概率论与数理统计复习

第一章　概率论的基本概念

一. 基本概念

随机试验 E:(1)可以在相同的条件下重复地进行;(2)每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

样本空间 S: E 的所有可能结果组成的集合.　样本点(基本事件):E 的每个结果.

随机事件(事件):样本空间 S 的子集.

必然事件(S):每次试验中一定发生的事件.　不可能事件(Φ):每次试验中一定不会发生的事件.

二. 事件间的关系和运算

1.$A\subset B$(事件 B 包含事件 A)事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

2.$A\cup B$(和事件)事件 A 与 B 至少有一个发生.

3. $A\cap B=AB$(积事件)事件 A 与 B 同时发生.

4. $A-B$(差事件)事件 A 发生而 B 不发生.

5. $AB=\Phi$ (A 与 B 互不相容或互斥)事件 A 与 B 不能同时发生.

6. $AB=\Phi$且 $A\cup B=S$ (A 与 B 互为逆事件或对立事件)表示一次试验中 A 与 B 必有一个且仅有一个发生.　$\overline{B}=A$,　$\overline{A}=B$.

运算规则　交换律 结合律 分配律　德• 摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

三. 概率的定义与性质

1.定义　对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 P(A),称为事件 A 的概率.

(1)非负性 $P(A)\geqslant 0$;　(2)归一性或规范性　$P(S)=1$;

(3)可列可加性　对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots(A_iA_j=\Phi, i\neq j, i,j=1,2,\ldots)$,

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$

2.性质

(1) $P(\Phi)=0$,　注意: A 为不可能事件 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $P(A)=0$.

(2)有限可加性　　对于 n 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$　(有限可加性与可列可加性合称加法定理)

(3)若 $A\subset B$, 则 $P(A)\leqslant P(B)$, $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(4)对于任一事件 A, $P(A)\leqslant 1$, $\overline{P}(A)=1-P(A)$.

(5)广义加法定理　对于任意二事件 A,B ,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

四.等可能(古典)概型

1.定义 如果试验 E 满足:(1)样本空间的元素只有有限个,即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$;(2)每一个基本事件的概率相等,即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$.则称试验 E 所对应的概率模型为等可能(古典)概型.

2.计算公式 $P(A)=k/n$ 其中 k 是 A 中包含的基本事件数, n 是 S 中包含的基本事件总数.

五.条件概率

1.定义　事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$　($P(A)>0$).

2.乘法定理　$P(AB)=P(A)P(B|A)$　($P(A)>0$);　$P(AB)=P(B)P(A|B)$　($P(B)>0$).

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$　($n\geqslant 2$, $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$)

3. $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 S 的一个划分($B_iB_j=\phi$,$i\neq j$,$i,j=1,2,\cdots,n$, $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$) ,则

当 $P(B_i)>0$ 时,有全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

当 $P(A)>0$, $P(B_i)>0$ 时,有贝叶斯公式 $P(B_i|A)=\dfrac{P(AB_i)}{P(A)}=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$.

六. 事件的独立性

1.两个事件 A,B,满足 $P(AB)=P(A)P(B)$时,称 A,B 为相互独立的事件.

(1)两个事件 A,B 相互独立$\Leftrightarrow$ $P(B)=P(B|A)$.

(2)若 A 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 B, , $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对相互独立, 则另外三对也相互独立.

2.三个事件 A,B,C 满足 P(AB) =P(A) P(B), P(AC)= P(A) P(C), P(BC)= P(B) P(C),称 A,B,C 三事件两两相互独立. 若再满足 P(ABC) =P(A) P(B) P(C),则称 A,B,C 三事件相互独立.

3.n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果对任意 k ($1<k\leqslant n$),任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$.有

$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right)$,则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

第二章 随机变量及其概率分布

一.随机变量及其分布函数

1.在随机试验 E 的样本空间 S={e}上定义的单值实值函数 X=X (e)称为随机变量.

2.随机变量 X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$, x 是任意实数. 其性质为:

(1)$0\le F(x)\le 1$,$F(-\infty)=0,F(\infty)=1$. (2)F(x)单调不减,即若 $x_1<x_2$,则 $F(x_1)\le F(x_2)$.

(3)F(x)右连续,即 F(x+0)=F(x). (4)$P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$.

二.离散型随机变量 (只能取有限个或可列无限多个值的随机变量)

1.离散型随机变量的分布律 $P\{X= x_k\}= p_k$ ($k=1,2,\cdots$) 也可以列表表示. 其性质为:

(1)非负性 $0\leqslant P_k\leqslant 1$; (2)归一性 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$.

2.离散型随机变量的分布函数 $F(x)=\sum_{X_k\le x}P_k$ 为阶梯函数,它在 $x=x_k$ ($k=1,2,\cdots$)处具有跳跃点,其跳跃值为 $p_k=P\{X=x_k\}$.

3.三种重要的离散型随机变量的分布

(1)X~(0-1)分布 P{X=1}= p ,P{X=0}=1–p (0<p<1) .

(2)X~b(n,p)参数为 n,p 的二项分布 $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ ($k=0,1,2,\cdots,n$) (0<p<1)

(3))X~π(λ)参数为λ的泊松分布 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ($k=0,1,2,\cdots$) (λ>0)

三.连续型随机变量

1.定义 如果随机变量 X 的分布函数 F(x)可以表示成某一非负函数 f(x)的积分 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$, $-\infty<x<\infty$, 则称 X 为连续型随机变量,其中 f (x)称为 X 的概率密度(函数).

2.概率密度的性质

(1)非负性　$f(x)\geqslant 0$;　　(2)归一性　$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$;

(3) $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;　　(4)若 $f(x)$在点 x 处连续,则 $f(x)=F'(x)$.

注意：连续型随机变量 X 取任一指定实数值 a 的概率为零,即 $P\{X=a\}=0$.

3.三种重要的连续型随机变量的分布

(1)$X\sim U(a,b)$ 区间(a,b)上的均匀分布　$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$.

(2)X 服从参数为θ的指数分布. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & \text{若}x>0\\ 0 & \text{若}x\le 0\end{cases}$　$(\theta>0)$.

(3)$X\sim N(\mu,\sigma^2)$参数为 μ,σ 的正态分布　$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　$-\infty<x<\infty$,　$\sigma>0$.

特别, $\mu=0$, $\sigma^2=1$ 时,称 X 服从标准正态分布,记为 $X\sim N(0,1)$,其概率密度

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 标准正态分布函数　$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$,　$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$.

若 $P\{Z>z_\alpha\}=P\{Z<-z_\alpha\}=P\{|Z|>z_{\alpha/2}\}=\alpha$,则点 z_α,$-z_\alpha$, $\pm z_{\alpha/2}$ 分别称为标准正态分布的上,下,双侧 α 分位点.　注意：$\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$, $z_{1-\alpha}=-z_\alpha$.

四.随机变量 X 的函数 Y= g (X)的分布

1.离散型随机变量的函数

X	x_1	x_2	…	x_k	…
p_k	p_1	p_2	…	p_k	…
Y=g(X)	$g(x_1)$	$g(x_2)$	…	$g(x_k)$	…

若 $g(x_k)$ $(k=1,2,\cdots)$的值全不相等,则由上表立得 Y=g(X)的分布律.

若 $g(x_k)$ $(k=1,2,\cdots)$的值有相等的,则应将相等的值的概率相加,才能得到 Y=g(X)的分布律.

2.连续型随机变量的函数

若 X 的概率密度为 $f_X(x)$,则求其函数 $Y=g(X)$的概率密度 $f_Y(y)$常用两种方法:

(1)分布函数法　先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\sum_k\int_{\Delta_k(y)} f_X(x)dx$

其中 $\Delta_k(y)$是与 $g(X)\leqslant y$ 对应的 X 的可能值 x 所在的区间(可能不只一个),然后对 y 求导即得 $f_Y(y)=F_Y{}'(y)$.

(2)公式法　若 g(x)处处可导,且恒有 $g'(x)>0$ (或 $g'(x)<0$),则 $Y=g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & \alpha<y<\beta \\ 0 & 其它 \end{cases}$

其中 h(y)是 g(x)的反函数 , $\alpha=\min(g(-\infty),g(\infty))$　$\beta=\max(g(-\infty),g(\infty))$.

如果 f (x)在有限区间[a,b]以外等于零,则 $\alpha=\min(g(a),g(b))$　$\beta=\max(g(a),g(b))$.

第三章　二维随机变量及其概率分布

一.二维随机变量与联合分布函数

1.定义　若 X 和 Y 是定义在样本空间 S 上的两个随机变量,则由它们所组成的向量(X,Y)称为二维随机向量或二维随机变量.

对任意实数 x,y,二元函数 $F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$称为(X,Y)的(X 和 Y 的联合)分布函数.

2.分布函数的性质

(1)F(x,y)分别关于 x 和 y 单调不减.

(2) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$, $F(x,-\infty)=0$,　$F(-\infty,y)=0$,　$F(-\infty,-\infty)=0$,　$F(\infty,\infty)=1$.

(3) F(x,y)关于每个变量都是右连续的,即 $F(x+0,y)=F(x,y)$,　$F(x,y+0)=F(x,y)$.

(4)对于任意实数 $x_1<x_2$, $y_1<y_2$

$$P\{x_1<X\leqslant x_2 , y_1<Y\leqslant y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$

二.二维离散型随机变量及其联合分布律

1.定义　若随机变量(X,Y)只能取有限对或可列无限多对值(x_i,y_j) $(i ,j =1,2,\cdots)$称(X,Y)为二维离散型随机变量.并称 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$ 为(X,Y)的联合分布律.也可列表表示.

2.性质　(1)非负性　$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1$.　　(2)归一性　$\sum_i\sum_j p_{ij}=1$.

3. (X,Y)的(X 和 Y 的联合)分布函数 $F(x,y)=\sum_{x_i\leq x}\sum_{y_j\leq y} p_{ij}$

三.二维连续型随机变量及其联合概率密度

1.定义 如果存在非负的函数 f (x,y),使对任意的 x 和 y,有 F(x,y)=$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量,称 f(x,y)为(X,Y)的(X 和 Y 的联合)概率密度.

2.性质 (1)非负性 f (x,y)⩾0 . (2)归一性 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$.

(3)若 f (x,y)在点(x,y)连续,则 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$

(4)若 G 为 xoy 平面上一个区域,则 $P\{(x,y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$.

四.边缘分布

1. (X,Y)关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)$ = P{X⩽x , Y<∞}= F (x , ∞) .

(X,Y)关于 Y 的边缘分布函数 $F_Y(y)$ = P{X<∞, Y⩽y}= F (∞,y)

2.二维离散型随机变量(X,Y)

关于 X 的边缘分布律 P{X= x_i }= $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$ = $p_{i\cdot}$ (i =1,2,⋯) 归一性 $\sum_{i=1}^{\infty} p_{i\bullet}=1$.

关于 Y 的边缘分布律 P{Y= y_j }= $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$ = $p_{\cdot j}$ (j =1,2,⋯) 归一性 $\sum_{j=1}^{\infty} p_{\bullet j}=1$.

3.二维连续型随机变量(X,Y)

关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$=$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ 归一性$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$

关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$=$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ 归一性$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy=1$

五.相互独立的随机变量

1.定义 若对一切实数 x,y,均有 F(x,y)= $F_X(x)\,F_Y(y)$,则称 X 和 Y 相互独立.

2.离散型随机变量 X 和 Y 相互独立⇔ $p_{ij}=p_{i\cdot}\bullet p_{\cdot j}$ (i ,j =1,2,⋯)对一切 x_i,y_j 成立.

3.连续型随机变量 X 和 Y 相互独立⇔ f (x,y)=$f_X(x)f_Y(y)$对(X,Y)所有可能取值(x,y)都成立.

六．条件分布

1．二维离散型随机变量的条件分布

定义 设(X,Y)是二维离散型随机变量,对于固定的 j,若 P{$Y=y_j$}>0,则称

$$=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

$P\{X=x_i|Y=y_j\}$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同样,对于固定的 i,若 $P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

第四章 随机变量的数字特征

一.数学期望和方差的定义

随机变量 X	离散型随机变量	连续型随机变量
	分布律 $P\{X=x_i\}=p_i$ (i =1,2,⋯)	概率密度 f (x)
数学期望(均值)E(X)	$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ (级数绝对收敛)	$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ (积分绝对收敛)
方差 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$	$\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i$	$\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$
$=E(X^2)-[E(X)]^2$	(级数绝对收敛)	(积分绝对收敛)
函数数学期望 E(Y)=E[g(X)]	$\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ (级数绝对收敛)	$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ (积分绝对收敛)

标准差 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

二.数学期望与方差的性质

1. c 为为任意常数时, E(c) = c , E(cX) = cE(X) , D(c) = 0 , D (cX) = c^2 D(X) .

2.X,Y 为任意随机变量时, E (X±Y)=E(X)±E(Y) .

3. X 与 Y 相互独立时, E(XY)=E(X)E(Y) , D(X±Y)=D(X)+D(Y) .

4. D(X) = 0 $\Leftrightarrow$ P{X = C}=1 ,C 为常数.

三.六种重要分布的数学期望和方差	E(X)	D(X)
1.X~ (0-1)分布 P{X=1}= p (0<p<1)	p	p (1- p)

2.X~ b (n,p) (0<p<1)	n p	n p (1- p)
3.X~ $\pi(\lambda)$	λ	λ
4.X~ U(a,b)	(a+b)/2	$(b-a)^2/12$
5.X 服从参数为θ的指数分布	θ	θ^2
6.X~ N (μ,σ^2)	μ	σ^2

四.矩的概念

随机变量 X 的 k 阶(原点)矩 $E(X^k)$ k=1,2,⋯

随机变量 X 的 k 阶中心矩 $E\{[X-E(X)]^k\}$

随机变量 X 和 Y 的 k+l 阶混合矩 $E(X^kY^l)$ l=1,2,⋯

随机变量 X 和 Y 的 k+l 阶混合中心矩 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$

第六章 样本和抽样分布

一.基本概念

总体 X 即随机变量 X；样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是与总体同分布且相互独立的随机变量;样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为实数;n 是样本容量.

统计量是指样本的不含任何未知参数的连续函数.如:

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 样本标准差 S

样本 k 阶矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,k}$ (k=1,2,⋯) 样本 k 阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$ (k=1,2,⋯)

二.抽样分布 即统计量的分布

1. $\overline{X}$ 的分布 不论总体 X 服从什么分布, $E(\overline{X}) = E(X)$, $D(\overline{X}) = D(X)/n$.

特别,若 X~ N (μ,σ^2) ,则 $\overline{X}$ ~ N (μ, σ^2/n) .

2.χ^2 分布 (1)定义 若 X～N (0,1) ,则 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}\sim\chi^2(n)$自由度为 n 的 χ^2 分布.

(2)性质 ①若 Y~ $\chi^2(n)$,则 E(Y) = n , D(Y) = 2n .

②若 $Y_1\sim\chi^2(n_1)$ $Y_2\sim\chi^2(n_2)$,则 $Y_1+Y_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$.

③若 X~ N (μ,σ^2), 则 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.

(3)分位点　若 $Y\sim\chi^2(n)$,$0<\alpha<1$,则满足

$$P\{Y>\chi^2_{\alpha}(n)\}=P\{Y<\chi^2_{1-\alpha}(n)\}=P\{(Y>\chi^2_{\alpha/2}(n))\cup(Y<\chi^2_{1-\alpha/2}(n))\}=\alpha$$

的点 $\chi^2_{\alpha}(n),\chi^2_{1-\alpha}(n),\chi^2_{\alpha/2}(n)$和$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ 分别称为 χ^2 分布的上、下、双侧α分位点.

3. t 分布

(1)定义 若 X~N (0,1),$Y\sim\chi^2(n)$,且 X,Y 相互独立,则 $t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$自由度为 n 的 t 分布.

(2)性质①n→∞时,t 分布的极限为标准正态分布.

②X～N (μ,σ^2)时, $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

③两个正态总体	相互独立的样本	样本均值	样本方差
$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$	$X_1,X_2,\cdots,X_{n1}$	$\overline{X}$	S_1^2
$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$	$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n2}$	$\overline{Y}$	S_2^2

则 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$, 其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

(3)分位点　若 $t\sim t(n)$,$0<\alpha<1$, 则满足

$$P\{t>t_{\alpha}(n)\}=P\{t<-t_{\alpha}(n)\}=P\{|t|>t_{\alpha/2}(n)\}=\alpha$$

的点 $t_{\alpha}(n),-t_{\alpha}(n),\pm t_{\alpha/2}(n)$ 分别称 t 分布的上、下、双侧 α 分位点.

注意: $t_{1-\alpha}(n)=-t_{\alpha}(n)$.

4.F 分布　(1)定义 若 $U\sim\chi^2(n_1)$, $V\sim\chi^2(n_2)$, 且 U,V 相互独立,则 $F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}\sim F(n_1,n_2)$自由度为 (n_1,n_2)的 F 分布.

(2)性质(条件同 3.(2)③) $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

(3)分位点　若 $F\sim F(n_1,n_2)$,$0<\alpha<1$,则满足

$$P\{F > F_{\alpha}(n_1,n_2)\} = P\{F < F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\}$$

$$= P\{(F > F_{\alpha/2}(n_1,n_2)) \cup (F < F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2))\} = \alpha$$

的点$F_{\alpha}(n_1,n_2), F_{1-\alpha}(n_1,n_2), F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$和$F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)$分别称为 F 分布的上、下、双侧 α 分位点. 注意: $F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \dfrac{1}{F_{\alpha}(n_2.n_1)}$.

第七章　参数估计

一.点估计　总体 X 的分布中有 k 个待估参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是 X 的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本值.

1.矩估计法

先求总体矩$\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \mu_2 = \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \\ \cdots\cdots \\ \mu_k = \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \end{cases}$解此方程组,得到$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \\ \theta_2 = \theta_2(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \\ \cdots\cdots \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \end{cases}$,

以样本矩 A_l 取代总体矩μ_l(l=1,2,⋯,k)得到矩估计量$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \theta_1(A_1,A_2,\cdots,A_k) \\ \hat{\theta}_2 = \theta_2(A_1,A_2,\cdots,A_k) \\ \cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k = \theta_k(A_1,A_2,\cdots,A_k) \end{cases}$,

若代入样本值则得到矩估计值.

2.最大似然估计法

若总体分布形式(可以是分布律或概率密度)为 $p(x, \theta_1, \theta_2,\cdots, \theta_k)$,称样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布 $L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 为似然函数.取使似然函数达到最大值的 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$,称为参数 $\theta_1, \theta_2,\cdots,\theta_k$ 的最大似然估计值,代入样本得到最大似然估计量.

若 $L(\theta_1, \theta_2,\cdots, \theta_k)$关于 $\theta_1, \theta_2,\cdots, \theta_k$ 可微,则一般可由

似然方程组 $\dfrac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$ 或 对数似然方程组 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0$ (i =1,2,⋯,k) 求出最大似然估计.

3.估计量的标准

(1) 无偏性　若 $E(\hat{\theta})=\theta$,则估计量 $\hat{\theta}$ 称为参数 θ 的无偏估计量.

不论总体 X 服从什么分布, $E(\overline{X})=E(X)$, $E(S^2)=D(X)$, $E(A_k)=\mu_k=E(X^k)$,即样本均值 $\overline{X}$,样本方差 S^2,样本 k 阶矩 A_k 分别是总体均值 E(X),方差 D(X),总体 k 阶矩 μ_k 的无偏估计,

(2)有效性　若 $E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta$, 而 $D(\hat{\theta}_1)< D(\hat{\theta}_2)$, 则称估计量 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

(3)一致性(相合性)　若 $n\to\infty$ 时, $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$,则称估计量 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的相合估计量.

二.区间估计

1.求参数 θ 的置信水平为 1−α 的双侧置信区间的步骤

(1)寻找样本函数 $W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)$,其中只有一个待估参数 θ 未知,且其分布完全确定.

(2)利用双侧 α 分位点找出 W 的区间(a,b),使 $P\{a<W<b\}=1-\alpha$.

(3)由不等式 $a<W<b$ 解出 $\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$ 则区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为所求.

2.单个正态总体

待估参数	其它参数	W 及其分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2 未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ 未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

3.两个正态总体

(1)均值差 $\mu_1-\mu_2$

其它参数	W 及其分布	置信区间
σ_1^2,σ_2^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}})$

其中 S_w 等符号的意义见第六章二. 3 (2)③.

(2) μ_1,μ_2 未知, $W=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$,方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

注意:对于单侧置信区间,只需将以上所列的双侧置信区间中的上(下)限中的下标 $\alpha/2$ 改为 α,另外的下(上)限取为 $-\infty$ (∞)即可.