Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-Механический факультет

Кафедра Прикладной кибернетики

«Допустить к защите»____________________

Заведующий кафедрой

Курсовая работа

Еричев Алексей Олегович

Дробная размерность. Фракталы.

Научный руководитель

доктор физ.-мат. н., профессор Н.В.Кузнецов

Санкт-Петербург – 2021

Оглавление

1. Введение

Начиная с изучения школьной геометрии люди привыкли, что математика оперирует в большинстве своем гладкими идеализированными формами объектов, такими как прямая, квадрат и шар, которые практически не встречаются в природе. Поэтому многие не увлечённые данной наукой люди считают, что её идеи редко применимы в обычной жизни. Но теория фракталов изменила бы их взгляд на математику.

Термин фрактал был впервые введен в 1975 году Бенуа Мандельбротом [1], пионером в области фрактальной геометрии, хотя многие математические идеи сформировались задолго до этого, ещё в XIX-м веке, в работах Георга Кантора, Карла Вейерштрасса, Джузеппе Пеано и других. Понятие фрактальной (дробной) размерности появилось в 1919 году в работе Феликса Хаусдорфа. Тем не менее, именно Мандельброд объединил эти идеи и положил начало систематическому изучению фракталов и их приложений.

В данной работе рассматриваются строение фракталов, некоторые их характеристики и практическое применение в современном мире.

2. Понятие дробной размерности

На примерах известных структур рассмотрим понятие дробной размерности. Разделим отрезок прямой на N равных частей [3]. Тогда каждую часть можно считать копией всего отрезка, уменьшенной в $\frac{1}{r}$ раз. Очевидно, N и r связаны соотношением $Nr = 1$ (рис.1). Если квадрат разбить на N равных квадратов (площадью, в $\frac{1}{r^2}$ раз меньше площади исходного), то соотношение запишется как $Nr^2 = 1$. Если куб разбить на N равных кубов (объемом, в $\frac{1}{r^3}$ раз меньше объема исходного), то соотношение примет следующий вид: $Nr^3 = 1$. Заметим, что размерность d объекта, будь то одномерный отрезок, двумерный квадрат или трехмерный куб, появляется как степень r в соотношении между N, числом равных подобъектов, и коэффициентом подобия r. А именно:

$$Nr^d = 1. \tag{1}$$

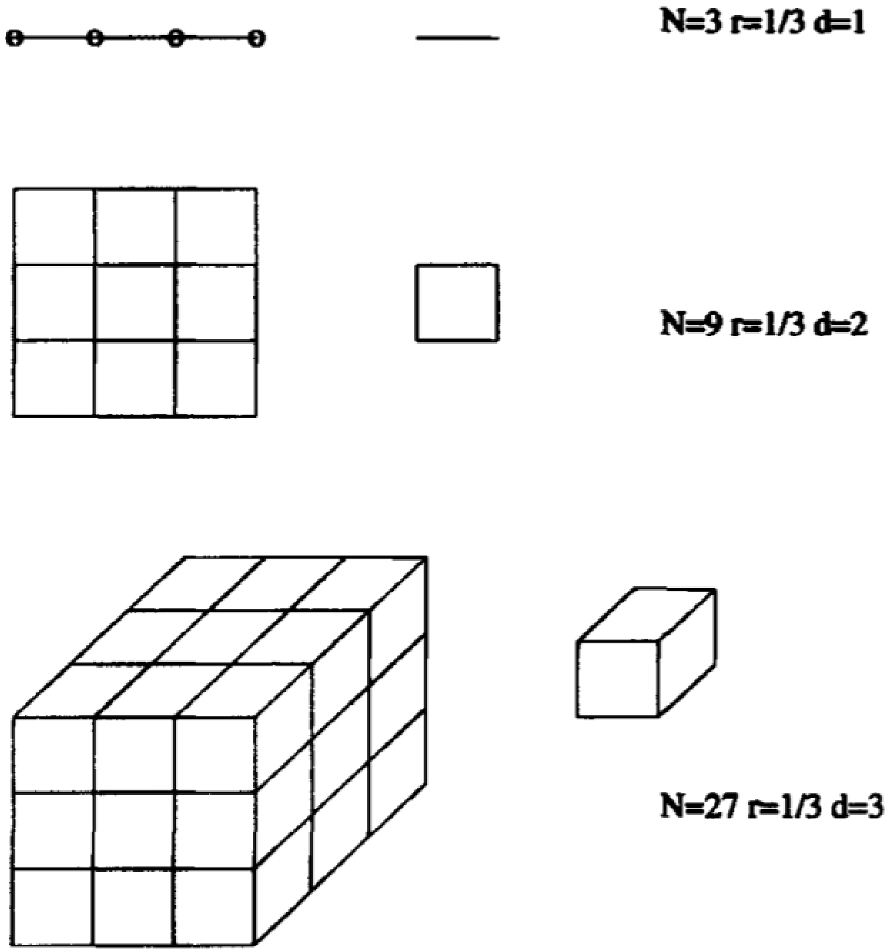

Рис. 1. Отрезок, квадрат и куб

Куб, квадрат и отрезок обладают целой размерностью. Ниже мы убедимся в том, что существуют такие построения, при которых показатель d в равенстве (1) не является целым, то есть при разбиении исходного множества на N непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала с коэффициентом r, значение d не будет выражаться целым числом. Такое множество и называют *фракталом.* Величину d называют *фрактальной (дробной) размерностью или размерностью подобия*. Явно выражение для d через N и r находится логарифмированием обеих частей:

$$d = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}.$$

2.1. Канторово множество

Для построения Канторова множества рассмотрим отрезок. Разделим его на 3 равные части и удалим средний интервал. Для каждого из двух оставшихся отрезков повторим данную процедуру, и так далее. Полученный объект называется *Канторово множество*. Убедимся, что он является фракталом, для этого изучим его размерность [4].

После первого шага построения мы получили две части, длина которых равна $\frac{1}{3}$ длины изначального отрезка, значит, по определению нужно найти такое число d, что

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63092975357.$$

Теперь рассмотрим видоизмененное Канторово множество: будем делить отрезок на 5 частей и убирать вторую. Тогда по формуле (1) имеем соотношение:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^d = \frac{1}{4}.$$

Легко видеть, что

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 5} \approx 0.86135311614.$$

Рис. 2. Канторово множество

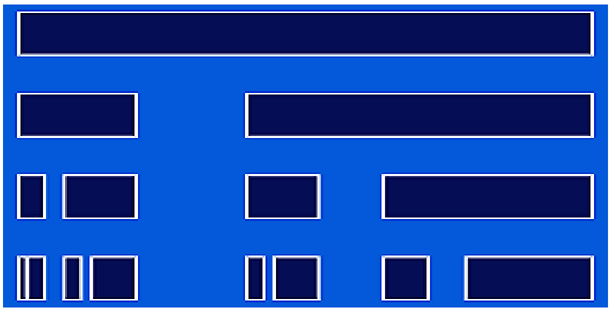

Рис. 3. Модифицированное Канторово множество

2.2. Снежинка Коха

Обратимся к фракталам размерности больше 1. Один из самых изящных примеров — это *снежинка Коха* [11]. Вначале также рассмотрим отрезок и разделим его на 3 части, но теперь на средней части простроим равносторонний треугольник и удалим его основание. Повторим данную операцию для каждого из 4-х полученных отрезков, и так далее. Получим фрактал, который является одной третьей Снежинки Коха.

Вычислим его размерность. После первого шага имеем 4 равных части, длина каждой из которых равна $\frac{1}{3}$ длины изначального отрезка. Аналогично по определению имеем равенство:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^d = \frac{1}{3}.$$

Если склеить 3 одинаковые части, как показано на рис. 5, мы получим снежинку Коха. Легко видеть, что

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26185950714.$$

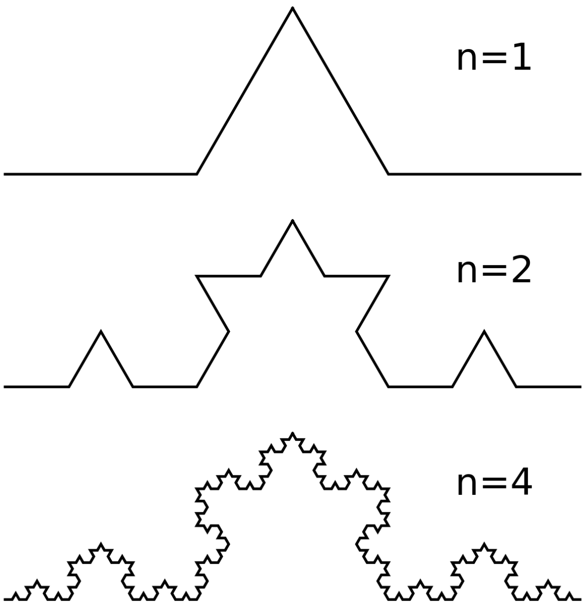

Рис. 4. Треть снежинки Коха

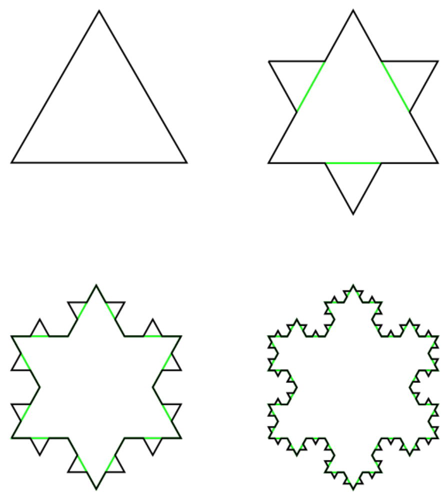

Рис. 5. Снежинка Коха

2.3. Кривая Леви

Рассмотрим отрезок, построим на нем, как на гипотенузе, равнобедренный прямоугольный треугольник, а затем удалим гипотенузу. Повторим данную операцию для каждого из 2х полученных отрезков, и так далее. Полученный фрактал называется *Кривая Леви*.

Вычислим его размерность. После первого шага имеем 2 равных части, длина каждой из которых равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$ длины изначального отрезка. Аналогично по определению имеем равенство:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^d = \frac{1}{2}.$$

Ясно, что

$$d = \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{2}} = 2.$$

Мы видим, что фракталы тоже могут иметь целую размерность.

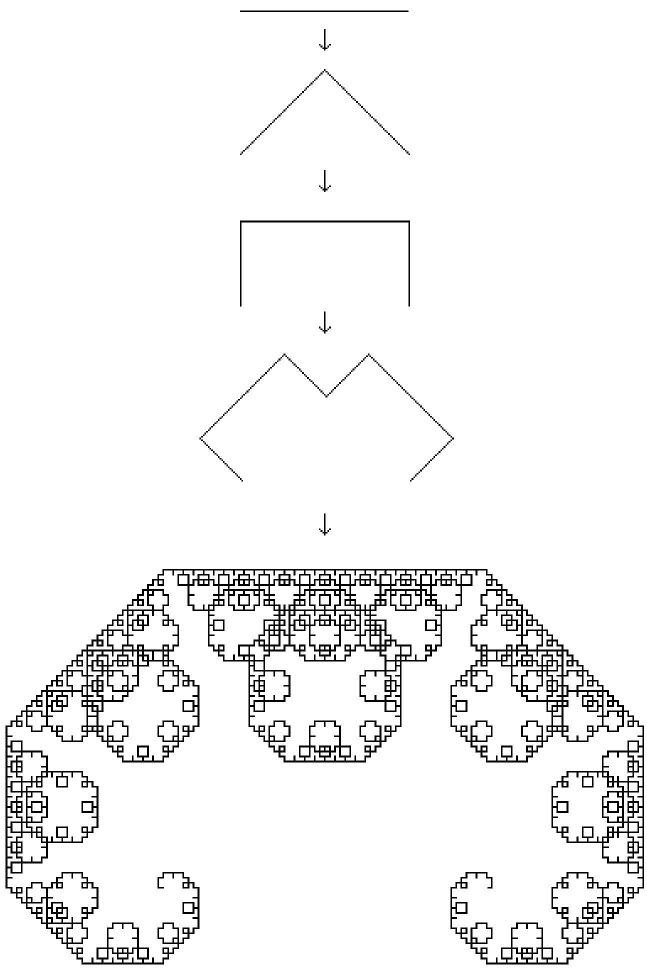

Рис. 6. Кривая Леви

3. Размерность Минковского и размерность Хаусдорфа

Существует несколько принципиально разных определений размерности геометрического объекта [8, 9]. Мы остановимся на трех: топологическая размерность, размерность Хаусдорфа и фрактальная размерность или размерность Минковского. Топологическая размерность множества всегда выражается целым числом; это не противоречит интуитивному представлению о том, что кривые одномерны, а поверхности двумерны. Размерность Хаусдорфа лежит в основе фрактальной теории. В 1975 году Мандельброт определил фрактал как множество, размерность Хаусдорфа которого строго больше топологической размерности. Размерность Минковского может служить аналогом размерности Хаусдорфа, удобным для использования в прикладных задачах. Эти размерности, как правило, совпадают, но алгоритм определения размерности Минковского намного удобнее для работы [2]. Размерность Минковского является обобщением введенного выше понятия дробной размерности.

Рассмотрим компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$, покоем его объединением открытых шаров и просуммируем их объёмы. Пусть $N(\varepsilon)$ — минимальное число шаров радиуса ε, необходимое для покрытия множество A. Тогда $d-$мера A, обозначаемая $B_d(A)$, пропорциональна $N(\varepsilon)\varepsilon^d$. Тогда для некоторого $c > 0$ имеем:

$$N(\varepsilon) \approx \frac{c}{\varepsilon^d}.$$

Логарифмируя данное равенство, получаем (приближенно): $\log N(\varepsilon) = \log - d \log \varepsilon$, откуда получаем:

$$d = -\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} + \frac{\log c}{\log \varepsilon}.$$

Так как $\log \varepsilon \to -\infty$ при $\varepsilon \to +0$, то размерность Минковского множества A должна удовлетворять:

$$\dim_M(A) = d = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Размерность Минковского множества A равна данному пределу, если он существует.

Размерность Хаусдорфа определяется практически так же, однако множество A не обязательно берётся компактным, а шары рассматриваются радиуса $0 < r \leqslant \varepsilon$.

3.1. Инвариантность размерности Минковского

Так как фрактал может быть построен итеративно повторением одного и того же преобразования бесконечное число раз, то мы можем рассмотреть более формализированный подход к созданию фрактала и определить функцию, которая будет описывать один шаг преобразования. Тогда итоговый фрактал будет являться бесконечной композицией данной функции [12].

Зададимся вопросом возможно ли, чтобы функция, реализующая построение фрактала, являлась диффеоморфизмом. Для дальнейшего доказательства напомним некоторые определения [7].

Определение 1. Метрическое пространство — это пара (X, d), где X — множество, а $d : X \times X \to \mathbb{R}$ — числовая функция, удовлетворяющая трем соотношениям $\forall x, y, z \in X$:

1. $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,\ y) = d(y,\ x)$
3. $d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$

Определение 2.1. Две метрики в пространстве E называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же систему открытых множеств.

Также существует равносильное определение:

Определение 2.2. Две метрики в пространстве E называются *эквивалентными*, если тождественное отображение множества E, снабженного первой метрикой, на множество E, снабженного второй метрикой, является гомеоморфизмом.

В векторных пространствах две нормы называются эквивалентными, если эквивалентны советующие им метрики.

Хорошо известно, что для эквивалентных норм выполняется соотношение: существуют такие числа $a, b, c, d > 0$, что для всех $x \in E$ выполняются неравенства

$$a||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant b||x||_1,$$

$$c||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant d||x||_2.$$

Тогда доказательства факта сохранения размерности Минковского опирается на следующую теорему:

Теорема 1. Пусть $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$ — эквивалентные метрики, A — компакт с размерностью Минковского $\dim_M(A) = d$ в p_2-метрике. Тогда $\dim_M(A) = d$ в p_1-метрике.

Доказательство. Из эквивалентности метрик p_1 и p_2 следует, что можно указать такие постоянные $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, для которых выполняется неравенство:

$$\lambda p_2(x, y) \leqslant p_1(x, y) \leqslant \mu p_2(x, y).$$

Обозначим через $B_1(x, r)$ и $B_2(x, r)$ шары радиуса r с центром в x, через $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — число шаров, необходимых для покрытия A, в p_1- и p_2-метрике, соответственно. Тогда из двойного неравенства для эквивалентных метрик следует:

$$B_2(x, \varepsilon/\mu) \subset B_1(x, \varepsilon) \subset B_2(x, \varepsilon/\lambda),$$

тогда

$$N_2(\varepsilon/\lambda) \leqslant N_1(\varepsilon) \leqslant N_2(\varepsilon/\mu),$$

при $0 < \varepsilon < 1$:

$$\frac{N_2(\varepsilon/\lambda)}{\log 1/\varepsilon} \leqslant \frac{N_1(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leqslant \frac{N_2(\varepsilon/\mu)}{\log 1/\varepsilon}.$$

По условию имеем равенство:

$$d = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_2(\varepsilon)}{\log \varepsilon},$$

но ввиду

$$d = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_2(\varepsilon/\lambda)}{\log 1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_2(\varepsilon/\mu)}{\log 1/\varepsilon},$$

получаем равенство:

$$d = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_1(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

□

Теперь мы можем сформулировать теорему о сохранении размерности при диффеоморфизме:

Теорема 2. Пусть A — компакт в $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \tilde{A}$ — диффеоморфизм, где $\tilde{A}$ — подмножество $\mathbb{R}^n$,

$$y = f(x), \text{ где}$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T,$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

т.е. $f(x)$— непрерывное взаимно однозначное отображение, $f^{-1}(y)$— непрерывное взаимно однозначное отображение, все частные производные $\partial f_j/\partial x_k,\ (j,k=1,...,n)$ непрерывны на A, а все частные производные компонент обратного отображения $x=f^{-1}(y)$ непрерывны на $\tilde{A}$. Тогда

$$\dim_M(A)=\dim_M(\tilde{A}).$$

Доказательство. Для краткости записи ограничимся случаем $n=2$. Для случая произвольного n доказательство совершенно аналогично. Определим новую метрику на A:

$$p(x,t)=||f(x)-f(t)||_2.$$

Так как отображение f — взаимно однозначное, то p действительно является метрикой. Докажем эквивалентность p-метрик и евклидовой метрики на A. Сначала покажем, что

$$p(x,t)\leqslant\mu||x-t||_2,$$

для некоторого $\mu>0$. По условию, частные производные непрерывны, а значит существует такое число $M>0$, что

$$|\partial f_j/\partial x_k|\leqslant M,\quad j,k=1,2.$$

Положим

$$x=(x_1,x_2)^T,\quad t=(t_1,t_2)^T,$$

тогда

$$|f_1(x_1,x_2)-f_1(t_1,t_2)|=|(f_1(x_1,x_2)-f_1(t_1,x_2))+(f_1(t_1,x_2)-f(t_1,t_2))|\leqslant$$

$$\leqslant|f_1(x_1,x_2)-f_1(t_1,x_2)|+|f_1(t_1,x_2)-f(t_1,t_2)|\leqslant|\frac{\partial}{\partial x_1}f_1(\xi,x_2)(t_1-x_1)|+|\frac{\partial}{\partial x_2}f_1(t_1,\eta)(t_2-x_2)|\leqslant$$

$$\leqslant M|t_1-x_1|+M|t_2-x_2|\leqslant\sqrt{2}M||x-t||_2.$$

Точно такое же неравенство выполняется и для $|f_2(x_1,x_2)-f_2(t_1,t_2)|$. Объединяя оба неравенства, получим: $||f(x)-f(t)||_2\leqslant 2M||x-t||_2$. Обратное отображение f^{-1} удовлетворяет аналогичному неравенству. Таким образом, p-метрика эквивалентна евклидовой.

По теореме 1 размерность Минковского A (или $\tilde{A}$) в евклидовой метрике и в p-метрике одна и та же. Следовательно, размерность в евклидовой метрике в точности равна размерности в p-метрике. $\square$

Таким образом, мы доказали, что фракталы не могут быть получены при помощи диффеоморфизмов. Но что произойдёт если отказаться от условия непрерывности частных производных (т.е. рассмотреть гомеоморфизмы)?

Покажем, что функции, итеративно строящие фракталы могут являться гомеоморфизмами на примере рассмотренной выше Снежинки Коха. Ввиду того, что на каждом шаге локально происходит преобразование отрезка, сохраняющее первую и третью его треть на месте, и просто отображающее вторую треть как одну из сторон треугольника в две другие, то данное отображение будет являться биективным. Также видно, что оно непрерывно так, как близкие точки отрезка переходят в близкие точки образа. Очевидно, что данные свойства также выполняются и для обратного отображения: точки первой и третьей трети остаются на месте, а точки двух сторон треугольника проецируются на третью. Следовательно, локально данное отображение непрерывно и биективно, но функция, строящая весь фрактал, также является непрерывной и взаимно однозначной, как композиция непрерывных и взаимно однозначных функций, т.е. гомеоморфизмом.

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать вывод, что условие гладкости отображения, которое нарушается в точках изгиба фракталов, является фактором, определяющим сохранение размерностей Хаусдорфа и Минковского.

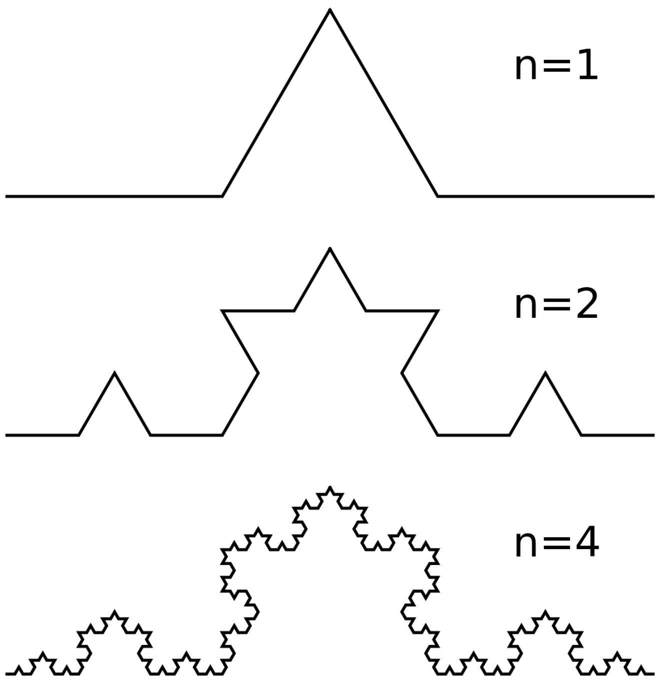

Рис. 7. Треть снежинки Коха

4. Практическое применение

Хотя теория фракталов является достаточно молодой наукой, она нашла большое применение в сегодняшней жизни. Фракталы используются во многих сферах, начиная с компьютерной графики, заканчивая биологией и экономикой [6].

4.1. Сжатие изображений

Фрактальное сжатие изображений — это алгоритм сжатия изображений с потерями, основанный на применении систем итерируемых функций к изображениям. Данный алгоритм известен тем, что в некоторых случаях позволяет получить очень высокие коэффициенты сжатия (лучшие примеры — до 1000 раз при приемлемом визуальном качестве) для реальных фотографий природных объектов, что недоступно для других алгоритмов сжатия изображений в принципе. Из-за сложной ситуации с патентованием широкого распространения алгоритм не получил.

Основа метода фрактального кодирования — это обнаружение самоподобных участков в изображении. Впервые возможность применения теории систем итерируемых функций (IFS) к проблеме сжатия изображения была исследована Майклом Барнсли и Аланом Слоуном [13]. Они запатентовали свою идею в 1990 и 1991 гг. Джеквин представил метод фрактального кодирования, в котором используются системы доменных и ранговых блоков изображения квадратной формы, покрывающих все изображение. Этот подход стал основой для большинства методов фрактального кодирования, применяемых сегодня [4], [10].

4.2. Естественные науки

В физике фракталы возникают при моделировании нелинейных процессов, таких как турбулентные потоки воздуха, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, разряды молний [9],[14]. Так В статье [5] изложены результаты, полученные автором с учениками в радиофизических и радиолокационных направлениях с помощью теории фракталов и математической теории дробной размерности при учете скейлинговых эффектов реальных радиосигналов и электромагнитных полей. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций, а также для описания систем внутренних органов (системы кровеносных сосудов, лёгких) [15].

4.3. Компьютерная графика

Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и так далее [16].

С использованием фракталов могут строиться вполне реалистичные картинки. Например, фракталы нередко используются при создании облаков, снега, береговых линий, деревьев и гор.

Отличительной особенностью фрактальных изображений является тот факт, что для хранения им не требуется большие объёмы памяти. Необходимо лишь хранить информацию о способе построения фрактала, само изображение строится итеративно из изначальных условий.

4.4. Экономика

Использование математического аппарата теории фракталов открывает новые возможности в моделировании рыночных процессов [17]. Ключевым моментом, способствующим этому, является саморазвитие фрактала. Данное свойство характеризует фрактал как математический объект, наиболее соответствующий системной природе социальных и экономических процессов, протекающих в условиях нелинейной динамики множества факторов внешней и внутренней сред. В реальном мире существует достаточно много фрактальных явлений в том смысле, что их можно рассматривать как модели, приближенно имеющие самоподобную структуру. Так. грамотно построенная статистическая фрактальная модель позволяет получить достаточно точные и адекватные прогнозы.

Примером одного из наиболее эффективных применений теории фракталов при моделировании рыночных процессов является фрактальная модель фондового рынка. Ввиду особенностей функционирования рынка ценных бумаг, достаточно тяжело спрогнозировать динамику цен на нем. Существует множество рекомендаций и стратегий, однако лишь применение фракталов, позволяет построить адекватную модель поведения фондового рынка. В пользу эффективности применения такого подхода говорит то, что многие участники фондовых бирж тратят немалые деньги на оплату услуг специалистов в данной области.

Фрактальный анализ рынков, в отличие от теории эффективных рынков, постулирует зависимость будущих цен от их прошлых изменений. Таким образом, процесс ценообразования на рынках глобально детерминирован, зависим от "начальных условий" то есть прошлых значений. Локально же процесс ценообразования случаен, то есть в каждом конкретном случае цена имеет два варианта развития. Фрактальный анализ рынков напрямую исходит из фрактальной теории и заимствует свойства фракталов для получения прогнозов.

4.5. Радиотехника

В телекоммуникациях фракталы используются для создания фрактальных антенн [18]. Фрактальные антенны — относительно новый класс электрически малых антенн (ЭМА), принципиально отличающийся своей геометрией от известных решений. По сути, традиционная эволюция антенн базировалась на евклидовой геометрии, оперирующей объектами целочисленной размерности (линия, круг, эллипс, параболоид и т. п.). Фрактальная антенны с удивительно компактным дизайном обеспечивает превосходную широкополосную производительность в маленьком форм-факторе. Достаточно компактны для установки или встраивания в различных местах, фрактальные антенны используются для морских, воздушных транспортных средств, или персональных устройств.

4.6. Децентрализованные сети

Система назначения IP-адресов в сети Netsukuku использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети Netsukuku хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании раздачи IP-адресов, что, например, характерно для сети Инт использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети Netsukuku хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании раздачи IP-адресов, что, например, характерно для сети Интернет. Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, и следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

Стоит отметить, что теория фракталов продолжает развиваться и в наше время, находя все более неожиданные способы приложения. Выше представлены лишь некоторые примеры, демонстрирующие применение фракталов.

5. Заключение

В ходе проведённой работы были изучены основные идеи устройства фракталов. Разобран вопрос сохранения размерности Минковского при гомеоморфизме и диффеоморфизме. Вычислены размерности некоторых фракталов, таких как Канторово множество, Снежинка Коха и Кривая Леви, а также приведен обзор примеров, демонстрирующих практическое применение фракталов в современной жизни.

Список литературы

1. **Мандельброт Б.** *Фрактальная геометрия природы* — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. **Кроновер Р.М.** *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории* — Москва: Постмаркет, 2000. — 352 с.
3. **Леонов Г.А.** *Теория управления* — СПб: Санкт-Петербургский университет, 2006. — 234 с.
4. **Локтев А.А., Залетдинов А.В.** *Использование фракталов в задачах обеспечения информационной безопасности* — Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, вып. 15, no. 2, 2010, с. 599-604.
5. **Потапов А.А.** *Фракталы и дробные операторы в обработке информации – фундаментальное направление синергетики* — Известия Южного федерального университета. Технические науки, вып. 119, no. 6, 2011, с. 30-40.
6. **Зеленый Л.М., Милованов А.В.** *Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики* — УФН 174 809–852 (2004)
7. **Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М.** *Элементарная топология* —2-е изд., исправл. - М.: МЦНМО, 2012. - 358 с.
8. **Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.** *Геометрия* — Учебник. — 2-е издание, исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 624 с.: ил. — (Учебная литература для вузов).
9. **Мун Ф.** *Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров* — Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 312 с.
10. **Никонов В.Г., Зобов А.И.** *О возможности применения фрактальных моделей при построении систем защиты информации* — Computational nanotechnology, no. 1, 2017, pp. 39-49.
11. **Федер Е.** *Фракталы* — М.: Мир, 1991. 254 с.
12. **Кузнецов С.П.** *Динамический хаос. Курс лекций.* — М.: Изд-во физ.-мат. лит, 2001.
13. **Барнсли М., Барнсли Л.** *Фрактальные трансформации.* — Colours of Infinity. Ed.N. Lesmoir-Gordon. Springer-Verlag London Ltd, 2010. P. 58—73
14. **Диаку Ф., Холмс Ф.** *Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости.* — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 304 с.
15. **Голдберг Э.Л., Ригни Д.Р., Уэст Б.Дж.** *Хаос и фракталы в физиологии человека*

— В мире науки. 1990. № 4. С. 25–32.

16. **Гибадуллин А.А.** *Фрактальные деревья и их использование в компьютерной графике* — Научные исследования, 2016 (1 (2)), 10-11.
17. **Жуликова О.В., Жуликов П.П.** *Фрактальные формы экономического развития* — Экономика образования, 2015 (1), 107-111.
18. **Абдрахманова, Г. И., Багманов, В. Х.** *Сверхширокополосная антенна на основе фрактальных структур.* — Электротехнические и информационные комплексы и системы, 2013 9 (3), 52-59.