Rapport du projet d'Algorithmique INFOB237

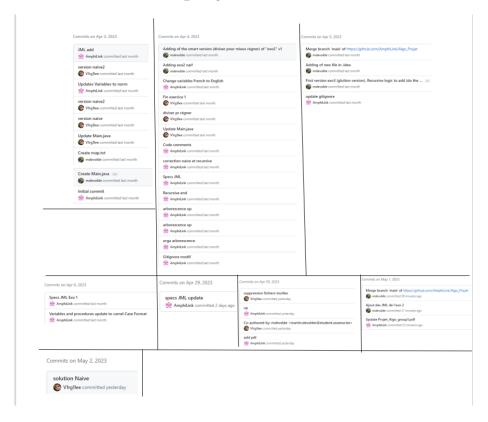
Esteban Bernagou Martin Devolder Virgile Devolder

Mai 2023

1 Introduction

Voici le rapport de notre projet, fruit de dur labeur. Grâce à ce projet nous avons su appréhender tous les principes du cours (JML, approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique etc..) Bonne lecture!

2 Calendrier du projet



3 Informations relatives aux algorithmes et réponses aux sous-questions

4 Exercice 1

4.1 Analyse de l'énoncé

Le 2*n lignes du fichier input est ambigu dans la consigne. Il ne nous sert pas à résoudre le problème.

4.2 Specs JML

```
/*  
@requires n > 0; // le nombre de rangées est positif  
@requires \nonnullelements(rows); // les rangées ne sont pas nulles  
@requires (\forall int i; 0 \le i \land i < \text{rows.length}; \text{rows}[i] > 0); // le nombre de  
plantes est strictement positif pour chaque rangée  
@ensures \result == null || (\exists int i; <math>0 \le i \land i < \text{rows.length}; \text{result.equals}(\text{invasive}(\text{rows}[i])));  
// la fonction renvoie null ou le nom d'une plante envahissante  
@*/
```

4.3 Algorithme naïf

On utilise une liste pour stocker les fleurs ainsi qu'une Hashmap pour stocker le nombre d'occurences de ces fleurs dans notre liste. Voir code pour plus de détails

4.4 Correction d'invariant et terminaison de clôture

4.4.1 Première boucle

```
P \equiv a = a0 \land N = listFlower.size() \land counts vide

I \equiv a = a0 \land counts += plant.occurences() | plant \in listFlowers
```

Correction de l'invariant :

Au début counts est vide à chaque itération. A chaque itération on rajoute le nombre d'occurences de la plante courante dans counts. A la fin counts contient le nombre d'occurences de plant dans listFlowers.

En vu de tout cela on obtient bien :

```
P \Rightarrow I \land sp(S, I \land B) \Rightarrow I
```

S : Instruction du corps de la boucle

B: Condition de terminaison de boucle

Terminaison de clôture :

```
V=N\mid N: nombre d'éléments restants à parcourir dans list
Flowers on a : sp(S,\,I\wedge B\wedge V=n)\Rightarrow V< n\mid n: \mbox{taille de listFlowers} Terminaison si : V=0\Rightarrow \neg B or V=V- 1 à chaque itération, On obtient finalement : V=0\equiv N=0
```

4.4.2 Deuxième boucle

```
P \equiv a = a0 \land N = counts.keyset().size() \land counts non vide

I \equiv a = a0 \land plant.occurences() < listFlowers.size() / 2 | plant \in listFlowers
```

Correction de l'invariant :

Au début de la boucle, too Much est null. Si le nombre d'occurrences de l'élément courant dans la table de hachage counts est supérieur à la moitié de la taille de la liste list Flowers, alors too Much prend la valeur de l'élément courant. À la fin de la boucle, too Much contient l'élément qui apparaît plus de la moitié du temps dans la liste list Flowers, s'il en existe un.

En vu de tout cela on obtient bien:

```
P \Rightarrow I \land sp(S, I \land B) \Rightarrow I
```

S : Instruction du corps de la boucle

B : Condition de terminaison de boucle

Terminaison de clôture :

```
V=N\mid N: nombre d'éléments à parcourir dans counts on a : sp(S,\,I\wedge B\wedge V=n)\Rightarrow V< n\mid n: \mbox{taille de counts} Terminaison si : V=0\Rightarrow \neg B or V=V- 1 à chaque itération, On obtient finalement : V=0\equiv N=0
```

4.5 Complexité de l'algorithme naïf

4.5.1 Première boucle

Complexité O(n) car on itère une fois sur chaque élément

4.5.2 Deuxième boucle

Complexité O(n) car on itère une fois sur chaque élément

4.5.3 Conclusion

 $O(n + n) = O(2n) = O(n) \Rightarrow$ complexité linéaire

4.6 Solution plus efficace

Cette fois nous avons choisi d'implémenter un algorithme récursif. Voir code pour plus de détails

4.7 Specs JML algorithme efficace

Voir code

4.8 Solution "diviser pour mieux régner

Voir code

4.9 Complexité de "Diviser pour mieux régner"

Utilisons la formule récurente : $T(n) = c * T(n/d) + b * n^k$

Nombre de sous-problèmes à chaque récursion : 2

Taille de chaque sous problème : n/2

Donc T(n)=2*T(n/2)+O(n) avec O(n) le coût de recherche du nombre d'occurences d'une plante dans une sous-liste

Conclusion:

```
k = 1, c = 2 et d = 2 et c = d^k \iff 2 = 2^1
Complexité de l'algorithme : O(n^k * log(n)) = O(n * log(n))
\Rightarrow Complexité linéarithmique
```

5 Exercice 2

5.1 Analyse de l'énoncé

L'énoncé est clair

5.2 Specs JML

5.3 Solution naïve

Le programme calcule tous les chemins qui sont possibles à partir de la position haut gauche de la matrice (0 0). On utlise alors la méthode "allPaths" qui renvoie une liste de tous les chemins possibles sous forme de liste de "int[]" contenant les coordonéees de chaque point du chemin. Pour chaque chemin possible, le programme calcule le nombre total de bières (via la méthode caclulatePaths), si le nombre total de bières collectées dépasse le nombre max de bières autorisées, la méthode renvoie "-1". Le programme garde dans une variable le meilleur nombre de bières (sans dépasser le nombre autorisé). Si un chemin est trouvé avec un nombre de bières supérieur au précédent, le meilleur nombre de bières est mis à jour. Après avoir regardé tous les chemins possibles, le programme affiche le meilleur nombre de bières possible. Si aucun chemin n'existe, le programme affiche "-1".

5.4 Correction d'invariant et terminaison de clôture

5.4.1 Boucle de calculatePaths

```
P \equiv a = a0 \land nBeer \le nMaxBeers \land path non null \land nBeer = 0

I \equiv a = a0 \land \forall point, nBeer \le nMaxBeers \mid point \in path
```

Correction de l'invariant :

La correction de l'invariant est vérifiée par le fait que nous incrémentons le nombre total de bières à chaque étape du parcours du chemin. De plus le nombre de bières consommé est toujours inférieur au nombre maximum et dans le cas limite nous retournous -1.

En vu de tout cela on obtient bien :

 $P \Rightarrow I \land sp(S, I \land B) \Rightarrow I$

S: Instruction du corps de la boucle

B: Condition de terminaison de boucle

Terminaison de clôture:

V = le nombre de points restants à parcourir dans le chemin. La clotûre est garantie vu que ce nombre diminue à chaque itération jusqu'à atteindre 0.

 $V = N \mid N$: nombre de points à parcourir dans path on a :

$$sp(S, I \land B \land V = n) \Rightarrow V < n \mid n : taille de path$$

Terminaison si:

 $V = 0 \Rightarrow \neg B$

or V = V - 1 à chaque itération,

On obtient finalement : $V = 0 \equiv N = 0$

5.4.2 Première boucle de main

Ici il n'y a pas d'invariants on se contente simplment d'itérer sur un nombre de test, un entier $P\equiv a=a0$ \wedge data not null $I\equiv\emptyset$

Correction de l'invariant :

Pas d'invariant donc pas de correction

Terminaison de clôture :

Par contre il y a bel et bien une terminaison de clôture car la liste data décroit jusqu'à atteindre 0.

```
V = N \mid N : nombre de tests restants dans data on a : sp(S,\,I \,\wedge\, B \,\wedge\, V = n) \Rightarrow V < n \mid n : taille de data
```

Terminaison si:

 $V = 0 \Rightarrow \neg B$

or V = V - 1 à chaque itération,

On obtient finalement : $V = 0 \equiv N = 0$

5.4.3 Deuxième boucle de main

P ≡ a = a0 ∧ BestNBeer = -1 ∧ ∃ nBeer ∧ all Paths not null I ≡ a = a0 ∧ BestNBeer = -1 jusqu'à l'itération qui rentre dans le if

Correction de l'invariant :

A chaque itération on vérifie si nBeer est supérieur au maximum d'avant on fait cela pour toutes les bières jusqu'à trouver la max (BestNBeer). Dans le cas limite où il n'y aurait aucun bière BestNBeer gardera sa valeur de -1.

En vu de tout cela on obtient bien :

 $P \Rightarrow I \land sp(S, I \land B) \Rightarrow I$

S : Instruction du corps de la boucle

B: Condition de terminaison de boucle

<u>Terminaison de clôture :</u>

```
V=N\mid N: paths restants à parcourir dans all
Paths on a : sp(S, I \wedge B \wedge V = n)
 \Rightarrow V < n | n : taille de all
Paths
```

Terminaison si:

 $V = 0 \Rightarrow \neg B$

or V = V - 1 à chaque itération,

On obtient finalement : $V = 0 \equiv N = 0$

5.5 Complexité de l'algorithme naif

Méthode allPaths:

Dans le pire des cas nous parcourons toute la grille et le nombre de possibilités dans une grille de n*m est $2^{(n*m)}$. Donc la complexité est : $O(2^{(n*m)})$ donc complexité exponentielle

Méthode calculatePaths:

Le nombre de point dans le plus long chemin est n+m-1. n étant le nombre de lignes, m le nombre de colonnes et -1 car on ne compte pas notre position initiale. La complexité est donc de O(n+m). Donc une complexité linéaire.

Méthode calculatePaths:

La méthode main itère sur les chemins possibles donc sa complexité est de $O(2^{(n+m)})$ comme dit au point 1.

La complexité totale de l'algorithme est donc $2 * O(2^{(n+m)}) + O(n+m)$. La complexité exponentielle l'emporte sur la linéaire. Donc algo de complexité exponentielle simplifiée en $O(2^{(n+m)})$.

5.6 Sous-structure optimale

On connait la solution pour atteindre une certaine position dans la matrice (i, j) donc on peut trouver pour (i+1, j) ou pour (i, j+1) et utiliser les résultats précédents (memoïsation) afin de résoudre le problème de manière efficace.

5.7 Caractérisez (par une équation récursive) cette sousstructure optimale

```
\label{eq:allPaths} \begin{split} & \text{allPaths}(n,\,i,\,j) = \\ & \max(\text{allPpaths}(n\text{-}n\text{Beer},\,i\text{+}1,\!j),\,//\text{descendre} \\ & \text{allPaths}(n\text{-}n\text{Beer},\,j\text{+}1,\!i),\,//\text{aller}\,\,\grave{a}\,\,\text{droite} \\ & \text{allPaths}(n\text{-}n\text{Beer},\,i\text{+}1,\,j\text{+}1)\,//\text{aller}\,\,\text{en}\,\,\text{diagonale}\,\,\text{en}\,\,\text{bas}\,\,\grave{a}\,\,\text{droite} \end{split}
```

Avec:

n : Le nombre maximum de bières que Frank peut boire

i : la ligne où Frank se trouve

j : la colonne où Frank se trouve

nBeer : le nombre de bières se trouvant à la position i, j

5.8 Spécifiez ce problème en tuilisant JML

Voir code

5.9 Ecrivez un algorithme basé sur le principe de programmation dynamique pour trouver le nombre maximum de bières que Frank peut boire

Voir code

5.10 Donnez la complexité de votre algorithme basé sur l'approche "diviser pour régner"

La complexité est une complexité quadratique de la forme $O(n^2)$.

En effet on peut exprimer la complexité de l'algorithme diviser pour régner sous cette forme : $T(n) = c * T(n/d) + bn^k$ avec c = 3 car on passe 3 fois sur chaque point du chemin, n/d = n/2 ce qui correspond environ à la moitié de la taille de la matrice.

```
Donc on a c < d^k \iff 3 < 2^2.
On applique alors la formule n^k \Rightarrow O(n^2)
```

6 Exercice 3

6.1 Analyse de l'énoncé

L'énoncé est correct mais l'exemple est faux. Dans l'exemple la sortie est 43 or 43 est le nombre qu'on obtiendrait en prenant tous les objets. Or en prenant tous les objets on dépasserait le poids maximum qui est de 17, on aurait un poids de 26.

6.2 Specs JML

```
/* @requires nTests > 0; //Le nombre de tests @requires poids > 0 \land valeurs \geq 0; // Les poids sont strictement positifs et les valeurs des objets sont positives @ensures max(i) \Rightarrow j \leq M | i; valeur, j: poids, M: poidsMax;//Le poids associé à la valeur en sortie ne dépasse pas le poids max imposé /
```

6.3 Solution naïve

Comme solution naïve nous avons choisi de tester toutes les combinaisons possibles dans le sac afin de trouver la solution optimale. Voir code pour plus de détails

6.4 Complexité de l'algorithme naïf

Avec les formules de récurences on obtient $T(n) = 2*T(n-1) + O(1) \Rightarrow$ complexité $O(2^n)$. En effet, on a $c > 1 \iff 2 > 1$.

Donc complexité exponentielle.

6.5 Propriété gloutonne

La propriété gloutonne dont on a besoin pour résoudre cet algorithme est la propriété de choix glouton, qui consiste à toujours choisir l'objet ayant le meilleur rapport valeur/poids sans dépasser le poids maximum autorisé.

6.6 Choix glouton correct et preuve de la récursivité

Le choix glouton n'est pas optimal. En effet, l'optimal serait un algorithme de programmation dynamique qui teste toutes les combinaisons possibles d'objets dans le sac (brute force).

6.7 Specs JML de l'algorithme glouton

Voir code

6.8 Algorithme glouton

Nous avons choisi de trier la liste des objets par ordre décroissant de rapport valeur/poids et de prendre les objets dans l'ordre de la liste jusqu'à atteindre le poids maximum

6.9 Complexité de l'algorithme glouton

Complexité en O(n*log(n)) car c'est la complexité de la fonction Arraysort que l'on utilise où n est le nombre d'objets que l'on parcourt une seule fois. Donc complexité linéarithmique

7 Conclusion

Ce projet nous a appris à mieux maitriser Java ainsi qu'améliorer notre algorithmique. Dans le futur, nous aurons plus facile à écrire des scripts pour différents problèmes. Les méthodologies utilisées nous ont aussi permis de devenir polyvalents dans l'écriture d'algorithmes. Le JML nous a apporté de la rigueur quant à la documentation de nos algorithmes. En conclusion, ce projet fut très enrichissant pour notre futur carrière dans le domaine de l'informatique.