

Дифракция

Попов Павел Владимирович

кафедра общей физики МФТИ,
для курса «Цифровизация физических процессов»

27.03.2025

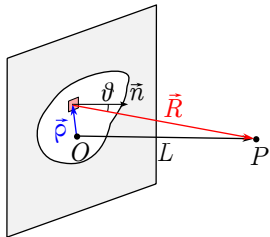
- ❶ Пределы применимости геометрической оптики
- ❷ Принцип Гюйгенса–Френеля
- ❸ Дифракция на щели и отверстиях — случай Френеля
 - Зоны Френеля
 - Зонные пластинки, линза Френеля
- ❹ Дифракция на щели и отверстиях — случай Фраунгофера
 - Дифракционный предел разрешения оптических приборов
- ❺ Дифракционная решётка

Дифракция на отверстиях/препятствии

Дифракция —

- отклонение от прямолинейного распространения света, не связанное с преломлением или дисперсией.

Принцип Гюйгенса–Френеля



$$A_P = \int A_0(\vec{\rho}) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot K(\theta) \cdot d^2\vec{\rho}$$

$$R = |\vec{L} - \vec{\rho}|$$

Угловой множитель

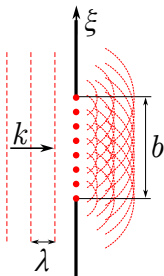
- Линейная поляризация

$$K(\theta) = K_0 \cdot \cos \theta$$

Нормировочный множитель

$$K_0 = -\frac{ik}{2\pi} = \frac{1}{i\lambda}$$

Граничные условия Кирхгофа



$$A_{+0}(\xi) = A_{-0}(\xi) \cdot \begin{cases} 1, & |\xi| \leq b/2; \\ 0, & |\xi| > b/2. \end{cases}$$

- Пренебрежение переизлучением атомами экрана
- Приближение $b \gg \lambda$

$$p^2 = \frac{\lambda/2}{\Delta l}$$

$\gg 1$, Дифракция (Фраунгофер)

\nearrow

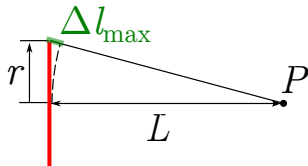
$\rightarrow \sim 1$, Дифракция (Френель)

\searrow

$\ll 1$, Геометрическая оптика

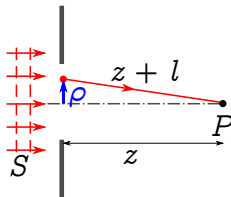
Волновой параметр

При дифракции на отверстиях



$$p^2 = \frac{\lambda/2}{\Delta l} = \frac{\pi}{\Delta \varphi} = \boxed{\frac{\lambda L}{r^2}}$$

- Геометрическая оптика: $p \ll 1$, $\Delta \varphi \gg \pi$
- Дифракция Френеля: $p \sim 1$, $\Delta \varphi \sim \pi$
- Дифракция Фраунгофера: $p \gg 1$, $\Delta \varphi \ll \pi$

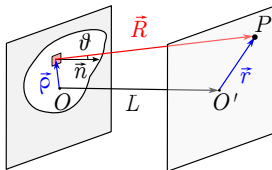


- Соседние зоны светят в **противофазе**:

$$\Delta l_m = \frac{\rho_m^2}{2z} = m \frac{\lambda}{2}$$

\Downarrow

$$\boxed{\rho_m = \sqrt{m\lambda z}}$$



- Приближение Френеля: $R \approx R_0 = \text{const}$, $\cos \theta \approx 1$, $\rho, r \ll L$

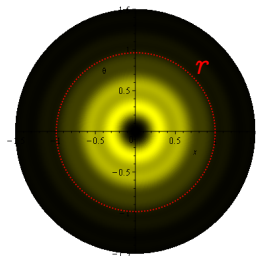
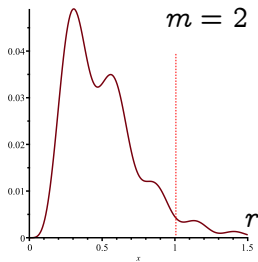
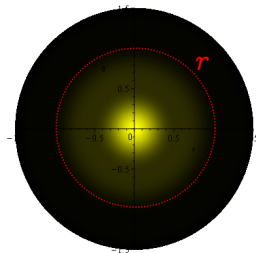
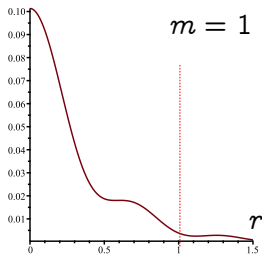
$$\Delta l = \sqrt{(\vec{L}_0 - \vec{\rho} + \vec{r})^2} - L \approx \frac{(\vec{\rho} - \vec{r})^2}{2L}$$

\Downarrow

$$A(\vec{r}) \approx \frac{1}{i\lambda L} \int \exp\left(\frac{i\pi(\vec{\rho} - \vec{r})^2}{\lambda L}\right) d^2\vec{\rho}$$

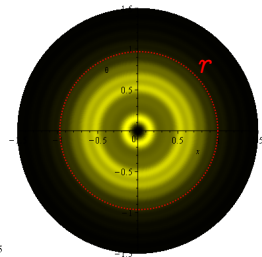
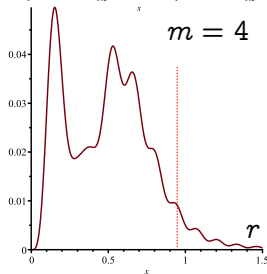
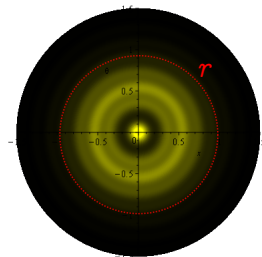
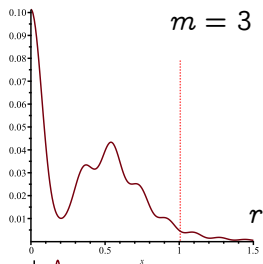
Картина дифракции Френеля

Дифракция на отверстиях



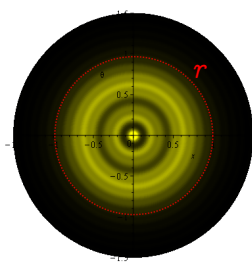
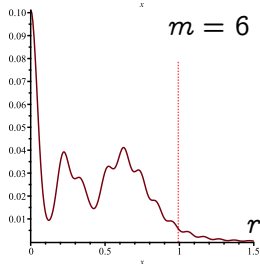
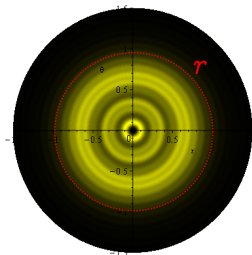
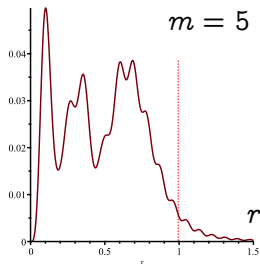
Картина дифракции Френеля

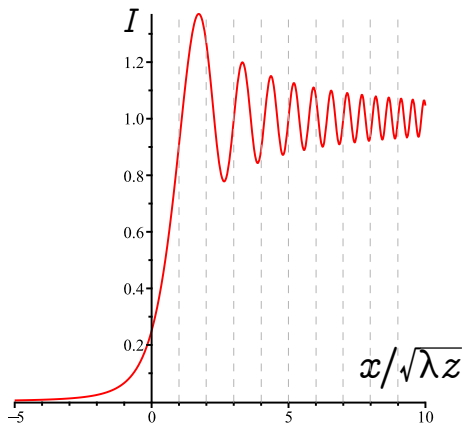
Дифракция на отверстиях



Картина дифракции Френеля

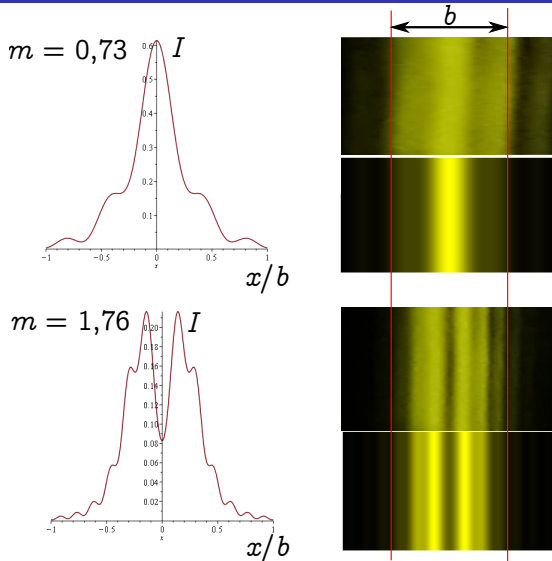
Дифракция на отверстиях





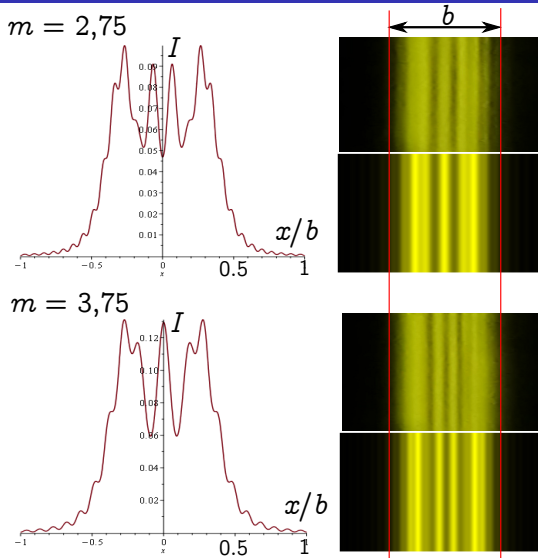
Картина дифракции Френеля

Дифракция на щели



Картина дифракции Френеля

Дифракция на щели



Зонная пластинка

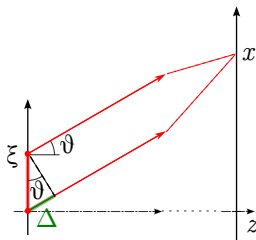
- усилить излучение, преградив ему путь!
- Фокусировка радиоволн
- Линза Френеля

Дифракция в дальней зоне (случай Фраунгофера)

- Волновой параметр

$$p = \frac{\sqrt{\lambda L}}{D} \gg 1$$

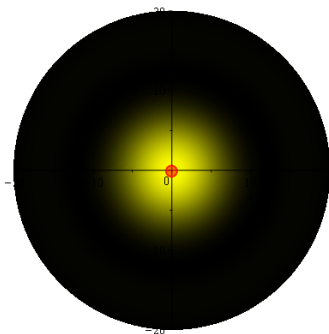
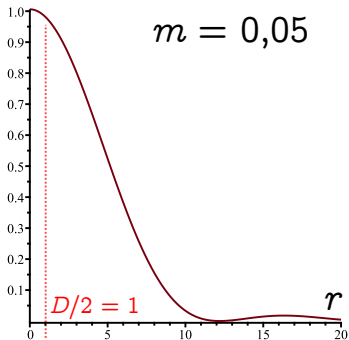
- Разность хода

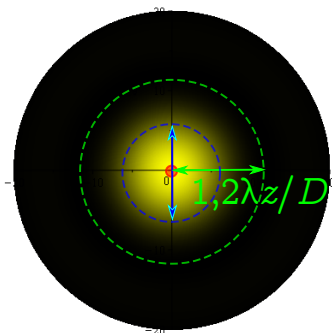
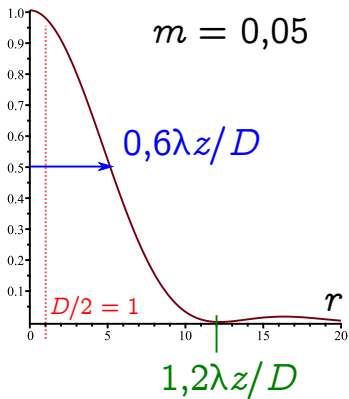


$$\Delta \approx -\xi \cdot \sin \theta$$

- Пространственное преобразование Фурье

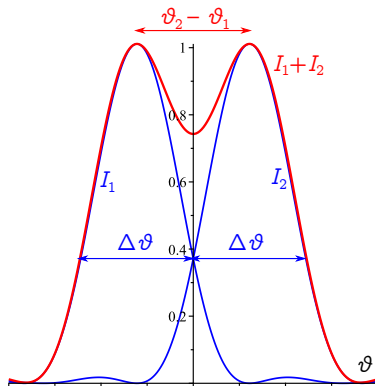
$$A(\theta) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\xi) \cdot e^{-ik \sin \theta \cdot \xi} d\xi$$





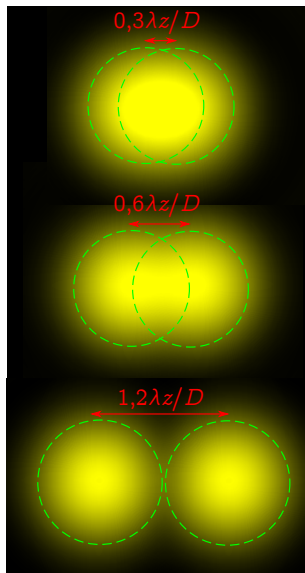
Критерий разрешения Рэля

$$\Delta\theta_{\text{дифр}} \approx 1,2 \frac{\lambda}{D}$$



Критерий Рэля

для круглых пятен



$$D_{\text{зр}} \sim 5 \text{ мм}, \lambda \sim 550 \text{ нм} \rightarrow \delta\theta \sim 1,2 \frac{\lambda}{D_{\text{зр}}} \approx \text{рад} \approx 1'$$

Примеры:

- Нижний ряд таблицы Сивцева–Головина:

$$h = 7 \text{ мм}, L = 5 \text{ м} \rightarrow \delta\theta \sim \frac{0,2h}{L} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 1'$$

- Размер “колбочек” $d \approx 1 \text{ мкм}$, фокусное расстояние $f = 17 \text{ мм}$:

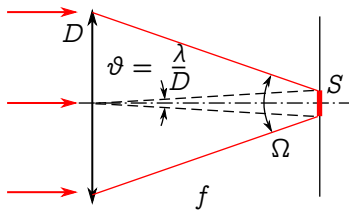
$$\delta\theta \sim \frac{d}{f} \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \approx 0,2'$$

$$\Delta\theta > \frac{\lambda}{D_{\text{об}}}$$

- Почему в телескоп звёзды видны лучше?
- Почему ночью темно?

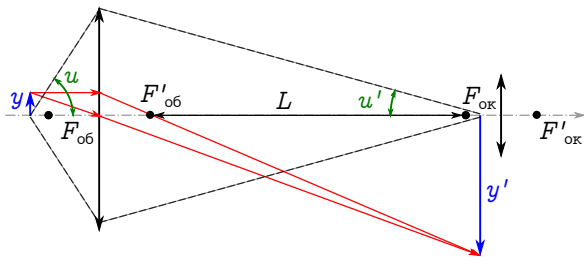
- Почему в телескоп звёзды видны лучше?
- Почему ночью темно?

- Глаз и телескоп наблюдают НЕ изображение звезды, а её **пятно Эйри!**



- Площадь пятна Эйри: $S \sim \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 f^2$
- Яркость пятна Эйри: $B \sim \frac{I \cdot \pi D^2 / 4}{S \cdot \Omega} \sim I \cdot \left(\frac{D}{\lambda}\right)^2$

Разрешающая способность микроскопа



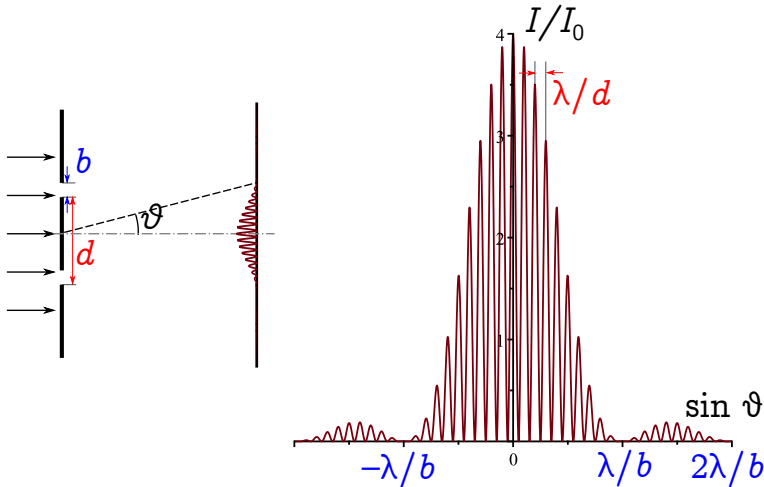
- Минимальный размер предмета

$$y_{\min} \sim \frac{0,5\lambda}{n \sin u} \gtrsim 150 \text{ нм}$$

- Максимальное (нормальное) увеличение:

$$\Gamma_{\text{норм}} = \frac{\Delta y_{\text{зр}}}{\Delta y_{\text{микро}}} \sim \frac{\lambda / D_{\text{зр}} \cdot L_{\text{зр}}}{0,5\lambda / n} = \frac{2nL_{\text{зр}}}{D_{\text{зр}}} \approx 250n$$

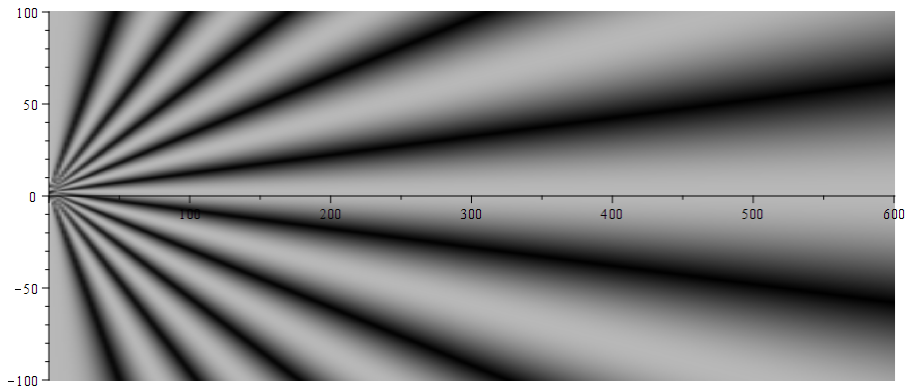
Дифракция на двух щелях



$$I = I_0 \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{1}{2} kb \sin \theta \right) \cdot \left| \frac{\sin (kd \sin \theta)}{\sin \left(\frac{1}{2} kd \sin \theta \right)} \right|^2$$

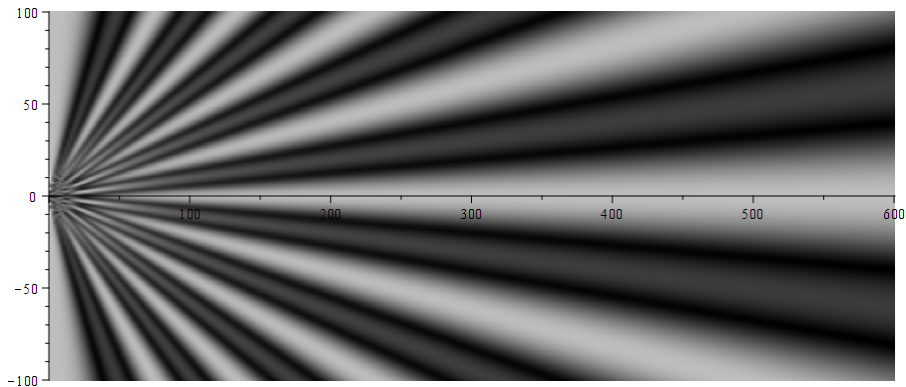
Дифракция на нескольких щелях

$$N = 2$$



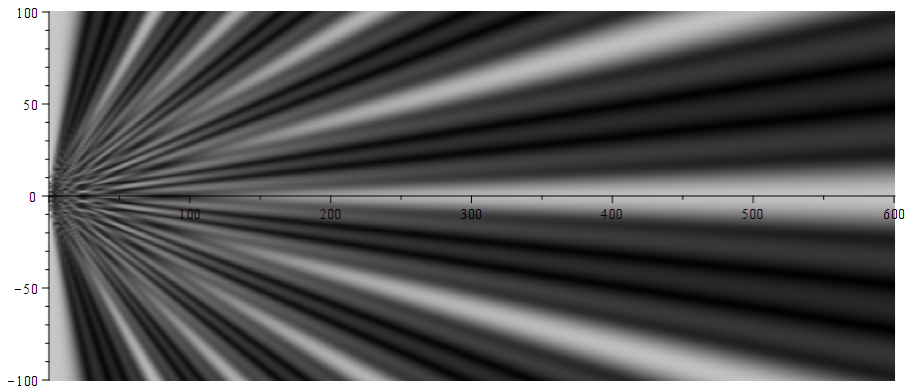
Дифракция на нескольких щелях

$$N = 3$$



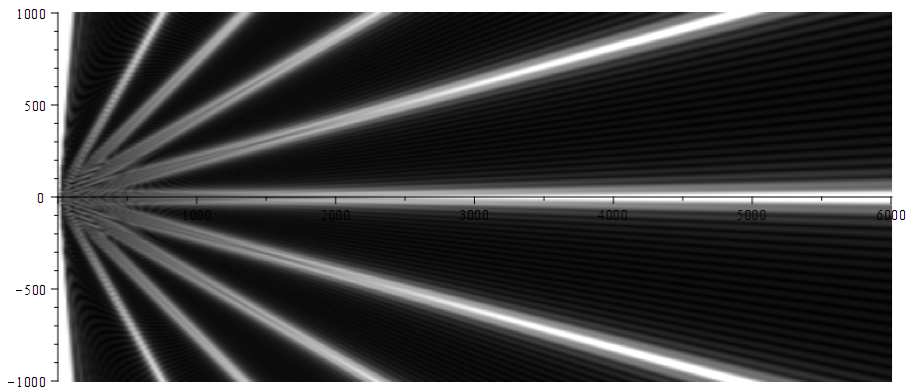
Дифракция на нескольких щелях

$$N = 5$$



Дифракция на нескольких щелях

$$N = 20$$



$$J = J_0(\theta) \cdot \left| \frac{\sin \left(\frac{1}{2} N k d \sin \theta \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} k d \sin \theta \right)} \right|^2$$

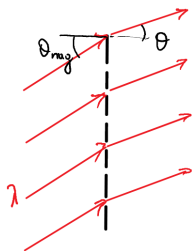
$$d \sin \theta_m = \lambda m$$

Разрешающая способность: $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$

Применения

- Анализатор спектра

Дифракционная решётка: наклонное падение



$$d(\sin \theta_m - \sin \theta_{\text{пад}}) = m\lambda$$

Пример: фазированная антенная решётка

$$A_m = A_0 e^{i\psi_m}, \quad \psi_m = 2\pi m \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0$$

