Электрические колебания

для курса «Цифровизация физических процессов»

Попов Павел Владимирович

кафедра общей физики МФТИ

06.02.2025

1. Дифференциальные уравнения цепей и методы их решения
   - Комплексные числа и их экспоненциальная форма
2. Колебательные системы
   - Свободные колебания в RLC-цепи
   - Декремент затухания, добротность электрического контура
   - Диссипация энергии в колебательном контуре
3. Сложение собственных и вынужденных колебаний, процесс установления
4. Комплексное представление колебательных процессов, метод комплексных амплитуд
5. Вынужденные гармонические колебания в линейных цепях
   - Последовательный RLC-контур
     - АЧХ и *ФЧХ колебательной системы, их основные характеристики, роль добротности
     - Резонанс в последовательном контуре
     - *Резонанс токов в параллельном контуре
   - Мощность в цепи переменного тока

Правила Кирхгофа для переменных токов

1. Правило токов

$$\sum_{\bullet} I_i = 0$$

2. Правило контуров

$$\sum_{\circlearrowright} U_i = \sum_{\circlearrowright} \mathcal{E}_i - \sum_{\circlearrowright} \dot{\Phi}_i$$

Элементы цепи

Сопротивление (активная нагрузка): $U_i = I_i R_i$

Ёмкость: $U_i = \frac{q_i}{C_i} = \frac{1}{C_i} \int I_i \, dt$

Индуктивность: $\dot{\Phi}_i = \underbrace{L_i \dot{I}_i}_{\text{самоинд.}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} M_{ij} \dot{I}_j}_{\text{взаимн. инд.}} + \dot{\Phi}_{\text{внеш}}$

Характерные времена релаксации

Конденсатор

$$\frac{q}{C} + \dot{q}R = 0 \qquad \to \qquad q \propto e^{-t/\tau_C}, \qquad \boxed{\tau_C = RC}$$

Катушка индуктивности

$$IR = -L\frac{dI}{dt} \qquad \to \qquad I \propto e^{-t/\tau_L}, \qquad \boxed{\tau_L = \frac{L}{R}}$$

- Алгебраическая, тригонометрическая и экспоненциальная формы

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

- Модуль, аргумент

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r, \qquad \arg z = \varphi,\ \operatorname{tg}\varphi = y/x$$

- Комплексное сопряжение

$$z^\star = x - iy = re^{-i\varphi}, \quad zz^\star = |z|^2, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + z^\star}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^\star}{2i}$$

- Алгебраические действия

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad z^n = r^n e^{in\varphi}, n \in \mathbb{Z}$$

$$e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\pi/2} = i, \qquad e^{-i\pi/2} = -i, \qquad \ldots$$

Почему комплексные числа и экспоненты?

Почему ищут решение в виде $f = Ae^{i\Omega t}$?

- Собственные функции операторов дифференцирования и интегрирования
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \lambda^n f \quad \rightarrow \quad f = Ae^{\lambda x} \qquad \text{(в том числе для } n < 0!\text{)}$$
- Основная теорема алгебры: корни уравнения $\sum\limits_n c_n \lambda^n = 0$ — комплексные
- Фаза и амплитуда в одном числе!

Уравнение

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Декремент затухания, собственная частота

$$2\gamma = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau_L}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_L \tau_C}}$$

$$[\gamma] = [\omega_0] = [\text{с}^{-1}]$$

Свободный колебательный контур

Комплексная частота

$$\underbrace{\left(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2\right)}_{\mathcal{D}(\Omega)} \cdot q_0 e^{i\Omega t} = 0 \quad \to \quad \Omega = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Режимы колебаний

$\omega_0 > \gamma$: затухающие колебания, $\omega = \operatorname{Re}\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$q = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$\omega_0 < \gamma$: апериодический режим, $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$$q = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}\right)$$

$\omega_0 = \gamma$: критический режим

$$q = e^{-\gamma t}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

Энергия колебаний

- Энергия

$$W = \underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L} + \underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{W_C} = \frac{L}{2}\left(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2\right)$$

- Затухание (диссипация)

$$\dot{W} = -RI^2 = -L \cdot \gamma \dot{q}^2$$

Энергия колебаний

Средняя энергия за период

$$\boxed{\langle W_C \rangle = \langle W_L \rangle} \qquad (\text{ср. } \langle K \rangle = \langle \Pi \rangle)$$

- Даже при наличии затухания!

$$\int_0^T \omega_0^2 q^2\, dt = -\int_0^T (\ddot{q} + 2\gamma\dot{q})q\, dt = -\cancel{(q\dot{q} + \gamma q^2)}\Big|_0^T + \int_0^T \dot{q}^2\, dt$$

Затухание средней энергии

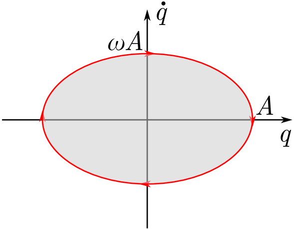
$$\left\langle \dot{W} \right\rangle = -R\left\langle \dot{q}^2 \right\rangle = -2\gamma \langle W \rangle \qquad \to \qquad \langle W \rangle = W_0 e^{-2\gamma t}$$

- Декремент затухания средней энергии: $\boxed{\gamma_{\text{эн}} = 2\gamma}$

Фазовый портрет

без затухания

$$(\omega\, q)^2 + \dot{q}^2 = \frac{2\,W}{L} = \mathrm{const}$$

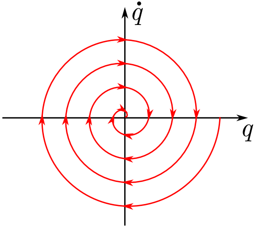


Физический смысл площади

$$W \propto \omega^2 A^2 = \underbrace{A \cdot \omega A}_{S_{\text{фаз}}/\pi} \cdot \omega \qquad (\text{ср. } W = N \cdot \hbar\omega)$$

Фазовый портрет

с затуханием



$$\langle W \rangle = W_0 e^{-2\gamma t}$$

Определения добротности

- Теоретическое

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Практическое

$$Q_{\text{эксп}} \equiv \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\pi}{\gamma T} = \sqrt{Q^2 - \tfrac{1}{4}}$$

(γT — логарифмический декремент)

- Энергетическое

$$Q_{\text{эн}} \equiv 2\pi \frac{W}{\Delta W_T} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma T}} \approx \frac{\pi}{\gamma T}$$

Собственные и вынужденные колебания

под действием гармонической силы

- Общий вид решения неоднородного линейного уравнения

$$U(t) = U_{\text{соб}}(t) + U_{\text{вын}}(t)$$

- Собственные колебания:

$$U_{\text{соб}} \sim e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$\tau = 1/\gamma$ — характерное время затухания/нарастания

- Вынужденные колебания ($\mathcal{E} \sim \cos\Omega t$):

$$U_{\text{вын}} \sim \cos(\Omega t + \psi_0)$$

- Биения:

$$\cos(\omega_0 t) + \cos(\Omega t) = 2\cos\left(\frac{\Omega + \omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\Omega - \omega_0}{2}t\right)$$

Комплексное представление колебательных процессов

- Действительная функция

$$U(t) = U_0 \cos(\Omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\, \tilde{U} = \frac{\tilde{U} + \tilde{U}^{\star}}{2}$$

- Комплексное представление

$$\tilde{U} = \overline{U}\, e^{i\Omega t}$$

- Комплексная амплитуда (амплитуда U_0 & фаза φ)

$$\overline{U} = U_0 e^{i\varphi}$$

Замечание

Величины U_0 и φ можно рассматривать как **медленно** меняющиеся функции времени: $\dot{U}_0 \ll \Omega U_0$, $\dot{\varphi} \ll \Omega$.

Дифференцирование и интегрирование

комплексных представлений

- Производная:

$$\frac{d\,\tilde{U}}{dt} = i\Omega \underbrace{\overline{U}\,e^{i\Omega t}}_{\tilde{U}} + \frac{d\,\overline{U}}{dt}\,e^{i\Omega t} \approx i\Omega\,\tilde{U}$$

- Интеграл:

$$\int \tilde{U}\,dt \approx \overline{U} \int e^{i\Omega t}\,dt = \frac{\tilde{U}}{i\Omega}$$

- Операция d/dt (и $\int * dt$) перестановочна с Re:

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,\mathrm{Re}\,\tilde{U} = \mathrm{Re}\,\frac{d\,\tilde{U}}{dt} = \mathrm{Re}[i\Omega\,\tilde{U}]$$

Общая формула

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n U(t) \quad \leftrightarrow \quad (i\Omega)^n\,\tilde{U}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

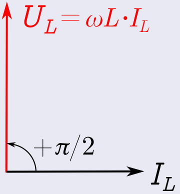
Комплексные импедансы элементов цепи

Катушка индуктивности

$$U = L\frac{dI}{dt} \quad \to \quad \tilde{U} = i\Omega L\tilde{I}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Z_L = i\Omega L}$$

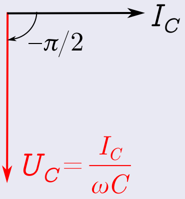


Конденсатор

$$U = \frac{1}{C}\int I dt \quad \to \quad \tilde{U} = \frac{1}{i\Omega C}\tilde{I}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{i\Omega C}}$$



Импедансы в RLC-контуре

$$Z_L = i\Omega L = i\frac{\Omega}{\omega_0}QR$$

$$Z_C = \frac{1}{i\Omega C} = -i\frac{\omega_0}{\Omega}QR$$

В резонансе ($\Omega = \omega_0$)

$$Z_L = iQR, \qquad Z_C = -iQR$$

Последовательный RLC-контур
(для напряжения U_C)

Импеданс последовательного контура:

$$Z = R + i\Omega L + \frac{1}{i\Omega C} = R\left[1 + iQ\left(\frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega}\right)\right] \xrightarrow[\Omega=\omega_0]{} R$$

Частотная характеристика (комплексная):

$$\frac{A(\Omega)}{A_0} \equiv \frac{U_C}{\mathcal{E}} = \frac{1}{i\Omega C \cdot Z} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + i\frac{\Omega}{Q\omega_0}} \xrightarrow[\Omega=\omega_0]{} -iQ$$

или

$$\frac{A(\Omega)}{A_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\gamma} = \frac{\omega_0^2}{\mathcal{D}(\Omega)}$$

- $\mathcal{D}(\Omega)$ — характеристическое уравнение для свободных колебаний!

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$\left|\frac{A(\xi)}{A_0}\right| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 + \frac{\xi^2}{Q^2}}}, \qquad (\xi = \Omega/\omega_0)$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

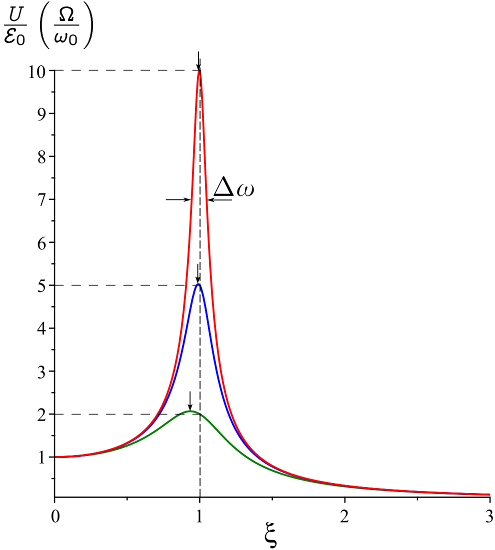
$$\operatorname{tg}(\varphi_{U_C} - \varphi_{\mathcal{E}}) = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{1}{Q}\frac{1}{\xi - \xi^{-1}}$$

АЧХ последовательного RLC-контура
(для напряжения U_C)

$Q = 10$

$Q = 5$

$Q = 2$



- Резонанс

$$\boxed{U(\omega_0) = Q\mathcal{E}_0}$$

- Ширина

$$\boxed{\Delta\Omega \approx \omega_0/Q = 2\gamma}$$

(на высоте $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$)

Последовательный RLC-контур
(для тока I)

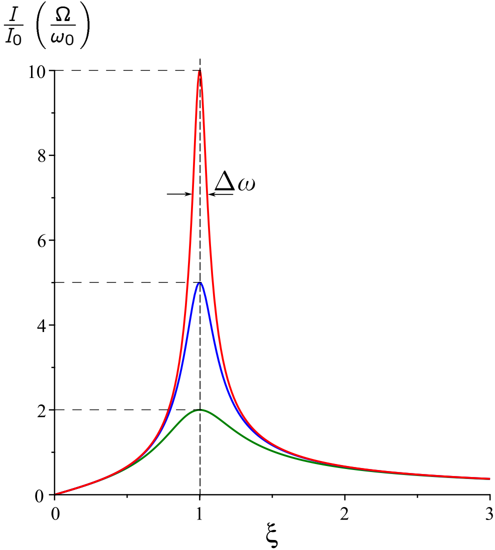
Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$\left|\frac{I(\xi)}{I_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{(\xi - 1/\xi)^2 + \frac{1}{Q^2}}}, \qquad (\xi = \Omega/\omega_0, \quad I_0 = \mathcal{E}/R)$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

$$\varphi_I = \varphi_{U_C} + \frac{\pi}{2}$$

АЧХ последовательного RLC-контура
(для тока I)



$Q = 10$

$Q = 5$

$Q = 2$

- Резонанс

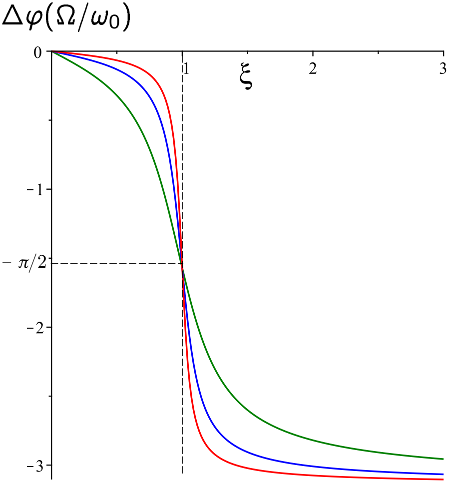
$$\boxed{I(\omega_0) = QI_0}$$

- Ширина

$$\boxed{\Delta\Omega = \omega_0/Q = 2\gamma}$$

(на высоте $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$)

ФЧХ последовательного контура
(между U_C и $\mathcal{E}$)



$Q = 10$

$Q = 5$

$Q = 2$

Основные свойства ФЧХ

- Ширина фазовой кривой:

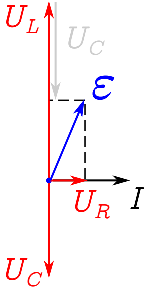
$$\Delta\varphi \sim \frac{1}{Q}$$

- Сдвиг фаз:

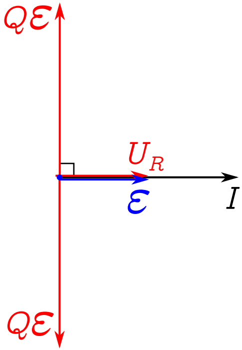
$$\begin{array}{rrr} & \varphi_C - \varphi_{\mathcal{E}} & \varphi_I - \varphi_{\mathcal{E}} \\ \Omega \to 0: & 0 & \pi/2 \\ \Omega \to \omega_0: & -\pi/2 & 0 \\ \Omega \to \infty: & -\pi & -\pi/2 \end{array}$$

$$\overline{\mathcal{E}} = \underbrace{\overline{U}_R}_{R\overline{I}} + \underbrace{\overline{U}_L}_{i\overline{I}\Omega L} + \underbrace{\overline{U}_C}_{-i\overline{I}/\Omega C}$$

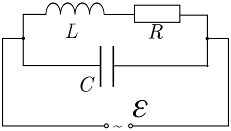
Общий случай:



Резонанс:



*Параллельный контур

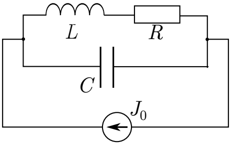


$$\frac{1}{Z(\Omega)} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L + R} = \frac{1}{R}\left[\frac{i\xi}{Q} + \frac{1}{i\xi Q + 1}\right] \ \rightarrow\ Z = R\frac{1 + i\xi Q}{1 - \xi^2 + i\xi/Q}$$

- Резонанс $\Omega = \omega_0$:

$$Z = R \cdot Q(Q - i) \approx Q^2 R$$

$$\operatorname{tg}\Delta\varphi = -\frac{1}{Q}$$



- Параллельный контур + **источник тока**:

$$Z_{\text{рез}} \approx Q^2 R \quad \to \quad U_C = I_0 Z = Q^2 I_0 R$$

- «Резонанс токов» ($Q \gg 1$):

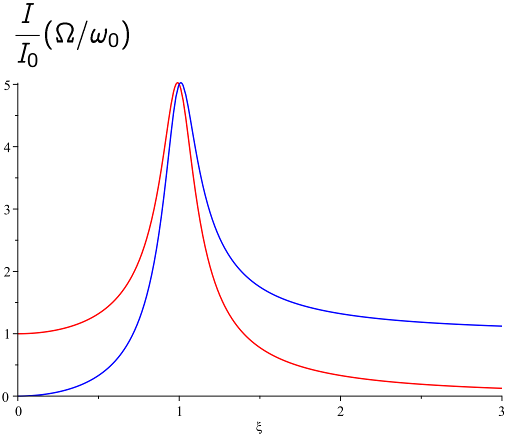
$$I_L = \frac{U_C}{Z_L + R} \approx -iQI_0, \qquad I_C = \frac{U_C}{Z_C} = iQI_0$$

АЧХ параллельного контура с источником тока
(резонанс токов)

I_L

I_C

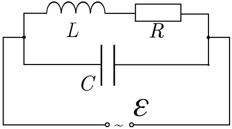
$(Q = 5)$



Параллельный контур как фильтр-«пробка»

- Генератор — источник напряжения:

$$I_{\text{рез}} = \frac{\mathcal{E}}{Z_{\text{рез}}} \to \frac{1}{Q^2}\frac{\mathcal{E}}{R}$$



  - Через контур **не проходит** ток резонансной частоты!

Мощность в цепи переменного тока

Комплексные представления и амплитуды

$$I(t) = \operatorname{Re}\tilde{I}, \qquad U(t) = \operatorname{Re}\tilde{U},$$

$$\tilde{I} = \overline{I}\,e^{i\Omega t}, \qquad \tilde{U} = \overline{U}\,e^{i\Omega t},$$

$$\overline{I} = I_0\,e^{i\varphi_I}, \qquad \overline{U} = U_0\,e^{i\varphi_U}.$$

Мощность в комлексном представлении

$$P = \langle I(t)\cdot U(t)\rangle = \left\langle \underbrace{\frac{\tilde{I}+\tilde{I}^\star}{2}}_{\operatorname{Re}\tilde{I}} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{U}+\tilde{U}^\star}{2}}_{\operatorname{Re}\tilde{U}} \right\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[\overline{I}\cdot\overline{U}^\star]$$

Мощность в цепи переменного тока

- За диссипацию отвечает **действительная** часть импеданса:

$$\boxed{P = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Re} Z} \neq \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{\operatorname{Re} Z}$$

- Влияние сдвига фаз:

$$Z = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \quad \rightarrow \quad \arg Z = \varphi_U - \varphi_J$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(\varphi_U - \varphi_I)}$$

Действующие (эффективные) значения

- Общее определение:

$$U_{\text{эфф}}^2 \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T U^2(t)dt \equiv \left\langle U^2 \right\rangle, \qquad I_{\text{эфф}}^2 \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T I^2(t)dt \equiv \left\langle I^2 \right\rangle$$

- Для **гармонического** изменения тока:

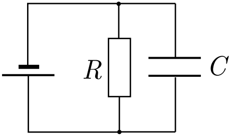
$$U_{\text{эфф}} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_0, \quad I_{\text{эфф}} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_0$$

$$\boxed{P = U_{\text{эфф}} J_{\text{эфф}} \cos\Delta\varphi}$$

- Какова амплитуда напряжения в сети 220 В?

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\Delta\varphi$$

- Можно ли сэкономить электроэнергию, сдвинув фазу в сети?



Параллельное подключение конденсатора и нагрузки

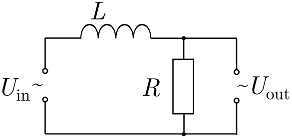
$$Z = \frac{1}{1/R + i\Omega C} = \frac{R}{1 + i\Omega\tau_C}$$

$$\downarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega\tau_C)^2}}, \qquad I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{R}\sqrt{1 + (\Omega\tau_C)^2}$$

Интегрирующие и дифференцирующие цепочки

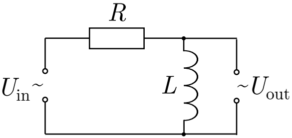
- $U_{\text{out}} \ll U_{\text{in}}$



$R \ll \omega L$

$$U_{\text{out}} = RI$$
$$U_{\text{in}} \approx (i\omega L + \cancel{R})I$$
$$U_{\text{out}} \approx \frac{RU_{\text{in}}}{i\omega L}$$

$$U_{\text{out}} \approx \frac{R}{L}\int U_{\text{in}}\,dt$$



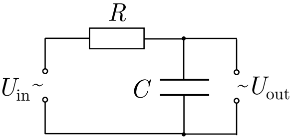
$\omega L \ll R$

$$U_{\text{out}} = i\omega LI$$
$$U_{\text{in}} \approx (R + \cancel{i\omega L})I$$
$$U_{\text{out}} \approx \frac{i\omega L U_{\text{in}}}{R}$$

$$U_{\text{out}} \approx \frac{L}{R}\frac{dU_{\text{in}}}{dt}$$

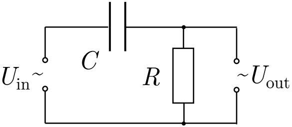
Интегрирующие и дифференцирующие цепочки

- $U_{\text{out}} \ll U_{\text{in}}$



$$U_{\text{out}} = \frac{I}{i\omega C}$$
$$U_{\text{in}} \approx \left(R + \cancel{\frac{1}{i\omega C}}\right) I$$
$$U_{\text{out}} \approx \frac{U_{\text{in}}}{i\omega RC}$$

$$U_{\text{out}} \approx \frac{1}{RC} \int U_{\text{in}}\, dt$$



$$U_{\text{out}} = IR$$
$$U_{\text{in}} \approx \left(\frac{1}{i\omega C} + \cancel{R}\right) I$$
$$U_{\text{out}} \approx i\omega RC U_{\text{in}}$$

$$U_{\text{out}} \approx RC \frac{dU_{\text{in}}}{dt}$$