2021考研数学思维导图 概率论与数理统计篇

基本概练

样本空间: 随机试验的每一种结果称为样本点, 样本点的全集是样本空间

事件: 样本空间的子集称为随机事件

事件的差:记作A-B:事件A发生而事件B不发生

事件的交:记作AB:事件AB同时发生

事件的并:记作A+B或AUB:事件A或B至少有一个发生

事件之间的关系 → 事件的非:记作A事件A不发生

事件的包含:事件A发生必然导致事件B发生,称为事件B包含A A⊂B

事件相等:两事件同时发生,且彼此包含,记作A=B

互斥事件:事件A与B的关系式相交为空,是指AB不能同时发生

交换律: AUB=BUA A∩B=B∩A

结合律: AU(BUC)=(AUB)UC

分配律: A∩(BUC)=(A∩B)U(A∩C)

对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

事件的基本运算规律

概率定义: A包含于样本空间

对于任意事件A P(A)≥0 对于必然事件 P(Ω)=1

对于两两互斥的无穷事件 $P(A_1 + \cdots A_n) = P(A_1) + \cdots P(A_n)$

条件概率P(A) > 0,称为事件A发生的条件下B发生的概率 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

事件的独立性: AB两事件满足, 称为AB两事件相互独立

 $P(\emptyset) = 0$

 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

概率的性质 P(A)=

P(A) = 1 - P(A)

 $A \subset B, P(A) \leq P(B)$

 $0 \le P(A) \le 1$

加法公式: P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)

减法公式: P(A-B)=P(A)-P(AB)

乘法公式: P(A)>0时, P(AB)=P(A)P(A|B)

概率的五大公式

全概率公式: $\sum_{i=1}^{n} B_{i} = \Omega$, $B_{i}B_{j} = \emptyset$, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_{i})P(A \mid B_{i})$

贝叶斯公式: $\sum_{i=1}^{n} B_{i} = \Omega$, $B_{i}B_{j} = \emptyset$, P(A) > 0, $P(B_{j} | A) = \frac{P(B_{j})P(A | B_{j})}{\sum_{i=1}^{n} P(B_{i})P(A | B_{i})}$, $j=1,2,3\cdots$

古典概率模型: 当试验结果有有限N个样本点,且每个样本点发生的概率相等,如果事件A由n个样本点组成: $P(A) = \frac{n}{N} = \frac{A包含样本点样 A 点总数$

几何概型: 样本空间为某区域(可以是一维二维三维),试验出现在区域的可能性相等,则事件A发生的可能性 $P(A) = \frac{\Omega_A$ 几何度量 Ω 几何度量

三种概率模型

n重伯努利**试**验:把随机试验重复若干次,事件之间相互独立,同一事件概率相同,实验结果只有两个,事件A的概率为P(A) = k, $C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

1/8

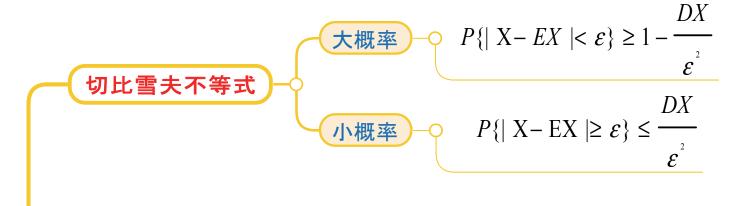
第一章 概率与事件

概率密度fx关于x等于µ对称。

随机变量及其概率分布

工维随机变量 (X,Y) 的分布 $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y), x, y \in (-\infty, +\infty)$ $F(x) = P(X \le x) = P(X \le x, y < +\infty) = F(x, +\infty)$ 维随机变量的边缘分布 二维随机变量及其分布 $F(y) = P(Y \le y) = P(X < +\infty, Y \le y) = F(+\infty, y)$ 二维随机变量的条件分布 $F_{x|y}(x \mid y) = P(X \le x \mid Y = y) = \frac{P(X \le x, Y = y)}{P(Y = y)}$ ──如果随机变量xy可能取值为有限个或无穷个xy,则称为二维离散型随机变量。 维离散型随机变量的概率分布 P(X = x, Y = y) = p $pi \cdot = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = x_{i}, Y = y_{j}) = \sum_{j=1}^{+\infty} pij$ $p \cdot j = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = x_{j}, Y = y_{j}) = \sum_{j=1}^{+\infty} pij$ 维离散型随机变量的边缘分布。 维离散型随机变量 二维离散型随机变量的条件分布 $P\{X = x_{i} \mid Y = y_{j}\} = \frac{P(X = x_{i}, Y = y_{j})}{P(Y = y_{j})}$ 定义 如果对随机变量xy的分布函数存在非负函数。 $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) du dv$ F(X,Y)关于x和关于Y均单调不减 二维连续性随机变量及其概率密度 F(X,Y)关于x和关于y是右连续的。 对于任意的xy均有0<=F(X,Y)<=1 F(X,Y)的性质 $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ $F(+\infty, +\infty) = 1$ (1) $f(x, y) \ge 0$ $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的性质 $(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 1$ (3) $P((x, y) \in D) = \iint f(x, y) dxdy$ 离散型随机变量x和y相互独 随机变量的独立性 $pij = pi \cdot p \cdot j$ 随机变量相互独立充要条件。 <u>连续型随机变量x和y相互独立的重要条件。</u> $f(x, y) = f_{x}(x) f_{y}(y)$ 维均匀分布如果二维连续型随机变量,xy的概率密度为 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{G} \\ \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{0}} \end{cases}$ 二维均匀分布和二维正态分布。 : 维正态分布。如果二维连续性随机变量,xy的概率密度为 \longrightarrow $(X,Y)\sim N(\mu,\mu,\sigma',\sigma',\rho)$

<u>离散型随机变量的数学期望。</u> $P(X = x_k) = pk, k = 1.2.3$ 数学期望 连续型随机变量的数学期望。 $E(X) = \int_{0}^{\infty} f(x) dx$ C为常数则E(C)=C 设x是随机变量,c是常数则有,E(CX)=CE(X) 数学期望的性质 设x和y是任意两个随机变量则有。 $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$ 随机变量,x和y相互独立,E(XY)=E(X)E(Y) 随机变量x的函数y等于g(x)的数学期望 $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx$ 随机变量的数学期望和方差 随机变量xy的函数z等于g(xy)的数学期望 $E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$ $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 标准差 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ 设c为常数则D(C)等于0。反之D(X)=0,不能得出x为常数 X为随机变量a和b为常数则有 $D(aX+b)=a^2D(X)$ 方差的性质 随机变量x和y相互独立,D(X±Y)=D(x)+D(Y) (0—1) 分布 E(X) = p, D(X) = p(1-p)二项分布, $X \sim B(n,p)$ \longrightarrow E(X) = np, D(X) = np(1-p)泊松分布, X~P(λ) \rightarrow $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$ $E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 常见随机变量的数学期望和方差 $E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ 正态分布 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma$ X是随机变量, E(Xn)称为x的n阶原点矩 X是随机变量, $E[(X-E(X))^n]$ 称为x的n阶中心矩。 $\operatorname{cov}(X, Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)]$ $\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$ 相关系数 矩,协方差和相关系数。 cov(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2 \operatorname{cov}(X, Y)$ 协方差的公式与性质 \longrightarrow cov(X, Y) = cov(Y, X)cov(aX, bY) = abCov(X, Y) $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$



第五章 大数定律和中心极限定理

切比雪夫大数定律

设X1到Xn为两两不相关的随机变量。

$$\lim_{n \to \infty} P\{ | \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_{i}) | < \varepsilon \} = 1$$

伯努利大数定律

随机变量X~B(n,p)

$$\lim_{n \to +\infty} P\{ \left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \} = 1$$

大数定律

辛钦大数定律

随机变量独立同分布, 数学期望等于µ

$$\lim_{n \to +\infty} P\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{i} - \mu \right| < \varepsilon \} = 1$$

随机变量Xn~B(n,p),则有

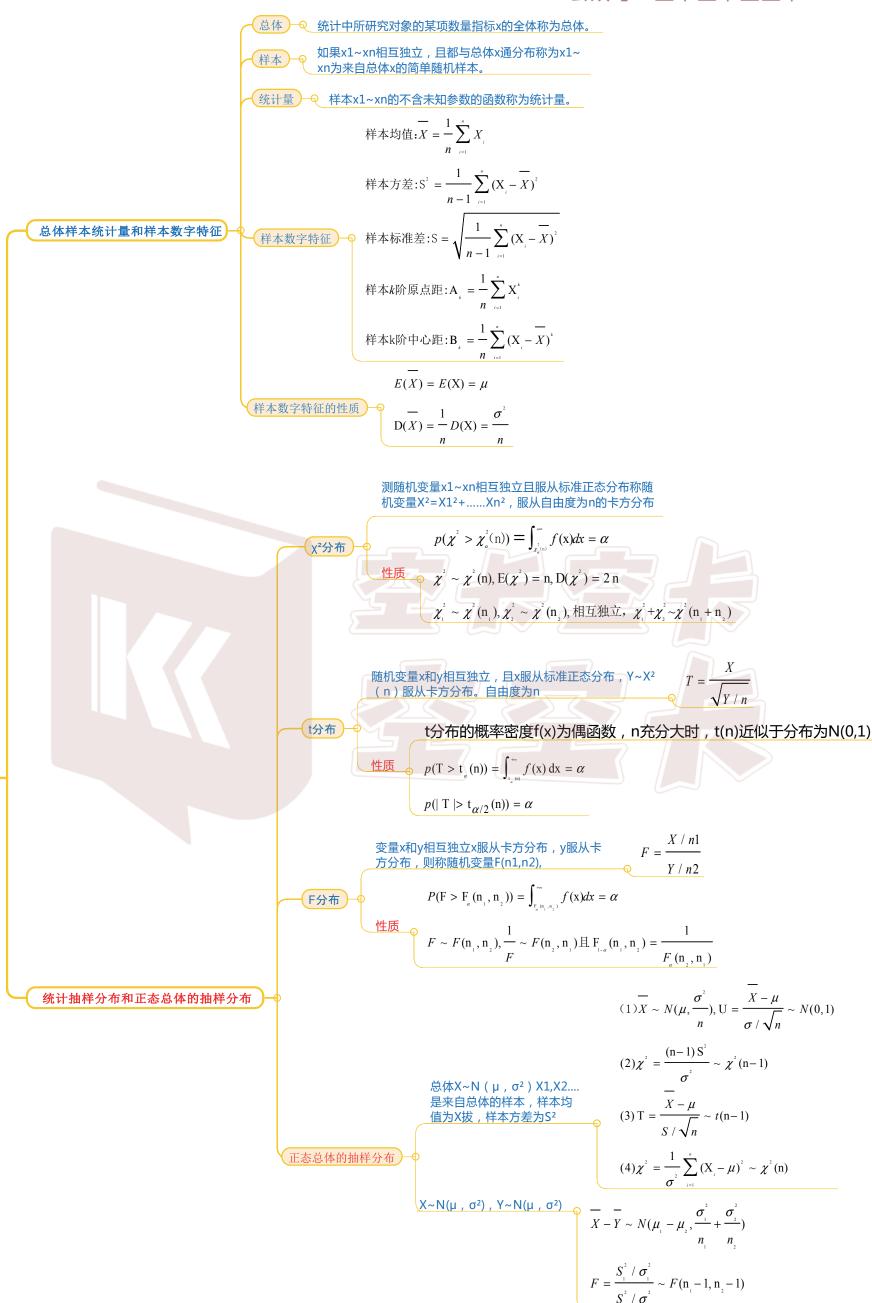
$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\} = \Phi(x)$$

中心极限定理

随机变量x1~xn独立同分布,数学期望与方差 $EXn=\mu,DXn=\sigma^2$

$$\sum_{n \to +\infty} X_{i} - n\mu$$

$$\lim_{n \to +\infty} P\{\frac{1}{\sqrt{n\sigma}} \le x\} = \Phi(x)$$



第八章 假设检验(数三不看)

假设检验基本步骤

2、选定统计方法,由样本观察值按相应的公式计算出统计量的大小,如X2值、t值等。根据资料的类型和特点,可分别选用Z检验,T检验,秩和检验和卡方检验等

3、根据统计量的大小及其分布确定检验假设成立的可能性P的大小并判断结果。

假设检验注意事项

- 1、作假设检验之前,应注意资料本身是否有可比性
- 2、当差别有统计学意义时应注意这样的差别在实际应用中有无意义
- 3、根据资料类型和特点选用正确的假设检验方法
- 4、根据专业及经验确定是选用单侧检验还是双侧检验
- 5、判断结论时不能绝对化,应注意无论接受或拒绝检验假设,都有判断错误的可能性

假设检验的两类错误。

第一类错误: 弃真错误(原假设为真时拒绝原假设), 概率为α

第二类错误: 取伪错误(原假设为伪时接受原假设), 概率为β

一个正态总体参数的假设检验表(置信度水平α)

	检验法	假设 H_0	假设 H_1	检验统计量	抽样分布	拒绝条件 $A(P(A)=\alpha)$
	U 法 (σ²已知)	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	N(0,1)	$ U \ge u_{\alpha/2}$
		$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$			$U \ge u_{\alpha}$
		$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$U \leq -\mu_{\alpha}$
	T 法 (σ²未知)	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	t(n-1)	$ T \ge t_{\alpha/2}$
		$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$			$T \ge t_{\alpha}$
		$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$T \leq -t_{\alpha}$
	χ^2 法	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$0 \le \chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}$ 或 $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}$
		$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$			$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}$
		$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$			$0 \le \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$

正态总体参数的假设检验。