1-时间复杂度

Knowledge Auspice Vinson

1.1 概念

> 算法的渐进时间复杂度，简称时间复杂度
>
> 分为 *事后分析* 和 *事前分析* 两种

事前分析

1. 算法采用的策略和方案
2. 编译产生代码质量
3. 问题的输入规模
4. 机器执行指令的速度

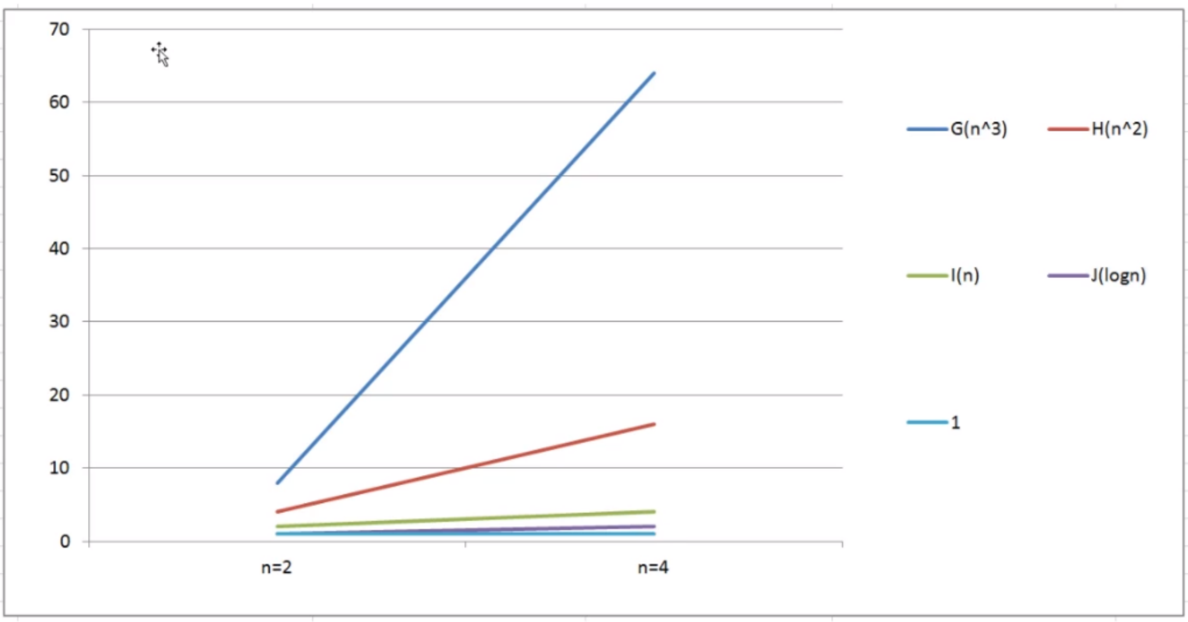
`将核心操作的次数与输入规模关联`

1.1.1 函数渐进增长

> 给定两个函数 *f(n)* 和 *g(n)* ，如果存在一个整数 *N* 使得对于所有 *n >N* , *f(n)* 总是比 *g(n)* 大，那么我们称 *f(n)* 的渐进增长快于 *g(n)*

`规则`

- 随着数规模的增大，与最高次项相乘的常数可以忽略
- 最高次数大的，随着n的增长，结果增长也会越大
- 算法函数中n最高次幂越小，算法效率越高



结论

- 算法函数中的常数可以忽略
- 算法函数中最高次幂的常数因子可以忽略
- 算法函数中最高次幂越小，算法效率越高

1.1.2 大O记法

> 语句总的执行次数 *T(n)* 是关于问题规模 n 的函数，进而分析 *T(n)* 随着 n 的变化情况并确定 *T(n)* 的量级。记为 **T(n) = O(f(n))**
>
> 表示随着问题规模 n 的增大，算法执行时间的增长率和 *f(n)* 的增长率相同
>
> *f(n)* 表示问题规模 n 的某个函数

- 执行次数 <=> 执行时间

规则

- 用常数1取代运行时间中的所有常数
- 在修改后的次数中，只保留高阶项
- 如果最高阶项存在且常数因子不为1，则去除常数因子

1-100求和

```
# 累加
public static void main(String[] args){
    int sum = 0;//执行一次
    int n = 100;//执行一次
    for(int i = 0; i <= n;++i){//执行n+1次
        sum += i;//执行n次数
    }

    System.out.println("sum=",sum);
}
# 执行 2n+3 次
# 大O记法 O(n)
# -------------------------------------------
# 高斯公式
public static void main(String[] args){
    int sum = 0;//执行1次
    int n = 100;//执行1次
    sum = (n+1)n/2;//执行1次
    System.oput.println("sum=",sum);
}
# 执行3次
# 大O记法 O(1)
```

最坏情况

> 查找问题

```
public int search(int num){
    int[] arr = [11,10,8,9,7,22,23,0];

    for(int i = 0;i < arr.length;++i){
        if(num == arr[i])
            return i;
    }

    return -1;
}
```

最好情况:

- 查找的第一个数字就是期望数字，*O(1)*

最坏情况:

- 查找的最后一个数字，才是期望数字，*O(n)*

平均情况:

- 任何数字查找的平均成本为 *O(n/2)*

1.1.3 时间复杂度排序

$$O(1) < O(logn) < O(nlogn) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$$

1.2 简单时间复杂度分析

1.2.1 非函数调用

1. 线性阶

> 非嵌套设计线性阶，随输入规模的扩大，呈直线增长

```
int sum = 0;//执行一次
int n = 100;//执行一次
for(int i = 0; i <= n;++i){//执行n+1次
    sum += i;//执行n次数
}
```

2. 平方阶

> 循环嵌套

```
int sum = 0;
int n = 100;
for(int i = 1;i <= n;++i){//执行 n+1 次
    for (j = 1;j <= n;++j){//执行 n*(n+1) 次
        sum += i;//执行 n^2 次
    }
```

3. 立方阶

> 三层嵌套循环

4. 对数阶

```
int i=1,n=100;
while(i < n){
    i = i*2;
}
```

循环次数：

$$x = log_2 n$$

时间复杂度：

$$O(logn)$$

> 对数阶，由于输入规模 n 的增大，不管底数多少，增长率都相同，所以忽略底数

5. 常数阶

1.2.3 函数调用

1.

```java
public static void main(String[] args){
    int n = 100;
    for(int i = 0;i < n;++i){
        show(i);
    }
}

private static void show(int i){
    System.out.println(i);
}
```

> 时间复杂度为 *O(n)*

2.

```java
public static void main(String[] args){
    int n = 100;
    for(int i = 0;i < n;++i){
        show(i);
    }
}

private static void show(int i){
    for(int j = 0;j < i;++j){
        System.out.println(i);
    }
}
```

> 时间复杂度 *O(n^2)*

1.3 计算方法

一般法则

- *for* 循环
    - 一次 *for* 循环至多是该 *for* 循环包含的 **内语句运行时间** 乘 **迭代次数**
- 嵌套的 *for* 循环
    - 从里到外分析循环
- 顺序语句
    - 各语句运行时间求和
- *if/else* 语句
    - 两执行函数中运行时间长的

1.3.1 循环主体中的变量参与循环条件的判断

找出主体语句中与 *T(n)* 成正比的循环变量，将之代入条件运算

```
int i = 1;
while(i <= n){
    i = i*2;
}
```

> 执行次数 t ，有 $2^t \leq n$,得 $T(n) = O(log_2 n)$

```
int y = 5;
while((y+1)*(y+1)){
    y = y+1;
}
```

> 执行次数 $t = y - 5$,有 $y = t + 5$,代入得 $t < \sqrt{n} - 6$,即 T(n) = O($\sqrt{n}$)

运算时间中的对数

- **如果一个算法用时间O(1)将问题的大小削减为原来的一部分，那么该算法就是O(logN)**
- **如果用常数时间把问题减少一个常数，那么这种算法就是O(N)**

折半查找

```
int BinarySearch(const ElementType A[],ElementType X,int N){
    int Low,Mid,High;

    Low = 0,High = N-1;
    while(Low <= High){
        Mid = (Low+High)/2;
        if(A[Mid] < X){
            Low = Mid + 1;
        }else{
            if(A[Mid] > X){
                High = Mid-1;
            }else{
                return Mid; //Found
            }
        }
    }

    return NotFound; //NotFound is defined as -1
}
```

分析：提供了 *O(logN)* 以内的查找操作，但所有其他操作均需要 *O(N)*

欧几里得算法

定理：如果 $M > N$,则 $M \bmod \mathrm{N} < \frac{M}{2}$

```
unsigned int Gcd(unsigned int M,unsigned int N){
    unSigned int Rem;

    while(N > 0){
        Rem = M % N;
        M = N;
        N = Rem;
    }

    return M;
}
```

幂运算

```
long int Pow(long int X,unsigned int N){
    if(N == 0)
        return 1;
    if(N == 1)
        return X;
    if(isEven(N))
```

```
            return Pow(X*X,N/2);
        else
            return Pow(X*X,N/2) * X;
    }
```

1.3.2 循环主体中的变量与循环条件无关

> 采用归纳法或直接累计循环次数

多层循环从内到外分析，忽略单步语句、条件判断语句，只关注主体语句的执行次数

非递归程序

> 直接累计次数即可，参见-简单的时间复杂度分析

递归程序——分治策略

递归程序四条准则

- 基准情形：有结束条件
- 不断推进：每次调用都朝向基准情形推进
- 设计法则：假设所有的递归调用都能进行
- 合成效益法则：避免重复计算

“分治”策略

- ”分“：将大问题大致分为两大致相等的子问题，用递归求解
- “治”：将两个子问题的解合并到一起并可能再做些少量的附加工作，得到整个问题的解

C. 通用分治递推式（主方法）

大小为n的原问题分成若干个大小为n/b的子问题，其中a个子问题需要求解，而cn^k是合并各个子问题的解需要的工作量。

$$T(n)=\begin{cases} c & n=1 \\ aT(n/b)+cn^k & n>1 \end{cases}$$

$$T(n)=\begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a>b^k \\ O(n^k \log_b n) & a=b^k \\ O(n^k) & a<b^k \end{cases}$$

`eg`

已知

$$\begin{cases} T(1)=1 \\ T(N)=2T(\frac{1}{2})+O(N) \end{cases}$$

1. 等号右边连续代入递归关系

$$
\begin{aligned}
T(N) &= 2T(\frac{N}{2}) + N \\
&= 2[2T(\frac{N}{4}) + \frac{N}{2}] + N \\
&= 2\{2[2T(\frac{N}{8}) + \frac{N}{4}] + \frac{N}{2}\} + N \\
&= \dots \\
&= 2^k T(\frac{N}{2^k}) + kN
\end{aligned}
$$

由 $k = logN$ 得

$$T(n) = NT(1) + NlogN = Nlog(N) + N$$

2. 叠缩求和

> 用 N 去除递归关系中的两边，不断替换

$$\frac{T(N)}{N} = \frac{T(\frac{N}{2})}{\frac{N}{2}} + 1$$

$$\frac{T(\frac{N}{2})}{\frac{N}{2}} = \frac{T(\frac{N}{4})}{\frac{N}{4}} + 1$$

$$\frac{T(\frac{N}{4})}{\frac{N}{4}} = \frac{T(\frac{N}{8})}{\frac{N}{8}} + 1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{T(2)}{2} = \frac{T(1)}{1} + 1$$

将等号左边的所有相相加等于右边所有项的和，结果为

$$\frac{T(N)}{N} = \frac{T(1)}{1} + logN$$

$$= Nlog(N) + N$$

1.4 常见算法时间复杂度总结

描述	增长的数量级	说明	举例
常数级	1	普通语句	将两个数相加
对数级	logN	二分策略	二分查找
线性级	N	单层循环	找出最大元素
线性对数级	NlogN	分治思想	归并排序
平方级	N^2	双层循环	检查所有元素对
立方级	N^3	三层循环	检查所有三元组
指数级	2^N	穷举查找	检查所有子集

1.5 最大子序列和问题的解

1.5.1 遍历所有子串，对子串的子序列依次求和

```
int MaxSubSequenceSum(const int A[],int N){
    int ThisSum,MaxSum,i,j,k;

    MaxSum = 0;
    for(i = 0;i < N;++i){
        for(j = i;j < N;++j){//遍历所有子串
            ThisSum = 0;
            for(k = i;k <= j;++k)//当前子串的所有子序列求和
                ThisSum += A[k];

                if(ThisSum > MaxSum){
                    MaxSum = ThisSum;
                }
        }
    }

    return MaxSum;
}
```

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i}^{N-1}\sum_{k=i}^{j}1$$

$$\sum_{k=i}^{j}1=j-i+1$$

$$\sum_{j=i}^{N-1}j-i+1=\frac{(N-i+1)(N-i)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(N-i+1)(N-i)}{2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{(N-i+1)(N-i)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}i^2-(N+\frac{3}{2})\sum_{i=1}^{N}i+\frac{1}{2}(N^2+3N+2)\sum_{i=1}^{N}1$$

$$=\frac{N^3+3N^2+2N}{6}$$

时间复杂度为 $O(N)$

1.5.2 记录中间累加量

$$\sum_{k=i}^{j} A_k = A_j + \sum_{k=i}^{j-1} A_k$$

```
int MaxSubSequenceSum(const int A[],int N){
    int ThisSum,MaxSum,i,j,k;

    MaxSum = 0;
    for(i = 0;i < N;++i){
        ThisSum = 0;
        for(j = i;j < N;++j){//遍历所有子串
            ThisSum += A[k];

            if(ThisSum > MaxSum){
                MaxSum = ThisSum;
            }
    }
    return MaxSum;
}
```

时间复杂度为 $O(N^2)$

1.5.3 分治法

> 将序列分成大致相等的两部分。

最大子序列和可能在三处出现：

- 数据的左半部分；
  - 递归求解
- 数据的右半部分；
  - 递归求解
- 中间部分
  - 分别求出前、后部分的最大和，相加中间部分最大和

```
int MaxSubSum(const int A[],int Left,int Right){
    int MaxLeftSum,MaxRightSum;
    int MaxLeftBorderSum,MaxRightBorderSum;
    int LeftBorderSum,RightBorderSum;
    int Center,i;

    if(Left == Right){//只有一个元素
        if(A[Left] > 0)//该元素非负即为最大和
```

```
            return A[Left];
        else{
            return 0;
        }
    }

    Center = (Left+Right) / 2;
    MaxLeftSum = MaxSubSum(A,Left,Center);
    MaxRightSum = MaxSubSum(A,Center,Right);

    MaxLeftBorderSum = 0,LeftBorderSum = 0;
    for(i = Center;i >= Left;i--){
        LeftBorderSum += A[i];
        if(LeftBorderSum > MaxLeftBorderSum)
            MaxLeftBorderSum = LeftBorderSum;
    }

    MaxRightBorderSum = 0,RightBorderSum = 0;
    for(i = Center;i >= Left;i--){
        RightBorderSum += A[i];
        if(RightBorderSum > MaxRightBorderSum)
            MaxRightBorderSum = RightBorderSum;
    }

    return Max3(MaxLeftSum,MaxRightSum,MaxLeftBorderSum+MaxRightBorderSu
m);
}

int MaxSubSequenceSum(Const A[],int N){
    return MaxSubSum(A,0,N-1);
}
```

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(N) = 2T(N/2) + O(N) \end{cases}$$

时间复杂度为 $O(NlogN)$

> 计算过程参上
>
> 其实 **分治法** 很有特点，一般都是两个 logN 与一个处理函数的代价和

1.5.4 最简

```
int MaxSubSequenceSum(const int A[],int N){
    int ThisSum,MaxSum,j;

    ThisSum = MaxSum = 0;
```

```
        for(j = 0;j < N;++j){
            ThisSum += A[k];

            if(ThisSum > MaxSum){
                MaxSum = ThisSum;
            }else if(ThisSum < 0){
                ThisSum = 0;
            }
    }
    return MaxSum;
}
```

时间复杂度为 $O(N)$