# Электрические колебания для курса «Цифровизация физических процессов»

#### Попов Павел Владимирович

кафедра общей физики МФТИ

06.02.2025

# Электрические колебания

#### План лекции

- Дифференциальные уравнения цепей и методы их решения
  - Комплексные числа и их экспоненциальная форма
- Колебательные системы
  - ullet Свободные колебания в RLC-цепи
  - Декремент затухания, добротность электрического контура
  - Диссипация энергии в колебательном контуре
- Сложение собственных и вынужденных колебаний, процесс установления
- Комплексное представление колебательных процессов, метод комплексных амплитуд
- Вынужденные гармонические колебания в линейных цепях
  - ullet Последовательный RLC-контур
    - АЧХ и \*ФЧХ колебательной системы, их основные характеристики, роль добротности
    - Резонанс в последовательном контуре
    - \*Резонанс токов в параллельном контуре
  - Мощность в цепи переменного тока

# Правила Кирхгофа для переменных токов

#### 1. Правило токов

$$\sum_{ullet} I_i = 0$$

#### 2. Правило контуров

$$\sum_{ riangle}U_i=\sum_{ riangle}\mathcal{E}_i-\sum_{ riangle}\dot{\Phi}_i$$

#### Элементы цепи

Сопротивление (активная нагрузка):  $U_i = I_i R_i$ 

Ёмкость:  $U_i = rac{q_i}{C_i} = rac{1}{C_i} \int I_i \, dt$ 

Индуктивность: 
$$\dot{\Phi}_i = \underbrace{L_i \dot{I}_i}_{\mathsf{самоинд.}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} M_{ij} \dot{I}_j}_{\mathsf{взаимн. инд.}} + \dot{\Phi}_{\mathsf{внеш}}$$

## Характерные времена релаксации

Конденсатор

$$rac{q}{C}+\dot{q}R=0 \qquad 
ightarrow q \propto e^{-t/ au_C}, \qquad \boxed{ au_C=RC}$$

Катушка индуктивности

$$IR = -Lrac{dI}{dt} \qquad 
ightarrow \qquad I \propto e^{-t/ au_L}, \qquad \boxed{ au_L = rac{L}{R}}$$

#### сводка результатов

• Алгебраическая, тригонометрическая и экспоненциальная формы

$$z=x+iy=r(\cos arphi+i\sin arphi)=re^{iarphi}$$

• Модуль, аргумент

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=r, \qquad rg z=arphi, \; \operatorname{tg} arphi=y/x$$

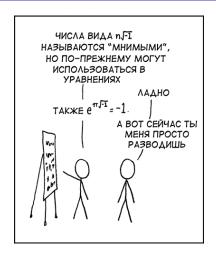
• Комплексное сопряжение

$$z^\star=x-iy=re^{-iarphi},\quad zz^\star=|z|^2,\quad \operatorname{Re} z=rac{z+z^\star}{2},\quad \operatorname{Im} z=rac{z-z^\star}{2i}$$

• Алгебраические действия

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(arphi_1+arphi_2)}, \qquad z^n=r^ne^{inarphi}, n\in\mathbb{Z}$$

#### Комплексные числа



$$e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\pi/2} = i, \qquad e^{-i\pi/2} = -i, \qquad \dots$$

# Почему комплексные числа и экспоненты?

## Почему ищут решение в виде $f=Ae^{i\Omega t}$ ?

• Собственные функции операторов дифференцирования и интегрирования

$$\left(rac{d}{dx}
ight)^n f = \lambda^n f \quad o \quad f = A e^{\lambda x} \qquad ext{(в том числе для } n < 0!)$$

- ullet Основная теорема алгебры: корни уравнения  $\sum\limits_n c_n \lambda^n = 0$  комплексные
- Фаза и амплитуда в одном числе!

#### **Уравнение**

$$\ddot{q} + 2\gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

## Декремент затухания, собственная частота

$$2\gamma=rac{R}{L}=rac{1}{ au_L}, \qquad \omega_0=rac{1}{\sqrt{LC}}=rac{1}{\sqrt{ au_L au_C}}$$
  $[\gamma]=[\omega_0]=[\mathsf{c}^{-1}]$ 

# Свободный колебательный контур

#### Комплексная частота

$$\underbrace{\left(-\Omega^2+2i\gamma\Omega+\omega_0^2
ight)}_{\mathcal{D}(\Omega)}\cdot q_0e^{i\Omega t}=0 \quad o \quad \Omega=i\gamma\pm\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

#### Режимы колебаний

$$\omega_0>\gamma$$
: затухающие колебания,  $\omega=\mathrm{Re}\,\Omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$   $q=e^{-\gamma t}(C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t})=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t+arphi_0)$   $\omega_0<\gamma$ : апериодический режим,  $\alpha=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$   $q=e^{-\gamma t}(C_1e^{\alpha t}+C_2e^{-\alpha t})$ 

 $\omega_0 = \gamma$ : критический режим

$$q=e^{-\gamma t}(C_1+C_2t)$$

# Энергия колебаний

• Энергия

$$W = \underbrace{\frac{LI^2}{2}}_{W_L} + \underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{W_C} = \frac{L}{2} \left( \dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2 \right)$$

• Затухание (диссипация)

$$\dot{W} = -RI^2 = -L \cdot \gamma \dot{q}^2$$

# Энергия колебаний

#### Средняя энергия за период

$$oxed{\left\langle W_C 
ight
angle = \left\langle W_L 
ight
angle} \qquad ext{(cp. } \left\langle K 
ight
angle = \left\langle \Pi 
ight
angle )$$

• Даже при наличии затухания!

$$\int_{0}^{T} \omega_{0}^{2} q^{2} dt = -\int_{0}^{T} (\ddot{q} + 2\gamma \dot{q}) q dt = -(q\dot{q} + \gamma q^{2})\Big|_{0}^{T} + \int_{0}^{T} \dot{q}^{2} dt$$

### Затухание средней энергии

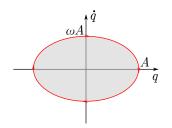
$$\left\langle \dot{W} \right
angle = - R \left\langle \dot{q}^2 
ight
angle = - 2 \gamma \left\langle W 
ight
angle \qquad 
ightarrow \left\langle W 
ight
angle = W_0 \, e^{-2 \gamma t}$$

ullet Декремент затухания средней энергии:  $\overline{\gamma_{\scriptscriptstyle ext{9H}}=2\gamma}$ 

## Фазовый портрет

без затухания

$$(\omega q)^2 + \dot{q}^2 = \frac{2W}{L} = \mathrm{const}$$

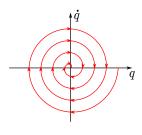


### Физический смысл площади

$$W \propto \omega^2 A^2 = \underbrace{A \cdot \omega A}_{S_{\Phi^{as}}/\pi} \cdot \omega$$
 (cp.  $W = N \cdot \hbar \omega$ )

# Фазовый портрет

с затуханием



$$\langle\,W\,
angle = \,W_0\,e^{-2\gamma\,t}$$

# Определения добротности

• Теоретическое

$$Q\equiv rac{\omega_0}{2\gamma}=rac{1}{R}\sqrt{rac{L}{C}}$$

• Практическое

$$Q_{ ext{ iny SKCII}} \equiv rac{\omega}{2\gamma} = rac{\pi}{\gamma\,T} = \sqrt{Q^2 - rac{1}{4}}$$

 $(\gamma T$  — логарифмический декремент)

• Энергетическое

$$Q_{\scriptscriptstyle ext{9H}} \equiv 2\pi rac{W}{\Delta\,W_T} = rac{2\pi}{1-e^{-2\gamma\,T}} pprox rac{\pi}{\gamma\,T}$$

# Собственные и вынужденные колебания

под действием гармонической силы

• Общий вид решения неоднородного линейного уравнения

$$U(t) = U_{\text{cof}}(t) + U_{\text{вын}}(t)$$

• Собственные колебания:

$$U_{
m co6} \sim e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + arphi_0)$$

 $au=1/\gamma$  — характерное время затухания/нарастания

• Вынужденные колебания ( $\mathcal{E} \sim \cos \Omega t$ ):

$$U_{\scriptscriptstyle 
m BMH} \sim \cos(\Omega t + \psi_0)$$

• Биения:

$$\cos(\omega_0 t) + \cos(\Omega t) = 2\cos\left(rac{\Omega + \omega_0}{2}t
ight)\cos\left(rac{\Omega - \omega_0}{2}t
ight)$$

# Комплексное представление колебательных процессов

• Действительная функция

$$U(t)=\,U_0\cos(\Omega t+arphi)={
m Re}\ ilde U=rac{ ilde U+ ilde U^\star}{2}$$

• Комплексное представление

$$ilde{U}=\overline{U}e^{i\Omega t}$$

ullet Комплексная амплитуда (амплитуда  $U_0$  & фаза arphi)

$$\overline{U}=U_0e^{iarphi}$$

#### Замечание

Величины  $U_0$  и  $\varphi$  можно рассматривать как **медленно** меняющиеся функции времени:  $\dot{U}_0 \ll \Omega \, U_0, \, \dot{\varphi} \ll \Omega$ .

# Дифференцирование и интегрирование

#### комплексных представлений

• Производная:

$$rac{d\, ilde{U}}{dt}=i\Omega \overline{igcup_{ ilde{U}}}e^{i\Omega t}+rac{d\,\overline{U}}{dt}e^{i\Omega t}pprox i\Omega\, ilde{U}$$

• Интеграл:

$$\int ilde{U} \, dt pprox \overline{U} \int e^{i\Omega t} \, dt = rac{ ilde{U}}{i\Omega}$$

ullet Операция d/dt (и  $\int *dt$ ) перестановочна с Re:

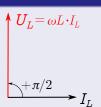
$$rac{dU(t)}{dt} = rac{d}{dt}\operatorname{Re} ilde{U} = \operatorname{Re}rac{d ilde{U}}{dt} = \operatorname{Re}[i\Omega ilde{U}]$$

#### Общая формула

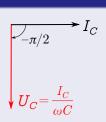
$$\left(rac{d}{dt}
ight)^n U(t) \qquad \leftrightarrow \qquad (i\Omega)^n \, ilde{U}, \qquad n=\pm 1, \pm 2, \ldots$$

## Комплексные импедансы элементов цепи

#### Катушка индуктивности



### Конденсатор



# Импедансы в RLC-контуре

$$Z_L = i\Omega L = irac{\Omega}{\omega_0}QR$$
  $Z_C = rac{1}{i\Omega\,C} = -irac{\omega_0}{\Omega}QR$ 

## В резонансе ( $\Omega=\omega_0$ )

$$Z_L=iQR, \qquad Z_C=-iQR$$

# Последовательный RLC-контур

 $(для напряжения <math>U_C)$ 

Импеданс последовательного контура:

$$Z=R+i\Omega L+rac{1}{i\Omega\,C}=R\left[1+iQ\left(rac{\Omega}{\omega_0}-rac{\omega_0}{\Omega}
ight)
ight] \quad \stackrel{
ightarrow}{\longrightarrow} \quad R$$

Частотная характеристика (комплексная):

$$rac{A(\Omega)}{A_0} \equiv rac{U_C}{\mathcal{E}} = rac{1}{i\Omega\,C\cdot Z} = rac{1}{1-rac{\Omega^2}{\omega_0^2}+irac{\Omega}{Q\omega_0}} \stackrel{
ightarrow}{\Omega=\omega_0} -iQ$$

или

$$rac{A(\Omega)}{A_0} = rac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\gamma} = rac{\omega_0^2}{\mathcal{D}(\Omega)}$$

•  $\mathcal{D}(\Omega)$  — характеристическое уравнение для свободных колебаний!

# Последовательный RLC-контур

 $(для напряжения <math>U_C)$ 

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

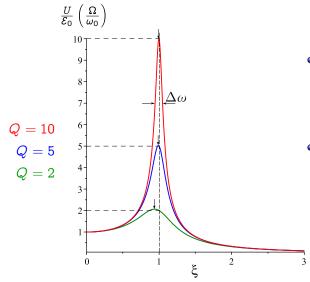
$$\left| rac{A(\xi)}{A_0} 
ight| = rac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} = rac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + rac{\xi^2}{Q^2}}}, \qquad (\xi = \Omega/\omega_0)$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

$$ext{tg}(arphi_{U_C} - arphi_{\mathcal{E}}) = -rac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = rac{1}{Q}rac{1}{\xi - \xi^{-1}}$$

# $\mathsf{A}\mathsf{Y}\mathsf{X}$ последовательного RLC-контура

 $(для напряжения <math>U_C)$ 



• Резонанс

$$U(\omega_0)=Q\mathcal{E}_0$$

• Ширина

$$\Delta\Omega \approx \omega_0/Q = 2\gamma$$

(на высоте  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ )

# Последовательный RLC-контур $_{(\mathsf{для\ ток}\ I)}$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

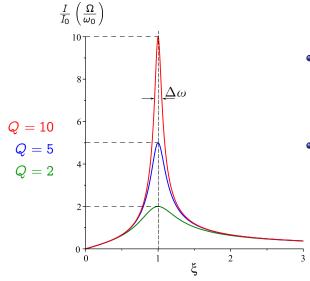
$$\left|rac{I(\xi)}{I_0}
ight|=rac{1}{\sqrt{(\xi-1/\xi)^2+rac{1}{Q^2}}}, \qquad (\xi=\Omega/\omega_0,\quad I_0=\mathcal{E}/R)$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

$$arphi_I = arphi_{U_C} + rac{\pi}{2}$$

# $\mathsf{A}\mathsf{Y}\mathsf{X}$ последовательного RLC-контура

(для тока I)



• Резонанс

$$I(\omega_0) = QI_0$$

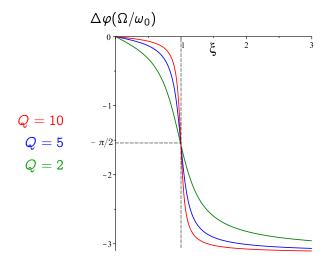
• Ширина

$$\Delta\Omega = \omega_0/Q = 2\gamma$$

(на высоте  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$ )

# ФЧХ последовательного контура

 $(между U_C и \mathcal{E})$ 



#### Основные свойства ФЧХ

• Ширина фазовой кривой:

$$\Delta arphi \sim rac{1}{Q}$$

• Сдвиг фаз:

$$egin{array}{ccccc} arphi_C - arphi_{\mathcal E} & arphi_I - arphi_{\mathcal E} \ \Omega 
ightarrow 0: & 0 & \pi/2 \ \Omega 
ightarrow \omega_0: & -\pi/2 & 0 \ \Omega 
ightarrow \infty: & -\pi & -\pi/2 \end{array}$$

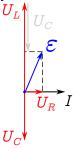
## Резонанс напряжений в последовательном контуре

Векторные диаграммы

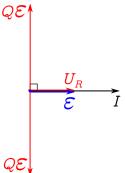
$$\overline{\mathcal{E}} = \overline{\underline{U}}_{R} + \overline{\underline{U}}_{L} + \overline{\underline{U}}_{C}$$

$${}_{R\overline{I}} i \overline{I} \Omega L - i \overline{I} / \Omega C$$

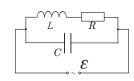
Общий случай:



Резонанс:



# \*Параллельный контур



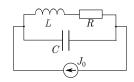
$$rac{1}{Z(\Omega)} = rac{1}{Z_C} + rac{1}{Z_L + R} = rac{1}{R} \left[ rac{i \xi}{Q} + rac{1}{i \xi \, Q + 1} 
ight] \; o \; Z = R rac{1 + i \xi \, Q}{1 - \xi^2 + i \xi / Q}$$

• Резонанс  $\Omega = \omega_0$ :

$$Z=R\cdot Q(Q-i)pprox Q^2R$$
  ${
m tg}\,\Deltaarphi=-rac{1}{Q}$ 

#### \*Резонанс токов

#### в параллельном RL/C-контуре



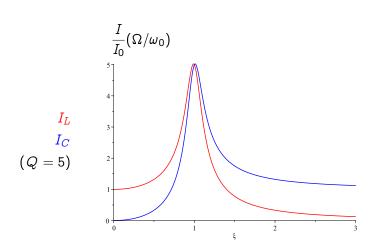
• Параллельный контур + источник тока:

$$Z_{
m pes} pprox Q^2 R \quad o \quad U_C = I_0 Z = Q^2 I_0 R$$

ullet «Резонанс токов»  $(Q\gg 1)$ :

$$I_L = rac{U_C}{Z_L + R} pprox -iQI_0, \qquad I_C = rac{U_C}{Z_C} = iQI_0$$

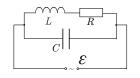
# АЧХ параллельного контура с источником тока (резонанс токов)



# Параллельный контур как фильтр-«пробка»

• Генератор — источник напряжения:

$$I_{
m pes} = rac{\mathcal{E}}{Z_{
m pes}} 
ightarrow rac{1}{Q^2}rac{\mathcal{E}}{R}$$



• Через контур не проходит ток резонансной частоты!

## Мощность в цепи переменного тока

#### Комплексные представления и амплитуды

$$egin{align} I(t) = \operatorname{Re} ilde{I}, & U(t) = \operatorname{Re} ilde{U}, \ & ilde{I} = \overline{I} e^{i\Omega t}, & ilde{U} = \overline{U} e^{i\Omega t}, \ & \overline{I} = I_0 e^{iarphi_I}, & \overline{U} = U_0 e^{iarphi_U}. \end{array}$$

## Мощность в комлексном представлении

$$P = \langle I(t) \cdot U(t) 
angle = \left\langle \underbrace{ ilde{I} + ilde{I}^{\star}}_{ ext{Re } ilde{I}} \cdot \underbrace{ ilde{U} + ilde{U}^{\star}}_{ ext{Re } ilde{U}} 
ight
angle = rac{1}{2} \operatorname{Re}[\overline{I} \cdot \overline{U}^{\star}]$$

## Мощность в цепи переменного тока

• За диссипацию отвечает действительная часть импеданса:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}I_0^2 \operatorname{Re} Z} \neq \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{\operatorname{Re} Z}$$

• Влияние сдвига фаз:

$$Z=rac{ar{U}}{ar{I}} \quad o \quad ext{arg} \, Z=arphi_U-arphi_J \ \downarrow$$

$$P=rac{1}{2}I_0\,U_0\cos(arphi_U-arphi_I)$$

# Действующие (эффективные) значения

• Общее определение:

$$U_{
m s d p d}^2 \equiv rac{1}{T} \int \limits_0^T U^2(t) dt \equiv \left\langle U^2 
ight
angle, \qquad I_{
m s d p d}^2 \equiv rac{1}{T} \int \limits_0^T I^2(t) dt \equiv \left\langle I^2 
ight
angle$$

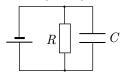
• Для гармонического изменения тока:

$$egin{align} U_{
m o d \phi} &= rac{1}{\sqrt{2}} \, U_0, \quad I_{
m o d \phi} &= rac{1}{\sqrt{2}} I_0 \ egin{align} P &= U_{
m o d \phi} \, J_{
m o d \phi} \cos \Delta arphi \ \end{bmatrix} \end{split}$$

• Какова амплитуда напряжения в сети 220 В?

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Delta \varphi$$

• Можно ли сэкономить электроэнергию, сдвинув фазу в сети?



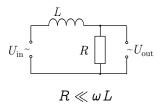
#### Параллельное подключение конденсатора и нагрузки

$$Z=rac{1}{1/R+i\Omega C}=rac{R}{1+i\Omega au_C}$$

$$\cos arphi = rac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} = rac{1}{\sqrt{1 + (\Omega au_C)^2}}, \qquad I = rac{U}{|Z|} = rac{U}{R} \sqrt{1 + (\Omega au_C)^2}$$

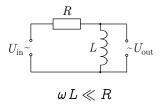
# Интегрирующие и дифференцирующие цепочки

#### • $U_{ m out} \ll U_{ m in}$



$$egin{aligned} egin{aligned} U_{
m out} &= RI \ U_{
m in} &pprox (i\omega L + R)I \ U_{
m out} &pprox rac{RU_{
m in}}{i\omega L} \end{aligned}$$

$$U_{
m out}pprox rac{R}{L}\int\,U_{
m in}\,dt$$

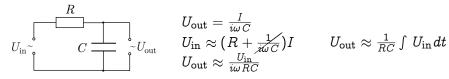


$$egin{aligned} egin{aligned} U_{
m out} & U_{
m out} = i\omega LI \ U_{
m in} &pprox (R+i\omega L)I \ U_{
m out} &pprox rac{i\omega LU_{
m in}}{R} \end{aligned}$$

$$U_{
m out} pprox rac{L}{R} rac{dU_{
m in}}{dt}$$

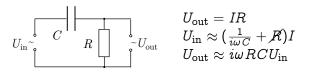
# Интегрирующие и дифференцирующие цепочки

#### • $U_{\text{out}} \ll U_{\text{in}}$



$$egin{aligned} U_{
m out} &= rac{I}{i\omega\,C} \ U_{
m in} &pprox (R + rac{1}{i\omega\,C})I \ U_{
m out} &pprox rac{U_{
m in}}{i\omega\,RC} \end{aligned}$$

$$U_{
m out}pprox rac{1}{RC}\int \,U_{
m in}\,dt$$



$$egin{aligned} U_{
m out} &= IR \ U_{
m in} &pprox (rac{1}{i\omega\,C} + 
ot\!\!R)I \ U_{
m out} &pprox i\omega\,RCU_{
m in} \end{aligned}$$

$$U_{
m out}pprox RCrac{dU_{
m in}}{dt}$$