-1}=\dfrac{y_{n-1}(x_{n-1}-y_{n-1})}{x_{n-1}+y_{n-1}}\geq 0$

即数列$\{y_n\}$有下界$y_1=1$，故

$1=y_1\le y_2\le\ldots\le y_n\le x_n\le\ldots x_2\le x_1=\dfrac{1}{2}$，故两个数列极限都存在

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$

有$a=\sqrt{ab}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})$　　　求得$a=b$

14:利用幂级数的和函数求极限

例 20 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\ldots+\dfrac{n}{3^{n-1}})$

15：利用积分中值定理求极限

例 21 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx$

16：利用施笃兹定理（stolz）求极限

已知$y_n\to\infty$，并且从某一项起y_n严格单调上升（即存在$N_0\in N$，当$n>N_0$时，

有$y_{n+1}>y_n$）又　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$为有限或为$\pm\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

例 22 求极限

（1）　已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n)}{n^2}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{i}}}$　　　　（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$

17：利用左右极限的定义求函数的极限

例 23（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-1}$（2）$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1+te^{\frac{1}{t}}}{te^{\frac{1}{t}}-\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{t}}$

18：利用导数定义、罗必达法则、麦克劳林公式求含有抽象函数的极限

常用方法：

（1）如果$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

（2）利用等价无穷小替换

（3）函数$f(x)$在$x=x_0$处可导$\Leftrightarrow$函数$f(x)$在$x=x_0$处连续，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

（4）利用导数的定义，即$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(a+\varphi(x))-f(a)}{\varphi(x)}$，其中$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$

例 24（1）设$f(x)$连续，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$，求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin b}{x-a}$

解：因为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$且$\lim\limits_{x\to a}(x-a)=0$，所以$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$

而$f(x)$连续，故$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$即$f(a)=b$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\dfrac{f(x)+f(a)}{2}\cdot\sin\dfrac{f(x)-f(a)}{2}}{x-a}=A\cos f(a)$$

（2）设$f(x)$在x=a 可导，$f(a)$>0，求$W=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}]^n$

解： $W=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}\cdot\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

（3）设$f(x)$在$x=0$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x+\sin x}=2$，求$f'(0)$

解：因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x+\sin x}=2$且$\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))=0$

即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$

又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $f(0)=-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{x}{x+\sin x}=f'(0)\cdot\frac{1}{2}=2$$，故 $f'(0)=4$

（4）已知 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{3^x-1}=2$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$

分析：$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=0$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}\cdot\frac{1}{x\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$

所以 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2\ln 3$

（5）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=1$，求 $f(0), f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值

分析：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导，故 $f(x), f'(x)$ 连续，由于 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=1$ 且

$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，故 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$，即 $f(0)=0$

用罗比达法则 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sin x}=1$，所以 $f'(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\cdot\frac{x}{\sin x}=f''(0)=1$$

（6）α,β 为常数，$f(x)$ 可导 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x+\beta\Delta x)}{\Delta x}$

分析：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x+\beta\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\beta\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=(\alpha-\beta)f'(x)$$

（7）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}}\right)=2$，求 $f(0)$，

$f'(0)$

（8）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导上可导且恒正， $f(1)=1$，又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\dfrac{f(x+x\Delta x)}{f(x)})^{\frac{1}{\Delta x}}=x^{x}$，

求 $f(x)$

（9）设 $f^{\prime}(x_0)$ 存在，则

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$ （2） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h^3)-f(x-h^3)}{h-\sinh}$

（10） $f(x)$ 连续， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$， $f^{\prime\prime}(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$

分析：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 知 $f(0)=0$，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ 知 $f^{\prime}(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{x}{f(x)}\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{\prime}(x)}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{\prime}(x)-f^{\prime}(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}f^{\prime\prime}(0)=2$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^2$

19：求满足泰勒公式的 θ 的极限

具体函数

方法：用 x 表示 θ，求极限

例 25（1）已知 $e^x-1=xe^{\theta x}$ $(0<\theta<1)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

（2）由拉格朗日定理，对任意 x（$-1<x<1$），存在 θ（$0<\theta<1$），使

$\arcsin x=\arcsin x-\arcsin 0=\dfrac{x}{\sqrt{1-\theta^2x^2}}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

抽象函数

方法：如已知 $f(x+h)=f(x)+f^{\prime}(x)x+\dfrac{1}{2}f^{\prime\prime}(x+\theta h)h^2$，

则利用泰勒公式有 $f(x+h)=f(x)+f^{\prime}(x)x+\dfrac{1}{2}f^{\prime\prime}(x)h^2+\dfrac{1}{6}f^{\prime\prime\prime}(x+\theta_1 h)h^3$，

两式相减得

$$f''(x+\theta h)h^2 - f''(x)h^2 = \frac{1}{3} f'''(x+\theta_1 h)h^3$$

即 $\dfrac{f''(x+\theta h) - f''(x)}{\theta h} \cdot \theta = \dfrac{1}{3} f'''(x+\theta_1 h)$

则当 $h \to 0$ 时，有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{3}$

例 26 已知 $f'(x)$ 在 D 上连续， $f''(x) \neq 0$，对 $x_0 + h \in D$ 有

$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\theta h)$（$0<\theta<1$），求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$

20：讨论极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 是否存在

方法：（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a \quad (a\text{为一定值})$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \quad (a\text{为一定值})$

例 27 讨论下列极限是否存在 $\lim\limits_{x\to 0}(\arctan\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}})$

21：分段函数在分段点处的极值、连续的问题

$$y(x) = \begin{cases} f(x) & x > x_0 \\ A & x = x_0 \\ g(x) & x < x_0 \end{cases}$$

⑴ 如y在$x = x_0$处有极值 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$

⑵ 如y在$x = x_0$处有连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x) = A$

(注意罗必达法则的应用)

例 28(1)如 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x<0 \\ (1+x)^{\frac{1}{x}} & x>0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限是否存在

⑵ 已知$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos bx}} & x<0 \\ \dfrac{3}{x}\cdot\ln(\dfrac{1}{1+2x}) & x>0 \end{cases}$ 如果 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，求 b

22：已知极限，求待定系数的值

[1]已知 $\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a$ 且 $\lim\limits_{x}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x}f(x)=0$（注意罗必达法则）

例 29（1）已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}=\dfrac{4}{3}$ 求 a, b

（2）已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\cdot\ln(1-2x)}=1, c\neq0$ 求 a, c 的关系

（3） 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=5,$ 求 a, b

[2]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}-a_0x-b_0\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}+a_0x+b_0}=\begin{cases}0\Leftrightarrow A=0,B=0\\ d\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\ \dfrac{B}{\sqrt{a_1}+a_0}=d\end{cases}\\ \infty\Leftrightarrow A\neq0\end{cases}$$

例 30 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+4x+1}-ax-b)=0$ 求 a, b

[3] $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0\Leftrightarrow 分母次数>分子次数\\ \dfrac{a_0}{b_0}\Leftrightarrow 分母次数=分子次数\\ \infty\Leftrightarrow 分母次数<分子次数\end{cases}$$

(注意罗必达法则的应用)

例 31 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$, 求 a, b

[4]在 1^∞ , 0^0 , ∞^0 等类型中,求待定系数的值

例 32（1）已知 $\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b)^{\frac{1}{x}}=0$, 则 b 应满足什么条件.

（2） 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^x=8$, 求 a

23：用极限表示的函数

例 7（1）讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$ 的连续性

(2) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，如 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求 a,b

24：求函数的间断点并判断间断点的类型

例 33（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$　　（2）$y=\dfrac{x}{\tan x}$

25：线性主部

如果 $\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的**主部**

例 34　1 当 $x\to 0$，选出形如 Cx^n 的主部，并求其对 x 的阶

（1）$\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$　　（2）$\tan x-\sin x$

2 当 $x\to 1$，选出形如 $C(x-1)^n$ 的主部，并求其对 $x-1$ 的阶

（1）e^x-e　　（2）$\ln x$

3 当 $x\to+\infty$，选出形如 Cx^n 的主部，并求其对 x 的阶

（1）$\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$　　（2）$\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$

4 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，求 a,b

5 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，求正整数 n

6 设当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 和 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求 a

7 设当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 和 $\sqrt[a]{x}$ 是等价无穷小，求 a

12 设 $f(x)=e^x-\dfrac{1+bx}{1+ax}$，问 a,b 取何值时，$f(x)$ 在 $x\to 0$ 时是 x 的三阶无穷小

13 设 $f(x)=x^3+\ln(1-x^3)$、$g(x)=ax^n$，在 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim g(x)$，求 a

26：求分断函数的复合函数

例 35（1）设 $f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$，求 $f(f(x))$

（2）设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geq 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x & x\leq 0\\ 2+x & x>0\end{cases}$，求 $f(g(x))$

27：已知函数 $f(x)$ 的定义域，求函数 $f(g(x))$ 的定义域

方法：假设 $f(x)$ 的定义域为 $a<x<b$，则由 $a<g(x)<b$ 求出 x 的范围就是 $f(g(x))$ 的定义域

例 36 当 $0<x<1$ 是函数 $f(x)$ 的定义域，求 $f(\sin 2x)$ 的定义域

28：已知函数 $f(g(x))$ 的定义域，求函数 $f(x)$ 的定义域

方法：假设 $f(g(x))$ 的定义域为 $a<x<b$，则由 $y=g(x)$，其中 $a<x<b$，求出 y 的范围就是 $f(x)$ 的定义域

例 37 当 $0<x<4$ 是函数 $f(x^2-2x+4)$ 的定义域，求 $f(x)$ 的定义域

29：已知函数 $f(x)$ 的表达式和函数 $f(g(x))$ 的表达式，求 $g(x)$ 的表达式及其定义域

例 38（1）已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(g(x))=1-x$，且 $g(x)\geq 0$，求 $g(x)$ 和定义域

（2）已知 $f(x)=\sin x$，$f(g(x))=1-x^2$，求 $g(x)$ 和定义域

30：已知 $f(x)=g(x)$，$x\in(a,b)$

（1）当 $f(x)$ 是奇函数，则在 $x\in(-b,-a)$ 上的函数 $f(x)$ 为 $f(x)=-f(-x)=-g(-x)$

（2）当 $f(x)$ 是偶函数，则在 $x\in(-b,-a)$ 上的函数 $f(x)$ 为 $f(x)=f(-x)=g(-x)$

例 39（1）设函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x\in(2,5)$ 时，$f(x)=\sin x+x^2-2$，求 $f(x)$ 在

$x\in(-5,2)$ 时的表达式

（2）设函数 $f(x)$ 是偶函数，当 $x\in(2,5)$ 时，$f(x)=\sin x+x^2-2$，求 $f(x)$ 在 $x\in(-5,2)$ 时的表达式

31 已知 $f(x)=g(x)$， $x\in(a,b)$，如果 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，求 $f(x)$ 在区间 $(a+nT,b+nT)$ 上的表达式

方法：设 $x=x_1+nT$，其中 $x_1\in(a,b)$，而 $x_1=x-nT$，由于 $f(x)=f(x_1)$

即 $f(x)=g(x_1)=g(x-nT)$

例 40 设 $f(x)$ 是以 a 为周期的周期函数，且当 $x\in(0,a)$ 时，$f(x)=x^3$，求 $x\in(-2a.-a)$ 时，函数 $f(x)$ 的表达式

注意：

1、欧拉公式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，$c$ 为欧拉常数

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n})$

2、利用公式（1）$x_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

（2）$x_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

3、利用 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=k\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=k$ 求极限

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}]$

4、几种常见的极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ **（2）**$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$（$a>0$）**（3）**$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ **（4）**$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$ （6） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n})=0$

（7） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!})=e$

（8） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!})=0$

练习

1 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot\ln(1-\sqrt{x})}{\arcsin\sqrt{\frac{x^3}{3}}\cdot(1-\cos\frac{\sqrt{x}}{2})}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{2\sin\frac{1}{x}}-1)$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

(7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-1}}}{\ln(1+x)\cdot(e^{x-2}-1)}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{2x-1})^{\frac{x^3}{x^2-1}}$

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

(13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x)$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{x^2}$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

(17) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

（18） $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a_1^{\ x}+a_2^{\ x}+\ldots+a_n^{\ x}}{n})^{\frac{1}{x}}$

（19）$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

（20）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos 3x}{x}$

（21）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{2}x}{(x-1)^2}$

（22）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

（23）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

（24）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

（25）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{\ln(1-3x)\cdot\arcsin x^2}$

（26）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-e^x+1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

（27）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x^2}\frac{\ln(1+t)}{1+t}dt}{1-\cos x}$

（28）$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\int_{\sin x}^0 t^3dt}{\int_0^{x^2}\tan tdt}$

（29）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{\tan x-\sin x}$

（30）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin(xt)^2dt}{x^5}$

（31）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\sin x}^0(1+t^2)^{\frac{1}{\arcsin t}}dt}{e^{-x}\sin^n x}$

（32）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}t\sin(x^2-t^2)dt}{x^4}$

（33）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c$（$c\neq 0$），试确定常数$a$,b c的值。

（34）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt}{bx-\sin x}$

（35）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)\cos x}{\sin^4 x}$

（36）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+ae^x)}{\sqrt{1+ax^2}}=4$，求$a$

（37）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^x\frac{\sin^2 t}{t}dt}$

（38）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{x}$

(39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}t^2e^{t^2}\sin tdt}{x^8e^x}$

(40) $\lim\limits_{x\to+1}\ln x\cdot\ln(x-1)$　　（41） $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$ （ $a>0$ ）

(42) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$　　(43) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

(44) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$　　(45) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$

(45) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)})$　　(46) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

(47) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$　　(47) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

(48) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$　　（49） $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x^2}e^{-x}$

注意:在第(48)题中最好做 $t=\frac{1}{x}$ 代换，然后把 $f(t)$ 在 $t=0$ 处按麦克劳林公式展开

（50） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2})$

（51） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})$　　（52） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{k}{n}-\sin\frac{k}{n}}{n+n\sin\frac{2k}{n}}$

（53） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n}{n}}}{n}$　　（54） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

（55） $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}})$

（56） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$　　(57) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sin\frac{ka}{n^2})$

2（1）设 $0\le a\le1, x_1=\frac{a}{2}, x_{n+1}=\frac{a}{2}+\frac{x_n^{\ 2}}{2}$，（ $n=1,2,3\ldots$ ），求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

（2）设 $x_1=1, x_{n+1}+\sqrt{1-x_n}=0$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

(3) 设 $u_0 < v_0, u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1}), v_n = \frac{1}{3}(u_{n-1} + 2v_{n-1})$，证明数列 $\{u_n\}$ 、$\{v_n\}$ 收敛，并且有相同的极限

（4） $x_1 = \sqrt{2}$， $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

（5） $x_1 = a$， $x_n = \sin x_{n-1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

（6）设 $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$，（$n = 1,2,3\ldots$），求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

（7） $a_0 = 0, a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{4}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

（8） $x_1 > 0$，且 $x_{n+1} = \frac{3(x_n + 1)}{x_n + 3}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

（9） $a_n > 0$， $a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

（10） $a_1 = a_0 = 1$， $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

（11） $a < b, x_0 = a, x_1 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

3 求极限（1） $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots \sqrt[n]{n}}{n}$ （2） $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sin \frac{\theta}{i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2 \sin \frac{\theta}{i}}{n^2}$

4 讨论极限（1） $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1})$ （2） $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|})$

5（1）设 $f(x)$ 为奇函数（偶函数），且 $f'(-3) = 2$，求 $f'(3)$

（2）设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x)>0, f(0)=f'(0)=0$，$u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距。

(1) 求 $u(x)$，并证明当 $x\to 0^+$ 时，$u(x)$与 $\dfrac{x}{2}$ 等价；

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{u(x)} f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$。

（3）设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=1-(x-a)|x-a|+g(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{(x-a)^2}=1$，则 $f'(a)$

（4）设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$

（5）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(0)>0, f(0)=f'(0)=0$，t 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴的截距，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(t)}{tf(x)}$.

（6）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，试求 $f(0)$，$f'(0)$ 及 $f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

（7）已知 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$

（8）$f(x)$ 在 x_0 可导，$a_n\to 0$，$b_n\to 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+a_n)-f(x_0-b_n)}{a_n+b_n}$

（9）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3})=1$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$

（10）如 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3})=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

（11）设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+2h)-f^2(x-h)}{h}$

（12）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\sin\dfrac{1}{n}\right\}^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}$

6 已知 $x\geq 0$，$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，证明（1）$\dfrac{1}{4}\leq\theta(x)\leq\dfrac{1}{2}$，（2）求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)$

7（1）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的附近有定义，且 $f''(a)=f'''(a)=\ldots f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，$f^{(n)}(a)$ 在 $x=a$ 处连续，且 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$

（2）设 $f(x)$ 在点 x_0 某邻域内二阶可导，$f'''(x_0)$ 存在且不为零，由泰勒公式有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0+\theta h)h^2\quad(0<\theta<1)$$

求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$

8 讨论极限是否存在

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4\sin^2\dfrac{x}{2}}}{x}$　　　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{3x}-3e^{-2x}}{4e^{3x}+e^{-2x}}$

9（1）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(\tan x-\sin x)}{x^3} & x<0\\ -1 & x=0\\ \dfrac{\ln[1+(a+b)x]}{x} & x>0\end{cases}$ 在 x=0 处连续, 求 a, b

（2）$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x\neq 0\\ c & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f'(x)>0$，$f(0)=0$ ①确定常数 c，使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续②在①的结果下，问 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续

10(1)如 $x \to 0$ 时, $e^x - (ax^2 + 6x + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a

（2）已知 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a \arctan x + b(1 - \cos x)}{c \cdot \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$，$a^2 + c^2 \neq 0$　求 a, c 的关系

11(1)选取适当的 a、b，当 $x \to -\infty$ 时， $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} - (ax + b)$ 为无穷小

(2)如 $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{ax^2 + 2bx + c} - \alpha x - \beta) = 0$，其中 $a > 0$，求 α, β，并求极限

(3)已知 $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{ax^3 + 5x^2 + 4}{x^2 + 2} - ax - b) = 3$, 求 a, b

12（1）讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{t \to x} (\dfrac{x-1}{t-1})^{\frac{t}{x-t}}$ 的连续性

(2)设 $f(x) = \lim\limits_{t \to \infty} x(\dfrac{t+x}{t-x})^t$,求 $f'(1)$

13(1)设当 $x \to 0^+$ 时，$\sqrt{b} \arctan \sqrt{\dfrac{x}{b}} - \sqrt{a} \arctan \sqrt{\dfrac{x}{a}}$ $(b > a > 0)$是 x 的几阶无穷小

(2)设当 $x \to 0$ 时，$(1+x)^x - 1$ 是 x 的几阶无穷小

(3)设当 $x \to 0$ 时， $f(x) = x - (a + be^{x^2}) \sin x$ 是 x 的 5 阶无穷小，求 a, b

(4)设 $f(x) = (a + b \cos x) \sin x - x$，问 a, b 取何值时， $f(x)$ 在 $x \to 0$ 时是 x 的五阶无穷小