

# 常用数学软件

## 第 4 次课堂练习

姓名：张三 学号：2022000000 日期：2025 年 6 月 20 日

### 一、练习目的

1. 掌握 MATLAB 的符号计算功能用于求解微积分问题
2. 掌握使用 MATLAB 解决高等代数问题。

### 二、练习内容

练习 1：使用 MATLAB 求解如下微积分问题，给出相应的程序和结果。

1. 使用符号计算功能验证如下公式的正确性。

- 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- 下列函数的一阶和二阶偏导数

$$f(x, y) = \sin x + x^3 e^y$$
$$f(x, y) = e^x y + \sin(x^3) e^y$$

- 计算如下的不定积分与定积分

$$\int_0^{\pi} \sin(2x) dx$$
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

- 计算如下级数和

$$\sum_{k=1}^n k^2$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

2. **Taylor 展开式：**给出函数  $\sin x^2$ ，在点  $x = 1.0$  处的 3，5，7 阶 Taylor 展开式，并绘制图像，观察 taylor 多项式逼近原函数的情况。给出原函数 Taylor 展开式的解析解；并将原函数和 Taylor 多项式绘制在同一张图中，观察逼近情况。（使用 ezplot 或 fplot 函数）

计算问题 1 的程序代码为：

```

1  syms x y n k
2
3  % 1. 求极限
4  disp('1. 极限计算: ');
5  limit1 = limit(sin(x)/x, x, 0)
6  limit2 = limit((1+1/n)^n, n, inf)
7
8  % 2. 偏导数计算
9  disp('2. 偏导数计算: ');
10 f1 = sin(x) + x^3*exp(y);
11 df1_dx = diff(f1, x)
12 df1_dy = diff(f1, y)
13 d2f1_dx2 = diff(f1, x, 2)
14 d2f1_dy2 = diff(f1, y, 2)
15
16 f2 = exp(x)*y + sin(x^3)*exp(y);
17 df2_dx = diff(f2, x)
18 df2_dy = diff(f2, y)
19 d2f2_dx2 = diff(f2, x, 2)
20 d2f2_dy2 = diff(f2, y, 2)
21
22 % 3. 积分计算
23 disp('3. 积分计算: ');
24 int1 = int(sin(2*x), x, 0, pi)
25 int2 = int(sin(x)/x, x, 0, inf)
26
27 % 4. 级数求和
28 disp('4. 级数求和: ');
29 sum1 = symsum(k^2, k, 1, n)
30 sum2 = symsum(1/k^2, k, 1, inf)

```

计算问题 1 的结果为:

```

1  1. 极限计算:
2    limit1 =1
3    limit2 =exp(1)
4  2. 偏导数计算:
5    df1_dx =cos(x) + 3*x^2*exp(y)
6    df1_dy =x^3*exp(y)
7    d2f1_dx2 =6*x*exp(y) - sin(x)
8    d2f1_dy2 =x^3*exp(y)
9    df2_dx =y*exp(x) + 3*x^2*cos(x^3)*exp(y)
10   df2_dy =exp(x) + sin(x^3)*exp(y)
11   d2f2_dx2 =y*exp(x) - 9*x^4*sin(x^3)*exp(y) + 6*x*cos(x^3)*exp(y)
12   d2f2_dy2 =sin(x^3)*exp(y)
13  3. 积分计算:
14    int1 =0
15    int2 =pi/2
16  4. 级数求和:
17    sum1 =(n*(2*n + 1)*(n + 1))/6
18    sum2 =pi^2/6

```

计算问题 2 的程序代码为:

```

1 syms x
2 f = sin(x^2);
3 x0 = 1.0;
4
5 % 计算不同阶数的 Taylor 展开
6 t3 = taylor(f, x, 'ExpansionPoint', x0, 'Order', 3)
7 t5 = taylor(f, x, 'ExpansionPoint', x0, 'Order', 5)
8 t7 = taylor(f, x, 'ExpansionPoint', x0, 'Order', 7)
9
10 % 绘制图像
11 figure;
12 fplot(f, [0.5, 1.5], 'LineWidth', 2);
13 hold on;
14 fplot(t3, [0.5, 1.5], '--');
15 fplot(t5, [0.5, 1.5], ':');
16 fplot(t7, [0.5, 1.5], '-.');
17 legend('原函数 sin(x^2)', '3 阶 Taylor', '5 阶 Taylor', '7 阶 Taylor');
18 title('Taylor 多项式逼近原函数');
19 grid on;
20 hold off;

```

计算问题 2 的结果为:

```

1 t3 = sin(1) + (cos(1) - 2*sin(1))*(x - 1)^2 + 2*cos(1)*(x - 1)
2 t5 = sin(1) + (cos(1) - 2*sin(1))*(x - 1)^2 - (x - 1)^3*((4*cos(1))/3 + 2*sin(1)) - (x - 1)^4*(2*cos(1)
↪ - sin(1)/6) + 2*cos(1)*(x - 1)
3 t7 = sin(1) + (cos(1) - 2*sin(1))*(x - 1)^2 - (x - 1)^3*((4*cos(1))/3 + 2*sin(1)) - (x - 1)^4*(2*cos(1)
↪ - sin(1)/6) - (x - 1)^5*((11*cos(1))/15 - (4*sin(1))/3) + (x - 1)^6*(cos(1)/2 + (41*sin(1))/45) +
↪ 2*cos(1)*(x - 1)

```

练习 2: 使用 MATLAB 求解如下代数问题, 给出计算分析, 程序和结果.

1. 设向量组 A 为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求向量组 A 的秩和一个极大无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示。

程序清单:

```

1 A = [1 0 3 2 1;
2     -1 3 0 1 -1;
3      2 1 7 5 2;
4      4 2 14 6 0];
5
6 % 求秩
7 rank_A = rank(A)
8

```

```

9 % 化为行最简形
10 rref_A = rref(A)
11
12 % 提取极大无关组 (前 rank_A 列)
13 max_indep = A(:,1:rank_A)
14
15 % 将其他向量表示为极大无关组的线性组合
16 coefficients = rref_A(:,rank_A+1:end)

```

计算结果:

```

1 rank_A =3
2 rref_A =
3
4
5
6
7 max_indep =
8
9
10
11
12 coefficients =
13
14
15
16

```

$$\begin{array}{ccccc}
 \sim I & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \sim I & 1 & 0 & 3 \\
 & -1 & 3 & 0 \\
 & 2 & 1 & 7 \\
 & 4 & 2 & 14
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 \text{coefficients} = \\
 0 & -1 \\
 0 & -1 \\
 1 & 1 \\
 0 & 0
 \end{array}$$

2. 给出下述齐次方程组的基础解系和通解。

$$\begin{cases}
 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\
 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0
 \end{cases}$$

程序清单:

```

1 %%Isyms x1 x2 x3 x4 x5
2 eq1 = 2*x1 + x2 + 3*x3 + 5*x4 - 5*x5 == 0;
3 eq2 = x1 + x2 + x3 + 4*x4 - 3*x5 == 0;
4 eq3 = 3*x1 + x2 + 5*x3 + 6*x4 - 7*x5 == 0;
5
6 [A,b] = equationsToMatrix([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3,x4,x5]);
7 null_space = null(A) % 基础解系

```

计算结果:

```

1 null_space =
2 [-2, -1, 2]
3 [ 1, -3, 1]
4 [ 1,  0, 0]
5 [ 0,  1, 0]
6 [ 0,  0, 1]

```

3. 求如下方阵的特征值和特征向量

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

程序清单:

```
1  A = [-2 1 1;  
2      0 2 0;  
3      -4 1 3];  
4  
5  [V,D] = eig(A);  
6  eigenvalues = diag(D)  
7  eigenvectors = V
```

计算结果: eigenvalues = -1 2 2 eigenvectors = -0.7071 -0.2425 0.3015 0 0 0.9045 -0.7071 -0.9701 0.3015

4. 如图 ?? 是某区的城市交通图, 假设所有道路都是单行道, 且道上不能停车, 通行方向用箭头已经表明, 数字代表某时段该路段的车辆数. 假设进入每个交叉点的车辆数等于离开该交叉点的车辆数. 请求出该时段没有标出的各路线的车辆数.

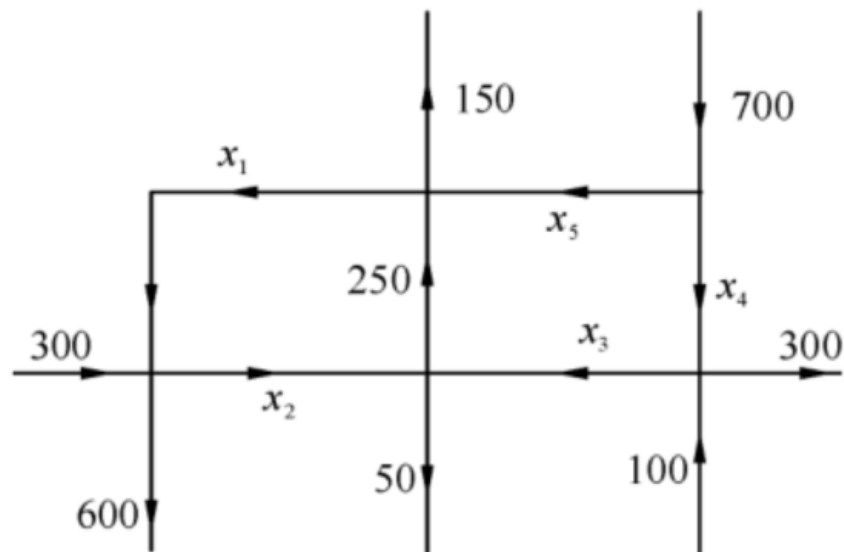


图 1: 某区域交通流量图

程序清单:

```

1  ^^Isyms x1 x3 x4 x5
2
3  % 定义方程组
4  eq1 = x1 + 300 == 250 + 100;          % 左上交叉点
5  eq2 = 250 + 50 == x5 + 600;          % 右上交叉点
6  eq3 = 100 + x3 == x1 + 700;          % 左下交叉点
7  eq4 = x5 + 700 == x4 + 600;          % 右下交叉点
8
9  % 求解方程组
10 sol = solve([eq1, eq2, eq3, eq4], [x1, x3, x4, x5]);
11
12 % 显示结果
13 disp('解为: ');
14 disp(['x1 = ', num2str(double(sol.x1))]);
15 disp(['x3 = ', num2str(double(sol.x3))]);
16 disp(['x4 = ', num2str(double(sol.x4))]);
17 disp(['x5 = ', num2str(double(sol.x5))]);

```

计算结果:

```

1  解为:
2  x1 = 50
3  x3 = 650
4  x4 = -200
5  x5 = -300

```