אימי רוי פרוי

ממ"ן 12

שאלה 1

א. בקבוצה $P(\{11,22,33,44\})$ נתונים שני יחסים R,S המוגדרים כך: לכל $A,B\in P(\{11,22,33,44\})$ ARB אם ורק אם $A\cup\{11,22\}=B\cup\{11,22\}$
ו ASB אם ורק אם $A\cup\{11,22\}\subset B\cup\{11,22\}$

ב. נראה שאחד מהיחסים הוא יחס שקילות ונמצא את מחלקות השקילות שלו

נסמן $D=P(\{11,22,33,44\})$

נתבונן ב R.

* נוכיח ש R רפלקסיבי: (כלומר: לכל $x\in D$ מתקיים xRx)

לכל $x\in D$ מתקיים $x\cup\{11,22\}=x\cup\{11,22\}$

ולכן xRx

$\Leftarrow$ R רפלקסיבי

* נוכיח ש R סימטרי (כלומר: לכל $x,y\in D$ שמקיימים xRy מתקיים גם yRx)

לכל $x,y\in D$ שמקיימים xRy

מתקיים $x\cup\{11,22\}=y\cup\{11,22\}$

ולכן $y\cup\{11,22\}=x\cup\{11,22\}$

ומכאן yRx

$\Leftarrow$ R סימטרי

* נוכיח ש R טרנזיטיבי: (כלומר לכל $x,y,z\in D$ שמקיימים xRy ו yRz מתקיים xRz)

נקח $x,y,z\in D$ שמקיימים xRy ו yRz

אז $y\cup\{11,22\}=z\cup\{11,22\}$ וגם $x\cup\{11,22\}=y\cup\{11,22\}$

לכן $x\cup\{11,22\}=z\cup\{11,22\}$ ומכאן xRz

⇐ R טרנזיטיבי

R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן R יחס שקילות

לאחר שהוכחנו כי R יחס שקילות נמצא את מחלקותיו:

* מחלקת השקילות של $\emptyset$: $\{y\in D \mid \emptyset R y\} = \{y\in D \mid \emptyset\cup\{1,2\} = y\cup\{1,2\}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

* מחלקת השקילות של $\{3\}$: $\{y\in D \mid \{3\} R y\} = \{y\in D \mid \{3\}\cup\{1,2\} = y\cup\{1,2\}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y\in D \mid y\cup\{1,2\} = \{1,2,3\}\} = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

* מחלקת השקילות של $\{4\}$: $\{y\in D \mid \{4\} R y\} = \{y\in D \mid \{4\}\cup\{1,2\} = y\cup\{1,2\}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y\in D \mid \{1,2,4\} = y\cup\{1,2\}\} = \{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$

* מחלקת השקילות של $\{3,4\}$: $\{y\in D \mid \{3,4\} R y\} = \{y\in D \mid \{3,4\}\cup\{1,2\} = y\cup\{1,2\}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y\in D \mid \{1,2,3,4\} = y\cup\{1,2\}\} = \{\{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

קיבלנו חלוקה של D ולכן אלו כל מחלקות השקילות של R

ב. נראה שאחד היחסים הוא יחס סדר. ניגש אחד מהם סדר חלקי או מלא

ונוכיח את התכונות הנדרשות כדי להיות יחס סדר זה.

נתבונן ביחס S

* נוכיח ש-S אנטי רפלקסיבי: (צ"ל לכל $x\in D$ $x \not S x$)

לכל $x\in D$ מתקיים: $x\cup\{1,2\}\not\subset x\cup\{1,2\}$

$\Leftarrow x\not S x \Leftarrow$ S אנטי רפלקסיבי

* נוכיח ש-S טרנזיטיבי: (צ"ל $x,y,z\in D$ שמקיימים ySz וגם xSy מתקיים xSz)

לכל $x,y,z\in D$ המקיימים ySz ו-xSy

מתקיים $y\cup\{1,2\}\subset z\cup\{1,2\}$ וגם $x\cup\{1,2\}\subset y\cup\{1,2\}$

ולכן $x\cup\{1,2\}\subset z\cup\{1,2\} \Rightarrow xSz$ ולכן S טרנזיטיבי

הוכחנו ש-S אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי ולכן S יחס סדר חלקי

ג. R אינו יחס סדר מלא, מאחר שאינו משווה

לדוגמא: $\{1,2\}, \{4\}$

$\{4\} \not\subseteq \{1,2\}$ כי $\{4\}\cup\{1\} \not\subseteq \{1,2\}\cup\{1\}$

$\{1,2\} \not\subseteq \{4\}$ כי $\{1,2\}\cup\{1\} \not\subseteq \{4\}\cup\{1\}$

<u>איברים מינימליים:</u>

$\emptyset, \{1,2\}, \{4\}, \{2\}$

<u>איברים מקסימליים:</u>

$\{1,2,3,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$

שאלה 2

א. על הקבוצה $A=R\times R$ מגדירים יחס R כך: $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle$ מתקיים $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ אם ורק אם $x_1+y_1=x_2+y_2=1$ או $(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)>0$

הוכיחו ש-R יחס שקילות ומצאו את מספר מחלקות השקילות שלו, תארו אותן במישור.

* R <u>רפלקסיבי</u>: (צ"ל: לכל $\langle x,y\rangle\in A$ מתקיים: $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$)

נקח $\langle x,y\rangle\in A$ נפריד למקרים

<u>מקרה א':</u> אם $x+y=1$ אז מתקיים $x+y=x+y=1$

ולכן $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

<u>מקרה ב':</u> $x+y\neq 1$ אז $(x+y-1)(x+y-1)>0$

ולכן $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

בכל מקרה קיבלנו ש $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

$\Leftarrow$ R רפלקסיבי

* R סימטרי: (צ"ל: לכל $a,b\in A$ מתקיים אם aRb אז bRa)

נקח $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle$ המקיימים $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$

נבחין בין מקרים:

מקרה א: $(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)>0$

מכך ש $(x_2+y_2-1)(x_1+y_1-1)=(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)$

נובע ש $(x_2+y_2-1)(x_1+y_1-1)>0$ ולפי הגדרת R נובע ש $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_1,y_1\rangle$

מקרה ב: $x_1+y_1=x_2+y_2=1$, במקרה כזה $x_2+y_2=x_1+y_1=1$

ולפי הגדרת R נובע כי $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_1,y_1\rangle$

בכל מקרה קיבלנו ש $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_1,y_1\rangle$, ולכן R סימטרי

* R טרנזיטיבי: (צ"ל: לכל $a,b,c\in A$ מתקיים אם aRb וגם bRc אז aRc)

נקח $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\langle x_3,y_3\rangle\in A$

המקיימים $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ וגם $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$

נבחין בין 2 מקרים

מקרה א: $x_1+y_1=1$

מכך ש $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$

נובע ש $x_2+y_2=1$

מכך ש $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$

נובע ש $x_3+y_3=1$

מהגדרת R נובע ש $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$

מקרה ב: $x_1+y_1\neq 1$

מכך ש $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ נובע ש $x_2+y_2\neq 1$

ולכן $0<(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)$

ולכן המספרים x_1+y_1-1 ו x_2+y_2-1 הם מאותו סימן

באופן דומה מכך ש $x_2+y_2\neq 1$ וגם $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$

נובע ש $(x_2+y_2-1)(x_3+y_3-1)>0$

ומכאן המספרים x_2+y_2-1 ו x_3+y_3-1 הם מאותו סימן.

לכן קיבלנו שהמספרים x_2+y_2-1 ו- x_1+y_1-1 באותו סימן

והמספרים x_3+y_3-1 ו- x_2+y_2-1 גם באותו סימן

מכאן נובע שהמספרים x_1+y_1-1 ו- x_3+y_3-1 גם באותו סימן

ולכן $(x_1+y_1-1)(x_3+y_3-1)>0$

מהגדרת היחס R נובע ש $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$

לסיכום בכל מקרה מתקיים ש $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$

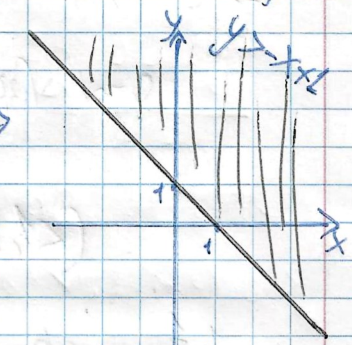
לכן R טרנזיטיבי

מכאן שR רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי נובע שR הוא <u>יחס שקילות</u>

נמצא את מחלקות השקילות של R

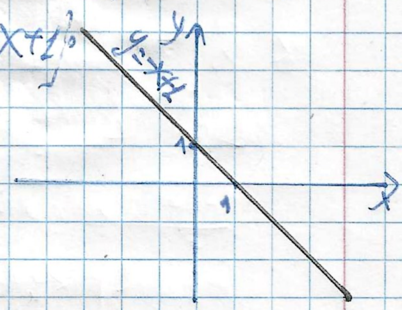
* נמצא את מחלקת השקילות של $\langle 2,0\rangle$

$$\{\langle x,y\rangle\in A \mid \langle 2,0\rangle R\langle x,y\rangle\}=\{\langle x,y\rangle\in A \mid (2-1)(x+y-1)>0\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{\langle x,y\rangle\in A \mid x+y-1>0\}=\{\langle x,y\rangle\in A \mid y>-x+1\}\Rightarrow$$



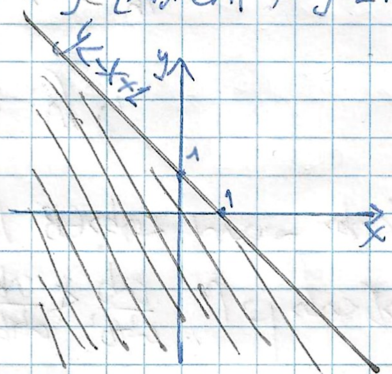
* נמצא את מחלקת השקילות של $\langle 1,0\rangle$:

$$\{\langle x,y\rangle\in A \mid \langle 1,0\rangle R\langle x,y\rangle\}=\{\langle x,y\rangle\in A \mid (1+0)=x+y\}=\{\langle x,y\rangle\in A \mid y=-x+1\}$$



* נמצא את מחלקת השקילות של $\langle 0,0\rangle$:

$$\{\langle x,y\rangle\in A \mid \langle 0,0\rangle R\langle x,y\rangle\}=\{\langle x,y\rangle\in A \mid (0+0-1)(x+y-1)>0\}=\{\langle x,y\rangle\in A \mid -x-y+1>0\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{\langle x,y\rangle\in A \mid y<-x+1\}$$



אוסף שלוש מחלקות השקילות שמצאנו מהווה חלוקה של A ולכן אלה הן כל מחלקות השקילות של R.

ג. יהי $B=(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ מגדירים יחס S כך:

לכל $\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in B$, $\langle a,b\rangle S\langle c,d\rangle$ אם ורק אם $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$

1. הוכיחו שלכל שני מספרים שונים a,b מתקיים $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ ושלכל n מספר טבעי כך ש $\frac{1}{n}<\frac{ab}{a^2+b^2}$ א"ם $\langle 1,\frac{1}{n}\rangle S\langle a,b\rangle$

לפי הגדרת היחס S $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$:

מכאן: $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{a^2}{a^2+a^2}$

נניח בשלילה ש $\langle a,b\rangle \not S\langle a,a\rangle$ אזי:

$$\frac{ab}{a^2+b^2}\nless\frac{a^2}{2a^2}\Rightarrow\frac{ab}{a^2+b^2}\nless\frac{1}{2}\Rightarrow ab\nless\frac{a^2+b^2}{2}\Rightarrow 2ab\nless\frac{2(a^2+b^2)}{2}\Rightarrow a^2+b^2-2ab\nless 0$$

$$\Rightarrow(a-b)^2\nless 0$$

הגענו לסתירה שכן ריבוע של חיסור כל שני מספרים שונים תמיד יהיה שונה מ-0 תמיד גדול מ-0

ולכן ניתן להגיע שהיחס $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ מתקיים

נראה שלכל $n\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{n}<\frac{ab}{a^2+b^2}$ (צ"ל: $\langle 1,\frac{1}{n}\rangle S\langle a,b\rangle$)

$$\frac{1\cdot\frac{1}{n}}{1^2+(\frac{1}{n})^2}<\frac{ab}{a^2+b^2}\Rightarrow\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}<\frac{ab}{a^2+b^2}\Rightarrow\frac{1}{n}<\frac{ab+\frac{ab}{n^2}}{a^2+b^2}$$

$$a,b>0 \Downarrow \frac{ab}{n^2}>0$$

$$\frac{ab+\frac{ab}{n^2}}{a^2+b^2}>\frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{ab}{a^2+b^2}>\frac{1}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle 1,\frac{1}{n}\rangle S\langle a,b\rangle \Leftarrow \frac{ab+\frac{ab}{n^2}}{a^2+b^2}>\frac{1}{n}$$

2. הוכיחו ש-S הוא יחס סדר חלקי

* S אנטי רפלקסיבי: (צ"ל: לכל $\langle a,b\rangle\in B$ מתקיים $\langle a,b\rangle\not S\langle a,b\rangle$)

לכל $\langle a,b\rangle\in B$ מתקיים $\frac{ab}{a^2+b^2}\nless\frac{ab}{a^2+b^2}$ ולכן $\langle a,b\rangle\not S\langle a,b\rangle$

$\forall$ <u>S טרנזיטיבי</u>: נניח: לכל $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\in B$ המקיימים $\langle c,d\rangle S\langle e,f\rangle$

וגם $\langle a,b\rangle S\langle c,d\rangle$ מתקיים גם $\langle a,b\rangle S\langle e,f\rangle$

לכל $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\in B$ המקיימים

$\langle c,d\rangle S\langle e,f\rangle$ וגם $\langle a,b\rangle S\langle c,d\rangle$

מתקיים $\frac{cd}{c^2+d^2}<\frac{ef}{e^2+f^2}$ וגם $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$

$\Leftarrow \frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{ef}{e^2+f^2}$

ולכן $\langle a,b\rangle S\langle e,f\rangle$

ולכן S טרנזיטיבי

S טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי ולכן S יחס סדר חלקי

3. מצאו את כל האיברים המינימליים והמקסימליים ב-B לגבי הסדר S

לכל איבר $\langle a,b\rangle$ $\langle b,a\rangle$ $a<b$ מתקיים:

$\frac{a2b}{a^2+(2b)^2} \Rightarrow \frac{2ab}{a^2+4b^2} \nless \frac{ab}{a^2+b^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a \nless \frac{ab(a^2+4b^2)}{a^2+b^2} \Rightarrow 2ab(a^2+b^2) \nless ab(a^2+4b^2) \Rightarrow 2a^3b+2ab^3 \nless a^3b+4ab^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3b \nless 2ab^3 \Rightarrow a^2<2b^2$

ולדוגמא נבחר זוג $b<a$ כאשר מתחת $\langle b,a\rangle$ ו $\langle 2a,b\rangle$

<u>ולכן אין איברים מינימליים</u>

כי שמצאנו בסעיף 1. $\langle a,a\rangle S\langle a,b\rangle$ מתקיים ולכן <u>$\langle a,a\rangle$</u> הם האיברים

המקסימליים כאשר $a\in A$

מטלה 3

נתונה פונקציה $f:N\to N$

3. הוכיחו ש-f היא חח"ע אם ורק אם לכל שתי הקבוצות שונות $A,B\subseteq N$ מתקיים $f[A]\neq f[B]$

נניח כי f חח"ע

נוכיח שלכל $A,B\subseteq N$ המקיימים $A\neq B$ מתקיים ($f[A]\neq f[B]$)

נקח $A,B\subseteq N$ המקיימות $A\neq B$

I

נניח בשלילה $f[A]=f[B]$

1 לפי משפט $f^{-1}(f[A])=f^{-1}(f[B])$

מכיוון ש f חח"ע

נקבל ש

2 $f^{-1}(f[A])=A,\ f^{-1}(f[B])=B$

מ-1 ו-2 נקבל ש $A=B$ אך זו סתירה להנחתנו:

$A\neq B$

לכן $f[A]\neq f[B]$

משל I

II נניח כי לכל $A,B\subseteq N$ $A\neq B$ מתקיים $f[A]\neq f[B]$

(נוכיח כי f חח"ע).

נניח בשלילה שf איננה חח"ע:

אז קיימים $x_1,x_2\in N$ ($x_1\neq x_2$) כך ש $y=f(x_1)=f(x_2)$

נסמן $A=\{x_1\}$; $B=\{x_1,x_2\}$

צ"ל: כי הקבוצות סופיות, להוכיח גם עבור הקבוצות אינסופיות

אז $A\subset B$ ולכן $f[A]=\{y\}=f[B]$

כלומר $f[A]=f[B]$ בסתירה להנחה ש מתקיים שלכל $f[A]\neq f[B]$

לכן f היא חח"ע

מש"ל II

ג. הוכיחו ש-f היא על אם ורק אם לכל שתי קבוצות אינסופיות שונות $A,B\subseteq N$ מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$

הוכחה (I) נניח כי f היא על (נוכיח כי לכל $A,B\subseteq N$ שונות מתקיים $A\neq B$ מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$)

נקח $A,B\subseteq N$ $A\neq B$

נניח בשלילה ש $f^{-1}[A]=f^{-1}[B]$ אז $f(f^{-1}[A])=f(f^{-1}[B])$ (א)

מכיוון שf היא על (לפי משפט 3.8) ש $f(f^{-1}[A])=A$, $f(f^{-1}[B])=B$ (ב)

מא' וב' נובע ש $A=B$, בסתירה לכך ש $A\neq B$

קיבלנו סתירה להנחה ולכן $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$ מש"ל I

II נניח שלכל $A,B\subseteq N$ כך ש $A\neq B$ מתקיים $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$ (צ"ל: f על)

נקח $y\in N$ (צ"ל) קיים $x\in N$ כך ש $f(x)=y$)

נסמן: $B=N$ $A=N/\{y\}$

אז $A\neq B$ ולכן מההנחה $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$

כמו כן $f^{-1}[N/\{y\}]\subset f^{-1}[N]$

לכן קיים $x\in N$ כך ש $\underbrace{x\in f^{-1}[N]}_{f(x)\in N}$ אבל $\underbrace{x\notin f^{-1}[N\setminus\{y\}]}_{f(x)\notin N\setminus\{y\}}$

$\Leftarrow$ קיים $x\in N$ כך ש $f(x)\in N$ אבל $f(x)\notin N\setminus\{y\}$

$\Leftarrow$ $f(x)\in\{y\}$ $\Leftarrow$ $f(x)=y$

מצאנו קיים $x\in N$ כך ש $f(x)=y$, ולכן f על

מש"ל II

שאלה 4

א. נסמן $Z^*=Z\setminus\{0\}$

נגדיר $f:Q\times Z^*\to Q\times Z^*$ המוגדרת כך: לכל $q\in Q$:

$f(\langle q,n\rangle)=\langle \frac{q}{n},n\rangle, n\in Z^*$

1. הוכיחו ש f היא חד חד ערכית ועל.

* נראה ש f חח"ע: יהיו $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in Q\times Z^*$

שמקיימים $f(\langle x_1,y_1\rangle)=f(\langle x_2,y_2\rangle)$

שנוכיח $\langle x_1,y_1\rangle=\langle x_2,y_2\rangle$

יהיו $\langle q_1,n_1\rangle,\langle q_2,n_2\rangle\in Q\times Z^*$ כך ש $f(\langle q_1,n_1\rangle)=f(\langle q_2,n_2\rangle)$

$f(\langle q_1,n_1\rangle)=f(\langle q_2,n_2\rangle)\Rightarrow\langle\frac{q_1}{n_1},n_1\rangle=\langle\frac{q_2}{n_2},n_2\rangle$ $n\neq 0$

לכן כשמצמצם

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{q_1}{n_1}=\frac{q_2}{n_2}\\ n_1=n_2\end{cases}\Rightarrow\frac{q_1}{n_1}=\frac{q_2}{n_1}\Rightarrow\begin{cases}q_1=q_2\\ n_1=n_2\end{cases}$$

מכאן נובע ש $\langle q_1,n_1\rangle=\langle q_2,n_2\rangle$ $\Leftarrow$ f חח"ע

* נוכיח ש f היא על: יהי $\langle q,n\rangle\in Q\times Z^*$, קיים $\langle x,y\rangle\in Q\times Z^*$ כך ש $f(\langle x,y\rangle)=\langle q,n\rangle$

הוכחה:

$f(\langle x,y\rangle)=\langle q,n\rangle\Rightarrow\langle\frac{x}{y},y\rangle=\langle q,n\rangle$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}=q\\ y=n\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{n}=q\Rightarrow\begin{cases}x=nq\\ y=n\end{cases}$$

נקח $\langle q,n\rangle \in Q\times Z^*$ ונראה שקיים $\langle x,y\rangle \in Q\times Z^*$ כך ש
$(f(\langle x,y\rangle)=\langle q,n\rangle$

נסמן $x=qn$ $\quad y=n$

נראה ש $f(\langle x,y\rangle)=\langle q,n\rangle$

$$f(\langle x,y\rangle)=\langle \frac{x}{y},y\rangle=\langle \frac{qn}{n},n\rangle=\langle q,n\rangle$$

לכן f היא על.

הוכחנו כי f חח"ע ועל ולכן f הפיכה.

2. מציאת את f^{-1}:

מכיוון שהוכחנו כי f חח"ע ועל ובנוסף כי f הפיכה לכן יש ל f^{-1}

$f^{-1}: Q\times Z^* \to Q\times Z^*$

<u>מציאת</u> f^{-1}: לפי ההוכחות ב f ניתן לה

$$f(\langle x,y\rangle)=\langle q,n\rangle \Leftrightarrow f^{-1}(\langle q,n\rangle)=\langle \underset{qn}{x},\underset{n}{y}\rangle$$

לכן

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}: Q\times Z^* \to Q\times Z^* \\ f^{-1}(\langle q,n\rangle)=\langle qn,n\rangle \end{array}}$$

ג. הפונקציות מוגדרות $g,h: Z\times Z \to Z\times Z$ המוגדרות כך: $\langle x,y\rangle \in Z\times Z$,

$h(\langle x,y\rangle)=\langle x+3y,x+5y\rangle \quad , g(\langle x,y\rangle)=\langle 2x+3y,3x+5y\rangle$

<u>חח"ע</u>

$$h(\overset{x+3y,\ x+5y}{\langle x,y\rangle})=\langle z,w\rangle \Rightarrow \langle x+3y,x+5y\rangle=\langle z,w\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3y=z \\ x+5y=w \end{cases} \to 2y=w-z \quad y=\frac{w-z}{2}$$

$$x+\frac{3(w-z)}{2}=z \quad x=\frac{2z}{2}-\frac{3w-3z}{2}=5z-3w$$

$$\begin{cases} x=5z-3w \\ y=\frac{w-z}{2} \end{cases} \quad \langle 5z-3w,\frac{w-z}{2}$$

$h: Z\times Z \to Z\times Z$

נראה ונוכיח $h:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$h(\langle x,y\rangle)=\langle x+3y,\,x+5y\rangle$$

נוכיח ש h אינה על. (כלומר, קיים $\langle z,w\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך שלכל $\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ מתקיים $h(\langle x,y\rangle)\neq\langle z,w\rangle$)

נוכיח שלא קיים $\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש $h(\langle x,y\rangle)=\langle 1,2\rangle$

נניח בשלילה שקיים $\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש $h(\langle x,y\rangle)=\langle 1,2\rangle$

אז $\langle x+3y,\,x+5y\rangle=\langle 1,2\rangle$

$\Leftarrow$ נחסר $\begin{cases}x+3y=1\\x+5y=2\end{cases}\Rightarrow 2y=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$ בסתירה לכך ש y הוא מספר שלם ($y\in\mathbb{Z}$)

קיבלנו סתירה להנחה, ולכן לא קיים $\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש $h(\langle x,y\rangle)=\langle 1,2\rangle$

$\Leftarrow$ h אינה על

$\Leftarrow$ h אינה פונקציה הפיכה

נתבונן ב $g:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

טיוטה:

$$g(\langle \overset{2x+3y}{x},\overset{3x+5y}{y}\rangle)=\langle z,w\rangle\Rightarrow\langle 2x+3y,\,3x+5y\rangle=\langle z,w\rangle\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+3y=z\\3x+5y=w\end{cases}\Rightarrow x+2y=w-z\Rightarrow x=w-z-2y\Rightarrow 2(w-z-2y)+3y=z$$

$$\Rightarrow 2w-2z-4y+3y=z$$

$$\Rightarrow 2w-3z=y$$

$$y=2w-3z$$

$$2x+3(2w-3z)=z$$

$$\Rightarrow 2x+6w-9z=z$$

$$\Rightarrow 2x=10z-6w \quad {}^{1/2}$$

$$\Rightarrow x=5z-3w$$

מוכחת

* נוכיח ש g חח"ע:

1:1) לכל $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

אם נתון ש $g(\langle x_1,y_1\rangle)=g(\langle x_2,y_2\rangle)$

אז נובע ש $\langle x_1,y_1\rangle=\langle x_2,y_2\rangle$

נקח $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש $g(\langle x_1,y_1\rangle)=g(\langle x_2,y_2\rangle)$

מכאן נובע: $\langle 2x_1+3y_1,3x_1+5y_1\rangle=\langle 2x_2+3y_2,3x_2+5y_2\rangle$

$$\begin{cases} \mathrm{I} & 2x_1+3y_1=2x_2+3y_2 \\ \mathrm{II} & 3x_1+5y_1=3x_2+5y_2 \end{cases}$$

$$\mathrm{II}-\mathrm{I}:\ x_1+2y_1=x_2+2y_2 \Rightarrow x_1=x_2+2y_2-2y_1\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}\Rightarrow 2(x_2+2y_2-2y_1)+3y_1=2x_2+3y_2\Rightarrow 2x_2+4y_2-4y_1+3y_1=2x_2+3y_2=$$

$$\Rightarrow \underline{y_2=y_1} \xRightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}} x_1+2y_1=x_2+2y_1\Rightarrow \underline{x_1=x_2}$$

מכאן נובע ש $\langle x_1,y_1\rangle=\langle x_2,y_2\rangle$

$\Leftarrow$ g חח"ע

נוכיח ש g על: לכל $\langle z,w\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ קיים $\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ שמקיים

$(g(\langle x,y\rangle)=\langle z,w\rangle$

נסמן $x=5z-3w$ $y=2w-3z$

נוכיח ש $g(\langle x,y\rangle)=\langle z,w\rangle$

$$g(\langle x,y\rangle)=\langle 2(5z-3w)+3(2w-3z),3(5z-3w)+5(2w-3z)\rangle\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\langle 10z\overbrace{-6w+6w}^{0}-9z,15z\overbrace{-9w+10w}^{1}-15z\rangle=\langle z,w\rangle$$

לכן g הינה על

$\Leftarrow$ לפי הגדרה g על וחח"ע לכן g הפיכה

מציאת g^{-1}: לפי הגדרה g על

$$g(\langle x,y\rangle)=\langle z,w\rangle\Leftrightarrow g^{-1}(\langle z,w\rangle)=\langle \underset{5z-3w}{x},\underset{2w-3z}{y}\rangle$$

$$\boxed{\begin{array}{c} g^{-1}:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ g(\langle z,w\rangle)=\langle 5z-3w,2w-3z\rangle \end{array}}$$