94007

B. Sc. (Pass) Mathematics 5th Semester
Old/New Scheme

Examination – February, 2022

GROUPS & RINGS

Paper : 12BSM-352

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 40*

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt ***five*** questions in all, selecting ***one*** question from each Unit. Question No. 9 (Unit – V) is ***compulsory***. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से ***एक*** प्रश्न चुनते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (इकाई – V) ***अनिवार्य*** है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

इकाई – I

1. (a) Prove that inverse of the product of two elements of a group is the product of their inverses in the reverse order. 3

सिद्ध कीजिए कि एक समूह के दो तत्वों के गुणनफल का व्युत्क्रम उनके व्युत्क्रमों का विपरीत क्रम में गुणनफल होता है।

(b) Let G = {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Find the orders of elements of group G under the binary operation additive modulo 6. 4

माना G = {0, 1, 2, 3, 4, 5}। बाइनरी ऑपरेशन एडिटिव मॉड्यूलो 6 के तहत ग्रुप G के तत्वों के क्रम ज्ञात करें।

2. (a) Prove that every finite group of composite order possesses proper subgroups. 3

सिद्ध करें कि मिश्रित क्रम के प्रत्येक परिमित समूह में उचित उपसमूह होते हैं।

(b) Show that the relation of congruence modulo of a subgroup H is a group G defined by $a \equiv b \pmod{H}$ iff $ab^{-1} \in H$ is an equivalence relation. 4

दिखाएँ कि एक उपसमूह H के सर्वांगसमता मॉड्यूलो का संबंध एक समूह G है जिसे $a \equiv b \pmod{H}$ द्वारा परिभाषित किया गया है यदि $ab^{-1} \in H$ एक समकक्ष संबंध है।

UNIT – II

इकाई – II

3. (a) If H is normal subgroup of a group G s. t. $f : G \to G/H$ defined by $f(x) = Hx \; \forall \in G$, then prove f is homomorphism and Kernel $f = H$. 3

यदि H समूह G का सामान्य उपसमूह है। यदि $f : G \to G/H$ द्वारा परिभाषित $f(x) = Hx \; \forall \in G$,है, तब सिद्ध करें कि f समरूपता है और कर्नेल $f = H$।

(b) Let G be group and 'f' is automorphism of G. If $a \in G$ is finite ordered element of G. Then prove $0(a) = 0\,(f\,(a))$. 4

माना G समूह है और 'f' G का ऑटोमॉर्फिज्म है। यदि $a \in G$, G का परिमित ऑर्डर्ड तत्व है। तो सिद्ध करें कि $0(a) = 0\,(f\,(a))$।

4. (a) Show that a characteristic subgroup of a group G is a normal subgroup of G. Is the converse true ? 3

P. T. O.

दिखाएँ कि समूह G का एक विशिष्ट उपसमूह G का एक सामान्य उपसमूह है। क्या इसका विलोम सत्य है ?

(b) Write all elements of symmetric group S_3 as product of disjoint cycles. 4

सममित समूह S_3 के सभी तत्वों को असंयुक्त चक्रों के उत्पाद के रूप में लिखें।

UNIT – III

इकाई – III

5. (a) Prove that every field is an integral domain. 3

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक इन्टिग्रल डोमेन है।

(b) The order of each non-zero element of an integral domain (regarding the elements as the members of additive group) is same. 4

एक समाकल डोमेन के प्रत्येक गैर-शून्य तत्व का क्रम (तत्वों को योजक समूह के सदस्यों के रूप में) समान है।

6. (a) Prove that intersection of arbitrary left ideals of a ring is a left ideal. 3

सिद्ध कीजिए कि वलय के एकपक्षीय बाएँ आदर्शों का प्रतिच्छेदन बाएँ आदर्श है।

(b) Let $f : R \to R'$ be a homomorphism. Then prove f is isomorphism iff $\ker(f) = \{0\}$. 4

मान लीजिए $f : R \to R'$ एक समाकारिता है। तब सिद्ध कीजिए कि f समरूपता है यदि $\ker(f) = \{0\}$।

UNIT – IV

इकाई – IV

7. (a) Let R be a Euclidean ring and S be a ideal of R, then $\exists$ an element $a \in S$ s. t. $S = \{ar : r \in R\}$. 3

मान लीजिए कि R एक यूक्लिडियन वलय है और S, R का आदर्श है, तो $\exists$ एक तत्व $a \in S$ है। यदि $S = \{ar : r \in R\}$।

(b) Prove that an element of a principal ideal domain is prime iff it is irreducible. 4

सिद्ध करें कि एक प्रमुख आदर्श डोमेन का एक तत्व अभाज्य है यदि यह इरेड्यूसबल है।

8. (a) If F is a field, then $F[x]$, the set of all polynomials over F is an integral domains. 3

यदि F एक क्षेत्र है, तो $F[x]$, F पर सभी बहुपदों का सेट एक समाकल डोमेन है।

(b) If a polynomial $f(x) \in F(x)$ is divided by '$x - a$' then the remainder is $f(a)$. 4

यदि एक बहुपद $f(x) \in F(x)$ को '$x - a$' से विभाजित किया जाता है, तो शेष $f(a)$ है।

UNIT – V

इकाई – V

9. (a) Find order of each element of multiplicative group {1, –1, i, –i}. 2 × 6

गुणक समूह {1, –1, i, –i} के प्रत्येक तत्व का क्रम ज्ञात करें।

(b) If H & K are subgroups of G s. t. 0(k) = 1, then $H \cap K = \{e\}$.

यदि H एवं K, G के उपसमूह हैं। यदि 0(k) = 1, तो $H \cap K = \{e\}$।

(c) Staet Lagrange's Theorem.

लैग्रेंज के प्रमेय को बताइए।

(d) Define transposition. What do you mean by even and odd permutation.

ट्रांसपोजीशन को परिभाषित करें। सम और विषम क्रमपरिवर्तन से आप क्या समझते हैं ?

(e) Prove that a field has no proper ideals.

सिद्ध करें कि एक क्षेत्र में कोई उचित आदर्श नहीं है।

(f) With example define primitive polynomial.

उदाहरण के साथ प्रिमिटिव बहुपद को परिभाषित करें।
