**深 圳 大 学 实 验 报 告**

|  |
| --- |
| **课程名称 机器学习**  **项目名称 实验五：LDA算法**  **学 院 计算机与软件学院**  **专 业 软件工程**  **指导教师 赖志辉**  **报 告 人 唐健龙 学号 2018132100**  **实验时间 2020年3月24日至2020年4月6日**  **实验报告提交时间 2020年4月5日** |

**教务处制**

# 一、实验目的与要求

**1. 简述LDA 原理、 算法模型与优化问题，给出全程推导细节；证明St=Sb+Sw；**

**2. 给出LDA的各种等价模型表示， 在各数据集（不少于3个）比较PCA与LDA的各种等价模型与正则模型的人脸识别精度。**

**3. 比较eigenface与fisherface的不同，并取3个类的图像投影在二维和三维空间中，比较PCA与LDA的结果的异同。**

# 二、实验内容与方法

**LDA算法**

**原理**：

对已经分类的数据集进行降维，寻求能够使得同类更聚集，不同类更分开的投影降维矩阵（包含 个列向量），不仅能够降低数据的维度，也能更好地区分不同类别的数据

**推导**：

首先假设给定一个已经分类好的数据集 ，共有 类数据，第 类数据有 个样本，即整个数据集总共有 个样本，记 为第 类的第 个样本（按列展开），记 为第 类的数据均值，即 ，记 为整个数据集样本的均值，即 ，记寻求的投影降维矩阵为 ，其中括号的每个元素为一个列向量

首先假设存在一个列向量 ，将任意一个样本 投影至该向量，其投影即为

该投影为标量，其平方可用于度量长度，且为非负实数

我们很容易知道，第 类的样本均值经过投影后，会变为

为了度量局部的同类数据聚集程度，我们对第 类每个样本 减去类均值 的矢量差通过 进行投影，并求平方和，显然，矢量差越小，其投影也越小，求投影平方均值后，我们得到

将每个类进行上述操作，我们就得到在投影向量 下，度量该总体的同类数据的聚集程度的式子

我们先记

由于有 个投影的向量，我们就能综合所有投影，得到度量总体同类数据聚集程度的式子

可以发现上式结果恰巧就是 的对角线元素之和，于是有

称上述的 为类内散度矩阵，由于每个类内求和用到了类均值（包含了类内所有样本的信息），实际上第 类求和时得到的矩阵的秩最多只有 ，因为最后一维总能通过类内其他维度线性表示，故在每个类的计算得到的矩阵都使得 的秩减少1情况下， 最终的秩为

类似地，为了度量在经过投影至 后类之间的距离，同时我们希望在一个类的样本数量越多的情况下，其距离样本中心要更远，即其投影长度占有更大的权重，于是我们可以类比上面的推导，构造以下的式子

类似地，由于有 个投影的向量，我们就能综合所有投影，得到度量总体不同类数据离散程度的式子

称上述的 为类内散度矩阵，类似上述讨论，由于总体均值 包含了所有类均值的信息，最终导致 的秩只有

同时，我们意识到，还有一个能够度量总体离散程度的式子，即所有样本到样本中心的矢量差的投影长度的平方平均数，结合以上推导，容易得到这个度量的表达式，我们记为 ，称作总体散度矩阵

可以证明

推导如下

得到以上矩阵后，我们需要确定优化目标，即找到某个方向上的向量，使投影之尽量最小化同类距离的同时尽量最大化类间距离，于是我们可以构造以下的表达式

我们希望能够最大化上式，即有

由于作商过程对 的倍数不敏感，我们可固定分母的值为1（固定为其他正常数都可以，最终得到的结果都是一样的，但固定为1便于计算），通过拉格朗日乘数法，我们将原来的表达式化为了

将该表达式对 求偏导，并使之为0，得到

于是有

因此，假设 可逆（由上述讨论知道 实际上经常不可逆，有多种方法能够改进这个缺点，常用的是PCA降维，利用零空间，添加正则项等），那么所求的 正是 的特征向量，将特征向量按照对应特征值从大到小排序，取前 个特征向量组成变换矩阵 ，即为以上推导结果所寻求的变换矩阵

显然，我们不仅仅能够定义上述的优化目标，我们还可以建立其他模型

如将上述模型改为作差，我们得到以下模型

最终能够得到

如我们希望总体不过于聚集的情况下，同类聚集程度尽量高，于是我们又能得到下述模型

最终可以得到

如我们希望总体不散得太开的情况下，不同类离散程度尽量高，于是我们又能得到下述模型

最终可以得到

我们还可以加入正则项，防止过拟合，此处使用 范数的平方

对 求偏导并使之为0，得到

其中的 为单位矩阵，可以发现这不仅能够防止过拟合，还使得原本不可逆的 变为可逆了

# 三、实验步骤与过程

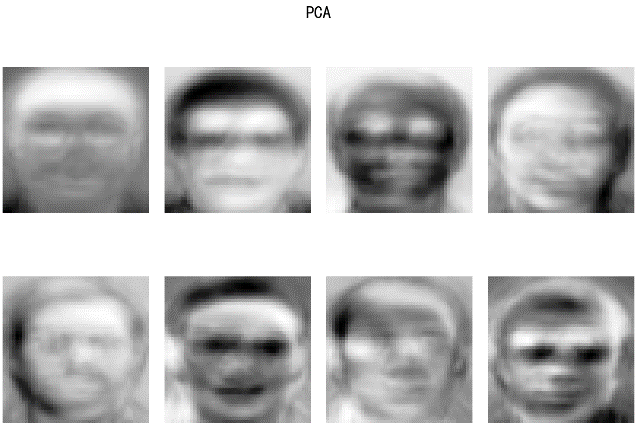
1. **在各数据集比较PCA与“LDA的各种等价模型与正则模型的人脸识别精度**
2. 分别选取ORL/Yale/AR人脸库进行后续操作
3. 将人脸拉成行向量，纵向堆叠成用于计算的数据集合矩阵
4. 鉴于LDA因维数过大会导致运算较慢，可以进行适当减少样本数以及进行必要的PCA降维（仅降维到 ）
5. 为数据添加标签，从而后续能够进行LDA
6. 划分训练集和测试集（使用 折交叉验证，）
7. 按照上述推导，计算训练集的 和 ，以及用 表示
8. 对应各模型，计算特定矩阵的特征值和特征向量，并按照特征值从大到小进行特征向量的排序，取前 个特征向量按列排列组成向量组
9. 将训练集和测试集都通过求得的变换矩阵 进行降维
10. 利用KNN计算降维后测试集每个样本在降维后训练集的最近邻，得到对应预测标签
11. 进行 次后，统计平均预测标签的正确率
12. 最终得到下列对应正确率列表

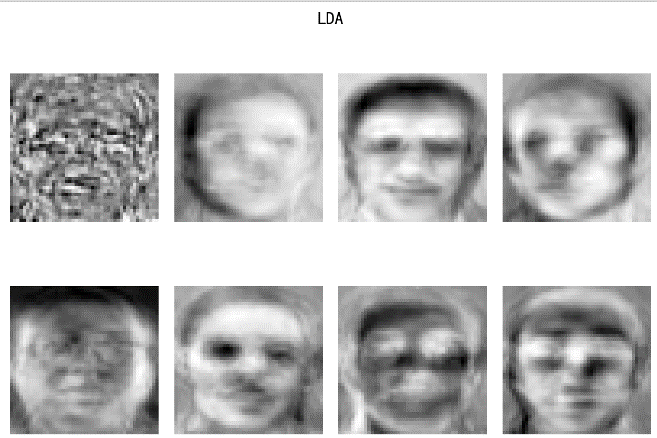
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| ORL(N=400) | 80.25% | 97.50% | 83.50% | 80.50% | 83.25% |
| Yale(N=165) | 60.00% | 77.58% | 60.61% | 59.39% | 60.00% |
| AR(N=400) | 62.25% | 68.25% | 62.75% | 64.00% | 62.50% |

2. **比较eigenface与fisherface的不同，并取3个类的图像投影在二维和三维空间中，比较PCA与LDA的结果的异同**

(1) 仍然按照上述方法得到LDA结果，同时保留PCA结果

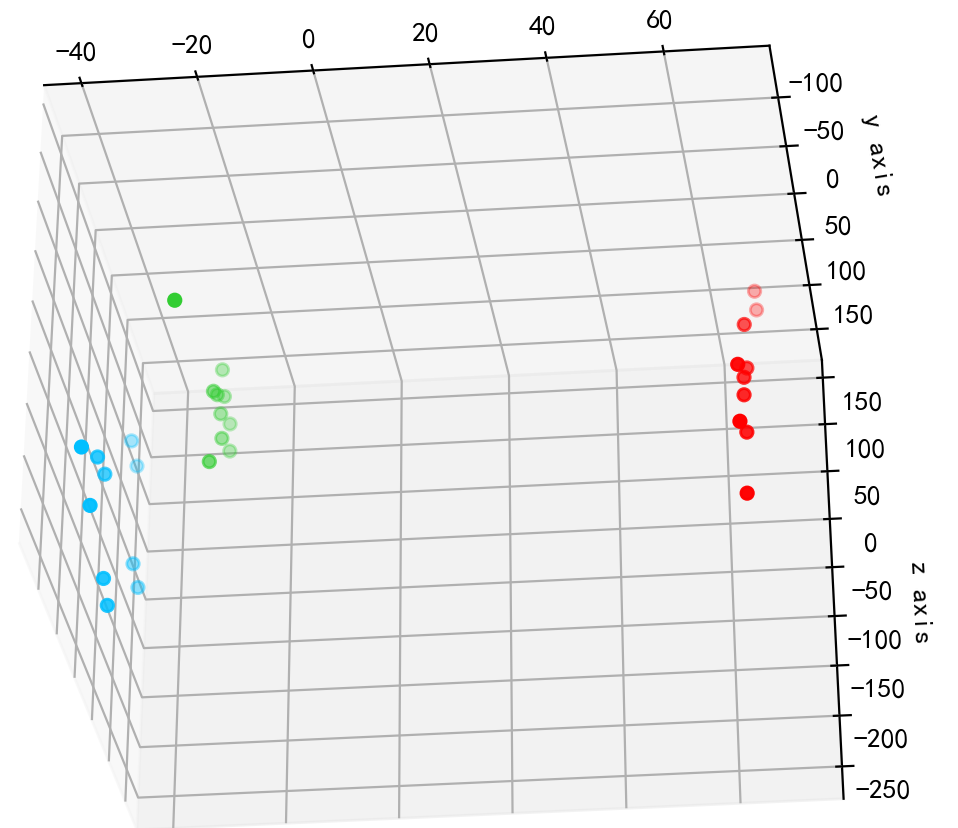
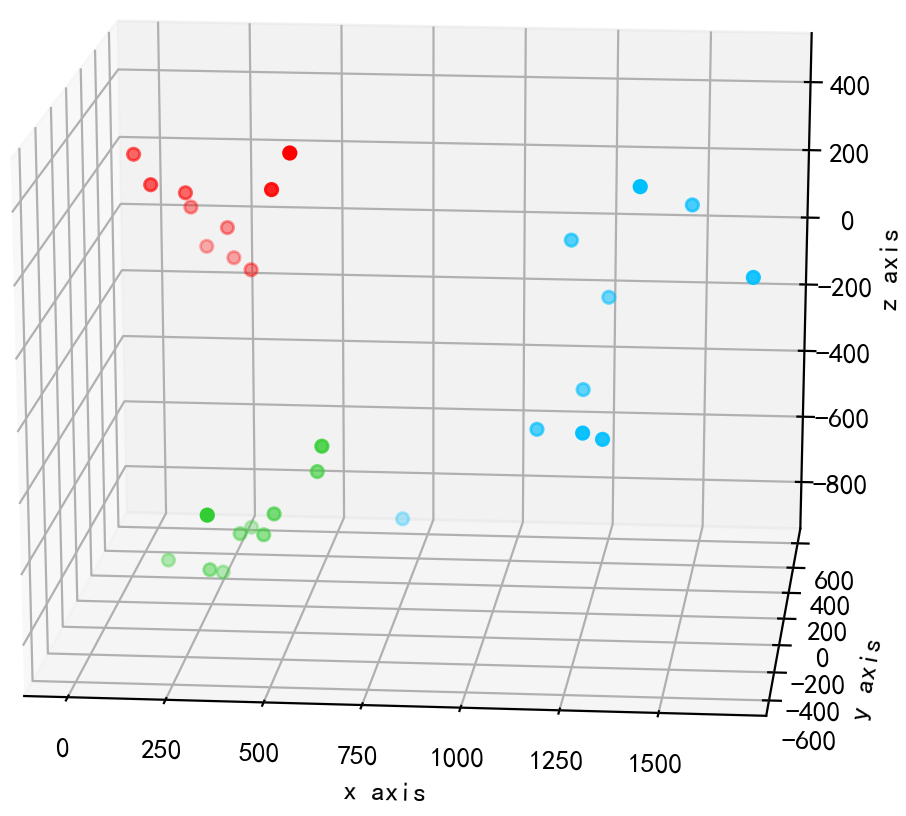
(2) 取PCA变换矩阵和LDA变换矩阵的前8个列向量，重构回原维度还原为特征脸

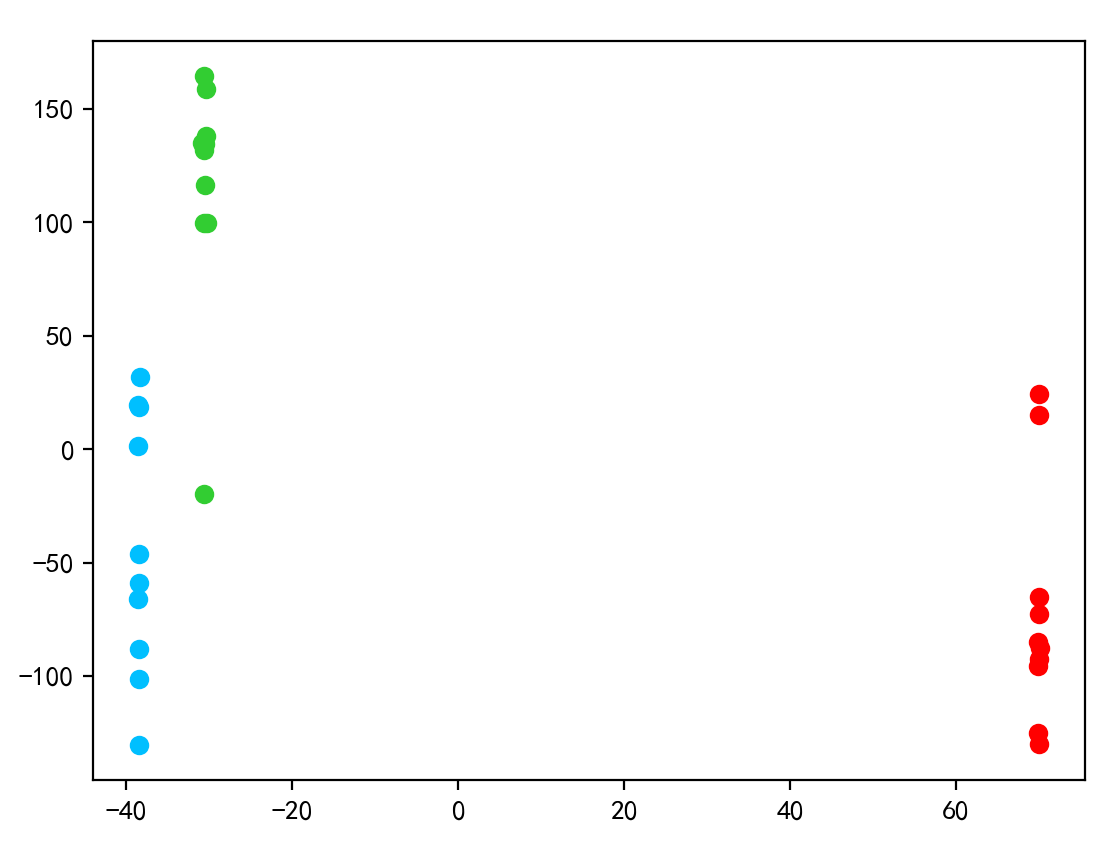
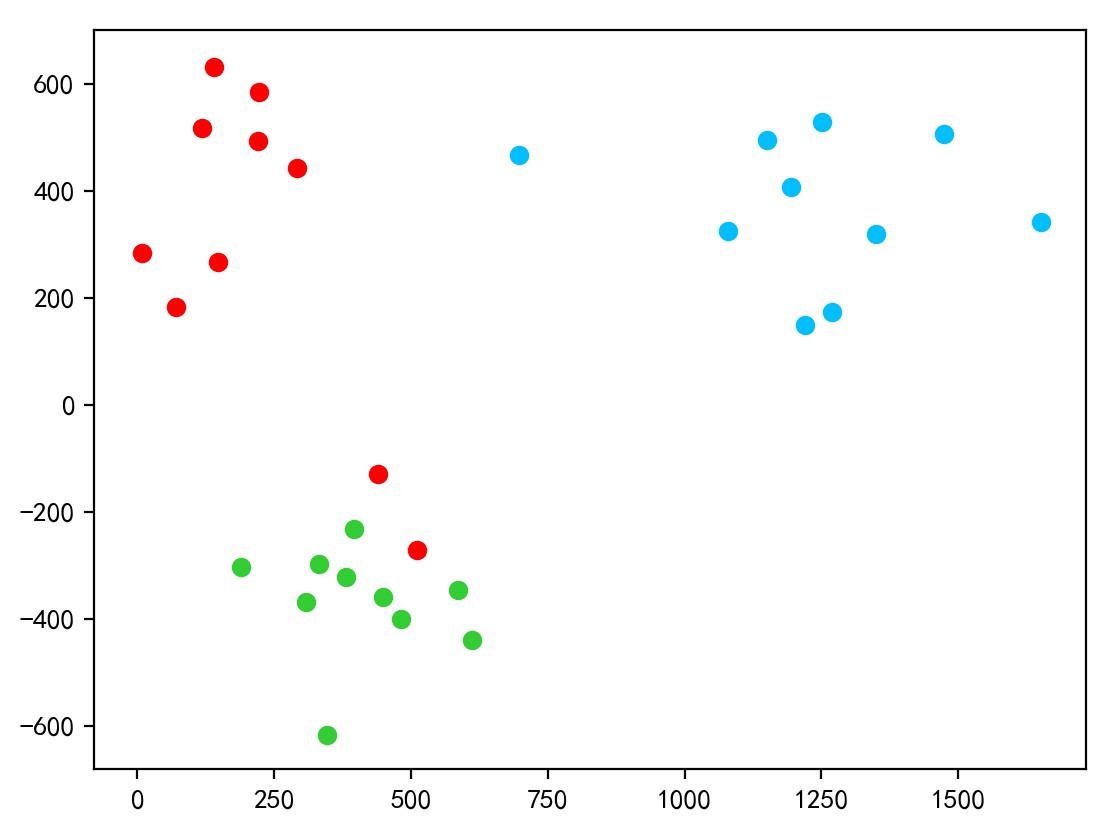




(3) 将PCA降维数据集和LDA降维数据集的前3个类的点在3维和2维分别绘制

(左：PCA，右：LDA)





# 四、实验结论或体会

1. LDA在一定条件下能够很好地区分开数据集的不同数据，在PCA的配合下，LDA才能更加展现能力，因为PCA能够将主要的特征挑选出来给LDA区分

2. 值得提出的一点是，LDA对PCA的依赖性很高，利用PCA进一步降低维度可以得到更高的识别率，因此我们不能抛开某些算法而谈论另一个算法孰优孰劣，而应该多元结合，相辅相成

3. 从不同的数据集进行识别的时候可以看到，由于Yale库的人脸会有脸部饰品或多种表情等，如果不通过PCAa进一步降维或其他新方法进行特征初提取的话，LDA后识别率并不会高，AR库的人脸的光照变化较大，LDA也没能很好进行特征提取，因此仍然需要配合其他方法剔除上述干扰项

4. LDA的首个特征脸可能包含某些本人目前未知的信息，并不是一个正常的人脸，但是绝大部分特征脸都能够辨认个人脸部信息

5. 不同的优化模型对识别率的影响较大，我们需要综合考虑使用哪个模型更好

# 五、思考题

|  |
| --- |
| 指导教师批阅意见：  成绩评定：  指导教师签字：  年 月 日 |
| 备注： |

注：1、报告内的项目或内容设置，可根据实际情况加以调整和补充。