Advance 2 -- Torus Throwing

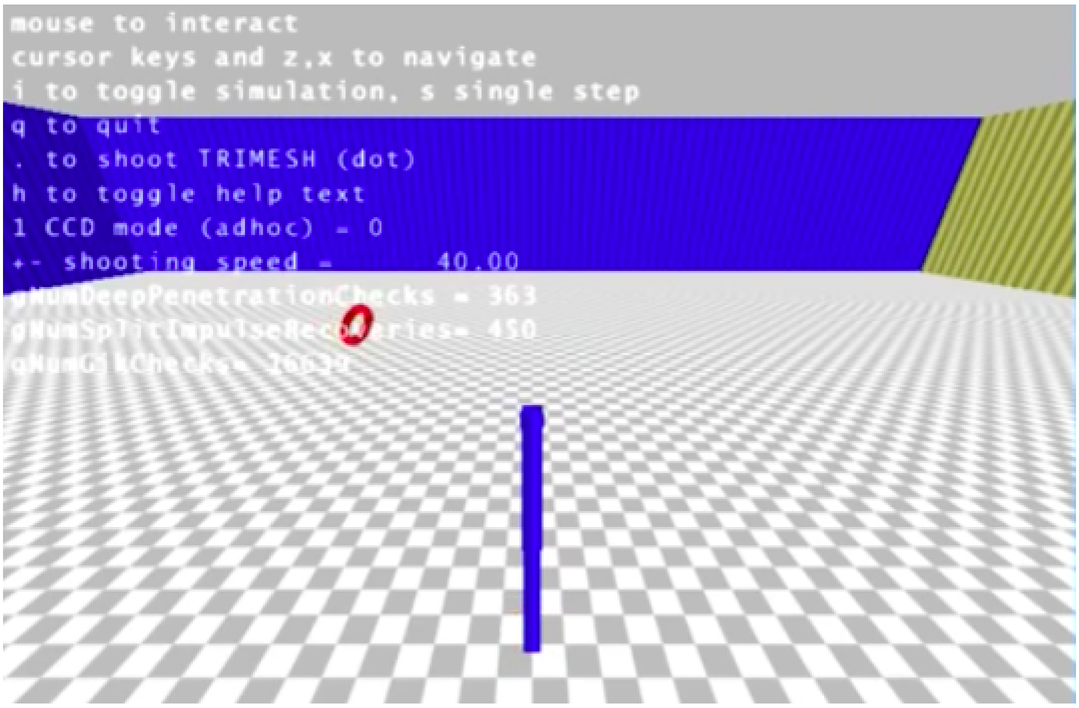
Brain Storming

我們希望User 指定初始位置與末位置後，將一個物體從初始位置移動末位置

從Backward Steps Simulation 得到靈感，Interactive Rigid Body Simulation 學習思考邏輯，最後我們選擇用Torus(甜甜圈)丟進中心桿子(rod)這個問題，去彰顯Rigid Body 在朝向(orientation)的考慮。

Problem

User 指定 Torus 的初始姿態，在此稱姿態(Pose) $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \in R^6$，經過計算後將能給予適當的初始速度 $v_0 \in R^3$與角速度$w_0 \in R^3$，構成向量(state vector)$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in R^{12}$，讓Torus 能夠投進桿子(rod)。



在此聲明非論文實作

與Interactive Rigid Body Simulation 同問題，但不同實作方法

以下為數學表述，與我們的思考流程

Mathematical Formulation

Primal Problem

$Given\ \ state\ \ vector\ \ X_0 \in R^{12}, which\ \ is\ \ user-setting$

$define:$

- $simulation\ \ function\ \ S(C(X,t),x)$
- $collision function\ \ C(X,t)$
- $goal\ \ state\ \ X_{goal}$
- $final\ \ time\ \ t_f$

$we\ \ need\ \ to\ \ find\ \ a\ \ proper\ \ X_0\ \ s.t\ \ S(X_0,t_f) = X_{goal}$

X_{goal}為經過t_f時間點後，在除了碰撞(Collision)與重力，沒有任何干擾力下，一定能進入桿子(rod)的$state\ \ vector$

Survey Method

經由多篇paper 的參考下，我們列出三種方法

- $1.B.V.P(Boundary\ \ Value\ \ Problem): Shooting\ \ method$
- $2.NLP\ \ Optimization$
- $3.Exhausive\ \ method$

B.V.P (Boundary Value Problem) : Shooting method

在多次模擬後 (可以放一個進不去的圖)，我們發現

X_{goal}並不存在唯一解

若將 所有可行解x_{goal}的集合寫成數列(sequence)

$Let\ \ [X_{goal_i}]\ \ be\ \ the\ \ solution\ \ sequence, i \geq 1$

$[X_{0_i}] be\ \ the\ \ inital\ \ state\ \ sequence$

$X_{goal_1} = S(C_1(x,t), x_{0_1})$

$X_{goal_2} = S(C_1(x,t), C_2(x,t), x_{0_2})$

$\cdots$

$X_{goal_N} = S(C_1(x,t), C_2(x,t), C_3(x,t), \ldots, C_N(x,t), x_{0_N})$

存在多數Simulation Function $S(C,X(t))$解具有Collision Function$C(X,t)$

由於Bullet 的Collision 是使用LCP(Linear Complementarity Problem)

LCP 本身不存在唯一解，只會根據初始值與限制定義域(Domain)找出可行解

無法確切知道剛體經過Collision後的狀態$state\ \ X$，難以得知適當的$[X_{goal_i}]sequence$

我們放棄$B.V.P(Boundary\ \ Value\ \ Problem): Shooting\ \ method$

改採用$Constraint$的方式一步步去思考，$[X_{goal_i}]sequence$是否在有限個(finite)限制式

使得$S(C,X)=X_{goal_i}$，等於其中一組可行解

Problem Redesign & Simplification

討論最佳化目標函數(objective function)，限制式(inequality)之前，

再次說明原問題

圓環面(torus)為投擲物，對user 來說，操作這份程式只需要給定 torus 的初始姿態(pose)

即$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in R^6$

簡化1

從前面我們發現真正的$simulation\ \ function\ \ S(C(X,t),x)$並不好求，因為無法掌握發生過幾次碰撞(Collision)

隨之造成X_{goal}與t_f不好計算。

我們給定一個假設，如果不去求真正的$simulation\ \ function\ \ S(C(X,t),x)$

而是將問題放在，以不發生Collision 的狀態下的可行解集合

定義 $S_c=S(X,u)$, u 稱為控制參數

$u=\begin{pmatrix} t_c \\ v_{y_0} \\ v_{x_0} \\ v_{z_0} \\ w_0 \end{pmatrix}$控制參數(control parameter)

- $t_c \in R^1$:torus 第一次碰撞到中心桿的時間點
- $v_{y_0} \in R^1$:torus 初始y分量速度
- $v_{x_0}, v_{z_0} \in R^1$:torus 初始x,z 分量速度
- $w_0 \in R^3$:torus 初始角速度

且$simulation\ \ function\ \ S_c(C(X,t),x) \supseteq S_c(X,t_c,v_{y_0},v_{x_0},v_{z_0},w_0)$

原問題將轉化

$$Given\ \ a\ \ state\ \ vector X_0, there\ \ exists\ \ at\ \ least\ \ one\ \ u=\begin{pmatrix} t_c \\ v_{y_0} \\ v_{x_0} \\ v_{z_0} \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$s.t\ \ S_c(X,u)=X_{goal_N}=S(C_1(x,t),C_2(x,t),C_3(x,t),\ldots,C_N(x,t),x_{0_N})=X_{goal_i}$$

將從$S_c(X,u)$去尋找真正的goal sequence，$[X_{goal_i}]\ \ be\ \ the\ \ solution\ \ sequence, i\geq 1$

Control parameter

控制參數關係非獨立(not independent)。

如果先決定 t_c ，那麼 根據牛頓運動方程式，$v_{y_0}, v_{x_0}, v_{z_0}, w_0$唯一(unique)。

如果先決定v_{y_0}, w_0 ，那麼根據牛頓運動方程式，t_c, v_{x_0}, v_{z_0}唯一。

如果先決定v_{x_0}, w_0 ，那麼根據牛頓運動方程式，t_c, v_{y_0}, v_{z_0}唯一。

如果先決定v_{z_0}, w_0 ，那麼根據牛頓運動方程式，t_c, v_{x_0}, v_{y_0}唯一。

Freedom of Control Parameter

雖然控制參數非獨立，但我們可以經由實驗確認，w_0越大，將越不可能將torus投入桿子。

問題目的是注重投入桿子，非中間過程，只要能滿足最終以所有user 設定的初始值

除此之外，在探討$t_c, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}, w_0$五個控制參數時，

我們發現t_c最決定性的參數，只要t_c決定，其他參數都被決定

相較於其他$v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}, w_0$控制參數，自由度較小

為了簡化問題，並且將控制參數等自由度，將設定w_0為一random的初始值，$\|w_0\| = 1$

將控制參數區分為

- 初始型控制參數(Initial Control Parameter)
  - $t_c \in R^1$: torus 第一次碰撞到中心桿的時間點
  - $v_{y_0} \in R^1$: torus 初始y分量速度
  - $v_{x_0}, v_{z_0} \in R^1$: torus 初始x,z 分量速度
- 修正型控制參數(Feedback Control Parameter)
  - $w_0 \in R^3$

由於將w_0設為一random的初始值，

初始型控制參數將會變為等自由度的函數對應關係

如果先決定t_c ，w_0已知，$v_{y_0}, v_{x_0}, v_{z_0}$唯一。

如果先決定v_{y_0} ，w_0已知，t_c, v_{x_0}, v_{z_0}唯一。

如果先決定v_{x_0} ，w_0已知，t_c, v_{y_0}, v_{z_0}唯一。

如果先決定v_{z_0} ，w_0已知，t_c, v_{x_0}, v_{y_0}唯一。

簡化2

經過實驗後我們認為t_c, v_{y_0}是影響較多的控制參數

而我們選擇將本次實驗放在v_{y_0}做討論

簡化3

t_c是torus 和桿子第一次碰撞發生的時間點

但由於我們使用Bullet物理引擎，無法得知內部的碰撞偵測(Collision Detection)演算法如$AABB\ \ algorithm$

定義t_{hit}為以torus 質量中心以v_{y_0}，初位置為user設定$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$，末位置為$X_{hit}$為桿子(rod)中心點，根據牛頓運動方程式所計算出來的時間。將以v_{y_0}求取t_{hit}。

角速度修正

經過以上討論後，將先決定v_{y_0}，w_0為一random的初始值，$\|w_0\| = 1$

求取t_{hit}後，求得v_{x_0}, v_{z_0}。

經過模擬後，實際發生碰撞時間點為t_c，以當時的朝向$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$作為偏移量

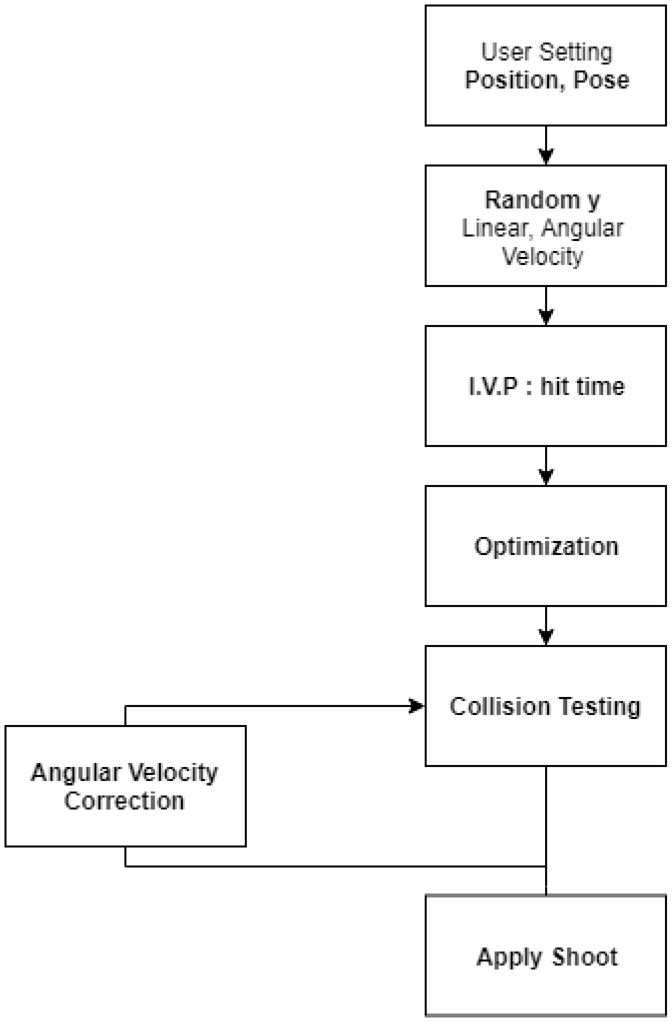
修正w_0使得torus 在 t_c時朝向$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$(因為這樣的朝向正好是torus 平行於桿子(rod)且能穿進桿子的朝向)

Decision Strategy

經過以上討論後，將先決定v_{y_0}，w_0為一random的初始值，$\|w_0\| = 1$

求取t_{hit}後，再次以由求得v_{x_0}, v_{z_0}，並做最佳化$t^*_{hit}, v^*_{y_0}, v^*_{x_0}, v^*_{z_0}$。

以下為決策策略(Decision Strategy)



Nonlinear Inequality Optimization

Goal

Find $t_{hit}^*, v_{y_0}^*, v_{x_0}^*, v_{z_0}^*$

Design Objective Function

我們觀察到

- v_{y_0}越大越容易進，但變動量越大，越容易發生碰撞，即t_c越小
- $v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}$越不平均，越容易發生碰撞，即$t_c$越小

因此為了讓速度分量平均，與v_{y_0}盡可能增大

定義

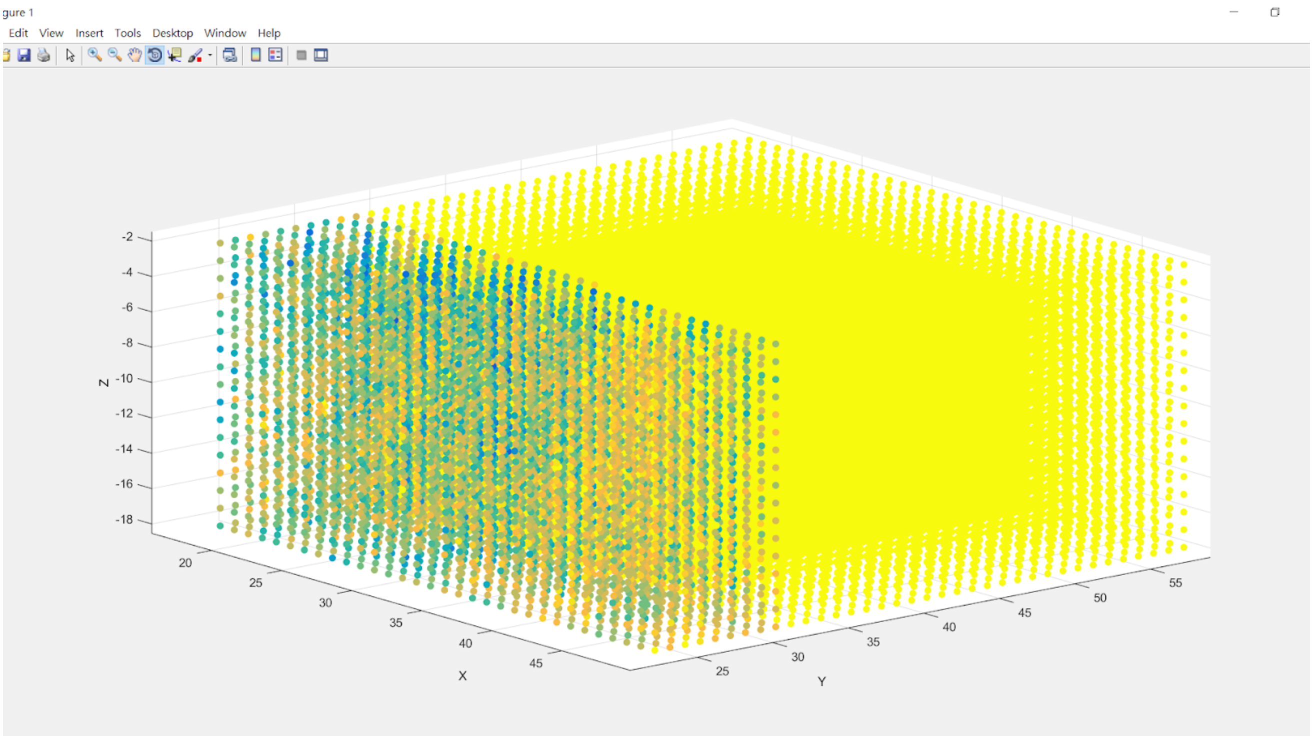
$min \;\; f(v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}) = v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 + v_{z_0}^2$

$subject \;\; to$

$g1 : t_{hit} \leq c, c \geq 0$

$g2 : v_{y_0} \geq 0$

Result



此圖為torus初始設定位置下，

2D 空間 長方柱區塊，中固定z水平量任意位置$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$取4個隨機(random)朝向$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

我們發現當收斂次數設定到15 以上，將幾乎都能投進桿子

當y很大的時候，命中率都能越來越高，到100%

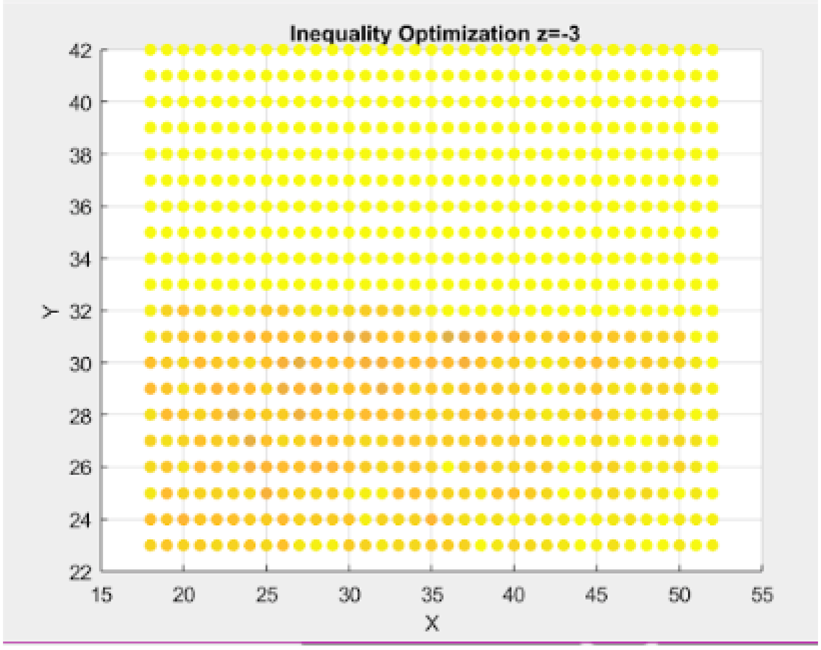
但當y很低的時候，命中率將大大的下降，而且資料分布也很隨機，代表objective function 設計仍有很大的缺陷

Exhaustive method

我們將Exhaustive method與Nonlinear Inequality Optimization 做比較

Nonlinear Inequality Optimization末段討論所提的，在y很低的時候，做最佳化幾乎看不出有甚麼好處

也沒有呈現出固定哪個區域會特別難以命中，這部分可能是objective function 設計缺陷與資料分析上不夠完整，沒有找出一個比較好的解釋。



Run time

將Exhaustive method與Nonlinear Inequality Optimization 做比較

時間至少差了五倍以上，可見在特定的區域間做最佳化效果是顯著的

	Nonlinear Inequality Optimization	Exhaustive method
Avg. times (22400 samples)	32.9 ms	198.6 ms
Worst case	624 ms	3642 ms

Discussion

Advance 2 -- Torus Throwing

在做Nonlinear Inequality Optimization的時候

我們做了三個簡化和角速度修正，而這些其實都造成缺陷

- 簡化1

  定義 不會發生碰撞(Collision) 就能達到 $goal\ \ state\ \ X_{goal}$的Simulation Function $S_c = S(X,u)$

  並以這個函數去取代原來$simulation\ \ function\ \ S(C(X,t),x)$的討論

- 缺陷: 如果我們無法將碰撞(Collision)納入考慮，將會損失很多可行解
- 簡化2

  先決定v_{y_0}，再計算t_{hit}

- 缺陷: 我們無法保證在這樣的策略上對於角速度w_0的修正是否有幫助
- 簡化3

  使用t_{hit}去讓torus 模擬一遍，算出真正的碰撞時間t_c

- 缺陷: 使用t_{hit}是為了好計算，但如果能使用t_c來做最佳化的參數或許才能極大化最佳化的影響力

  因為要避免碰撞發生的去讓torus 穿入桿子

- 角速度修正

  使用t_c的朝向$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$修正$w_0$

- 缺陷: 我們無法保證這樣的修正會不會造成在t_c附近的時間點又發生碰撞

  因為角速度一改變，整個剛體的運動過程將完全改變

Conclusion

Result 2 --- Torus Throwing

我們設計出一套Rigid Body Backward Simulation 的方法

儘管命中率在特定區域表現不佳，但這個方法相較Exhaustive method(窮舉法)快速很多

而且在y 為桿子(rod) 接近兩倍高的區域，都能100%命中

What we Learn from this Project

- Define Problem

我們學會從數學的角度定義一個抽象問題，定義出能控制的參數。

- Objective Function Design

  從觀察每一次的模擬，一步步想出適合目標函數(objective function)跟適合的限制式(inequality)

- Rigid Body Simulation

  儘管Bullet 已經幫助我們處理好碰撞(Collision)和剛體(Rigid Body)的轉動慣量等資訊，

  仍需要學會從線動量配合轉動量(Rotation)思考如何達到末位置的姿態