Roll No. ....

94006

B. Sc. (Pass) Mathematics 5th Semester

Old/New Scheme

Examination – February, 2022

REAL ANALYSIS

Paper : 12BSM-351

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 40*

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Question No. 9 (Section – V) is **compulsory**.

प्रत्येक खण्ड से ***एक*** प्रश्न चुनते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड – V) ***अनिवार्य*** है।

SECTION – I

खण्ड – I

1. (a) If P' is a refinement of P containing 'p' points more than P and $|f(x)| \le k$ for all $x \in [a, b]$, then $L(f, P) \le L(f, P') \le L(f, P) + 2pk\delta$.

यदि P 'P' का शोधन है जिसमें P से अधिक 'p' बिन्दु होते हैं और $|f(x)| \le k$ सभी $x \in [a, b]$, के लिए, तो $L(f, P) \le L(f, P')\ L(f, P) + 2pk\delta$।

(b) A bounded function having a finite number of points of discontinuity on $[a, b]$ is integrable on $[a, b]$.

$[a, b]$ पर असंततता के बिन्दुओं की एक सीमित संख्या वाला एक परिबद्ध फलन $[a, b]$ पर समाकलनीय होता है।

2. (a) Using definition, evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$.

परिभाषा का उपयोग करते हुए, $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$ का मूल्यांकन करें।

(b) Prove that :

$$\frac{1}{\Pi} \le \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}\, dx \le \frac{2}{\Pi}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{\pi} \leq \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}\, dx \leq \frac{2}{\pi}$$

SECTION – II

खण्ड – II

3. (a) The improper integral $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ is convergent if and only if $n < 1$.

असंगत समाकल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ अभिसारी है यदि और केवल यदि $n < 1$।

(b) Examine the convergence of improper integral $\int_0^\infty x \frac{\tan^{-1} x}{(1+x^4)^{1/3}}\, dx$.

असंगत समाकल $\int_0^\infty x \frac{\tan^{-1} x}{(1+x^4)^{1/3}}\, dx$ के अभिसरण की जांच करें।

4. (a) Examine the convergence of $\int_0^\infty \sin x^2\, dx$.

$\int_0^\infty \sin x^2\, dx$ के अभिसरण की जांच करें।

(b) Prove that $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ and hence deduce that $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

सिद्ध करें $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ और $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ इसका परिणाम निकालिए।

$\int \frac{1}{1+x^2}$

$\int \frac{1}{1+\frac{b}{a}} dx$

SECTION – III

खण्ड – III

5. (a) Show that any metric space (X, d), bounded or not, can be converted into a bounded metric space (X, d^*) where $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$.

दिखाएँ कि कोई भी मीट्रिक स्पेस (X, d), बाउंडेड है या नहीं, एक बाउंडेड मीट्रिक स्पेस (X, d^*) में परिवर्तित किया जा सकता है जहाँ $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$।

(b) Let (X, d) be a metric space, then a non empty subset G of X is open iff it is the union of open spheres.

माना (x, d) एक मीट्रिक स्पेस है, तो X का एक गैर खाली सबसेट G खुला है यदि यह खुले क्षेत्रों का संघ है।

6. (a) A subset F of a metric space (X, d) is closed iff F contains all its limit points i. e. $d(F) \leq F$.

एक मीट्रिक स्पेस $(X, d))$ का एक सबसेट F बंद है यदि F में इसके सभी सीमा बिंदु शामिल हैं जैसे कि $d(F) \leq F$।

(b) Every convergent sequence in a metric space has a unique limit.

मीट्रिक स्पेस में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम की एक अनूठी सीमा होती है।

SECTION – IV

खण्ड – IV

7. (a) Let (X, d) and (Y, d^*) be two metric spaces and let f, g be two continuous functions of X into Y then the set $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ is a closed subset of X.

माना $(X, d))$ और (Y, d^*) दो मीट्रिक स्पेस हैं और f, g X के Y में दो सतत फलन हैं तो सेट X $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ का एक बंद सबसेट है।

(b) Every closed subset of a compact metric space is compact.

कॉम्पैक्ट मीट्रिक स्पेस का प्रत्येक बंद सबसेट कॉम्पैक्ट है।

8. (a) A metric space (X, d) is compact iff it has Bolzano Weierstrass property.

एक मीट्रिक स्पेस (X, d) कॉम्पैक्ट है यदि इसमें बोलजानो वीयरस्ट्रास प्रॉपर्टी है।

(b) The set of real numbers with usual metric is a connected space.

सामान्य मीट्रिक के साथ वास्तविक संख्याओं का सेट एक जुड़ा हुआ स्पेस है।

SECTION – V

खण्ड – V

9. (a) Prove that $\sum_{r=1}^{n} \delta_r = b - a$ for every partition P of $[a, b]$ where δ_r is length of rth subinterval.

सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=1}^{n} \delta_r = b - a$, $[a, b]$ के प्रत्येक विभाजन P के लिए जहाँ δ_r रवाँ सबइंटरवल की लंबाई है।

(b) Prove the inequality :

$$1 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le e$$

असमानता सिद्ध करें :

$$1 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le e$$

(c) By using Frullani's integral, prove that $\int_0^\infty \frac{e^{-2x} - e^{-4x}}{x} dx = \log 2$.

फ्रुलानी के समाकल का उपयोग करके सिद्ध करें कि

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2x} - e^{-4x}}{x} dx = \log 2$$

(d) Define closure of a set and derived set.

एक सेट के क्लोज़र और व्युत्पन्न सेट को परिभाषित करें।

(e) Let A and B are subsets of metric space (X,d) prove that $A \subseteq B$ implies $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

माना A और B मीट्रिक स्पेस (X,d) के सबसेट हैं तो सिद्ध करें कि $A \subseteq B$, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ में निहित हैं।

(f) Define sequentially compact metric space.

क्रमिक रूप से कॉम्पैक्ट मीट्रिक स्पेस को परिभाषित करें।
