1999 年全国硕士研究生入学统一考试数二试题

一、填空题(本题共5小题，每小题3分，满分15分。把答案填在题中横线上。)

(1) 曲线$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$，在点$(0,1)$处的法线方程为__________

(2) 设函数$y = y(x)$由方程$\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$确定，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$__________

(3) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx =$__________

(4) 函数$y = \dfrac{x^2}{\sqrt{-x^2}}$在区间$\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$上的平均值为__________

(5) 微分方程$y'' - 4y = e^{2x}$的通解为__________

二、选择题(本题共5小题，每小题3分，满分15分。每小题给出得四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在提后的括号内。)

(1) 设$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \le 0 \end{cases}$，其中$g(x)$是有界函数，则$f(x)$在$x = 0$处 (　　)

(A) 极限不存在.
(B) 极限存在，但不连续.
(C) 连续，但不可导.
(D) 可导.

(2) 设$\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$，则当$x \to 0$时$\alpha(x)$是$\beta(x)$的 (　　)

(A)高阶无穷小　　(B)低阶无穷小
(C)同阶但不等价的无穷小　　(D)等价无穷小

(3) 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则 (　　)

(A) 当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数.

(B) 当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数.

(C) 当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数.

(D) 当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数.

(4) "对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数N，当$n \ge N$时，恒有$|x_n - a| \le 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$

收敛于a的（　　）

(A)充分条件但非必要条件.　　(B)必要条件但非充分条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分条件又非必要条件.

(5)记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

三、(本题满分5分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

四、(本题满分6分)

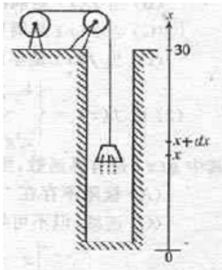
计算 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}dx$.

五、(本题满分7分)

求初值问题 $\begin{cases}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0(x>0)\\ y\big|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

六、(本题满分7分)

为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口见图，已知井深$30m$30m,抓斗自重$400N$，缆绳每米重$50N$，抓斗抓起的污泥重$2000N$，提升速度为$3m/s$,在提升过程中，污泥以$20N/s$的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？(说明：①$1N\times 1m=1J$; 其中 m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



七、(本题满分 8 分)

已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求

(1)函数的增减区间及极值；

(2)函数图形的凹凸区间及拐点

(3)函数图形的渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$， $f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

九、(本题满分 9 分)

设函数 $y(x)(x\ge 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$， $y(0)=1$.过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

十、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum_{i=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)dx$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

十一、(本题满分 8 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X .

十二、(本题满分 5 分)

设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$

(1) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出；

(2) p 为何值时，该向量组线性相关？并此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数二试题解析

一、填空题

(1)【答案】$y+2x-1=0$

【详解】点$\left(0,1\right)$对应$t=0$，则曲线在点$\left(0,1\right)$的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t},$$

把$t=0$代入得$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$，所以改点处法线斜率为$-2$，故所求法线方程为$y+2x-1=0$.

(2)【答案】1

【详解】$y(x)$是有方程$\ln\left(x^2+y\right)=x^3y+\sin x$所确定，所以当$x=0$时，$y=1$.

对方程$\ln\left(x^2+y\right)=x^3y+\sin x$两边非别对$x$求导，得

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x,$$

把$x=0$和$y=1$代入得$y'(0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$

(3)【答案】$\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$

【详解】通过变换，将积分转化为常见积分，即

$$\begin{aligned}\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx&=\int\frac{x-3}{x^2-6x+13}dx+\int\frac{8}{x^2-6x+13}dx\\&=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+\int\frac{8}{(x-3)^2+4}dx\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\int\frac{d(\frac{x-3}{2})}{(\frac{x-3}{2})^2+1}\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C\end{aligned}$$

(4)【答案】$\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$

【详解】按照平均值的定义有

$$\overline{y}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

作变换令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos tdt$，所以

$$\overline{y}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 tdt$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t)dt=(\sqrt{3}+1)\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$$

(5)【答案】 $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$, 其中 C_1,C_2 为任意常数.

【分析】先求出对应齐次方程的通解，再求出原方程的一个特解.

【详解】原方程对应齐次方程 $y''-4y=0$ 的特征方程为：$\lambda^2-4=0,$ 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$，

故 $y''-4y=0$ 的通解为 $y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$,

由于非齐次项为 $f(x)=e^{2x}$, 因此原方程的特解可设为 $y^*=Axe^{2x}$, 代入原方程可求得

$A=\frac{1}{4}$，故所求通解为 $y=y_1+y^*=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$

二、选择题

(1)【答案】(D)

【详解】由于可导必连续，连续则极限必存在，可以从函数可导性入手.

因为 $$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0,$$

从而，$f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$，故正确选项为(D).

(2)【答案】(C)

【详解】当 $x\to0$ 有，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}$$

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\sin x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=5\times 1\times\frac{1}{e\times 1}=\frac{5}{e}$$

所以当 $x\to 0$ 时 $\alpha\left(x\right)$ 是 $\beta\left(x\right)$ 同阶但不等价的无穷小.

(3)【答案】(A)

【详解】应用函数定义判定函数的奇偶性、周期性和单调性.

$f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C,$ 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+C\overset{u=-t}{=}\int_0^x f(-u)d\left(-u\right)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时， $f(-u)=-f(u)$ ，从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)du+C=\int_0^x f(t)dt+C=F(x)$$

即 $F\big(x\big)$为偶函数. 故(A)为正确选项.

(B)、(C)、(D)可分别举反例如下：

$f(x)=x^2$ 是偶函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数，可排除(B)；

$f(x)=\cos^2 x$ 是周期函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数，可排除(C)；

$f(x)=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内非单调增函数，可排除(D).

(4)【答案】(C)

【详解】

【方法 1】“必要性”: 数列极限的定义“对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$，存在 $N_1>0$，使得当 $n>N_1$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$”. 由该定义可以直接推出题中所述，即必要性；“充分性”：对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$，取 $\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{3},\frac{1}{3}\right\}$，这时 $\varepsilon\in(0,1)$，由已知，对于此 ε 存在 $N>0$，使得当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-a|<2\varepsilon$，现取 $N_1=N-1$，于是有当 $n\ge N>N_1$ 时，恒

有$|x_n-a|\le\frac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$. 这证明了数列$\{x_n\}$收敛于$a$. 故(C)是正确的.

【方法 2】数列极限的精确定义是：对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$N>0$，使得当$n>N$时$|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$收敛于a. 这里要抓住的关键是ε要能够任意小，才能使$|x_n-a|$任意小.

将本题的说法改成：对任意$\varepsilon_1=2\varepsilon\in(0,2)>0$，总存在$N_1>0$，使得当$n\ge N>N_1$时，有$|x_n-a|<2\varepsilon=\varepsilon_1$，则称数列$\{x_n\}$收敛于$a$.

由于$\varepsilon_1\in(0,2)$可以任意小，所以$|x_n-a|$能够任意小. 故两个说法是等价的.

(5)【答案】(B)

【详解】利用行列式性质，计算出行列式是几次多项式，即可作出判别.

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[4列-1列]{\substack{2列-1列\\3列-1列}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal{4列+2列}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}(\text{若}A,B,C\text{均为}n\text{阶方阵，则}\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix}=|A|\cdot|C|)$$

$$=[(x-2)\cdot1-(2x-2)\cdot1]\times[-6(x-2)-(-1)(x-7)]$$

$$=(-x)\times(-5x+5)=5x\cdot(x-1)$$

故　　$f(x)=x\cdot(5x-5)=0$有两个根$x_1=0,x_2=1$，故应选(B).

三【详解】进行等价变化，然后应用洛必达法则，

【方法1】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{(x\ln(1+x)-x^2)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\ln(1+x)-x)\cdot2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}\overset{洛}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin x}{-x}=-\frac{1}{2}$$

【方法2】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(\ln(1+x)-x)\bullet 2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2x(\ln(1+x)-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{2x(\ln(1+x)-x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{\ln(1+x)-x}\overset{洛}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{-x/(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

四【详解】采用分部积分法

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\bullet\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{4}+\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

五【详解】将原方程化简 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+(\dfrac{y}{x})^2}$

令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入上式，得 $u+x\dfrac{du}{dx}=u+\sqrt{1+u^2}$，

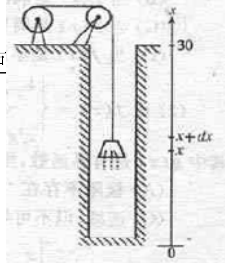
化简并移项，得 $\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\dfrac{dx}{x}$，

由积分公式得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln(Cx)$，其中 C 是常数，

因为 $x>0,$ 所以 $C>0$，去掉根号，得 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$，即 $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+(\dfrac{y}{x})^2}=Cx$，

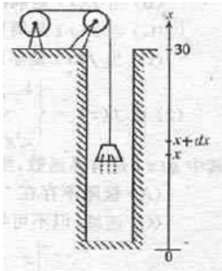
把 $y\big|_{x=1}=0$ 代入并化简，得 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2},x>0$

六【详解】建立坐标轴如图所示，



解法1：将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功 $W=W_1+W_2+W_3$，其中 W_1 是克

作的功；W_2 是克服缆绳重力作的功；W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知



$$W_1 = 400N \times 30m = 12000J.$$

将抓斗由 x 处提升到 $x+dx$ 处，克服缆绳重力所作的功为

$$dW_2 = \text{缆绳每米重} \times \text{缆绳长} \times \text{提升高度}$$

$$= 50(30-x)dx,$$

从而 $W_2 = \int_0^{30} 50(30-x)dx = 22500J.$

在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内提升污泥需做功为

$$dW_3 = (\text{原始污泥重} - \text{漏掉污泥重}) \times \text{提升高度}(3dt)$$

$$= (2000-20t)3dt$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\dfrac{30m}{3m/s} = 10s,$

所以 $W_3 = \int_0^{10} 3(2000-20t)dt = 57000J.$

因此，共需做功

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (12000 + 22500 + 57000)J = 91500J$$

解法2: 将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功记为 W，当抓斗运动到 x 处时，作用力 $f(x)$ 包括抓斗的自重 $400N$，缆绳的重力 $50(30-x)N$，污泥的重力 $(2000 - \frac{x}{3} \cdot 20)N,$

即 $$f(x) = 400 + 50(30-x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x,$$

于是

$$W = \int_0^{30}\left(3900 - \frac{170}{3}x\right)dx = 3900x - \frac{85}{3}x^2 \Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500J$$

七【详解】函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，对函数求导，得

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \quad y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=0, x=3$；令 $y''=0$ 得 $x=0$. 因此，需以 $0,1,3$ 为分界点来讨论，列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y''	−	0	+	+	+	+
y'	+	0	+	−	0	+
y	凸，增	拐点	凹，增	凹，减	极小值	凹，增

由此可知，

(1)函数的单调增区间为$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$，单调减区间为$(1,3)$，极小值为$y\big|_{x=3}=\dfrac{27}{4}$.

(2)函数图形在区间$(-\infty,0)$内是向上凸的，在区间$(0,1),(1,+\infty)$内是向上凹的，拐点为$(0,0)$点.

(3)由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$，可知$x=1$是函数图形的铅直渐近线.

又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x-1)^2}=1$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}\right]=2$$

故$y=x+2$是函数的斜渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点ξ，使$f'''(\xi)=3$.

【详解】**解法 1**：由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3\text{，其中}\eta\text{介于0与}x\text{之间，}x\in[-1,1]$$

分别令$x=-1,x=1$并结合已知条件得

$$f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1)=0,-1<\eta_1<0$$

$$f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2)=1,0<\eta_2<1$$

两式相减，得

$$f'''(\eta_2)+f'''(\eta_1)=6$$

由 $f'''(x)$ 的连续性，知 $f'''(x)$ 在区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设它们分别为 M 和 m，则有

$$m \le \frac{1}{2}\left[f'''(\eta_2)+f'''(\eta_1)\right] \le M$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi \in [\eta_1,\eta_2] \subset (-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f'''(\eta_2)+f'''(\eta_1)\right]=3$$

解法 2：构造函数 $\varphi(x)$，使得 $x\in[-1,1]$ 时 $\varphi'(x)$ 有三个 0 点，$\varphi''(x)$ 有两个 0 点，从而使用罗尔定理证明 ξ 必然存在.

设具有三阶连续导数 $\varphi(x)=f(x)+ax^3+bx^2+cx+d$

令 $\begin{cases}\varphi(-1)=f(-1)-a+b-c+d=0\\ \varphi(0)=f(0)+d=0\\ \varphi(1)=f(1)+a+b+c+d=0\\ \varphi'(0)=f'(0)+c=0\end{cases}$，将 $\begin{cases}f(-1)=0\\ f(1)=1\\ f'(0)=0\end{cases}$ 代入得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=f(0)-\dfrac{1}{2}\\ c=0\\ d=-f(0)\end{cases}$

代入 $\varphi(x)$ 得 $\varphi(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3+(f(0)-\frac{1}{2})x^2-f(0)$

由罗尔定理可知，存在 $\eta_1\in(-1,0),\eta_2\in(0,1)$，使 $\varphi'(\eta_1)=0,\varphi'(\eta_2)=0$

又因为 $\varphi'(0)=0$，再由罗尔定理可知，存在 $\xi_1\in(\eta_1,0),\xi_2\in(0,\eta_2)$，使得 $\varphi''(\xi_1)=0,\varphi''(\xi_2)=0$

再由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(\eta_1,\eta_2)\subset(-1,1)$，使 $\varphi'''(\xi)=f'''(\xi)-3=0$

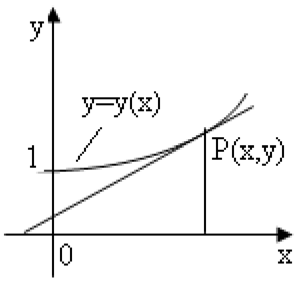
即 $f'''(\xi)=3$.

九【详解】如图，曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y(x)=y'(x)(X-x)$

所以切线与 x 轴的交点为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$

由于 $y'(x)>0, y(0)=1,$ 因此 $y(x)>1>0\ (x>0)$

于是 $S_1=\frac{1}{2}y\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'}.$



又 $S_2=\int_0^x y(t)dt$

根据题设 $2S_1-S_2=1$, 得 $2\cdot\frac{y^2}{2y'}-\int_0^x y(t)dt=1,$

两边对 x 求导并化简得 $yy''=\left(y'\right)^2$

这是可降阶的二阶常微分方程，令 $p=y'$, 则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，

上述方程化为 $yp\frac{dp}{dy}=p^2$, 分离变量得 $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$，解得 $p=C_1y$，即 $\frac{dy}{dx}=C_1y,$

从而有 $y=C_1e^x+C_2$，根据 $y(0)=1, y'(0)=1,$ 可得 $C_1=1, C_2=0,$

故所求曲线得方程为 $y=e^x$.

十【详解】利用单调有界必有极限的准则来证明.先将 a_n 形式化简，

因为 $$\int_1^n f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$$

所以 $$a_n=\sum_{i=1}^{n-1} f\left(k\right)+f(n)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f\left(k\right)-f(x)]dx+f(n)$$

又因为 $f(x)$ 单调减少且非负，$k\le x\le k+1$，所以有

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f\left(k\right)-f(x)]dx\ge 0\\ f(n)\ge 0\end{cases}$$ ，故 $a_n\ge 0$；

又因为 $$a_{n+1}-a_n=[\sum_{i=1}^{n+1} f\left(k\right)-\int_1^{n+1} f\left(x\right)dx]-[\sum_{i=1}^{n} f\left(k\right)-\int_1^{n} f\left(x\right)dx]$$

$$=[\sum_{i=1}^{n+1} f\left(k\right)-\sum_{i=1}^{n} f\left(k\right)]-[\int_1^{n+1} f\left(x\right)dx-\int_1^{n} f\left(x\right)dx]$$

$$=f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_n^{n+1}[f(n+1)-f(x)]dx\le 0$$

所以 $\left\{a_n\right\}$ 单调减少，因为单调有界必有极限，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

十一【详解】题设条件 $A^*X=A^{-1}+2X$

上式两端左乘A，得 $AA^*X = AA^{-1} + 2AX$

因为$AA^* = |A|E, AA^{-1} = E$，所以 $|A|X = E + 2AX \Rightarrow (|A|E - 2A)X = E$

根据可逆矩阵的定义：对于矩阵A_n，如果存在矩阵B_n，使得$AB = BA = E$，则称A为可逆矩阵，并称B是A的逆矩阵，故$(|A|E - 2A), X$均是可逆矩阵，且

$$X = (|A|E - 2A)^{-1}$$

又
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{2行+1行 \\ 3行+1行}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{1行-3行\times\frac{1}{2}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{1行-2行\times\frac{1}{2}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

因为常数k与矩阵A相乘，A的每个元素都要乘以k，故

$$|A|E = 4E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}，2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

所以

$$|A|E - 2A = 2(2E - A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} (对应元素相减)$$

$$X = (|A|E - 2A)^{-1} = \left(2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad ((kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1})$$

用初等行变换求逆，当用初等行变换将矩阵A化为单位矩阵时，经过相同的初等行变换，单位矩阵E化成了A^{-1}，即$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{初等行变换} \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{2行-1行 \\ 3行+1行}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行+3行} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{2行\times\frac{1}{2} \\ 3行\times\frac{1}{2}}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1行-3行}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \vdots 1/2 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0 & \vdots\ 0 & 1/2 & 1/2\\0 & 0 & 1 & \vdots 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\xrightarrow{1行+2行}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots 1/2 & 1/2 & 0\\0 & 1 & 0 & \vdots\ 0 & 1/2 & 1/2\\0 & 0 & 1 & \vdots 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

故 $$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\0 & 1/2 & 1/2\\1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

十二【概念】向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关$\Leftrightarrow$以$\alpha_i,i=1,2,3,4$为列向量组成的线性齐次方程组$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]X=0$只有零解

向量α能否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出$\Leftrightarrow$以$\alpha_i,i=1,2,3,4$为列向量组成的线性非齐次方程组$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\alpha$是否有解

【详解】作方程组$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\alpha$，并对增广矩阵作初等行变换，

$$\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha\right]\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots\ 4\\1 & -3 & 2 & -6 & \vdots\ 1\\1 & 5 & -1 & 10 & \vdots\ 6\\3 & 1 & p+2 & p & \vdots 10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[4行-1行\times3]{\substack{2行-1行\\3行-1行}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots\ 4\\0 & -2 & -1 & -4 & \vdots -3\\0 & 6 & -4 & 12 & \vdots\ 2\\0 & 4 & p-7 & p+6 & \vdots -2\end{bmatrix}\xrightarrow[4行+2行\times2]{3行+2行\times3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots\ 4\\0 & -2 & -1 & -4 & \vdots -3\\0 & 0 & -7 & 0 & \vdots -7\\0 & 0 & p-9 & p-2 & \vdots -8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行\times(-\frac{1}{7})}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots\ 4\\0 & -2 & -1 & -4 & \vdots -3\\0 & 0 & 1 & 0 & \vdots\ 1\\0 & 0 & p-9 & p-2 & \vdots -8\end{bmatrix}\xrightarrow{4行-3行\times(p-9)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots\ 4\\0 & -2 & -1 & -4 & \vdots -3\\0 & 0 & 1 & 0 & \vdots\ 1\\0 & 0 & 0 & p-2 & \vdots 1-p\end{bmatrix}$$

(1) 当$p\neq2$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)=4$，方程组有唯一解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，且等于未知量的个数，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)X=\alpha$有唯一解，其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ (p-2)x_4 = 1-p \end{cases}$$，解得 $x_1 = 2, x_2 = \dfrac{3p-4}{p-2}, x_3 = 1, x_4 = \dfrac{1-p}{p-2}$

代入 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha$ 中，即 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出，且表出式为

$$\alpha = 2\alpha_1 + \frac{3p-4}{p-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1-p}{p-2}\alpha_4$$

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_i, i = 1,2,3,4$ 为列向量组成的线性齐次方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] X = 0$ 有非零解

当 $p = 2$ 时，

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha] \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & \vdots & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & \vdots & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

初等变换不改变向量组的秩，$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$，系数矩阵的秩小于未知量的个数，

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] X = 0$$

有非零解，故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，列向量组经过初等行变换，其对应的部分列向量组具有相同的线性相关性．在 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$ 中，由 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 或

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ 知，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$(或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$)线性无关，是其极大线性无关组.